Universidade Federal do Rio de Janeiro

A GEOMETRIA DOS CONJUNTOS NODAIS

Eduardo Silva Ferreira

2009

A GEOMETRIA DOS CONJUNTOS NODAIS

Eduardo Silva Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Nedir do Espirito Santo

Rio de Janeiro
Fevereiro/2009

A Geometria dos Conjuntos Nodais

Eduardo Silva Ferreira

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Ciências. Área de atuação: Matemática Pura.

Aprovada por:

Dra. Nedir do Espírito Santo (Orientadora) - UFRJ

Dra. Susana Candida Fornari - UFMG

Dra. Walcy Santos - UFRJ

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2009

RESUMO

A GEOMETRIA DOS CONJUNTOS NODAIS

Eduardo Silva Ferreira

Orientadora: Nedir do Espírito Santo

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Matemática.

O objetivo deste trabalho é descrever um pouco a Geometria dos Conjuntos Nodais de autofunções do operador de Laplace em variedades Riemannianas. Abordamos com detalhes alguns dos resultados sobre o tema, provados em [8], base de nosso trabalho. Para tal estudamos variedades Riemannianas e o operador de Laplace no espaço de funções diferenciáveis definidas em variedades Riemannianas. Apresentamos o teorema principal de [8] o qual afirma que o conjunto nodal de uma autofunção em uma variedade Riemanniana de dimensão n é uma variedade diferenciável, a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que n-1. Também neste trabalho, apresentamos alguns resultados sobre as Linhas Nodais, isto é, Conjuntos Nodais de autofunções definidas numa variedade Riemanniana de dimensão 2 e o conhecido Teorema do Domínio Nodal de Courant contidos em [8].
Palavras-chave: Riemanniana, Laplace, Nodal, Courant.

Rio de Janeiro

Fevereiro 2009

ABSTRACT

THE GEOMETRY OF THE NODAL SETS

Eduardo Silva Ferreira

Orientadora: Nedir do Espírito Santo

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Matemática.

The purpose of this work is to describe some results about the Geometry of the Nodal Sets of eigenfunctions of the Laplacian operator in Riemannian manifolds. We approach with details some of the results on the subject, proven in [8], support of our work. For such we study Riemannian manifolds and the Laplacian operator in the space of differential functions on a Riemannian manifolds. We present the main theorem of [8] which states that the nodal set of an eigenfunction on a Riemannian manifold of dimension n is a differential manifold, except on a closed set of dimension less than n-1. Also, in this work, we present some results on the Nodal Lines, namely, Nodal Sets of eigenfunctions on a Riemannian manifold of dimension two and the known Courant's Nodal Domain Theorem, contained in [8].
Key-words: Laplacian, Nodal, Riemannian, Manifold.

Rio de Janeiro
Fevereiro 2009

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo colocar em detalhes os resultados do artigo *Eigenfunctions and Nodal Sets* de Shiu-Yuen Cheng em 1976, o qual estuda os conjuntos nodais de autofunções do Laplaciano definidas em variedades Riemannianas. Nos propomos assim a tornar a leitura destes resultados menos trabalhosa para um aluno de mestrado. A divisão do trabalho passa a ser descrita nos parágrafos seguintes.

O primeiro capítulo apresenta o ambiente no qual trabalharemos, mais precisamente, variedades Riemannianas. Além disso, enunciamos alguns resultados sobre variedades diferenciáveis e propriedades relativas ao ambiente $\mathbb{R}^n$ necessárias no decorrer do desenvolvimento da teoria.

O segundo capítulo faz um estudo do Laplaciano. Neste o principal resultado é o teorema 2.3.1, o qual é uma espécie de Teorema Espectral para o operador Laplaciano. Na primeira seção apresentamos a forma local do gradiente, divergente e do próprio Laplaciano e, na segunda seção, as fórmulas de Green.

O terceiro capítulo é o central do trabalho, nele estudamos finalmente os conjuntos nodais. Na primeira seção mostramos uma propriedade local destes, a saber que eles constituem uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$. A segunda seção aborda uma consequência imediata da propriedade anterior, o Teorema do Domínio Nodal de Courant, o qual coloca uma limitação na quantidade de componentes conexas da variedade Riemanniana sem o conjunto nodal. A terceira e última seção mescla resultados da geometria das linhas nodais (conjuntos nodais quando a dimensão de M é dois).

Capítulo 1

Alguns requisitos necessários

1.1 Uma breve introdução à Geometria Riemanniana

Antes de enunciarmos o que vem a ser uma variedade Riemanniana, definiremos variedade diferenciável e métrica Riemanniana.

Definição 1.1.1. *Seja M um espaço topológico, uma carta local de M é um homeomorfismo $\phi : A \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ onde A é um aberto de M.*

Um atlas para M é um conjunto $\Phi = \{(\phi_i, A_i);\ \ i \in \Gamma\}$ de cartas locais de M tal que $M \subseteq \bigcup_{i\in\Gamma} A_i$. Dizemos que o atlas é de classe C^k, $\ 0 \leq k \leq \infty$ quando para quaisquer duas cartas ϕ_i e ϕ_j com $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ temos $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ é de classe C^k. Um atlas é dito maximal quando contém todas as cartas locais possíveis para M.

Uma variedade diferenciável de classe C^k, $\ 0 \leq k \leq \infty$ é um espaço topológico munido de um atlas maximal Φ de classe C^k. Quando o atlas for C^k para todo k, dizemos que M é C^∞. Dizemos que n é a dimensão da variedade diferenciável.

Definição 1.1.2. *Dizemos que uma carta $\phi : A \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ é de bordo quando $\phi(A)$ é um aberto de algum semi-espaço $\{x \in \mathbb{R}^n; L(x) \geq 0 \ \ ou \ \ L(x) \leq 0\}$ e não é um aberto do $\mathbb{R}^n$ onde L é um funcional linear. Um ponto $p \in M$ é dito de bordo quando $L \circ \phi(x) = 0$ para o funcional linear L descrito acima. O conjunto dos pontos de bordo de M denotamos ∂M.*

Observação 1.1.1. *I. Analogamente ao feito para variedades diferenciáveis podemos obter um atlas maximal contendo as cartas locais e cartas de bordo e definirmos uma* *variedade diferenciável de dimensão n com bordo.*

II. Trabalharemos com variedades orientáveis.

III. Denotaremos T_pM o espaço tangente a M no ponto p.

IV. Denotaremos $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções de classe C^k na variedade diferenciável M de classe C^k.

V. Denotaremos $\mathfrak{X}^k(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis de classe C^k na variedade diferenciável M de classe C^k e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis de classe C^∞ na variedade diferenciável M de classe C^∞.

Para um melhor estudo de variedades diferenciáveis indicamos [12]. Passamos então a definir Métrica Riemanniana

Definição 1.1.3. *Dada uma variedade diferenciável M de classe $C^\infty(M)$ e dimensão n, uma Métrica Riemanniana é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um produto interno $\langle , \rangle_p$ (forma bilinear simétrica e positiva definida). A métrica é diferenciável, quando $\langle , \rangle_p$ varia diferenciavelmente com o ponto p da seguinte maneira: para quaisquer dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a função $\langle X, Y \rangle$ é de classe $C^\infty(M)$.*

Dizemos que M é uma variedade Riemanniana quando M é variedade diferenciável de classe C^∞ e está munido de uma métrica Riemanniana.

Enquanto a diferenciação de funções definidas em variedades é definida naturalmente pela estrutura diferenciável de M (cartas) a diferenciação de campos vetorias sobre variedades depende de um novo conceito que definiremos abaixo:

Definição 1.1.4. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M de classe C^∞ é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo*

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Neste trabalho utilizaremos a única conexão compatível com a métrica Riemanniana existente pelo Teorema de Levi-Civitá o qual pode ser encontrado em [9].

Enunciaremos abaixo alguns resultados que utilizaremos.

Proposição 1.1.1. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k sem bordo e $f : M \to N$ diferenciável e de classe C^r, $\quad r \leq k$. Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f então ou $f^{-1}(a)$ é uma variedade diferenciável de classe C^r e dimensão $m-n$ ou $f^{-1}(a)$ é vazio.*

A demonstração pode ser encontrada [12].

Proposição 1.1.2. *Sejam M variedade Riemanniana de classe C^k, υ campo diferenciável de classe $C^r(M)$, $\quad r \leq k$ e F função diferenciável em M tal que $\langle \upsilon, Grad(F) \rangle = 0$ então F é constante ao longo das curvas integrais de υ.*

Para demonstrá-la basta notar que se $\alpha(t)$ é uma curva integral de υ temos:

$$\frac{d\,(F \circ \alpha)}{dt}(t) = dF_{\alpha(t)} \circ \frac{d\alpha}{dt}(t) = \langle Grad\,(F \circ \alpha(t))\,, \upsilon(\alpha(t)) \rangle_{\alpha(t)} = 0, \quad \forall t.$$

Proposição 1.1.3. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de classes C^k e C^r respectivamente, então $M \times N$ é uma variedade diferenciável de classe C^s onde $s = min\{k, r\}$.*

A demonstração desta propriedade é bastante simples e segue direto da definição 1.1.1.

Definição 1.1.5. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $C^\infty(U)$ o espaço vetorial de dimensão infinita das funções diferenciáveis em U, sob o corpo com valores reais. A aplicação que associa a cada $\phi \in C^\infty(U)$ a função*

$$L\phi(x) = \sum_{\upsilon=0}^{m} \sum_{i_1+\cdots+i_n=\upsilon} a_{i_1} \cdots a_{i_n}(x) \frac{\partial^\upsilon \phi(x)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$

é denominado um operador diferencial linear em $C^\infty(U)$ de ordem m, com $a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ elementos de $C^\infty(U)$.

Dizemos que L é eliptico quando a matriz dos coeficientes dos termos de maior ordem for ou não negativa ou não positiva.

Teorema 1.1.1. *Seja A um operador diferencial elíptico linear de segunda ordem. Se u satisfaz,*

$$|Au(x)|^2 \leq M\{\sum_{1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + |u(x)|^2\}$$

em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ então caso u anule-se em ordem infinita em algum $x_0 \in D$ teremos $u \equiv 0$.

A demonstração pode ser encontrada em [1].

Capítulo 2

O Operador de Laplace

2.1 O Operador de Laplace em uma variedade Riemanniana

Antes de passarmos para uma variedade Riemanniana lembremos que para uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(U)$, onde U é aberto de $\mathbb{R}^n$, o laplaciano da f é assim definido:

$$\Delta f(x) = div[grad(f)](x) \quad \forall x \in U$$

onde *div* denota o divergente e *grad* o gradiente em $\mathbb{R}^n$. Desta igualdade obtemos que a função Δf é de classe $C^0(U)$ e Δ é linear em f. Portanto, Δ não é um operador linear apenas pelo fato de $C^0(U)$ não estar contido em $C^2(U)$. Este problema pode ser contornado se considerarmos ele restrito ao conjunto $C^\infty(U)$.

Definição 2.1.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $C^\infty(U)$ o conjunto das funções com valores reais diferenciáveis em U. O operador de Laplace $\Delta : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ é definido por*

$$\Delta f : U \to \mathbb{R}$$

$$x \to \Delta f(x) = div[grad(f)](x)$$

De forma análoga definiremos o Laplaciano em uma variedade Riemanniana, mas para isto devemos conhecer o gradiente de uma função e o divergente de um campo neste ambiente. Para definí-los seguiremos os mesmos passos do Laplaciano.

Lembremos que o gradiente de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em um ponto $x \in U$ é o único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$df_x(u) = \langle u, v \rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Para tal veja [2].

Definição 2.1.2. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Dizemos que $v \in T_pM$ é o gradiente de f em p, quando:*

$$\langle u, v \rangle_p = df_p(u) \quad \forall u \in T_pM.$$

Observação 2.1.1. *Note que no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ é o próprio $\mathbb{R}^n$ e, nesse caso, a métrica g em cada ponto $p \in U$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.*

Observação 2.1.2. *Através desta definição podemos mostrar que dadas $f, g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em M temos*

$$grad(f + g) = grad(f) + grad(g),$$

$$grad(f.g) = f.grad(g) + g.grad(f).$$

Relembremos agora que o divergente de um campo $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em um ponto $x \in U$ é o traço da matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial X_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

quando escrevemos $X(x) = (X_1(x), \ldots, X_n(x))$. Notemos que esta é a matriz da aplicação $u \to D_uX(x)$. Assim podemos dizer que:

$$divX(x) = tr[u \to D_uX(x)]$$

em que tr denota o traço da aplicação linear.

Em uma variedade Riemanniana (M,g) existe, como vimos, uma única conexão ∇ compatível com a métrica g,

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

A conexão funciona como uma derivação de um campo Y na direção do campo X.

Definição 2.1.3. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo em M de classe C^∞ definimos o divergente de X em x como:*

$$divX(x) = tr[u \to \nabla_u X(x)].$$

Observação 2.1.3. *A partir das propriedades da função ∇ e da linearidade do traço de uma aplicação linear obtemos*

$$div(X+Y) = div(X) + div(Y) \ \ e$$

$$div(f.X) = f.div(X) + \langle X, gradf \rangle\,,$$

$\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f \in C^\infty(M)$.

Estamos portanto prontos para introduzir a definição do Laplaciano em uma Variedade Riemanniana.

Definição 2.1.4. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, $f : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(M)$. Definimos o Laplaciano de f em $x \in M$ por:*

$$\Delta f(x) = div[grad(f)](x).$$

Observação 2.1.4. *A partir das propriedades do gradiente e do divergente obtemos:*

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g \ \ e$$

$$\Delta(f.g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\,\langle grad(f), grad(g)\rangle\,,$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$.

Como estamos trabalhando em uma variedade precisamos conhecer o Laplaciano de uma função em coordenadas locais, mas para isto necessitamos das expressões do divergente e do gradiente em coordenadas locais.

Assim, dados $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ carta local de M, $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 temos:

$$grad\tilde{f}(x) = \sum_{k,l} \left(g^{kl}(x) \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(x).$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(x)$ é o vetor tangente, em x, à j-ésima curva coordenada determinada pela parametrização ϕ e $\tilde{f}(x)$ é a representação local da função f na carta local ϕ, ou seja, $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$.

Para um campo $X : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ temos,

$$div\tilde{X}(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta^j(x) \sqrt{g(x)} \right),$$

onde $\eta^j(x)$ é a j-ésima coordenada do campo X na base $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(x)$ e $\tilde{X}(x)$ é a representação do campo X na carta local ϕ.

Então, utilizando as formas locais do divergente e do gradiente obtemos:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk}(x)\sqrt{g(x)} \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_k} \right)(x) \ \forall x \in U.$$

O desenvolvimento destas formas locais podem ser encontradas em [7].

Observação 2.1.5. *Seja M uma variedade Riemanniana e f uma função definida em M, dizemos que f está em coordenadas normais em p quando a carta tomada é a função exp_p^{-1}, isto é, a forma local é $\tilde{f} = f \circ exp_p$. Quando utilizamos coordenadas normais, segue de $d(exp_p)_0 = Id$ que o vetor*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = d(exp_p)_0(e_j) = e_j$$

onde $\{e_j; j = 1, \cdots, n\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ e obtemos que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$$

constitue uma base ortonormal para T_pM. Então,

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle = 1 \quad se \quad i = j$$

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle = 0 \quad se \quad i \neq j$$

2.2 As fórmulas de Green

Sabemos que com a métrica podemos desenvolver uma teoria de integração de funções na variedade Riemannianna, veja [11]. Dentro desta teoria destacaremos algumas identidades obtidas a partir do Teorema de Stokes as quais serão importantes em nosso estudo. Com a finalidade de obtê-las utilizaremos os teoremas abaixo, consequência direta do Teorema de Stokes que são conhecidos como Teoremas da Divergência para variedades Riemannianas.

Teorema 2.2.1. *(Teorema da Divergência I) Sejam X um campo diferenciável em (M, g) variedade Riemanniana orientada e compacta sem bordo, temos*

$$\int_M divXdV = 0$$

onde dV é o elemento de volume da variedade M.

A demonstração segue pelo Teorema de Stokes aplicada a forma $divXdV$, veja [10].

Teorema 2.2.2. *(Teorema da Divergência II) Sejam X um campo diferenciável em (M, g) variedade Riemanniana orientada e compacta com bordo, temos*

$$\int_M divXdV = \int_{\partial M} \langle X, \upsilon \rangle \, dA$$

onde dV e dA são os elementos de volume da variedade M e de sua bordo respectivamente e υ é a normal unitário exterior a bordo.

Para uma consulta à demonstração indicamos [10].

Proposição 2.2.1. *(Fórmulas de Green I) Sejam $h \in C^1(M)$, $f \in C^2(M)$ e M compacta, orientável e sem bordo. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle grad \quad h, grad \quad f\rangle\}dV = 0.$$

Note que se $h \in C^2(M)$ e f, h têm suporte compacto obtemos

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}dV = 0.$$

A primeira parte desta proposição segue do Teorema da Divergência I aplicado ao campo $h(gradf)$ e utilizando a igualdade $div(fX) = fdiv(X) + \langle grad \quad f, X\rangle$. A segunda parte segue diretamente da primeira.

Proposição 2.2.2. *(Fórmulas de Green II) Sejam $h \in C^1(M)$, $f \in C^2(M)$ e M variedade compacta, orientável e com bordo. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle grad \quad h, grad \quad f\rangle\}dV = \int_{\partial M} h(\upsilon f)dA.$$

Se $h \in C^2(M)$ então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}dV = \int_{\partial M} \{h(\upsilon f) - f(\upsilon h)\}dA.$$

A primeira parte da proposição segue do Teorema da Divergência II, considerando o mesmo campo e da igualdade $div(fX) = fdiv(X) + \langle grad \quad f, X\rangle$. A segunda imediatamente da primeira parte.

Observação 2.2.1. *Note que se $h \equiv 0$ (identicamente nula) em ∂M então temos a primeira Fórmula de Green I.*

Definiremos o espaço $L^2(M)$, para isto consideremos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg\, dV, \quad \forall f, g \text{ integráveis em } M.$$

Este dá origem a norma

$$\|f\| = \left(\int_M f^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \text{ integrável em } M,$$

quando $\int_M f^2 dV < \infty$.

Definição 2.2.1. *Denotemos $L^2(M)$ o espaço das funções definidas em M mensuráveis de quadrado integrável, mais precisamente:*

$$L^2(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \;\; mens; \;\; \int_M f^2 dV < \infty\}.$$

Este espaço é completo com a norma definida acima, para verificação deste fato indicamos [6].

Passaremos agora a obter a definição da *forma bilinear de Dirichlet* quando M é compacta. Para dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^0(M)$ contínuos em M definimos o produto interno

$$(X, Y) = \int_M \langle X(p), Y(p) \rangle_p dV$$

com a norma

$$\|X\|^2 = \int_M |X|^2 dV.$$

e o espaço métrico completo resultante desta norma denotamos por $\mathscr{L}^2(M)$. O produto interno e a norma estendem-se a este espaço e o torna um espaço de Hilbert.

Notemos que se tomarmos uma função $f \in C^1(M)$ e um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ com suporte compacto[1] obtemos, pela Teorema da Divergência aplicado ao campo fX,

$$\int_M div \;\; fX dV = 0 \Rightarrow \int_M \{f div \;\; X + \langle grad \;\; f, X \rangle\} dV = 0.$$

De onde obtemos que,

$$(grad \;\; f, X) = -\langle f, div \;\; X \rangle.$$

[1] Quando $\partial M \neq \emptyset$, $X \equiv 0$ na ∂M.

Isto motiva a seguinte definição,

Definição 2.2.2. *Dada uma função $f \in L^2(M)$ dizemos que $Y \in \mathscr{L}(M)$ é a derivada fraca de f se*

$$(X, Y) = -\langle f, div \quad X\rangle$$

para todo campo vetorial de classe $C^1(M)$ com suporte compacto em M.

Quando tal $Y \in \mathscr{L}^2(M)$ existe, é único, a menos de um conjunto de medida nula, e o denotamos $Y = Grad \quad f$. O conceito de derivada fraca coincide com o de derivada usual quando tratamos com funções deriváveis. Estes resultados são extensões a variedades diferenciáveis de teoremas da teoria de Operadores Diferenciais e Equações Diferenciais quando $M = \mathbb{R}^n$. Para verificação das afirmações indicamos [14] e [4].

Definição 2.2.3. *Chamamos $\mathscr{H}(M) \subseteq L^2(M)$ o conjunto consistindo de todas as funções que possuem derivada fraca.*

Este é um subespaço vetorial de $L^2(M)$ e é conhecido como *Espaço de Sobolev* . Em $\mathscr{H}(M)$ definimos o produto interno,

$$(f, h)_1 = \langle f, h\rangle + (Grad \quad f, Grad \quad h)$$

que associa a norma

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|Grad \quad f\|^2$$

É conhecido que $\mathscr{H}(M)$ é o completamento do conjunto $\{f \in C^\infty(M); \|f\|_1 < \infty\}$ munido da norma $\|\|_1$. Além disso, nesta norma $C^\infty(M)$ é denso em $\mathscr{H}(M)$ na métrica dada. Para verificação das afirmações indicamos [14] e [4].

Em $\mathscr{H}(M)$ consideramos a forma bilinear simétrica, conhecida como forma de *Dirichlet* ou *integral de energia* dada por,

$$D[f, h] = (Grad \quad f, Grad \quad h), \quad \forall f, h \in \mathscr{H}(M).$$

2.3 Os autovalores e autofunções do Operador de Laplace

Lembremos que quando restrito as funções $C^\infty(M)$ o laplaciano torna-se um operador linear, isto é,

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$f \to \Delta f$$

é um operador linear no espaço vetorial da funções $C^\infty(M)$, onde $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ é a função que associa a cada $x \in M$ o valor real $\Delta f(x) = div[grad(f)](x)$.

Sendo este um espaço vetorial levantamos a questão: Será que existem e podemos determinar os autovalores de Δ? Isto é, encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\Delta f + \lambda f = 0 \text{ onde } f \in C^\infty(M)$$

tenha solução não identicamente nula.

Definição 2.3.1. *Quando existir tal $f \in C^\infty(M)$ dizemos que f é uma autofunção associada ao autovalor λ.*

Enunciaremos dois problemas destes. No primeiro M é uma variedade compacta sem bordo e no segundo M é uma variedade compacta com bordo.

PROBLEMA DA MEMBRANA LIVRE (PML)

Seja M é compacta sem bordo. Encontre λ e f tais que:

$$\Delta f + \lambda f = 0,$$

onde λ é um número real e $f \in C^\infty(M)$.

PROBLEMA DA MEMBRANA FIXA (PMF)

Seja M compacta e com bordo. Encontre λ e f tais que:

$$\Delta f + \lambda f = 0,\ f|_{\partial M} \equiv 0$$

onde $f \in C^\infty(M)$ e λ é um número real.

Relembremos que quando M é compacta, $C^\infty(M) \subseteq L^2(M)$ podemos dotar este espaço de um produto interno (o induzido pelo espaço $L^2(M)$) da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle = \int_M f.g \, dV$$

Levantamos então outra questão: Existe uma base ortonormal enumerável do espaço $C^\infty(M)$? Porém, uma base ortonormal neste espaço é uma sequência infinita de funções, e uma combinação linear infinita delas pode ou não convergir para uma função em $C^\infty(M)$. Para resolvermos este último problema, trabalhamos no espaço $L^2(M)$ que contém $C^\infty(M)$ e é completo em relação a norma proveniente do produto interno. O resultado que responde estas duas questões, está enunciado abaixo.

Teorema 2.3.1. *Para cada um dos problemas de autovalores acima, o conjunto dos autovalores é:*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \uparrow \infty \text{ para o PMF.}$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \uparrow \infty \text{ para o PML.}$$

Além disso, cada autoespaço tem dimensão finita; autoespaços associados a autovalores distintos são ortogonais in $L^2(M)$ e este é a soma direta de todos os autoespaços e finalmente, cada autofunção é $C^\infty(M)$.

A demonstração deste teorema envolve conceitos e resultados da teoria de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão infinita e pode ser encontrada em [4] . Não apresentamos a prova por não ser objetivo deste trabalho, no entanto algumas das afirmativas do teorema podem ser verificadas sem muita dificuldade a partir dos resultados anteriores que apresentamos até aqui. Utilizaremos também a afirmativa de que as autofunções são de classe C^∞.

A primeira afirmativa é que os autovalores são não negativos, para isto basta analisar o caso dos autovalores não nulos. Seja $\lambda \neq 0$, tomemos f autofunção associada a este autovalor. Então

$$\Delta f = \lambda f \Rightarrow \int_M f \Delta f dV = \int_M \lambda f^2 dV \Rightarrow \int_M \langle grad \;\; f, grad \;\; f \rangle dV = \int_M \lambda f^2 dV.$$

Donde obtemos

$$\lambda = \|f\|^{-2} \int_M \|grad \;\; f\| dV \geq 0.$$

Note que usamos o fato da autofunção em questão não ser nula, o que ocorre devido o autovalor λ ser não nulo e na segunda passagem a *Fórmulas de Green I e II.* Neste último caso, além da autofunção pertencer a $C^\infty(M)$, usamos que a autofunção se anula em ∂M para aplicarmos a *Fórmula de Green II.*

A segunda propriedade a ser demonstrada é a ortogonalidade dos autoespaços referentes a autovalores distintos. Novamente o caso do autovalor nulo é trivial. Sejam então f, ϕ autofunções referentes aos autovalores não nulos distintos λ, μ respctivamente. Então temos,

$$(\lambda - \mu) \int_M f\phi dV = \int_M \{f\Delta\phi - \phi\Delta f\} dV = 0$$

a última igualdade segue das *Fórmulas de Green I, II* e da observação 2.2.2. Portanto, como $\lambda \neq \mu$, segue que $\int_M f\phi dV = 0$, isto é, $\langle f, \phi \rangle = 0$.

Observação 2.3.1. *Dizemos que ϕ é a i-ésima autofunção quando ela esta associada ao i-ésimo autovalor.*

Segue Teorema 2.3.1 que o Laplaciano é um operador elíptico.

Definição 2.3.2. *A multiplicidade de um autovalor é a dimensão do seu autoespaço correspondente.*

Para os dois problemas mencionados acima devemos estudar a validade da fórmula,

$$(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f]$$

onde ϕ é uma autofunção do Laplaciano e $f \in \mathscr{H}(M)$

No PML temos M compacta e sem bordo, logo, pela *Fórmula de Green I*, se $\phi \in C^2(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ a igualdade acima é válida. Assim, fixando ϕ, a aplicação $F_\phi(f) = -D[\phi, f]$ define um funcional linear em $C^\infty(M)$ (como um subespaço de $\mathscr{H}(\mathscr{M})$), satisfazendo

$$|F_\phi| \leq \|grad \;\; \phi\| \, \|grad \;\; f\| \leq \|grad \;\; \phi\| \, \|f\|_1 \; .$$

Na primeira desigualdade utilizamos $|(Grad \;\; f, Grad \;\; h)| \leq \|Grad \;\; f\| \, \|Grad \;\; h\|$ que é a conhecida *Desigualdade de Schwarz*. Portanto F_ϕ é um funcional linear limitado em $C^\infty(M) \subseteq \mathscr{H}(M)$ e desta forma pode ser estendido a funções $f \in \mathscr{H}(M)$.

Para o PMF, se $\phi \in C^2(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ tal que $f = 0$ em ∂M pela *Fórmula de Green II* a igualdade $(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f]$ vale. A validade agora é extendida a f no completamento do conjunto das funções $C^\infty(M)$ com suporte compacto contido em $M \backslash \partial M$, completamento este contido em $\mathscr{H}(M)$.

Definição 2.3.3. *Seja $\Im(M) = \{f \in \mathscr{H}(M); (\Delta\phi, f) = -D[\phi, f], \phi \in C^2(M)\}$.*

No caso do PML, $\Im(M) = \mathscr{H}(M)$.

No caso do PMF $\Im(M)$ é o completamento das funções $C^\infty(M)$ com suporte compacto contido em $M \backslash \partial M$.

Até o presente momento trabalhamos com variedades M cuja a bordo é C^∞. Contudo esta hipótese poder ser enfraquecida para C^∞ por partes pois o Teorema da Divergência permanece verdadeiro, assim como as fórmulas de Green resultantes. Quanto as afirmativas enunciadas no Teorema 2.3.1, também permanecem verdadeiras, exceto é claro, a diferenciabilidade das autofunções nos pontos de singularidade da bordo. Citamos também que o espaço das funções $C^\infty(M\backslash\partial M)$ e na parte suave da bordo são densas em $\mathscr{H}(M)$.

Definição 2.3.4. *Chamamos $D \subseteq M$ de domínio quando é D é aberto, conexo. Dizemos que $D \subseteq M$ é um domínio normal quando é e ∂D é C^∞ por partes.*

Teorema 2.3.2. *(RAYLEIGH) Seja D um domínio normal de M e os autovalores dos problemas acima enumerados da seguinte maneira:*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

onde cada autovalor é repetido a multiplicidade dele nesta enumeração.
Então para qualquer $f \in \Im(M)$, $f \neq 0$, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{D\left[f,f\right]}{\|f\|^2}$$

com a igualdade acontecendo se, e somente, se f é uma autofunção de λ_1. Mais geralmente, se $\{\phi_1, \phi_2, \cdots\}$ é uma base ortonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_j é a autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, \cdots$, então para $f \in \Im(M), f \neq 0$ satisfazendo:

$$\langle f, \phi_1\rangle = \langle f, \phi_2\rangle = \cdots = \langle f, \phi_{k-1}\rangle = 0,$$

ocorre a desigualdade,

$$\lambda_k \leq \frac{D\left[f,f\right]}{\|f\|^2}$$

com a igualdade acontecendo se, e somente, se f é uma autofunção de λ_k.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7].

Observação 2.3.2. *Note que, no caso geral, f está no complemento ortogonal do espaço gerado por $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{k-1}\}$, menos a origem.*

Teorema 2.3.3. *(MAX-MIN) Sejam $\upsilon_1, \cdots, \upsilon_{k-1} \in L^2(M)$. Consideremos,*

$$\mu = inf\left\{\frac{D\left[f,f\right]}{\left\|f\right\|^{2}}\right\}$$

onde f *varia no complemento ortogonal do espaço gerado por* $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{k-1}\}$ *em* $L^2(M)$*, menos a origem. Então os autovalores dados acima satisfazem:*

$$\mu \leq \lambda_k.$$

Se $\upsilon_1, \cdots, \upsilon_{k-1}$ *são ortonormais, com cada* υ_l *uma autofunção de* λ_l*,* $l = 1, \cdots, k-1$*, então*

$$\mu = \lambda_k$$

A demonstração deste teorema também pode ser encontrada em [7].

Os teoremas de Rayleigh e Máx-Mín, garantem que existem uma quantidade enumerável de autovalores não nulos.

Exemplo 2.3.1. *Determinaremos aqui os autovalores de um harmônico esférico homogêneo de grau* N *em* $\mathbb{R}^n$*,* $n > 1$*, quando restrito a* $S^{n-1}(1)$*. Lembremos que um harmônico esférico* F *em* $\mathbb{R}^n$ *satisfaz as igualdades* $\Delta F = 0$ *e* $F(x) = R(r)G(\xi)$ *onde* $r = |x|$ *e* $\xi = \frac{x}{|x|}$*. Observemos que se* F *é um polinômio homogêneo de grau* N *então* $F(x) = |x|^N F(\xi)$*.*

A relação entre o laplaciano em $\mathbb{R}^n$ *e em* $S^{n-1}(r)$ *se dá pela igualdade:*

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} F = r^{-(n-1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + r^{-2}\Delta_{S^{n-1}(1)}\left(F|_{S^{n-1}(1)}\right).$$

Seu desenvolvimento pode ser encontrado em [7]. Como F *é homogêneo de grau* N *e* $\Delta_{\mathbb{R}^n} F = 0$ *vemos que,*

$$r^{-(n-1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^N F\right)\right) + r^{-2}\Delta_{S^{n-1}(1)}\left(F|_{S^{n-1}(1)}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \Delta_{S^{n-1}(1)}\left(F|_{S^{n-1}(1)}(\xi)\right) - N(n+N-2)r^{N-2}F(\xi) = 0$$

Como $r = 1$ *em* $S^{n-1}(1)$ *obtemos,*

$$\Delta_{S^{n-1}(1)}\left(F|_{S^{n-1}(1)}(\xi)\right) - N(n+N-2)F(\xi) = 0$$

Logo, a restrição à esfera $S^{n-1}(1)$ *de um harmônico esférico e homogêneo de grau* N *em* $\mathbb{R}^n$ *determina uma auto-função do laplaciano em* $S^{n-1}(1)$ *associada ao autovalor* $N(n+N-2)$*.*

Para complementar os comentários sobre a esfera enunciaremos o seguinte resultado que nos será útil na próxima seção.

Proposição 2.3.1. *Em S^{n-1} uma base ortogonal para o espaço gerado por λ_1 é dada pela funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$.*

Para demonstração veja [3] e [13]

Capítulo 3

Conjuntos Nodais

Definição 3.0.5. *Seja M uma variedade Riemanniana, f uma autofunção de Δ, o Conjunto Nodal de f é o conjunto $f^{-1}(0)$. Quando a dimensão de M é 2, dizemos que $f^{-1}(0)$ é uma linha nodal. As componentes conexas de $M \setminus f^{-1}(0)$ chamamos de domínios nodais.*

Note que se $f \equiv 0$ então $f^{-1}(0) = M$ e portanto $M \setminus f^{-1}(0) = \emptyset$. Também quando f é constante não nula podemos facilmente determinar $f^{-1}(0)$ é vazio, portanto $M \setminus f^{-1}(0) = M$. Logo precisamos obter informações sobre domínios nodais de autofunções não constantes, por isto, neste capítulo trabalharemos com autofunções não constantes, a menos que o contrário seja dito.

3.1 Comportamento Local dos Conjuntos Nodais

Utilizaremos o Teorema de Lipman Bers para mostrar que o conjunto nodal de uma autofunção é difeomorfo ao domínio nodal de um polinômio harmônico esférico e então estudaremos os domínios nodais destes últimos.

Teorema 3.1.1. *(Lipman Bers) Seja*

$$L\phi(x) = \sum_{v=0}^{m} \sum_{i_1+\cdots+i_n=v} a_{i_1} \cdots a_{i_n}(x) \frac{\partial^v \phi(x)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

uma equação elíptica com coeficientes C^∞ definidos em uma vizinhança da origem do $\mathbb{R}^n$. Se a solução $\phi(x)$ anula-se na origem em ordem finita então existe um polinômio homogêneo de grau N, $p_N(x) \neq 0$ tal que,

$$\frac{\partial^l \phi(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial^l p_N(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}} + O(|x|^{N-l+\epsilon})$$

para $l = 0, 1, 2$ *e* $l = i_1 + \cdots + i_n$ *onde* $\epsilon \in (0, 1)$.

Além disso $p_N(x)$ *satisfaz a equação*

$$L_0 p_N(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=m} a_{i_1}\cdots a_{i_n}(0)\frac{\partial^l p_N(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}.$$

Sua demonstração pode ser encontrada em [5].

No enunciado deste teorema $O(|x|^r)$, $r > 0$, representa uma função $g(x)$ contínua tal que o quociente $\dfrac{g(x)}{|x|^r}$ é limitado próximo da origem. Podemos concluir a partir desta que $g(0) = 0$. Com efeito, do quociente acima limitado temos $g(x) \leq K\,|x|^r$ onde $K \in \mathbb{R}$. Portanto quando $x \to 0$ temos $g(x) \to 0$.

A seguir apresentamos dois Lemas para obtermos o teorema principal desta seção.

Lema 3.1.1. *Seja* $p_N(x)$ *um polinômio harmônico esférico e homogêneo de grau* N, $N > 1$, *em* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. *Então o conjunto nodal de* p_N *em torno da origem possui uma singularidade na origem.*[1]

Demonstração. Afirmamos que $p_N|_{S^{n-1}(1)}$ é uma autofunção de S^{n-1}. De fato, pelo exemplo 2.3.1 $p_N|_{S^{n-1}}$ é uma autofunção do PML em $S^{n-1}(1)$ a qual está associada ao autovalor $N(n+N-2)$ já que p_N é um harmônico esférico homogêneo de grau N.

Da hipótese $N > 1$, $p_N|_{S^{n-1}(1)}$ se anula em $S^{n-1}(1)$. Com efeito, esta função satizfaz o PML na citada esfera, como apenas as funções constantes estão associadas ao autovalor zero e estas estão associadas ao autovalor $N(n+N-2) \geq n-1 > 0$, segue que $p_N|_{S^{n-1}(1)}$ não é uma 0-autofunção em $S^{n-1}(1)$. Como autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais obtemos,

$$\int_{S^{n-1}(1)} p_N c\, dV = 0$$

para toda constante $c \in \mathbb{R}$. Portanto, para esta integral se anular devemos ter p_N mudando de sinal em $S^{n-1}(1)$.

Pela homogeneidade de p_N[2], obtemos

$$p_N(x) = 0,\ x \neq 0, \Longleftrightarrow p_N(\xi) = 0.$$

[1]Isto é, o conjunto nodal de p_N não é uma variedade diferenciável com a topologia induzida pelo $\mathbb{R}^n$.

[2]$p_N(x) = ||x||^N p_N(\xi)$, $\xi = x/\parallel x \parallel$

Como $p_N(0) = 0$ segue que

$$p_N^{-1}(0) = \bigcup_{t>0} \{t\xi \,;\, \xi \in S^{n-1}(1) \;\; e \;\; p_N(\xi) = 0\} \cup \{0\}.$$

Portanto $p_N^{-1}(0)$ não terá singularidade na origem apenas quando o conjunto $p_N|_{S^{n-1}(1)}^{-1}(0)$ coincidir com círculo máximo de $S^{n-1}(1)$. Como $p_N|_{S^{n-1}(1)}$ e é 1-autofunção, segue da proposição 2.3.1 que $p_N|_{S^{n-1}(1)}$ é combinação linear das funções coordenadas, mas isto acarreta que $N = 1$, gerando uma contradição! Segue então que $p_N^{-1}(0)$ terá singularidade na origem. Estamos usando o fato de somente primeira auto-função admitir círculo máximo para conjunto nodal. □

O próximo lema será ferramenta importante para a relação entre entre os domínios nodais de uma autofunção com o harmônico esférico correspondente.

Lema 3.1.2. *Sejam $f, p \in C^\infty(U), U \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que*

i) $f(x) = p(x) + O(|x|^{N+\epsilon})$

ii) $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} + O(|x|^{N-1+\epsilon})$

iii) $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j} + O(|x|^{N-2+\epsilon}), \quad N > 1, \quad \epsilon \in (0,1)$

iv) $\dfrac{\partial^v p}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(0) = 0, \quad 0 \leq v \leq N-1$

v) $|grad(p)| \geq C\,|x|^{N-1}$ *onde C é uma constante real positiva.*

Então, existe um difeomorfismo local $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ fixando a origem tal que

$$f(x) = p\,(\Phi(x))$$

Demonstração. Seja $F(x,a) = (1-a)f(x) + ap(x), \quad a \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,a) = (1-a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + a\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(x,a) = -f(x) + p(x)$$

Segue que,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0,a) = (1-a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + a\frac{\partial p}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}(0,a) = -f(0) + p(0) = 0$$

pois como $N > 1$ obtemos pela primeira, segunda e quarta hipóteses que as funções f e p se anulam na origem, assim como as derivadas parciais de primeira ordem. Desta forma,

$$grad(F)(0,a) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
|grad(F)| &= \left| \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial a} \right) \right| \\
&= |((1-a)grad(f),0) + (agrad(p),0) + (0,\cdots,0,-f+p)| \\
&\geq |(1-a)grad(f) + agrad(p)| - |p-f| \\
&\geq |(1-a)grad(f-p) + grad(p)| - |p-f| \\
&\geq |grad(p)| - (|(1-a)grad(f-p)| - |p-f|) \\
&\geq |grad(p)| - \left(\left|(1-a)O(|x|^{N-1+\epsilon})\right| - \left|O(|x|^{N+\epsilon})\right| \right) \\
&\geq \left(C - \left(|(1-a)O(|x|^{\epsilon})| - \left|O(|x|^{1+\epsilon})\right| \right) \right) |x|^{N-1}
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} O(|x|^{\epsilon}) = \lim_{x \to 0} O(|x|^{1+\epsilon}) = 0$ segue que,

$$|grad(F)| \geq \frac{C}{2} |x|^{N-1} = C_1 |x|^{N-1}$$

para x suficientemente próximo da origem. Seja $U_0 \subseteq U$ o aberto onde a desigualdade acima vale.

Definamos o campo,

$$X(x,a) = |grad(F)|^{-2} (p(x) - f(x))\, grad(F), \quad x \neq 0 \;\; e \;\; X(x,a) = 0, \quad x = 0$$

para $x \in U_0$ e $a \in \mathbb{R}$. Observemos que X é um campo C^∞ fora de $(0,a)$, $\;a \in \mathbb{R}$, pois $p, f \in C^\infty(U)$ e $grad(F) \neq 0$. Este último fato ocorre pela desigualdade provada acima.

Agora mostraremos que X é um campo C^1 em $U \times \mathbb{R}$. Para isto faremos a estimativa,

$$|X(x,a)| = |grad(F)|^{-1} |p(x) - f(x)| \leq |grad(F)|^{-1} C_2 |x|^{N+\epsilon} \leq C_1 C_2 |x|^{1+\epsilon}$$

para $x \neq 0$, $x \in U_0$ e $a \in \mathbb{R}$. Na igualdade utilizamos a expressão do campo X, $\;x \neq 0$; na primeira desigualdade, usamos o fato que $f(x) - p(x) = O(|x|^{N+\epsilon})$; na segunda $|grad(F)| \geq C_1 |x|^{N-1}$.

Desta forma obtemos

$$\frac{|X(x,a)|}{|x|} \leq C_1 C_2 |x|^{\epsilon} \Rightarrow \frac{|X(x,a)|}{|(x,a)|} \leq C_1 C_2 |x|^{\epsilon}$$

Como $\lim_{x\to 0}|x|^{\epsilon} = 0$ obtemos que a existe a derivada do campo X em $(0, a_0)$ e é zero. Resta mostrar que as derivadas parciais são contínuas nestes pontos, com este fim mostraremos que

$$\left|\frac{\partial X}{\partial x_i}(x,a)\right| \to 0 \text{ quando } (x,a) \to (0,a_0)$$

para todo $i = 1, \cdots, n+1$ (assumindo $a = x_{n+1}$). De fato, derivando o campo X em relação a x_i e fazendo algumas majorações obtemos,

$$\left|\frac{\partial X(x,a)}{\partial x_i}\right| \leq 3\,|gradF|^{-2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)|p(x)-f(x)| + |gradF|^{-1}\left|\frac{\partial(p-f)}{\partial x_i}\right|$$

$$\left|\frac{\partial X(x,a)}{\partial x_{n+1}}\right| \leq 3\,|gradF|^{-2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)|p(x)-f(x)|\,.$$

Agora notemos que a segunda parcela satisfaz

$$|gradF|^{-1}\left|\tfrac{\partial(p-f)}{\partial x_i}\right| \leq |gradF|^{-1} C_3\,|x|^{N-1+\epsilon} \leq C_1 C_3\,|x|^{\epsilon}\,,^{3}$$

onde na primeira desigualdade utilizamos que $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} + O(|x|^{N-1+\epsilon})$, na segunda desigualdade a estimativa acima para o $gradF$. Logo resta conseguir uma estimativa para a primeira parcela. Para isto, calculando as derivadas parciais de F obtemos a estimativa,

$$\left|\tfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right| \leq |1-a|\left|\tfrac{\partial^2 (f-p)}{\partial x_j \partial x_i}\right| + \left|\tfrac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}\right|\,,\ \left|\tfrac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1} \partial x_i}\right| = \left|\tfrac{\partial (f-p)}{\partial x_i}\right| \text{ e } \left|\tfrac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}}\right| = 0.$$

Como por hipótese, $\frac{\partial^2(f-p)}{\partial x_j \partial x_l} = O(|x|^{N-2+\epsilon})$ e $\frac{\partial(f-p)}{\partial x_i} = O(|x|^{N-1+\epsilon})$ próximo da origem, resta conseguir uma estimativa para $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}$. Isto segue pela forma do polinômio,

$$p(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=N} a_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_1}.\cdots.x_n^{i_n} \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i_1+\cdots+i_n=N-2} b_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_1}.\cdots.x_n^{i_n}.$$

Então, $\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leq K_1\,|x|^{N-2}$.

Juntando as estimativas obtidas acima com a hipótese de $f(x) - p(x) = O(|x|^{N+\epsilon})$ obtemos,

$$3\,|gradF|^{-2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n+1}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)|p(x)-f(x)| \leq 3\tilde{K}\,|gradF|^{-2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n+1}|x|^{N-2}\right)|x|^{N+\epsilon}\,,$$

onde $\tilde{K}$ é uma constante real. Agora utilizando a estimativa do $gradF$ obtemos finalmente,

[3] $C_3 > 0$ é uma constante real.

$$3\left|gradF\right|^{-2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)\left|p(x)-f(x)\right| \leq K'\left|x\right|^{\epsilon},$$

onde K' é uma constante real. Mostrando que as derivadas parciais do campo X são contínuas em $(0, a_0)$.

Definamos $\upsilon(x,a) = (0,\cdots,0,1) - X(x,a)$. Como X um campo de classe $C^1(U \times \mathbb{R})$ temos υ um campo de classe $C^1(U \times \mathbb{R})$ e portanto as curvas integrais deste campo existem, são únicas e dependem continuamente dos dados iniciais.

Seja $\phi(t; x_0, a_0)$ a solução com condição inicial $\phi(0; x_0, a_0) = (x_0, a_0)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\langle \upsilon(x,a), (0,\cdots,0,1)\rangle &= \langle (0,\cdots,0,1) - X(x,a), (0,\cdots,0,1)\rangle \\
&= 1 - \langle X(x,a), (0,\cdots,0,1)\rangle \\
&= 1 - \left|gradF\right|^{-2}(p(x)-f(x))\langle gradF, (0,\cdots,0,1)\rangle \\
&= 1 - \left|gradF\right|^{-2}(p(x)-f(x))\frac{\partial F}{\partial a} \\
&= 1 - \left|gradF\right|^{-2}(p(x)-f(x))^2 \\
&= 1 - O(\left|x\right|^{2+2\epsilon})
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} O(\left|x\right|^{2+2\epsilon}) = 0$ temos,

$$\langle \upsilon(x,a), (0,\cdots,0,1)\rangle > 0$$

para x próximo da origem. Seja $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle \upsilon(x,a), (0,\cdots,0,1)\rangle > 0\}$ contendo a origem.

A desigualdade acima implica que a a-coordenada da solução $\phi(t; x, 0)$ cresce monotonicamente com t se $\phi(t; x, 0)$ pertence ao conjunto $U_1 \times \mathbb{R}$. Com efeito, esta solução satisfaz,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t; x, 0) = \upsilon\left(\phi(t; x, 0)\right)$$

e a desigualdade do produto interno, garante que a derivada da última função coordenada (que é a a-coordenada) de $\phi(t; x, 0)$ é positiva. Além disso, $\phi(t; 0, 0) = (0, t)$, de fato, a curva $\alpha(t) = (0, t)$ satifaz

$$\alpha(0,0) = (0,0),\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) = (0,1) \text{ e } \upsilon\left(\alpha(t)\right) = (0,\cdots,1) - X(0,t) = (0,1)$$

sendo portanto, pela unicidade das curvas integrais, a curva integral de υ que passa pela origem.

Afirmamos que existe uma vizinhança da origem no hiperplano $a = 0$ tal que a trajetória $\phi(t; x, 0)$ encontra o hiperplano $a = 1$ em um único ponto, para todo $(x, 0)$ nesta vizinhança.

De fato, sejam

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$(t, x, a) \to \phi(t, x, a)$$

o fluxo do campo v, $\widetilde{\phi}$ a restrição de ϕ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ e $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a projeção da coordenada $n+1$. Consideremos a aplicação $\Pi \circ \widetilde{\phi}$ (que é C^1) e t_0 tal que $\widetilde{\phi}(t_0, 0, 0) = 1$, isto é, t_0 é o parâmetro da trajetória com condição inicial $x = 0$, $a = 0$ para o qual ela intercepta o hiperplano $a = 1$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Pi \circ \tilde{\phi})(t_0, 0, 0) &= d\Pi_{\tilde{\phi}(t_0,0,0)}\Big(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(t_0, 0, 0)\Big)\\
&= d\Pi_{\phi(t_0,0,0)}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, 0, 0)\Big)\\
&= d\Pi_{\phi(t_0,0,0)}\Big(v(\phi(t_0, 0, 0)\Big)\\
&= \Pi(v(\phi(t_0, 0, 0)) > 0.
\end{aligned}$$

O fato $\Pi(v(\phi(t_0, 0, 0)) > 0$ segue da análise do comportamento das trajetórias do campo v para valores de x na vizinhança da origem.

Segue do teorema das Funções Implícitas que existe uma vizinhança V de $x = 0$ no hiperplano $a = 0$ e uma aplicação C_1, $t : V \times \{0\} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\Pi \circ \phi(t(x, 0), x, 0) = \Pi \circ \widetilde{\phi}(t(x, 0), x, 0) = 1$$

para todo $(x, 0)$ em $V \times \{0\}$.

Definamos Φ a aplicação que associa a cada x, $(x, 0)$ em V, o único ponto $\Phi(x)$[4] tal que $\phi(t(x, 0), x, 0) = (\Phi(x), 1)$. Denotemos Π_x a projeção da componente x dos pontos (x, a) em $\mathbb{R}^{n+1}$. Como Π_x é C^∞, segue que $\Phi(x) = (\Pi_x \circ \phi)(t(x, 0), x, 0)$ é de classe C^1. Observe que Φ é injetiva, pois se não fosse teríamos um ponto com duas curvas integrais do campo v passando por ele, o que sabemos que não ocorre. Como $\phi(t; 0, 0) = (0, t)$ que $\Phi(0) = 0$ é trajetória, Φ fixa a origem.

[4]Existe tal vizinhança V pois se isto não ocorrer então para toda vizinhança U da origem teremos curva integral passando por um ponto de U que toca o hiperplano $a = 1$ em pelo menos dois pontos em $U_0 \times \mathbb{R}$, já que as trajetórias variam de forma C^1 com as condições iniciais e $\phi(t, 0, 0) = (0, t)$.

Seja B uma bola fechada do hiperplano $a = 1$, com cento em $(0, 0)$ e contida em V. Então, a sequência de aplicações contínuas $(x, 0) \to (t(x, 0), (x, 0)) \to \phi((t(x, 0), (x, 0)))$, restrita a ∂B, determina um compacto K homeomorfo ∂B no hiperplano $a = 1$ e todos os pontos contidos neste hiperplano e limitados por K são pontos da imagem de B por Φ. Denotemos $W = W' \times \{1\}$ o aberto limitado por K e denotemos V' o interior de B.

Definamos a aplicação $H : W' \to V'$, associando a cada $y \in W'$, $(y, 1) \in W' \times \{1\}$, o elemento $H(y)$ no hiperplano $a = 0$ dado pela condição $(H(y), 0) = \phi(-t, y, 1)$ sendo t tal que $(y, 1) = \phi(t, x, 0)$, ou seja, H é a volta no tempo. De forma análoga à construção de Φ, podemos obter t dependendo de forma C^1 de y para concluir que H é C^1. Além disso, $H \circ \Phi$ é a identidade em V', pois para cada $x \in V$, com $(y, 1) = \phi(t(x, 0), x, 0)$, isto é, $(\Phi(x), 1) = \phi(t(x, 0), x, 0)$, logo

$(H(\Phi(x)), 0) = \phi(-t, \Phi(x), 1) = \phi(-t(x, 0), \phi(t(x, 0), x, 0)) = \phi(-t(x, 0)+t(x, 0), x, 0) = \phi(0, x, 0) = (x, 0)$.

Logo Φ é um difeomorfismo local de classe C^1.

Agora do produto interno,

$$\begin{aligned}\langle v, gradF\rangle &= \langle (0, \cdots, 1) - X, gradF\rangle \\ &= \langle (0, \cdots, 1), gradF\rangle - \langle X, gradF\rangle \\ &= \frac{\partial F}{\partial a} - |gradF|^2 (p - f) \langle gradF, gradF\rangle \\ &= (p - f) - (p - f) = 0,\end{aligned}$$

concluímos que F é constante ao longo das trajetórias de v. Assim para $x \in V$,

$$f(x) = F(x, 0) = F(\Phi(t; x, 0)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $(\Phi(x), 1) = \Phi(\tilde{t}; x, 0)$ para algum $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ obtemos,

$$f(x) = F(\tilde{t}; x, 0) = F(\Phi(x), 1) = p(\Phi(x))$$

Como $x \in V$ é qualquer, a igualdade é válida em todo V. $\square$

Munidos destes dois lemas e do Teorema de Lipman Bers demonstraremos o principal resultado desta seção, o que caracteriza o conjunto nodal de uma autofunção do Laplaciano.

Teorema 3.1.2. *Suponha que M é uma variedade Riemanniana sem bordo (não necessariamente compacta). Se $f \in C^\infty(M)$ satisfaz $(\Delta + h(x)) f = 0, \quad h \in C^\infty(M)$, então* *o conjunto nodal de f é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$.*

Demonstração. Seja f nas condições do Teorema. Tomemos $p \in f^{-1}(0) \subseteq M$, utlizaremos coordenadas normais em torno de p, assim se $\tilde{f} = f \circ exp_p : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a forma local de f em coordenadas normais sabemos que

$$\overline{\Delta}\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk}(x)\sqrt{g(x)} \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_k} \right)(x) \quad \forall x \in U$$

e na origem do $\mathbb{R}^n$

$$\overline{\Delta}\tilde{f}(0) = \sum_j \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j^2}(0)$$

(ver observação 2.1.6)

Note que $\tilde{f}$ se anula em ordem finita na origem. De fato, basta notar que:

$$\Delta f(q) = h(q)f(q) \Rightarrow \overline{\Delta}\tilde{f}(x) = (h \circ exp_p)(x)\tilde{f}(x)$$

onde obtemos

$$\left|\overline{\Delta}\tilde{f}(x)\right|^2 = |h \circ exp_p(x)|^2 \left|\tilde{f}(x)\right|^2 \leq M \left|\tilde{f}(x)\right|^2$$

onde $M = max\{|h \circ exp_p(x)|\,; x \in \overline{B(0,r)} \subseteq U\}$, portanto se $\tilde{f}$ se anular em ordem infinita na origem teremos, pelo Teorema de Aronsajn, $\tilde{f} \equiv 0$ o que não ocorre.

Diante deste fato $\tilde{f}$ satisfaz todas as hipótese do Teorema de Lipman Bers. Com efeito, na equação $\left(\overline{\Delta} + h \circ exp_p(x)\right)\tilde{f} = 0$, o operador $\overline{\Delta} + h \circ exp_p(x)$ é elíptico (os coeficientes $a_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}} g^{ij}(x)\sqrt{g(x)} = g^{ij}(x) \geq 0$); os coeficientes das derivadas de primeira ordem são combinações de produtos e somas das funções g^{ij} com suas derivadas, como esta última função é $C^\infty(U)$ unido com o fato de $g = det(g_{ij})$ nunca se anular em U segue que estes coeficientes são $C^\infty(U)$; quanto ao coeficiente que acompanha f, ele é nada mais que a função h logo $C^\infty(U)$.

Segue que podemos tomar um polinômio ($p_N \neq 0$) homogêneo de grau N satisfazendo as igualdades da tese do Teorema de Lipman Bers, isto é,

$$\frac{\partial^l \tilde{f}(x)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial^l p_N(x)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} + O(|x|^{N-l+\epsilon})$$

para $l = 0, 1, 2, \quad l = i_1 + \cdots + i_n$ onde $\epsilon \in (0,1)$. Além disso $p_N(x)$ satisfaz a equação

$$\overline{\Delta}_0 p_N(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=m} a_{i_1}\cdots a_{i_n}(0)\frac{\partial^l p_N(x)}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

da igualdade $\overline{\Delta}\tilde{f}(0) = \sum_j \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j^2}(0)$ obtemos $\Delta_0 p_N(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_N(x)}{\partial^2 x_i}$ portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_N(x)}{\partial^2 x_i} = 0$$

Segue desta equação que p_N é um harmônico esférico de grau N.

A demonstração do Teorema será a partir deste momento dividida em dois casos:

PRIMEIRO CASO ($N = 1$).

De $N = 1$ obtemos que p_N é um polinômio linear e então que $df_p \neq 0$. De fato, $p_N(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ donde $\frac{\partial p_N}{\partial x_i}(x) = b_i, \quad \forall i = 1, \cdots, n$. Agora se $df_p = 0$ temos $d\tilde{f}_0 = 0$ donde $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0) = 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n$ e de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p_N}{\partial x_i}(x) + O(|x|^{1-1+\epsilon}) = b_i + O(|x|^{\epsilon}), \quad \forall i = 1, \cdots, n$ segue que $b_i = 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n$ o que implica $p_N \equiv 0$. Como $p \in f^{-1}(0) \subseteq M$ é qualquer obtemos que 0 é um valor regular de f e portanto $f^{-1}(0)$ é uma variedade C^∞ de dimensão $n - 1$, o que finda o primeiro caso.

Observemos que se M é unidimensional, isto é, $n = 1$, temos temos $p_N(x) = ax$.[5]

SEGUNDO CASO ($N > 1$).

Basta analisarmos o caso $n > 1$, pela observação anterior.

Como $p_N, \tilde{f} \in C^\infty(U)$, fazendo $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$ nas igualdades obtidas pelo Teorema de Lipman Bers temos:

$$\tilde{f}(x) = p_N(x) + O(|x|^{N-1+\epsilon})$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial p_N(x)}{\partial x_i} + O(|x|^{N-l+\epsilon})$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j} + O(|x|^{N-2+\epsilon})$$

$\forall i, j = 1, \cdots, n,\ N > 1, \quad \epsilon \in (0, 1)$. Segue pela homogeneidade de p_N ser de grau N que as derivadas parciais deste polinômio se anulam até ordem $N - 1$, para aplicarmos o Lema 3.1.2 basta mostrar que $|Grad(p)| \geq C\,|x|^{N-1}$. Com efeito, note que para $x \neq 0$,

$$|grad(p_N)| = |x|^{N-1}\left|grad(p_N)(\tfrac{x}{|x|})\right| \geq |x|^{N-1} min\{grad(p)(\xi); \xi \in S^{n-1}(1)\}$$

[5]Pois p_N é homogêneo de grau N e solução de $p_N''(x) = 0$.

Seja $C = min\{grad(p)(\xi); \xi \in S^{n-1}(1)$, para garantirmos que C não é nulo, necessitamos verificar que $grad(p)(\xi) \neq 0$, para todo $\xi \in S^{n-1}(1)$.

Observemos que, para o caso em que $n = 2$, os harmônicos esféricos têm a forma básica $p_N(r,\theta) = r^N(a_N \cos N\theta + b_N \text{ sen } N\theta)$. Então $(\partial/\partial r)(p_N) = Nr^{N-1}(a_N \cos N\theta + b_N \text{ sen } N\theta)$ e $(\partial/\partial\theta)(p_N) = r^N(-a_N \text{ sen } \theta + b_N \cos\theta)$. Logo não há (r,θ), $r \neq 0$, tal que $(\partial/\partial r)(p_N) = (\partial/\partial\theta)(p_N) = 0$. Portanto $grad(p_N)(\xi) \neq 0$, neste caso. Admitiremos a propriedade para $n > 2$. Fato admitido pelo autor.

Como $N > 1$ existe um difeomorfismo $\Phi : V \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^1 fixando a origem onde V, W são abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{f}(x) = p_N(\Phi(x)) \quad \forall x \in V$.

Prosseguimos a demonstração fazendo indução em n.

Suponhamos o teorema válido para n. Provaremos para $n+1$, a igualdade $\tilde{f}(x) = p_N(\Phi(x)) \quad \forall x \in V$ mostra que o conjunto nodal de $\tilde{f}$ é localmente C^1 difeomorfo ao conjunto nodal de p_N. Relembremos que no bojo da demonstração do Lema 3.1.1 obtemos,

$$p_N^{-1}(0) = \bigcup_{t>0} \left\{t\xi; \xi \in S^{n-1}(1) \quad e \quad p_N(\xi) = 0\right\} \cup \{0\}$$

e $p_N|_{S^{n-1}}$ é uma autofunção do Laplaciano em S^{n-1}. Aplicando então a hipótese de indução[6] conluímos que $p_N|_{S^{n-1}}^{-1}(0) = \{\xi \in S^{n-1}(1); \quad p_N(\xi) = 0\}$ é uma variedade C^∞ de dimensão $n-2$ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-2$.

A aplicação,

$$\Psi : p_N|_{S^{n-1}}^{-1}(0) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$$

$$(\xi, t) \mapsto \Psi(\xi, t) = t.\xi$$

é de classe C^∞ na parte suave de seu domínio, pois é a restrição da função com a mesma lei de formação em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ a uma variedade C^∞ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-2$.

Pela igualdade,

$$p_N^{-1}(0) = \bigcup_{t>0} \left\{t\xi; \xi \in S^{n-1}(1) \quad e \quad p_N(\xi) = 0\right\} \cup \{0\} = Im(\Psi)$$

[6]Pois a restrição de p_N é $C^\infty(S^{n-1}(1))$ e podemos tomar neste caso $h \equiv 0$.

obtemos que o conjunto nodal de p_N é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$ já que Ψ é difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (note que a origem tem dimensão zero).

Agora da relação, $\tilde{f}(x) = p_N(\Phi(x)) \quad \forall x \in V$ onde $\Phi : V \subseteq \mathbb{R}^n \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^1 fixando a origem garante que $\tilde{f}^{-1}(0) \bigcap V$ é uma variedade de dimensão $n-1$ e de classe C^1 a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$. Seja $\pi \subseteq W$ o conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$ onde $p_N^{-1}(0) \bigcap W$ não é uma variedade C^∞ então $M_0 = p_N^{-1}(0) \bigcap W \backslash \pi$ é variedade C^∞ de dimensão $n-1$. Pelo difeomorfismo Φ ser de classe C^1, $\left(\tilde{f}^{-1}(0) \bigcap V\right) \backslash \Phi^{-1}(\pi) = \Phi^{-1}(M_0)$ é uma variedade de dimensão $n-1$ e de classe C^1.

Mostraremos que $\Phi^{-1}(M_0)$ é variedade C^∞. Com efeito, dado $y \in \Phi^{-1}(M_0)$ segue $\tilde{f}(y) = 0$ e $\Phi(y) \in M_0$. Aplicando o Teorema de Lipman Bers à função $\tilde{f}$ definida na vizinhança V da origem obtemos que $\tilde{f}(x) = p_{N'}(x)$, para todo x suficientemente próximo de y onde $p_{N'}$ é um polinômio homogêneo de grau N' e da mesma maneira que anteriormente mostramos que $p_{N'}$ é um harmônico esférico de grau N' em $\mathbb{R}^n$ e que existe um difeomorfismo local Φ' tal que $\tilde{f}(x) = p_{N'}(\Phi'(x))$ para todo x suficintemente próximo de y.

Se $N' = 1$ analogamente ao caso $N = 1$ deste Teorema mostra-se que $\tilde{f}^{-1}(0) \bigcap V$ é uma variedade C^∞ donde obtemos pelo difeomorfismo da exp_p que $f^{-1}(0)$ é uma variedade C^∞.[7]

Terminaremos esta afirmação mostrando que o caso $N' > 1$ não ocorre. Com efeito, se isto ocorre então pelo Lema 3.1.1 $p_{N'}^{-1}(0)$ possui uma singularidade na origem, e pelo difeomorfismo Φ' obtemos que $\tilde{f}^{-1}(0)$ tem uma singularidade em y contrariando o fato de M_0 ser uma variedade de classe C^1.

Segue, pelo fato de exp_p ser um difeomorfismo que, em um aberto $A = exp_p(V)$[8] $f^{-1}(0) \bigcap A$ é uma variedade de dimensão $n-1$ e classe C^∞ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$ e isto mostra que $f^{-1}(0)$ satisfaz localmente a tese do teorema em cada $p \in M$. Como este foi tomado arbitrariamente, obtemos o desejado. $\square$

[7] Note que neste caso não existe o conjunto fechado onde não há regularidade

[8] Contido na vizinhança normal de M em p

Observação 3.1.1. *Note que, na argumentação acima, a forma local da $\tilde{f}$ é a própria função próximo de y e que N' não é necessariamente igual a N pois estamos aplicando Lipman Bers com a origem sendo o ponto y, assim a igualdade pode ocorrer, mas nem sempre.*

3.2 O Teorema do Domínio Nodal de Courant

Considere M variedade Riemanniana. Seja $\aleph$ o conjunto dos domínios nodais de uma autofunção f. O próximo teorema mostra uma limitação para a $\#\aleph$, para demonstrá-lo utilizaremos a regularidade do conjunto nodal de uma autofunção obtida na seção anterior.

Teorema 3.2.1. *Seja f_i a i-ésima autofunção do operador de Laplace então: para o PMF, $\#\aleph \leq i$ e para o PML $\#\aleph \leq i+1$.*

Demonstração. Seja f_i uma i-ésima autofunção do Laplaciano. Para o caso do PML pode acontercer de $i = 0$ mas neste caso ou $\#\aleph = 0$ [9] ou $\#\aleph = 1$[10]. Portanto vamos nos preocupar com o caso $i > 0$. Suponhamos que $\#\aleph > i$ para o PMF e $\#\aleph > i+1$ para o PML. Enumerando os domínios nodais da seguinte maneira, $D_1, \cdots, D_i, D_{i+1}$ para o PMF e $D_1, \cdots, D_{i+1}, D_{i+2}$ para o PML.

Para cada domínio, definamos as funções em M

$$f_i^j = f_i \text{ em } D_j$$

$$f_i^j \equiv 0 \text{ em } M \backslash D_j$$

onde $j = 1, \cdots, i+1$ no caso PMF e $j = 1, \cdots, i+2$ no caso do PML.

Mostremos que existem números reais $a_1, \cdots, a_i$ e não todos nulos tais que a função $f = \sum_{j=1}^{i} a_j f_i^j$ é perpendicular ao espaço gerado por $\{f_1, ..., f_{i-1}\}$ no caso PMF e $a_1, \cdots, a_{i+1}$ reais não todos nulos tais que $f = \sum_{j=1}^{i+1} a_j f_i^j$ é perpendicular ao conjunto $\{f_0, ..., f_{i-1}\}$ no caso do PML. Com efeito, procuramos uma i-upla no caso do PMF e um i+1-upla no caso do PML tais que

[9] Quando $f \equiv 0$

[10] Quando $f = cte \neq 0$, assim f não muda de sinal

$$\langle f, f_k \rangle = 0$$

$\forall k = 1, \cdots, i-1$ no caso do PMF e $\forall k = 0, \cdots, i-1$ no caso do PML, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{i} a_j \left\langle f_i^j, f_k \right\rangle = 0 \;\; \forall k = 1, \cdots, i-1 \text{ no caso do PMF e}$$
$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \left\langle f_i^j, f_k \right\rangle = 0 \;\; \forall k = 0, \cdots, i-1 \text{ no caso do PML.}$$

Observemos que os produtos internos $\left\langle f_i^j, f_k \right\rangle$ não são todos nulos, pois $f_i^j = f_j$ em D_j. Então as relações acima significam que $(a_1, ..., a_i)$ e $(a_1, ..., a_{i+1})$ são, respectivamente, soluções de sistemas lineares homogêneos com número de equações menor que o número de incógnitas, portanto, em cada caso, há soluções não triviais.

Sabemos pelo Teorema de Rayleigh que o autovalor $\lambda_i \in \mathbb{R}$ satisfaz a desigualdade

$$\lambda_i \leq \frac{D\,[g, g]}{\|g\|^2}$$

onde $D[g, g] = \displaystyle\int_M \left\langle gradg, grad\tilde{f} \right\rangle dV$ e $g \in \Im(M)$ (é não nula e perpendicular ao conjunto $\{f_1, \cdots, f_{i-1}\}$ no caso do PMF e perpendicular ao conjunto $\{f_0, ..., f_{i-1}\}$ no caso do PML). Agora calculando,

$$D[f, f] = \int_M \langle gradf, gradf \rangle \, dV = \int_M \left\langle gradf, grad(\sum_{j=1}^{i} a_j f_i^j) \right\rangle dV.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D[f, f] &= \sum_{j=1}^{i} a_j \int_M \langle gradf, gradf_i^j \rangle dV \\ &= \sum_{j=1}^{i} a_j \int_{D_j} \langle gradf, gradf_i^j \rangle dV \\ &= \sum_{j=1}^{i} a_j \int_{D_j} \left\langle grad(\sum_{k=1}^{i} a_k f_i^k), gradf_i^k \right\rangle dV \\ &= \sum_{j,k=1}^{i} a_j a_k \int_{D_j} \langle gradf_i^k, gradf_i^j \rangle dV \end{aligned}$$

Lembremos que $\int_{D_j} \left\langle gradf_i^k, gradf_i^j \right\rangle dV = \int_{D_j} \Delta(f_i^k) f_i^j dV = \lambda_i \int_{D_j} \left\langle f_i^j, f_i^k \right\rangle dV$, em que f_i é a auto função associada a λ_i.

Então,

$$\int_{D_j} \left\langle gradf_i^k, gradf_i^j \right\rangle dV = 0 \;\; quando \;\; k \neq j \text{ pois } f_i^k \equiv 0 \text{ em } D_j \text{ neste caso,}$$

$$\int_{D_j} \left\langle gradf_i^k, gradf_i^j \right\rangle dV = \int_{D_j} |f_i|^2 \, dV, \; k = j \text{ pois } f_i^k = f_i^j = f_i \text{ em } D_j.$$

donde obtemos

$$D[f,f] = \sum_{j=1}^{i} a_j^2 \int_{D_j} \left|gradf_i^j\right|^2 dV = \sum_{j=1}^{i} \lambda_i a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV \text{ no caso do PMF,}$$

e no caso do PML uma conta análoga mostra que

$$D[f,f] = \sum_{j=1}^{i+1} \lambda_i a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV.$$

Vamos ao cálculo da

$$\|f\|^2 = \int_M \langle f, f\rangle \, dV = \sum_{j,k=1}^{i} \int_{D_j} a_i a_j \left\langle f_i^j, f_i^k \right\rangle dV = \sum_{j=1}^{i} a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV$$

no caso do PMF.

$$\|f\|^2 = \int_M \langle f, f\rangle \, dV = \sum_{j,k=1}^{i+1} \int_{D_j} a_i a_j \left\langle f_i^j, f_i^k \right\rangle dV = \sum_{j=1}^{i+1} a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV$$

no caso do PML.

Portanto o quociente,

$$\frac{D[f,f]}{\|f\|^2} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{i} \lambda_i a_j^2 \int_{D_j} |f_i|^2 \, dV}{\displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV} = \lambda_i$$

no caso do PMF.

$$\frac{D[f,f]}{\|f\|^2} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{i+1} \lambda_i a_j^2 \int_{D_j} |f_i|^2 \, dV}{\displaystyle\sum_{j=1}^{i+1} a_j^2 \int_{D_j} \left|f_i^j\right|^2 dV} = \lambda_i$$

Consequentemente pelo Teorema do Max-Min f é uma i-ésima autofunção não nula do Laplaciano e portanto $f \in C^\infty(M)$ e satisfaz $\Delta f + \lambda_i f = 0$. Contudo, o fato de $f \equiv 0$ em D_{i+1} no caso do PMF e em D_{i+2} no caso do PML, os quais são abertos de M em cada caso, e vimos na seção anterior que $f^{-1}(0)$ é uma variedade $C^\infty(M)$ de dimensão $n-1$ a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$, se este contiver algum aberto, sendo uma variedade terá que ter dimensão n o que gera uma contradição. Portanto, resta a f ser identicamente nula, mas isto não ocorre pois f é não nula.

Isto finda a demosntração do Teorema. □

Corolário 3.2.1. *Para o caso do PMF temos # dos domínios nodais de* f_2 *é igual a 2 Para o caso do PML, # dos domínios nodais de* f_1 *é igual a 2.*

Demonstração. Já sabemos pelo teorema anterior que # dos domínios nodais é menor ou igual a 2 resta mostrar que não é 0 e nem 1, para isto é suficiente mostrar que a autofunção muda de sinal em M em ambos os casos. Lembremos que no caso do PML f_1 é perpendicular a $f_0 = C$ onde C é um constante real não nula. Portanto,

$$\int_M f_1 C \, dV = \langle f_1, C \rangle = 0$$

Então, $\int_M f_1 \, dV = 0$. Como f é não nula e contínua, segue que f muda de sinal em M. No caso do PMF, f_2 é perpendicular a f_1 o que implica $\int_M f_1 f_2 \, dV = 0$. Agora lembremos que neste caso f_1 tem no máximo 1 domínio nodal, portanto esta não muda de sinal em M. Logo, para que a integral se anule é preciso que f_2 mude de sinal em M. □

Observação 3.2.1. *Note que se* f *é uma autofunção do Laplaciano para o PML, então* f *é uma* 1*-autofunção de cada um de seus domínios nodais, com efeito,* f *não se anula em cada um de seus domínios nodais, se ela fosse uma* k*-autofunção,* $k > 1$*,* f *teria que se anular em seu domínio nodal, o que não ocorre.*

Esta observação mostra que podemos reduzir problemas de i-autovalores no PML a problemas de 1-autovalor no PMF.

3.3 Geometria das linhas nodais e uma restrição ao grau de p_N

Em uma breve leitura notamos que a topologia dos conjuntos nodais é muito complicada. Contudo, quando a dimensão de M é dois o conjunto nodal torna-se uma linha nodal, e fica mais mauseável. Estudaremos nesta seção algumas propriedades das linhas nodais.

Definição 3.3.1. *Dizemos que uma variedade Riemanniana* M *é uma superfície Riemanniana quando a dimensão de* M *é 2.*

Teorema 3.3.1. *Suponha que M é uma superfície Riemanniana. Então, para qualquer solução* [11] *da equação $(\Delta + h(x))f = 0$, $h \in C^\infty(M)$, as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

i) Os pontos críticos das linhas nodais são isolados[12]*.*

ii) As linhas nodais formam um sistema equiangular[13] *quando se encontram.*

iii) As linhas nodais consiste de um número finito de subvariedades fechadas de dimensão 1, C^2-imersas. Portanto quando M é compacta, elas são um número finito de círculos C^2-imersos.

iv) No ponto de encontro de duas linha nodais, a curvatura geodésica é zero.

Demonstração. i) Seja f uma autofunção. Se $f = cte \neq 0$ então o resultado é trivialmente válido. Se f é não constante, segue pelo teorema 3.1.2 que a linha nodal é uma variedade C^∞ de dimensão 1 a menos de um conjunto fechado de dimensão menor que 1, ou seja, o conjunto dos pontos críticos de $f^{-a}(0)$ tem dimensão zero e é fechado.

Em torno do ponto crítico, o conjunto nodal de f é, como sabemos, localmente C^1 difeomorfo ao conjunto nodal de um polinômio harmônico esférico p_N de grau N em torno da origem. Lembremos que as linhas nodais de p_N são dadas por

$$p_N^{-1}(0) = \bigcup_{t>0} \left\{ t\xi ; \xi \in S^1(1) \quad e \quad p_N(\xi) = 0 \right\} \cup \{0\} .$$

Tomando a expressão básica, $P_N(r,\theta) = r^N(a_N \cos N\theta + b_N \text{sen } N\theta)$. Então, para $r \neq 0$, $P_N = 0 \Leftrightarrow \langle (a_N, b_N), (\cos N\theta, \text{sen } N\theta) \rangle = 0$. Tomemos o menor valor θ satisfazendo a equação. Logo, os valores $\theta_k = \theta + \frac{2k\pi}{N}$, $k = 0, 1, ..., N-1$, satisfazem a equação. Segue da homogeneidade que o conjunto nodal de p_N consiste de N retas quando N é ímpar e $\frac{N}{2}$ retas quando N é par, formando um conjunto equiangular de retas que passam pela origem.

ii) A afirmação é válida quando as linhas nodais são livres de pontos críticos. No caso de existência de pontos críticos, vimos que as linhas nodais são variedades C^∞ de dimensão 1, a menos dos pontos críticos. Em torno do ponto crítico, as linhas nodais de M são C^1 difeomorfas às linhas nodais do esférico harmônico (lembremos que Φ é tal

[11] Não identicamente nula $C^\infty(M)$.

[12] Note que os pontos críticos de $f^{-1}(0)$ também são pontos críticos da função f.

[13] Ou seja, um conjunto de linhas que se interceptam em um ponto formando ângulos iguais.

difeomorfismo). Como $p_N^{-1}(0)$ constitui um sistema equiangular na origem o resultado segue por $d\Phi_0 = Id$ e $d(exp_p)_0 = Id$.
iii) e iv) Relembremos que nas linhas nodais de $\tilde{f}$ em um ponto $p \in \tilde{f}^{-1}(0)$ crítico o polinômio homogêneo harmônico esférico p_N é de grau $N \geq 2$ (pois se fosse 1 teríamos $f \in C^\infty$ em uma vizinhança de p). Como as derivadas parciais de primeira e segunda ordens de $\tilde{f}$ e p_N coincidem em 0[14] obtemos que a ordem de contato da linha nodal de $\tilde{f}$ e a linha nodal de p_N[15] é igual a 2. Como o conjunto nodal de p_N são retas passando pela origem elas são levadas pela exp_p em geodésicas de M, segue portanto iii).

Quanto a iv) relembremos que, $f^{-1}(0)$ é uma variedade C^∞ de dimensão 1 a menos do conjunto de pontos críticos, nos pontos críticos pela ordem de contato com o sistema equiangular ser 2 obtemos que $f^{-1}(0)$ é de classe C^2 nestes pontos. Como f é contínua segue que $f^{-1}(0)$ é um conjunto fechado em M. Portanto, as linhas nodais satisfazem a primeira afirmativa de iii). Quando M é compacta as linhas nodais são um conjunto de variedades compactas de dimensão 1. Como M é sem bordo[16] segue que as linhas nodais constituem um conjunto de círculos C^2-imersos.

□

Estudaremos a partir deste momento as restrições globais das autofunções. Já estudamos uma restrição global (Teorema do Domínio Nodal de Courant). Estudaremos mais uma restrição global, a da multiplicidade do i-ésimo autovalor. Antes disto precisamos de alguns lemas.

Lema 3.3.1. *Suponha que M é uma superfície Riemanniana de gênero g e $\phi_j : S^1 \to M$, $1 \leq j \leq 2g+k$, $k \geq 1$ é uma imersão C^1 por partes tal que $\phi_i(S^1) \cap \phi_j(S^1)$, $i \neq j$ consiste de um número finito de pontos. Então $M \backslash \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+k}(S^1)$ tem pelo menos $k+1$ omponentes conexas.*

Demonstração. Assumamos que o Lema é válido para $k = 1$ então mostraremos por indução que ele é válido para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, suponhamos que ele é válido para $k = r$ temos que mostrar que ele é válido para $k = r+1$. Segue pela hipótese de indução que $M \backslash \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+r}(S^1)$ tem pelo menos $r+1$ componentes conexas.

[14] Pois pelo Teorema de Lipman Bers por $N \geq 2$ acarreta no afirmado já que o erro é $O(|x|^{N+\epsilon})$

[15] Sistema equiangular

[16] veja hipóteses do teorema 3.1.2

Basta então mostrar que $\phi_{2g+(r+1)}(S^1)$ divide uma destas componentes conexas em pelo menos dois abertos, mais precisamente, se A é uma das componentes conexas então $A\backslash\phi_{2g+(r+1)}(S^1)$ tem pelo menos duas componentes conexas. Para isto suponha o contrário então $\phi_{2g+(r+1)}(S^1)$ não intercepta $M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+r}(S^1)$.[17] Portanto $\phi_{2g+(r+1)}(S^1) \subseteq \phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+r}(S^1)$ e, como $\phi_{2g+(r+1)}$ é localmente injetiva, o conjunto $\phi_{2g+(r+1)}(S^1)$ é infinito em M, logo existe um $i \in \{1,\cdots,2g+r\}$ tal que $\phi_{2g+(r+1)}(S^1)\cap\phi_{2g+i)}(S^1)$ é infinito, o que gera um absurdo com a hipótese. Então para obtermos o Lema é suficiente mostrar o caso $k=1$.

Para tal objetivo, utilizamos a propriedade de que $H_1(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}$ $(2g\ \ vezes)$ onde $\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros e que cada ϕ_j define um ciclo em M. Como o conjunto $H_1(M;\mathbb{Z})$ tem dimensão $2g$, o conjunto $\{\phi_j; 1\leq j\leq 2g+1\}$ é linearmente dependente e portanto existem $n_1,\cdots,n_{2g+1}$ inteiros não todos nulos tais que a classe de homologia definida por $\displaystyle\sum_{j=1}^{2g+1} n_j\phi_j$ é a classe nula.

Observe que $n_j\phi_j$ pode ser representado por $\phi_j\circ\beta_{n_j}$ onde $\beta_{n_j}: S^1\to S^1$ é dada por $\beta_{n_j}(e^{i\theta}) = e^{in_j\theta}$. Isto por que $n_j\phi_j$ representa o produto, que está sempre definido quando o extremo do primeiro coincide com o ponto inicial do segundo. Como ϕ_j é fechado, os pontos inicial e final coincidem, logo o produto dele com ele mesmo está definido, quantas vezes desejarmos. Mas o produto n_j vezes é homotópico ao caminho obtido pela reparametrização de β_{n_j} correspondendo a n_j voltas, ou seja, se definirmos $\widetilde{\phi}_j(\theta) = \phi(e^{in_j\theta})$.

Como os n_j não são todos nulos a menos de uma rearrumação dos índices podemos assumir $n_1\neq 0$. Afirmamos que existe um $x_0\in\phi_1(S^1)$ tal que ϕ_1 é um difeomorfismo local de classe C^1 em uma vizinhança de $\phi_1^{-1}(x_0)$ com $x_0\notin\phi_2(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+k}(S^1)$. Com efeito, para obter este ponto basta notar que $\phi_1(S^1)$ intercepta as outras curvas em um número finito de pontos, logo como $\phi_1(S^1)$ é infinito, segue que existe um $x_0\in\phi_1(S^1)\setminus$ $(\ \phi_2(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+k}(S^1))$. Como ϕ_1 é uma imersão e o conjunto $\phi_2(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+k}(S^1)$ é fechado em M obtemos uma vizinhança de $\phi_1^{-1}(x_0)$ onde ϕ_1 é um difeomorfismo.

Existe $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ injetiva de classe C^1 tal que

$$\alpha(-1,1)\cap(\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+k}(S^1)) = \{\alpha(0)\} = \{x_0\}$$

[17]Pois do contrário ele dividiria a componente conexa interceptada em pelo menos dois abertos já que é uma curva fechada em M e a componente conexa é um aberto.

e o vetor tangente de α em x_0 é perpendicular ao vetor tangente de ϕ_1 em x_0. Com efeito, seja v o vetor tangente a ϕ_1 e $w \in T_{x_0}M$ um vetor perpendicular a v[18], sabemos que existe $\tilde{\alpha} : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to M$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ e $\alpha'(0) = w$. Como $\alpha'(0) = w \neq 0$ podemos supor $\tilde{\alpha}$ injetiva. Procuraremos $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{\alpha}(-\epsilon, \epsilon) \cap \phi_1(S^1) = \{x_0\}$ suponhamos o contrário então para todo $\epsilon > 0$ esta interseção contém algum ponto além de x_0, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja x_n tal ponto tomando $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Pela continuidade de ϕ_1, $x_n \to x_0$. Note $x_n \in \tilde{\alpha}(-\epsilon, \epsilon)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ obtemos w paralelo a v (basta calcular o vetor tangente w em cartas locais). Logo existe um $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ satisfazendo o desejado. Tomamos $\alpha : (-1, 1) \to M$ dada por $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(\dfrac{1}{\epsilon}t)$ e esta função satisfaz o desejado.

Finalmente, suponhamos que $M \backslash \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ é conexo.

Denotando t o parâmetro de α, para cada t, podemos construir, para cad t uma curva C^1 $\beta_t : [-1, 1] \to M \setminus \phi_2(S_1) \cup ... \cup \phi_{2g+1}(S_1)$ satisfazendo: $\beta_t(-1) = \beta_t(1) = \alpha(t)$; β_t restrita a $(-1, 1)$ é injetiva; para $t = 0$, a imagem de β_0 é $\phi_1(S^1)$. De fato, $M \backslash \phi_2(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ é aberto conexo e portanto existe uma poligonal R a qual liga $\beta(-1)$ a $\beta(1)$. Como esta poligonal é compacta existe um aberto $A \subseteq M \backslash \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ contendo esta poligonal. Podemos então obter β de classe C^1 contida em A. Utilizando a compacidade de M e coordenadas locais, podemos construir tais curvas de forma que a aplicação $F : (-1, 1) \times [-1, 1) \to M$, $F(t, s) = \beta_t(s)$ seja C^1 e injetiva. Isto implica na existência de uma aplicação injetiva de classe C^1, $\Phi : (-1, 1) \times S^1 \to M \backslash \phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \phi_{2g+1}(S^1)$ tal que $\Phi((-1, 1) \times S^1) \cap \phi_1(S^1)$ é uma pequena vizinhança de $\phi_1(S^1)$ em torno de x_0, que em coordenadas locais $\Phi(t, s) = F(t, s)$.

Seja $f \in C_0^\infty(-1, 1)$ uma função não-nula e não negativa tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

Então $f(t)dt$ é uma forma de grau 1 fechada em $(-1, 1) \times S^1$. Lembremos que, em coordenadas, uma forma ω de grau 1 em $(-1, 1) \times S^1$ é uma aplicação que associa a cada (t, s) a aplicação $\omega(t, s)$, a qual é um elemento do dual do espaço tangente a $(-1, 1) \times S^1$, no ponto (t, s). Como as diferenciais dt e ds formam, em cada ponto, uma base para o referido espaço, escrevemos $\omega(t, s) = a(t, s)\, dt + b(t, s)\, ds$, em que a e b são funções em $(-1, 1) \times S^1$ com valores reais. Dizemos que a 1-forma ω é fechada quando $\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\partial b}{\partial t}$. Logo $f(t)dt$ é fechada[19].

Como $\Phi : (-1, 1) \times S^1 \to \Phi((-1, 1) \times S^1)$ é injetiva e C^1, Φ^{-1} induz a aplicação

[18] Existe tal w pois $dim(M) = 2$.

[19] Pois $\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\partial b}{\partial t} = 0$

$(\Phi^{-1})^*$ entre formas de $(-1,1)\times S^1$ e $\Phi((-1,1)\times S^1)$, assim definida: dada ω 1-forma de $(-1,1)\times S^1$, a 1-forma $(\Phi^{-1})^*(w)$ é tal que, para cada ponto $\Phi(t,s)$, e v vetor tangente a $(-1,1)\times S^1$ em (t,s), $[(\Phi^{-1})^*(\omega)](t,s)(v)=\omega(t,s)(d\Phi^{-1}_{\Phi(t,s)}(v)$. Em nosso caso,$[(\Phi^{-1})^*(f\,dt)](t,s)(v)=f(t)dt(d\Phi^{-1}_{\phi(t,s)}(v))$.

As formas atuam sobre as classes de homologia, no caso caminhos, integrando a forma no caminho. Sendo $\sum_{j=1}^{2g+1} n_j\phi_j=0$ (isto significa que fazemos o percurso voltando ao ponto de partida) temos

$$(\Phi^{-1})^*(f(t)dt)(\sum_{j=1}^{2g+1} n_j\phi_j)=0$$

Entretanto,

$$(\Phi^{-1})^*(f(t)dt)(\sum_{j=1}^{2g+1} n_j\phi_j)=n_j\int_{-1}^{1} f(t)dt\neq 0$$

a diferença segue por f ter o suporte contido no intervalo $(-1,1)$, as últimas duas estimativas geram um absurdo. Portanto $M\backslash\phi_1(S^1)\cup\cdots\cup\phi_{2g+1}(S^1)$ é desconexo. $\square$

Definição 3.3.2. *Suponha que* Ψ *satisfaz* $(\Delta+h(x))\Psi=0,\quad h\in C^\infty(M)$. *Dizemos que a ordem de nulidade de* Ψ *em* x_0 *é* N *quando a forma local de* Ψ *na carta via* exp_{x_0} *é aproximada por um polinômio homogêneo* p *de grau* N *perto da origem com* p *sendo o polinômio de menor grau com esta propriedade.*

Observação 3.3.1. *I. Note que pelo teorema de Lipman Bers, a ordem de nulidade de qualquer autofunção em qualquer ponto de* M *está bem definida.*

Lema 3.3.2. *Suponha que* M *é uma superfície Riemanniana compacta e* Ψ *é uma auto função. Sejam* $x_0\in M$ *e a ordem de nulidade de* Ψ *em* x_0 *igual a* k *ímpar. Então, podemos obter* $\Phi_i: S^1\to M$, $1\le i\le k$, *satisfazendo as hipóteses do lema 2.3.1 e* $\Phi_1(S^1)\subseteq\Psi^{-1}(0)$.

Demonstração. Seja $\tilde{\Psi}$ a forma local de Ψ na carta $exp^{-1}_{x_0}$. Então já sabemos pela hipótese que o polinômio homogêneo dado por Lipman Bers o qual aproxima $\tilde{\Psi}$ tem grau k. Segue do conteúdo da demonstração do teorema 3.3.1, parte i), que o conjunto nodal de p_k é a união de k retas passando pela origem, o qual é C^1 difeomorfo a linha nodal de $\tilde{\Psi}$. Sabemos pelo item ii) do teorema 3.3.1 que as linhas nodais de Ψ são círculos C^2-imersos.

Note que cada reta do domínio nodal de p_k é levada pelo difeomorfismo local $exp_p \circ \Phi$ em um círculo C^2-imerso do domínio nodal de Ψ. Como existem k retas passando pela origem obtemos que existem pelo menos k círculos C^2-imersos passando por x_0, logo existem pelo menos k imersões $\Phi : S^1 \to M$ tais que $\Phi S^1 \subseteq \Psi^{-1}(0)$. Agora como os pontos de encontro dos círculos C^2-imersos são pontos críticos do conjunto nodal de Ψ obtemos que os pontos de encontro são finitos, já que o conjunto dos pontos críticos é constituído de pontos isolados em uma variedade compacta. $\square$

Já estamos preparados para demonstrar um teorema que limita o grau do polinômio homogêneo o qual aproxima a forma local da autofunção próximo da origem.

Teorema 3.3.2. *Suponha que M é uma superfície Riemanniana compacta de gênero g, e Ψ é a i-ésima autofunção. Seja $x_0 \in M$ com $\Psi(x_0) = 0$. Então, a ordem de nulidade de Ψ em x_0 não pode ser $2g + k$, $k > i$ e k ímpar.*

Demonstração. Suponhamos que a ordem de nulidade em algum $x_0 \in M$ seja $2g+k$ onde $k > i$ e k ímpar. Então pelo lema 3.3.2 podemos obter $\Phi_j : S^1 \to M$, $1 \leq j \leq 2g + k$ satisfazendo as hipóteses do lema 3.3.1 e com $\Phi_j(S^1) \subseteq \Psi^{-1}(0)$. Portanto pelo lema 3.3.1 obtemos que $M \backslash \big(\Phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \Phi_{2g+k}(S^1)\big)$ tem pelo menos $k + 1$ componentes conexas.

Notemos que a autofunção muda de sinal em qualquer vizinhança de seus zeros desde que este seja interior a M. Com efeito, se não mudasse de sinal então teríamos um ponto $x_0 \in int(M)$ o qual seria ponto de mínimo local ou ponto de máximo local, o que acarretaria que a representação local da autofunção teria um ponto de mínimo ou de máximo local, mas a forma local satisfaz uma equação elíptica (forma local do Laplaciano) e então não possui máximo ou mínimo interiores a menos que seja constante, mas neste caso teríamos a autofunção uma 0-autofunção.

Agora como Ψ se anula em $\Phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \Phi_{2g+k}(S^1)$ temos que ela muda de sinal em qualquer vizinhança de um ponto $x \in \Phi_1(S^1) \cup \cdots \cup \Phi_{2g+k}(S^1)$, portanto cada componente conexa de $M \backslash \big(\Phi_1 S^1 \cup \cdots \cup \Phi_{2g+k}(S^1)\big)$ contém pelo menos uma de $M \backslash \Psi^{-1}(0)$. Donde, $M \backslash \Psi^{-1}(0)$ tem pelo menos $k + 1$ componentes conexas.

Por outro lado, sabemos pelo Teorema do Domínio Nodal de Courant que $M \backslash \Psi^{-1}(0)$ tem no máximo $i + 1$ componentes conexas, mas $i + 1 \leq k < k + 1$ um absurdo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Aronsajn, N., *A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pure Appl. 36 (235-249), 1957.

[2] Bartle, R. G., *Elementos de Análise Real*(tradução Alfredo A. de Farias UFMG), Campus, 1983.

[3] Berger M., Gauduchon P. e Mazet E., *Le Spectre d'une Variété Riemannienes*, Springer-Verlag, 1974.

[4] Bérard, P. H., *Lectures on Spectral Geometry*, IMPA (XV Colóquio Brasileiro de Matemática), 1985.

[5] Bers, L., *Local behaviour of solution of general linear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math 8 (473-496), 1955.

[6] Castro Jr., A. A., *Curso de Teoria da Medida*, Projeto Euclides SBM, 2004.

[7] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press INC, 1984.

[8] Cheng, S. Y., *Eigenfunctions and Nodal Sets*, Comment. Math Helvetici 51 (43-45), 1976.

[9] Do Carmo, M. P.,*Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides SBM, 2005.

[10] Gallot, S., Hullin, D. e Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1993.

[11] Guillemin, V. e Polack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[12] Lima, E. L.,*Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas SBM 2007.

[13] Stein E. M. e Weiss G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

[14] Thayer, J.,*Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, 2007.