Universidade Federal do Rio de Janeiro

ALGUNS TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO PARA HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS EM FORMAS ESPACIAIS

Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Orientadora: Walcy Santos

Rio de Janeiro

Agosto de 2008

Espinoza Peñafiel, Carlos Diosdado.
"Alguns teoremas de classificação para Hipersuperfícies Compactas em Formas Espaciais" / Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel. Rio de Janeiro : UFRJ/IM, 2008.
xi, 104f. ; 30cm.
Dissertação (Mestrado) - UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Matemática da UFRJ, 2007.

Orientador: Dra. Walcy Santos .
Referencia: f.102-4
1. Geometria Diferencial- Tese. I. Santos, Walcy
II. Universidade Federal de Rio de Janeiro.
Instituto de Matemática. III Titulo.

E77a
2008

A minha mãe Rosa, minha esposa Abigail e meu pai Diosdado

"Inclina hoy la cabeza ante los libros para que mañana no la inclines ante los hombres..."

minha mãe Rosa .

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe pelo amor, carinho e amizade com que sempre me brindou, a meu pai por mostrar-me o caminho certo, a minha esposa Abigail que em todo momento me ajudou tanto na matemática quanto na vida pessoal, a meus irmãos Alex e Jenny por serem meus irmãos sempre, à Mamita (minha avô) que me ensinou que existem pessoas justas, bondosas e sabias que sempre estão prestes a ajudar, a minha tia Maria, Joel, Melissa e Vanessa por me receberem no seu lar, a minha sogra Ana que prepara uns deliciosos churrascos na sua casa, aos meus cunhados Jonathas e Raquel pelo carinho recebido, a toda minha familia que sempre foi e sempre será importante para mim...

Agradeço à professora Walcy Santos (Universidade Federal de Rio de Janeiro) que me orientou com muita paciência e me corrigiu o espanhol sempre com um sorriso no rosto, ao professor Ricardo Sá Earp (Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro) que com sua experiência e conselhos me motivou a ser matemático o que estou decidido a ser em um tempo não muito distante, ao professor Luis Carrillo Díaz (Universidad Nacional Mayor de San Marcos) que me orientou a continuar estudando em uma pós-graduação aqui no Brasil, ao professor, Tomás Núñez Lay que me inspirou à continuar nesta carreira tão bonita e dura como é a Matemática...

A capes pelo apoio financeiro, a meus amigos, á secretaria de pós-graduação da Matemática da UFRJ, a todos que de uma ou outra forma ajudarão no término desta dissertação.

Resumo

ALGUNS TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO PARA HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS EM FORMAS ESPACIAIS

Alguns teoremas de classificação para 2008 hipersuperfícies compactas em formas espaciais

Carlos Diosado Espinoza Peñafiel

Orientadora: Walcy Santos

Neste trabalho, primeiro estudaremos o operador auto-adjunto Cheng-Yau $\Box$ para um dado campo tensorial Codazzi $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ em uma variedade Riemanniana. Como uma aplicação vamos obter uma classificação das variedades Riemannianas compactas n-dimensionais imersas em uma forma espacial com uma certa condição sobre a curvatura média observando que a segunda forma fundamental é um tensor Codazzi em M e aplicando o estudo prévio.

Palavras-Chave: Tensor Codazzi, Hipersuperfícies, Operador Cheng Yau.

Abstract

SOME THEOREMS OF CLASSIFICATIONS FOR COMPACT HIPERSURFACES IN SPACE FORMS

Carlos Diosado Espinoza Peñafiel

Advisor: Walcy Santos

In this work, we first study the Cheng-Yau's self-adjoint operator $\square$ for a given Codazzi tensor field $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ on an Riemannian manifold. We obtain a general rigidity theorem (see Theorem (2.4.1)) which generalizes Cheng-Yau's work ([17]). Let M be an n-dimensional hypersurfaces in an (n+1)-dimensional real space forms $M^{n+1}(c)$. Observing that the second fundamental form tensor h_{ij} is a natural Codazzi tensor on M, we apply the previous study to theses hypersurfaces and obtain general rigidity results (see (3.2.1) and (3.2.2)) which unify some existing results.

Keywords: Codazzi Tensor, Hipersurfaces, Cheng Yau's Operator.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O espaço ambiente no qual trabalharemos serão as variedades Riemannianas compactas n-dimensionais e as variedades Riemannianas (n+1)-dimensionais com curvatura seccional constante, chamaremos também a estas, formas espaciais reais e as denotaremos com $Q^{n+1}(c)$, temos assim,

1. Se $c > 0$, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{S}^{n+1}(c)$, a esfera (n+1)-dimensional.
2. Se $c = 0$, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, o espaço Euclidiano (n+1)-dimensional.
3. Se $c < 0$, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1}(c)$, o espaço hiperbólico (n+1)-dimensional.

Também trabalharemos com hipersuperfícies compactas n-dimensionais imersas nas formas espaciais.
O artigo "Global rigidity theorems of Hypersurfaces"do professor Haizhong Li é uma continuação do trabalho "Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms"do mesmo autor, no artigo "Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms"o professor Li prova dois teoremas de rigidez para hipersuperfícies compactas com curvatura escalar normalizada constante em uma forma espacial $Q^{n+1}(c)$ (com $c \geq 0$, $n \geq 3$), nesse trabalho o professor Li da condições sob a norma da segunda forma fundamental (denotada por $|B|$) da hipersuperfície, para concluir se a hipersuperfície é totalmente umbilica ou se é o produto de uma esfera com um circulo; o professor Li faz esse trabalho por introduzindo e estudando o operador auto-adjunto de Cheng-Yau $\Box$.
Este trabalho esta dividido em quatro partes, na primeira parte introduzimos as definições necessárias e ferramentas que utilizaremos durante a dissertação, nesta primeira parte ressaltamos especialmente as equações de estrutura para uma variedade Riemanniana, aqui definimos as formas de conexão e provamos que elas só dependem da métrica Riemanniana da variedade, aqui

também definimos as equações de estrutura da variedade Riemanniana que junto com o operador de Cheng-Yau (veja definição (2.3.1)) nos leva a uma importante equação que nos va permitir provar nosso primeiro teorema (veja equação (2.19)), na segunda parte do trabalho definimos a noção de campo tensorial "Codazzi"em uma variedade Riemanniana e introduzimos o operador de Cheng-Yau (denotado $\Box$), associado a um campo tensorial Codazzi ($\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$), aqui também provamos que sob certas condições o operador de Cheng-Yau é auto-adjunto e finalmente provamos o primeiro dos dois teoremas principais de este trabalho, este primeiro teorema diz que se $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ é um campo tensorial Codazzi sobre uma variedade Riemanniana que satisfaz $|\nabla \phi|^2 \geq |\nabla (tr\phi)|^2$ então se a curvatura seccional da variedade é positiva, então todos os autovalores de ϕ_{ij} são iguais; se a curvatura seccional é não negativa então $|\nabla \phi|^2 = |\nabla (tr\phi)|^2$ (veja teorema (2.4.1)). Terminamos esta segunda parte dando una estimativa que sera útil para a terceira parte do trabalho (veja lema. (2.4.3)).

Na terceira parte do trabalho trabalhamos com as equações de estrutura de uma hipersuperfície compactas em uma forma espacial real, introduzimos a segunda forma fundamental B e a curvatura media H da hipersuperfície, damos a equação de Gauss que mistura a segunda forma fundamental a curvatura media e a curvatura escalar normalizada (veja equação (3.2)) da hypersuperfícies, como estamos trabalhando com hipersuperfícies compactas, nós aproveitamos a equação do capitulo anterior (veja equação (2.19)) e a estimativa dada no final de esse mesmo capitulo para chegar até o segundo teorema principal (veja teorema (3.2.1)) que diz, se M é uma hipersuperfície compacta n-dimensional em uma forma espacial real $Q^{n+1}(c)$ e $|\nabla B|^2 \geq n^2 |\nabla H|^2$ e o quadrado da norma segunda forma fundamental e o quadrado da curvatura media satisfazem uma certa desigualdade (veja (3.13)), então ou $|B|^2 \equiv nH^2$, e M é uma hipersuperfície totalmente umbílica, ou $|B|^2$ satisfaz uma outra igualdade (veja (3.14)) e M tem duas curvaturas principais.

Como conseqüência de este teorema vamos poder classificar as hipersuperfícies compactas n-dimensionais com curvatura media constante (veja corolário (3.2.1)), esta classificação foi primeiro provada por Sun Ziqi em 1984 e publicado em 1987 (ver teorema 1 de [27]), e uma completa expressão foi depois redescobrido por H. Alencar y M. do Carmo independentemente em 1992 e publicado em 1994 (ver teorema 1 de [1]), como uma outra conseqüência obtemos o resultado obtido por Haizhong Li no artigo "Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms"que já mencionamos no inicio da

introdução (veja corolário (3.2.2)).
Iniciamos a ultima parte de este trabalho definindo a noção de W-superfície introduzida por S. S. Chern para superfícies em espaços Euclidianos 3-dimensionais (veja [11]), daremos uma aplicação às superfícies em uma forma espacial real 3-dimensional e veremos que a condição $|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2$, pode ser considerado como uma natural generalização do conceito de W-superfície especial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades diferenciáveis

Iniciaremos o trabalho dando a definição do espaço ambiente em que trabalharemos.

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma familia de aplicações biunívocas* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em M tais que*

1. $\bigcup x_\alpha(U_\alpha) = M$

2. *Para todo par* α, β, *com* $x_\alpha(\cup_\alpha) \cap x_\beta(\cup_\beta) = W \neq \varnothing$, *os conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *e* $x_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* R^n *e as aplicações* $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta^{-1}$ *são diferenciáveis.*

3. *A familia* $\{(\cup_\alpha, x_\alpha)\}$ *é maximal relativamente às condições (1) e (2).*

O par $(\cup_\alpha, x_\alpha)$ (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(\cup_\alpha)$ é chamada uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(\cup_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada (ou simplesmente vizinhança) em p. Uma família $\{(\cup_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

Exemplo 1. O espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

1.2 Vetores tangentes e covetores em variedades

Agora lembraremos a noção de vetores tangentes e definiremos os covetores.

vamos de denotar com $D(M)$ o conjunto das funções reais (infinitamente diferenciáveis) definidas em M, isto é,

$$D(M) = \{g : M \longrightarrow \mathbb{R}, g \in C^\infty\}$$

Vetores tangentes.- Iniciaremos com a noção de vetores tangentes.

Definição 1.2.1. *Um vetor tangente a uma variedade diferenciável (de classe C^∞) M no ponto p, com $p \in M$ é uma aplicação que a cada $f \in D(M)$ faz corresponder um número real $v[f]$ tal que*

i) $v[af + bg] = av[f] + bv[g]$;

ii) $v[fg] = v[f]g(p) + f(p)v[g]$;

para todo $f, g \in D(M)$ e todo $a, b \in \mathbb{R}$

Sejam v e w vetores tangentes a M em p com $a, b \in M$. Então

$$(av + bv)[f] = av[f] + bv[g]$$

Isto é conjunto dos vetores tangentes à variedade em um determinado ponto pode ser dotado de uma estrutura de espaço linear.

Definição 1.2.2. *Seja $p \in M$, o conjunto de vetores tangentes dotada com a operação acima é o espaço tangente a M em p (denotado $T_p(M)$).*

Base do espaço tangente. Dada uma carta

$$\begin{aligned} \varphi \; : \; & U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & p \longrightarrow (x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

podemos definir

$$e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$$

com $i = 1, ..., n$. O conjunto $\{e_i\}_{i=1}^n$ forma uma base para o espaço tangente a M em p.

Mudança de coordenadas para vetores tangentes.- Se (U_a, φ_a) e (U_b, φ_b) são duas parametrizações de um mesmo ponto $p \in M$, então vejamos a relação entre as duas bases naturais do espaço tangente. Em virtude da existência de duas cartas teremos duas expressões para um vetor tangente a M em p.

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|\varphi_a(p) \\ v &= \sum_{i'} v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}|\varphi_b(p) \end{aligned}$$

Queremos ver a relação entre os coeficientes , v^i e $v^{i'}$. Para isto aplicamos v sobre $f \in D(M)$, nos dois sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned} v[f] &= \sum_i v^i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}|\varphi_a(p) \\ &= \sum_{i'} v^{i'} \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}|\varphi_b(p) \end{aligned}$$

onde $\hat{f} = f \circ \varphi_a^{-1}$, $\hat{\hat{f}} = f \circ \varphi_b^{-1}$, relacionando $\hat{\hat{f}}$ com $\hat{f}$

$$\begin{aligned} \hat{f} &= f \circ \varphi_a^{-1} \\ \hat{\hat{f}} &= f \circ \varphi_b^{-1} \\ \hat{f} &= \hat{\hat{f}} \circ \varphi_b \circ \varphi_a^{-1} \end{aligned}$$

onde $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ é a mudança de coordenadas

$$\begin{array}{rcl} \varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x^1, ..., x^n) & \longrightarrow & (x^{1'}(x^1, ..., x^n), ..., x^{n'}(x^1, ..., x^n)) \end{array}$$

Como,

$$\hat{f}(x^1, ..., x^n) = \hat{\hat{f}}(x^{1'}(x^1, ..., x^n), ..., x^{n'}(x^1, ..., x^n)),$$

temos que,

$$\begin{aligned} v[f] &= \sum_i v^i \frac{\partial \hat{f}}{x^i}|\varphi_a(p) \\ &= \sum_i v^i \frac{\partial \hat{\hat{f}}(x^{1'}(x^1, ..., x^n), ..., x^{n'}(x^1, ..., x^n))}{\partial x^i}|\varphi_a(p) \end{aligned}$$

a regra da cadeia nos diz,

$$\begin{aligned} v[f] &= \sum_i v^i \frac{\partial \hat{\hat{f}}(x^{1'}(x^1, ..., x^n), ..., x^{n'}(x^1, ..., x^n))}{\partial x^i}|\varphi_a(p) \\ &= \sum_i v^i (\sum_{j'} \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}) \\ &= \sum_{j'} (\sum_i v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}) \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{x^{j'}}. \end{aligned}$$

A mudança de coordenadas para v é

$$v^{j'} = \sum_i v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}|_{\varphi_a(p)},$$

ou colocando $\hat{\hat{f}}$ em função de $\hat{f}$

$$v^j = \sum_{i'} v^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}|_{\varphi_a(p)},$$

Covetores.- Os vetores tangentes dos que falamos até agora, serão chamados de *contravariantes*. Agora veremos os vetores *covariantes* (ou *covetores*) e o espaço cotangente.

Uma base do espaço tangente a $\mathbb{R}$ é simplesmente $\frac{d}{dt}$, a derivada na direção da única coordenada. Um vetor tangente a $\mathbb{R}$ será

$$w = \omega \frac{d}{dt}|_{t_0}$$

Podemos pensar na diferencial *df* como uma aplicação que a cada vetor tangente faz corresponder um número

$$\begin{aligned} df : T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \omega = v[f] = \sum \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}|_p v^i \end{aligned}$$

a cada espaço linear (espaço tangente) podemos associar um *espaço dual* (denotado $T_p^*(M)$), isto é, o espaço no qual cada elemento é uma aplicação que vai do espaço tangente ao espaço dos números reais. *df* é então um elemento desse espaço

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ T_p(M) &\longrightarrow T_p^*(M) \end{aligned}$$

$T_p^*(M)$ se denomina *espaço cotangente*. Um exemplo de aplicação deste tipo é o produto escalar por um vetor fixo.

Ate agora temos uma base do espaço tangente $T_p(M)$, mais não temos do espaço cotangente $T_p^*(M)$. Veremos que num certo sentido, esta base é formada pelas diferenciais das funções coordenadas

$$\{e^j \equiv dx^j\}_{j=1,...,n}.$$

Um elemento do espaço cotangente, $b \in T_p^*(M)$, se escreve na base proposta como

$$b = \sum_j b_j dx^j \,|_p$$

Definimos as funções u^i como sendo

$$\begin{aligned} u^i : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, ..., x^m) &\longmapsto x^i, \end{aligned}$$

agora tomando um carta φ em uma vizinhança de $p \in M$ podemos construir as aplicações φ^i pela composição

$$\begin{aligned} \varphi^i = u^i \circ \varphi : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto x^i \end{aligned}$$

Temos dito que dx^j são em certo sentido as componentes da base porque na realidade esta notação é um abuso: os dx^j se constroem tomando φ^j onde antes tomávamos f. Para uma função g então podemos escrever sua expressão na base

$$dg = \sum \frac{\partial g}{\partial x^i}|_{\varphi(p)} dx^i$$

Construamos agora essa base de diferenciares. Para isso utilizamos $\varphi^i \in D(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}; f \in C^\infty(M)\}$. O abuso de notação consiste em chamar x^j à função φ^j. A base é $\{d\varphi^j\}_{j=1}^n$ e dx^j sua expressão em coordenadas. Agora vejamos como atua $d\varphi^j$ em um determinado vetor v

$$\begin{aligned} d\varphi^j[v] &= v[\varphi^j] \\ &= \sum_i v^i \frac{\partial \varphi^j}{x^i}|_p \\ &= \sum_i v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}|_p \\ &= \sum_i v^i \delta_i^j \\ &= v^j \end{aligned}$$

Abusando de notação

$$dx^j[\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}] = v^i$$

Se calculamos sobre $\frac{\partial}{\partial x^i}$, isto é sobre a base tangente:

$$\begin{aligned} d\varphi^j[\frac{\partial}{\partial x^i}] &= \frac{\partial \hat{\varphi}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \\ &= \delta_j^i \\ &= dx^i[\frac{\partial}{\partial x^i}] \end{aligned}$$

a atuação dos elementos da base do dual sobre a do espaço tangente nos dá 1 se $i = j$ e 0 em outro caso. Isto não é mais que a definição de uma base dual.

Concluímos então que sobre um ponto p da variedade M podemos definir um espaço tangente, formado por vetores covariantes e com uma base natural. Do mesmo modo podemos definir um espaço cotangente como combinação lineal de aplicações $T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ (diferenciais) e com uma base natural $d\varphi^j$.

Mudança de coordenadas para covetores.- Vejamos como se transforma as componentes de um vetor covariante ao utilizar o sistema de coordenadas correspondente a outra base. Nesse caso teremos outra base dual cuja componentes denotaremos com "linha":

$$
\begin{aligned}
b &= \sum_j b_j dx^j \\
b &= \sum_{j'} b_{j'} dx^{j'}
\end{aligned}
$$

Para expressar $b_{j'}$ em termos de b_j devemos expressar dx^j em termos de $dx^{j'}$,

$$
\begin{aligned}
b &= \sum_j b_j dx^j(x^{1'}, ..., x^{n'}) \\
&= \sum_j b_j (\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'}) \\
&= \sum_{j'} (\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_j) dx^{j'}
\end{aligned}
$$

logo,

$$b_{j'} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_j$$

1.3 Tensores em variedades

A definição de tensor para uma variedade qualquer é análoga à definição em $\mathbb{R}^m$ uma vez que passamos dos pontos da variedade a pontos em $\mathbb{R}^m$ mediante a aplicação de carta, usando a estrutura diferenciável da variedade.

Tensores tangentes à variedade num ponto
Para construir os tensores (2,0), duas vezes contravariantes, zero vezes covariantes, tomamos dois vetores v e w do espaço tangente.

$$
\begin{aligned}
v &= \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
w &= \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned}
$$

Formamos um novo objeto como o *produto tensorial* dos dois vetores, $T = v \otimes w$, assim

$$\begin{aligned} T &= \sum_{ij} v^i w^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{ij} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

As componentes de T na base $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ (produto tensorial das bases dos espaços tangentes) são $T^{ij} = v^i w^j$ (no sistema $(x^1, ..., x^n)$)
Como conhecemos as regras de transformação das componentes dos vetores, podemos imaginar como são as regras para os tensores em qualquer outro sistema de coordenadas, $x^{1'}, ..., x^{m'}$ as novas componentes são,

$$\begin{aligned} T^{i'j'} &= v^{i'} w^{j'} \\ &= \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \sum_j \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} w^j \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{ij} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Esta é a maneira de construir objetos contravariantes e obter seu comportamento baixo mudanças de coordenadas a partir de tantos vetores do espaço tangente quanto a quantidade de índices do objeto procurado. A expressão 1.1 é a definição clássica dos tensores duas vezes contravariantes.
Podemos construir um espaço linear com este tipo de objetos, um espaço linear de tensores 2-contravaiantes, de dimensão m^2. Uma combinação linear de tensores se transformará do mesmo modo que um tensor. O espaço dos tensores 2-contravariantes tangentes à variedade M no ponto p se denotará $T^2_0(M)$ ou tensores do tipo (2,0).
Generalizando o processo construtivo se define

Definição 1.3.1. ***Tensor T r vezes contravariante*** *tangente à variedade M no ponto p é um conjunto de m^r números reais $T^{i_1 ... i_r}$ (componentes no sistema de coordenadas associada à carta $(U_a, \varphi_a), p \in U_a$) junto com a condição de que em qualquer outro sistema de coordenadas $x^{1'}, ..., x^{m'}$ associado a qualquer carta admissível (U_b, φ_b) tal que $p \in U_b$ as m^r com componentes de são*

$$T^{i'_1 ... i'_r} = \sum_{i_1 ... i_r} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^i_1} ... \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} T^{i_1 ... i_r} \tag{1.2}$$

isto é, um objeto tal que cada coordenada se transforma de modo contravariante.

O conjunto de esses tensores se denotara por $T_0^r(M)$

Tensores covariantes à variedade num ponto
Sejam dois elementos do espaço cotangente, $a, b \in T_p^*(M)$. Eles estão dados por

$$\begin{aligned} a &= \sum a_i dx^i \\ b &= \sum b_j dx^j \end{aligned}$$

o objeto o construirmos do mesmo modo como antes, mediante o produto tensorial $T = a \otimes b$

$$T = \sum_{ij} a_i b_j dx^i \otimes dx^j$$

donde $T_{ij} = a_i b_j$ são as componentes de T na base $dx^i \otimes dx^j$.
Só temos que escrever a mudança de coordenadas como mudança da cada m dos fatores

$$\begin{aligned} T_{i'j'} &= a_{i'} b_{j'} \\ &= \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} a_i \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_j \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_i b_j \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Analogamente a como fizemos com os contravariantes, podemos definir o espaço lineal $T_2^0(M)$ das combinações lineares de objetos de este tipo, o espaço de tensores 2 vezes covariantes, ou tensor do tipo (0,2)

Definição 1.3.2. ***Tensor T s vezes covariantes*** *é o cunjunto de n^s números reais $T_{i_1 \ldots i_r}$ (componentes no sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ associado à carta (U_a, φ_a), $p \in U_a$) junto com a condição de que em qualquer* *outro sistema de coordenadas* $x^{1'}, ..., x^{n'}$ *associado a qualquer carta admissible* (U_b, φ_b) *tal que* $p \in U_b$ *as* n^s *componentes de* T *são*

$$T_{i'_1...i'_s} = \sum_{i_1...i_s} T_{i_1...i_s} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} ... \frac{\partial x^{i_s}}{\partial x^{i'_s}}$$

isto é, um objeto tal que cada coordenada se transforma de modo covariante.

O conjunto de esses tensores se denotará por $T_2^0(M)$

Tensor (r,s)
Vamos construir mediante produtos tensoriares de vetores e covetores, objetos mistos, varias vezes covariantes e varias vezes contravariantes.
Vejamos o exemplo de um tensor tipo (1,1). $T = v \otimes a$ tem por componentes $T^i_j = v^i a_j$ na base $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$. Seus componentes mudam mediante a lei

$$\begin{aligned} T^{i'}_{j'} &= v^{i'} a_{j'} && (1.4) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_j && (1.5) \\ &= \sum_{ij} T^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} && (1.6) \end{aligned}$$

São objetos de n^2 componentes pertencentes ao espaço de tensores $T^1_1(M)$
Um tensor r vezes contravariante e s vezes covariante tangente a M no ponto p é um conjunto de n^{r+s} números reais

$$\{T^{i_1...i_r}_{j_1...j_s}\}_{i,j=1,...,n}$$

(componentes num sistema de coordenadas $x^1, ..., x^n$ associado a uma carta (U_a, φ_a) tal que $p \in U_a$) junto com a condição que as componentes em qualquer outro sistema de coordenadas $x^{1'}, ..., x^{m'}$ associado a outra carta admissible, (U_b, φ_b) com $p \in U_b$ são

$$T^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s} = \sum_{i_1...i_r j_1...j_s} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} ... \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{i_1...i_r}_{j_1...j_s} \quad (1.7)$$

Operações com tensores:
-Soma de tensores: Dados T, S tensores de tipo (r,s) com componentes $T^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s}$, $S^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s}$ o tensor suma $P = T + S$ tem as componentes

$$P^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s} = T^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s} + S^{i'_1,...,i'_r}_{j'_1,...,j'_s}$$

A soma só esta definida entre tensores do mesmo tipo, associadas à mesma variedade no mesmo ponto. De maneira análoga se pode definir o produto por um número real.

-Produto de tensores: Esta dada pela seguinte regra

$$\begin{array}{rcl} \otimes : T^{r_1}_{s_s}(M) \times T^{r_2}_{s_2}(M) & \longrightarrow & T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(M) \\ (T,S) & \longmapsto & P = \otimes[T,S] = T \otimes S \\ (T^{i_1,\ldots,i_{r_1}}_{j_1,\ldots,j_{s_1}}, S^{k_1,\ldots,k_{r_2}}_{l_1,\ldots,l_{s_2}}) & \longmapsto & P^{i_1,\ldots,i_{r_1}k_1\ldots k_{r_2}}_{j_1,\ldots,j_{s_2}l_1\ldots l_{s_2}} = T^{i_1,\ldots,i_{r_1}}_{j_1,\ldots,j_{s_1}} S^{k_1,\ldots,k_{r_2}}_{l_1,\ldots,l_{s_2}} \end{array}$$

Definição invariante de tensores tangentes a M em um ponto p

Daremos uma nova definição de tensor considerando aplicações multilinares que toma copias dos espaços tangentes e cotangente e produce um número.

Covetores como aplicações lineares, lembremos que se $a \in T^*_p(M)$. Este dual esta constituído por aplicações lineares como a que tomam elementos do espaço tangente e os levam a números reais. Logo a não é mais que uma aplicação linear dada por

$$\begin{array}{rcl} a : T_p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & a[v] \end{array}$$

Os covetores são parte do espaço $T^0_1(M) \equiv T^*_p(M)$. A linearidade significa nada mas que

$$a[k_1 v + k_2 w] = k_1 a[v] + k_2 a[w]$$

Dada a base do espaço cotangente $\{e^i\} \equiv \{dx^i\}$ podemos expressar qualquer elemento do espaço cotangente como combinação linear de elemento de sua base. O mesmo com os vetores contravariantes e sua correspondente base.

$$\begin{aligned} a[v] &= \sum_i a_i dx^i [\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}] \\ &= \sum_{ij} a_i v^j dx^i [\frac{\partial}{\partial x^j}] \end{aligned}$$

mais por definição a atuação da base cotangente sobre a base tangente é $\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{i=j;} \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} a[v] &= \sum_{ij} a_i v^j \delta^i_j \\ &= \sum_k a_k v^k \end{aligned}$$

Isto nos permite interpretar os vetores covariantes como aplicações lineares sobre uma copia do espaço tangente.

Vetores contravariantes como aplicações lineares, Também se podem interpretar os elementos do espaço tangente como aplicações lineares. Consideremos $v \in T_p(M)$. v é uma aplicação que a cada elemento do espaço cotangente faz corresponder um número real

$$\begin{array}{rcl} v : T_p^*(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & v[a] \equiv a[v] \end{array}$$

Isto nos permite fazer uma interpretação de um vetor como uma aplicação linear de uma copia do espaço contangente em $\mathbb{R}$. A linearidade se deriva da linearidade da aplicação $a[v]$

$$\begin{array}{rcl} v[k_1 a + k_2 b] & \equiv & (k_1 a + k_2 b)[v] \\ & \equiv & k_1 a[v] + k_2 b[v] \\ & \equiv & k_1 v[a] + k_2 v[b] \end{array}$$

Tensores (0,2) como aplicações multilineares, Se tem o problema de interpretar os tensores de ordem superior. Para isto procedemos, como na definição de tensor, de modo construtivo. Suponhamos que queremos formar os tensores do tipo (0,2). Sejam dois covetores a, b de tipo (0,1). É de esperar que este objeto seja calculado em dois covetores. Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \otimes : T_p(M) \times T_p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longmapsto & \otimes[a, b](v, w) \equiv a[v]b[w] \end{array} \tag{1.8}$$

que a cada par de vetores associa um número real: o produto da atuação de cada um dos covetores sobre seu vetor respectivo. Esta aplicação, que atua sobre dois copias do espaço tangente, é linear em seus dois argumentos.
É evidente que $a \otimes b \neq b \otimes a$. Agora podemos construir um espaço linear mediante combinações lineares, o espaço linear dos tensores do tipo (0,2). Se $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e a, b, c, d são covetores e v, w vetores tangentes à mesma variedade no mesmo ponto se cumple

$$(k_1(a \otimes b) + k_2(c \otimes d))[v, w] = ... = k_1 a[v]b[w] + k_2 c[v]d[w]$$

Um tensor do tipo (0,2) é uma aplicação bilinear que atua sobre duas copias do espaço cotangente

$$\begin{array}{rcl} T : T_p(M) \times T_p(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longmapsto & T[v, w] \end{array}$$

Tensores (0,2), dados um sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$, uma carta (U_a, φ_a) com $p \in U_a$ e a base $\{dx^i\}_{i=1}^n$ de $T_p^*(M)$, a base para o espaço de tensores (0,2), de n^2 elementos é

$$\{dx^i \otimes dx^j\}_{i,j=1,...,n}$$

isto quer dizer que qualquer $T \in T_2^0(M)$ se pode escrever como

$$T = \sum_{ij} T_{ij}(dx^i \otimes dx^j)$$

Agora passamos a um novo sistema de coordenadas $x^{1'}, ..., x^{n'}$ com uma base para os tensores (0,2) associada que é

$$\{dx^{i'} \otimes dx^{j'}\}_{i,j=1,...,n}$$

Para expressar os antigos em função dos novos só temos que ter em conta o critério de Einstein

$$dx^i \sum_{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$$

assim que, utilizando para a segunda igualdade a linearidade do produto tensorial

$$\begin{aligned} T &= \sum_{ij} T_{ij}(\sum_{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \otimes \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'}) \\ &= \sum_{i'j'} (\sum_{ij} T_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}})(dx^{i'} \otimes dx^{j'}) \end{aligned}$$

de modo que reencontramos a partir da definição intrínseca a definição clássica

$$T_{i'j'} = \sum_{ij} T_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

Vejamos qual é a expressão em termos das componentes de v e w de $T[v, w] \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T[v, w] &= \sum_{ij} T_{ij}(dx^i \otimes dx^j)[v, w] \\ &= \sum_{ij} T_{ij} dx^i[v] dx^j[w] \\ &= \sum_{ij} T_{ij} dx^i[\sum_l v^l \frac{\partial}{\partial x^l}] dx^j[\sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}] \\ &= \sum_{ij} T_{ij} v^i w^j \end{aligned}$$

Tensores (0,2), os tensores tipo (2,0) como aplicações esperam dois vetores e devolvem um número real

$$\begin{aligned} v \otimes w : T_p^*(M) \times T_p^*(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto (v \otimes w)[a,b] = v[a]w[b] \equiv a[v]b[w] \end{aligned} \quad (1.9)$$

podemos definir combinações de objetos deste tipo. Dados $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (k_1 v \otimes w + k_2 t \otimes u)[a,b] &= k_1 v[a]w[b] + k_2 t[a]u[b] \\ &= k_1 a[v]b[w] + k_2 a[t]b[u] \end{aligned}$$

$T_0^2(M)$, ao que pertencem estas combinações, é um espaço linear sobre o corpo dos reais, porque temos definido a soma de tensores (0,2) e o produto pelos elementos do corpo de escalares; desejamos construir uma base natural associada ao sistemas de coordenadas $x^1, ..., x^n$ de uma carta (U_a, φ_a), $p \in U_a$. A base natural do espaço tangente, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ permite construir uma base dos tensores 2 vezes contravariantes do seguinte modo

$$\{\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\}_{i,j=1,...,m}$$

Todo $T \in T_0^2(M)$ podemos expressa-lo

$$T = \sum_{ij} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Vejamos qual é a expressão em coordenadas da atuação de um tensor de tipo (2,0) sobre um par de covetores. Tendo em conta a linearidade e as regras,

$$\begin{aligned} T[a,b] &= \sum_{ij} T^{ij} (\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j})[a,b] \\ &= \sum_{ij} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}[a] \frac{\partial}{\partial x^j}[b] \\ &= \sum_{ij} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}[\sum_k a_k dx^k] \frac{\partial}{\partial x^j}[\sum_l b_l dx^l] \\ &= \sum_{ij} T^{ij} a^i b^j \end{aligned}$$

Tensores (r,s), tensor de tipo (r,s) T tangente à variedade M no ponto p é uma aplicação multilinear de r-cópias do espaço cotangente e s-cópias do espaço tangente $T_p^*(M) \times ... \times T_p^*(M) \times T_p(M) \times ... \times T_p(M)$ em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T : T_p^*(M) \times ... \times T_p^*(M) \times T_p(M) \times ... \times T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, ..., a_r, v_1, ..., v_s) &\longmapsto T[a_1, ..., a_r, v_1, ..., v_s] \end{aligned}$$

tem que ser linear em cada um de seus argumentos.
Produto tensorial Sejam $T(r_1, s_1)$ e $S(r_2, s_2)$. Se define como o produto tensorial de T por S e se denota $T \otimes S$ a um tensor do tipo $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ dado pela seguinte relação

$$(T \otimes S)[a_1, ..., a_{r_1}, b_1, ..., b_{r_2}, v_1, ..., v_{s_1}, w_1, ..., w_{s_2}]$$
$$= T[a_1, ..., a_{r_1}, v_1, ..., v_{s_1}]S[b_1, ..., b_{r_2}, w_1, ..., w_{s_2}]$$

Tensor simétrico, (definição clássica) Seja T um tensor de tipo (r,s) tangente à variedade M no ponto p. Dizemos que T é simétrico em seus índices p-ésimo e q-ésimo se em um sistema de coordenadas suas componentes cumprem

$$T^{i_1...i_p...i_p...i_r}_{j_1...j_s} = T^{i_1...i_q...i_p...i_r}_{j_1...j_s}$$

para todo $i_1...i_r, j_1...j_s = 1, ..., n$.

Tensor simétrico, (definição intrínseca) Seja T um tensor de tipo (r,s) tangente à variedade M no ponto p. Se diz que T é simétrico em seus argumentos p-ésimo e q-ésimo se se cumpre

$$T[a_1...a_p...a_q...a_r, v_1...v_s] = T[a_1...a_q...a_p...a_r, v_1...v_s]$$

Tensor anti-simétrico, (definição intrínseca) Seja T um tensor de tipo (r,s) tangente à variedade M no ponto p. Se diz que T é anti-simétrico em seus argumentos p-ésimo e q-ésimo se se cumpre

$$T[a_1...a_p...a_q...a_r, v_1...v_s] = -T[a_1...a_q...a_p...a_r, v_1...v_s]$$

1.4 Variedade Riemanniana

Nesta seção introduzimos a noção de variedade Riemanniana.

Definição 1.4.1. *(Métricas Riemannianas) Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma lei que faz corresponder a cada ponto p de M um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida)* $<,>_p$ *no espaço tangente* T_pM*, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se* $x : \cup \subset R^n \longrightarrow M$ *é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com* $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(\cup)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_j}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$*, então:*

$$< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) >_q \quad = \quad g_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

é uma função diferenciável em U.

Definição 1.4.2. *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana*

Observação 1.4.1. *Seja M uma Variedade Riemanniana n-dimensional, dado um ponto $p \in M$, podemos encontrar uma vizinhança U de p e uma coleção $\{e_1, ..., e_n\}$ de campos vetoriais de classe C^∞ em U os quais são ortonormais e portanto formam uma base ortonormal do espaço tangente de cada ponto de U. Começando com uma vizinhança coordenada $(U, \{x_1, ..., x_n\})$, aplicando o procedimento de Gram-Schmidt para ortonormalizar os campos vetoriais $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ observando que estes campos vetoriais variam diferenciavelmente com os campos dados, e fazendo isto simultaneamente para todos os pontos de U obtemos um referencial ortonormal em U.*

1.5 Formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção vamos definir em $\mathbb{R}^n$ e numa variedade n-dimensional qualquer "campos de formas alternadas", que serão utilizados posteriormente. Fixaremos as idéias com o caso de $\mathbb{R}^3$.
Seja p um ponto de $\mathbb{R}^3$. O conjunto de vetores aplicados a p, chamado espaço tangente de $\mathbb{R}^3$ em p, será denotado por $\mathbb{R}^3_p$. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica do $\mathbb{R}^3$ serão identificados com seus trasladados $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$ ao ponto p.
Um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação v que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ associa $v(p) \in \mathbb{R}^3_p$; v pode ser escrito na forma:

$$v(p) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

O campo de vetores v diz-se diferenciável quando as funções $a_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ são diferenciáveis.
Para cada espaço tangente $\mathbb{R}^3_p$, consideremos o espaço dual $(\mathbb{R}^3_p)^*$ que é o conjunto das funções lineares $\varphi : \mathbb{R}^3_p \longrightarrow \mathbb{R}$. Uma base para $(\mathbb{R}^3)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p$, $i = 1, 2, 3$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada. De fato, o conjunto $(dx_i)_p, 1 \leq i \leq 3$ forma uma base, pois $(dx_i)_p \in (\mathbb{R}^3_p)^*$, e

$$(dx_i)_p(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, se & \text{i=j} \\ 0, outrocaso. \end{cases}$$

Definição 1.5.1. *Um campo de formas lineares alternadas ou forma exterior de grau 1 em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ associa um $w(p) \in (\mathbb{R}^3_p)^*$; w pode ser escrito na forma*

$$w(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

isto é,

$$w = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i,$$

onde a_i são funções definidas em $\mathbb{R}^3$ tomando valores em $\mathbb{R}$; w chama-se forma exterior contínua quando as funções a_i são contínuas. Se as funções a_i forem diferenciáveis w chama-se uma forma diferencial de grau 1.

Seja $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineares (isto é, lineares em cada variável) e alternadas (isto é, $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Com as operações usuais de funções, o conjunto $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ se torna um espaço vetorial.
Se φ_1 e φ_2 são formas lineares podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ em $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ definindo

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}$$

O elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ será indicado por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. É fácil ver que o conjunto $(dx_i \wedge dx_j)_p, i < j$ forma uma base para o espaço $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$. Além disso,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

e

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0$$

Definição 1.5.2. *Um campo de formas bilineares alternadas ou forma exterior de grau 2 em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ associa $w(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$; w pode ser escrito na forma*

$$w(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

isto é,

$$w = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

onde a_{ij} são aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$.
Se as funções a_{ij} forem diferenciáveis, w é chamada uma forma diferenciável de grau 2.

Passaremos agora a generalizar a noção de formas diferenciais a $\mathbb{R}^n$. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p e $(\mathbb{R}^n_p)^*$ o seu espaço dual. Seja $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ o conjunto das funções k-lineares alternadas:

$$\varphi \quad : \quad \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times \cdots \times \mathbb{R}^n_p}_{k fatores} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Com as operações usuais $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ é um espaço vetorial.
Se $\varphi_1, ..., \varphi_k$ são formas lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ definindo

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, ..., v_k) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Decorre das propriedades do determinante que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k$ é de fato k-linear e alternada. Em particular, $(dx_{i_1})_p \wedge ... \wedge (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$; indicaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$

Proposição 1.5.1. *O conjunto $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p, i_1 < i_2 < ... < i_k$, onde $i_j \in 1, 2, ..., n$, forma uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$.*

Demonstração. pag. 5 de [3] □

Definição 1.5.3. *Uma k-forma exterior em* $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ *é uma aplicação* w *que a cada* $p \in \mathbb{R}^n$ *associa* $w(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$*; pela proposição anterior,* w *pode ser escrito na forma*

$$w(p) = \sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1...i_k}(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$$

onde $a_{i_1...i_k}$ *são aplicações de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$*. Se as funções* $a_{i_1...i_k}$ *forem diferenciáveis,* w *é chamada uma k-forma diferencial.*

Indicaremos por I a k-upla $(i_1, ..., i_k)$, $i_1 < ... < i_k$ $i_j \in 1, 2, ..., n$, e usaremos a seguinte notação para w:

$$w = \sum_I a_I dx_I.$$

Convenciona-se que uma 0-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se w e φ são duas k-formas:

$$\begin{aligned} w &= \sum_I a_I dx_I, \\ \varphi &= \sum_I b_I dx_I, \quad I = (i_1, ..., i_k), i_1 < ... < i_k \end{aligned}$$

podemos definir a soma

$$w + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Se w é uma k-forma e φ uma s-forma é possível definir uma operação, chamada produto exterior $w \wedge \varphi$, obtendo uma (k+s)-forma da seguinte maneira

Definição 1.5.4. *Seja* $w = \sum_I a_I dx_I$ $I = (i_1, ..., i_k)$, $i_1 < ... < i_k$, $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ $J = (j_1, ..., j_s)$, $j_1 < ... < j_s$*. Por definição*

$$w \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

A operação de produto exterior goza das seguintes propriedades:

Proposição 1.5.2. *Se w é uma k-forma, φ uma s-forma e θ uma r-forma tem-se*

$$\begin{aligned}(w \wedge \varphi) \wedge \theta &= w \wedge (\varphi \wedge \theta) \\ w \wedge \varphi &= (-1)^{ks} \varphi \wedge w \\ w \wedge (\varphi + \theta) &= w \wedge \varphi + w \wedge \theta\end{aligned}$$

Demonstração. veja pag. 7 de [3] □

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df_p : \mathbb{R}^n_p \longrightarrow \mathbb{R}^m_{f(p)}$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})^* \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$$

que a cada $\varphi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})^*$ associa $f_p^*(\varphi)$, definida da seguinte maneira

$$(f_p^*(\varphi))(v_1, ..., v_k) = \varphi(df_p(v_1), ..., df_p(v_v)), \;\; v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n.$$

Fazendo o ponto p variar em $\mathbb{R}^n$, obteremos uma aplicação f^* que leva k-formas de $\mathbb{R}^n$ em k-formas de $\mathbb{R}^m$.

Proposição 1.5.3. *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável então:*

i) $f^*(w_1 + w_2) = f^*(w_1) + f^*(w_2)$;

ii) $f^*(gw) = f^*(g) f^*(w)$;

iii) $f^*(w_3 \wedge w_4) = f^*(w_3) \wedge f^*(w_4)$.

onde w_1, w_2 são k-formas do $\mathbb{R}^m$; g é uma 0-forma e w é uma k-forma de $\mathbb{R}^m$; w_3, w_4 são 1-formas de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. ver pag. 10 de [3] □

Definição 1.5.5. *Se* $w = \sum_I a_I dx_I$ *é uma k-forma, definimos a diferencial exterior de w como sendo a (k+1)-forma*

$$dw = \sum da_I \wedge dx_I.$$

Assim temos

Proposição 1.5.4. *A diferenciação exterior satisfaz*

$$\begin{aligned} d(z_1 + z_2) &= dz_1 + dz_2 \\ d(w_1 \wedge w_2) &= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2 \\ d(dw) &= d^2 w = 0 \\ d(f^* w) &= f^*(dw) \end{aligned}$$

z_1, z_2, w_1 *e* w *são k-formas;* w_2 *é uma s-forma e* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é uma aplicação diferenciável.*

Demonstração. Ver pag. 16 de [3] □

Definição 1.5.6. *Seja M uma variedade de dimensão n. Uma k-forma diferencial w em M é a escolha, para cada sistema de coordenadas* $f_1 : U_1 \longrightarrow M$*, de uma k-forma diferencial* w_{U_1} *com* $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ *de tal forma que se* w_{U_1} *e* w_{U_2} *são duas tais escolhas e* $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \phi$*, então,*

$$w_{U_1} = (f_2^{-1} \circ f_2) * w_{U_2}$$

Cada w_{U_i} *é dita uma representação local de w.*

É um fato importante que todas as operações definidas para as formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ se estendem às variedades através de suas parametrizações.

Por exemplo, sejam, M e N variedades diferenciáveis e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Vamos definir uma aplicação F^*, que a cada forma diferencial w de N associa uma forma diferencial F^*w de M, da seguinte maneira.
Seja w_U a representação local de w na parametrização $g : U \longrightarrow N$ e seja $h_1 : V_1 \longrightarrow M$ uma parametrização de M com $F(h_1(V_1)) \subset g(U)$. F^*w é, por definição, uma forma diferencial em M, tal que

$$(F^*w)_{V_1} = (g^{-1} \circ F \circ h_1)^* w_U$$

F^*w está bem definida. Com efeito, se $h_2 : V_2 \longrightarrow M$ é uma outra parametrização em M, com $F(h_2(V_2)) \subset g(U)$, então, na interseção $h_1(v_1) \cap h_2(V_2)$, tem-se

$$\begin{aligned}
(F^*w)_{V_2} &= (g^{-1} \circ F \circ h_2)^* w_U \\
&= (g^{-1} \circ F \circ h_1 \circ h_1^{-1} \circ h_2)^* w_U \\
&= (h_1^{-1} \circ h_2)^* (g^{-1} \circ F \circ h_1)^* w_U \\
&= (h_1^{-1} \circ h_2)^* (F^*w)_{V_1}
\end{aligned}$$

o que mostra que F^*w independe da parametrização h_1. Da mesma maneira se mostra que F^*w independe da representação local.
Temos a seguinte definição

Definição 1.5.7. *Uma k-forma diferencial w em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $w(p)$ dos espaços das formas k-lineares e alternadas, $\Lambda^k(T_p(M)^*$, do espaço tangente $T_p(M)$, de modo que a expressão w_α de w em qualquer parametrização seja diferenciável.*

1.6 Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$

Nesta seção vamos a introduzir as equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$ para depois generaliza-las a uma variedade Riemaninana n-dimensional qualquer.

Definição 1.6.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $\{e_1, ..., e_n\}$, n campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha*

$$< e_i, e_j > \;=\; \delta_{ij}, \;\; donde \;\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i{=}j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um ***referencial ortonormal móvel*** *em U.*

Observe que em cada ponto $p \in U$, o conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ forma uma base ortonormal no espaço tangente a U em p, que é identificado com o espaço $\mathbb{R}^n$.

A partir do referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$, podemos definir formas diferenciais lineares $\{w_1, ..., w_n\}$, pela condição $w_i(e_j) = \delta_{ij}$; isto é o conjunto $\{w_1, ..., w_n\}$, é um conjunto linearmente independente no espaço das formas lineares $(\mathbb{R}^n)^*$, que tem dimensão n, em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{w_1(p), ..., w_n(p)\}$, é a base dual da base $\{e_1(p), ..., e_n(p)\}$ de $T_pU = R^n$.

Definição 1.6.2. *O conjunto das formas diferenciais $\{w_i\}_{i=1}^n$ definida acima é chamado o* ***coreferencial associado*** *ao referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$.*

Para cada i fixo $(i = 1, ..., n)$, o campo e_i pode ser pensado como uma aplicação diferenciável, $e_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo v, podemos escrever:

$$(de_i)_p(v) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (w_{ij})_p(v) e_j. \tag{1.10}$$

É imediato ver que as expressões $(w_{ij})_p$, $(i, j = 1, ..., n)$ acima definidas, dependem linearmente de v. Portanto $(w_{ij})_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como para cada i $(i = 1, ..., n)$, e_i é um campo diferenciável, w_{ij} é uma forma diferencial linear para todo i, j $(i, j = 1, ..., n)$.

Definição 1.6.3. *As formas w_{ij}, são chamadas* ***formas de conexão*** *do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$*

Derivando a expressão $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ obteremos

$$0 =< de_i, e_j > + < e_i, de_j >= w_{ij} + w_{ji},$$

isto é, as formas de conexão são antisimétricas nos índices i, j.

$$w_{ij} = -w_{ji} \quad (i, j = 1, ..., n) .$$

Teorema 1.6.1. *(Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$)- Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{w_i\}_{i=1}^n$ o coreferencial associado a $\{e_i\}_{i=1}^n$, e $\{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$. Então:*

$$\begin{aligned} dw_i &= \sum_{k=1}^n w_k \wedge w_{ki}, \\ dw_{ij} &= \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj}, \quad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [4], pag 4. □

Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em um espaço euclideano $\mathbb{R}^{n+q}$ (dizer que x é uma imersão é dizer que x é diferenciável e que a diferencial $dx : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ é injetiva para todo ponto $p \in M$). É uma consequência do teorema da função inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $x|_U$ de x a U é injetiva. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $e_1, ..., e_n, ..., e_{n+q}$ em V com a propriedade de que, quando restritos a $x(U)$, os vetores $e_1, ..., e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, ..., e_{n+q}$ sejam normais a $x(U)$. Um tal referencial é dito um referencial adaptado a x.

Em V estão definidas as formas w_i do coreferencial de $\{e_i\}$ e as formas de conexão w_{ij} que satisfazem as equações de estrutura. A aplicação $x : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ induz formas diferenciais $x^*(w_i)$, $x^*(w_{ij})$ em U. Como x^* comuta com a derivação exterior e com o produto exterior, tais formas em U também satisfazem as equações de estrutura.

1.7 Lema de Cartan

Nesta seção apresentaremos uma ferramenta importante para o desenvolvimento das equações de estrutura de uma variedade Riemanniana.

Lembremos que se w_1, w_2 são formas lineares em um espaço vetorial V de dimensão n, então o produto exterior de $w_1 \wedge w_2$ de w_1 com w_2 é uma forma bilinear alternada $w_1 \wedge w_2 : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$(w_1 \wedge w_2)(v_1, v_2) \quad = \quad w_1(v_1)w_2(v_2) - w_1(v_2)w_2(v_1), \quad v_1, v_2 \in V.$$

Além disto, se $\{w_1, ..., w_n\}$ é uma base para o espaço das formas lineares V^*, então $w_i \wedge w_j$, $i < j$, $i, j = 1, ..., n$, formam uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$ das formas bilineares alternadas de $V \times V$.

Lema 1.7.1. (***Cartan***)

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $w_1, ..., w_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, *formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existem formas lineares* $\theta_1, ..., \theta_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$, *satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i \quad = \quad 0.$$

Então, existem números reais a_{ij} *com* $i, j = 1...n$ *tal que:*

$$\theta_i \quad = \quad \sum_j a_{ij} w_j, \quad i, j = 1, ..., r, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Demonstração. Completemos as formas $w_1, ..., w_r$, em uma base $\{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_n\}$ de V^* e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j + \sum_l b_{il} w_l, \;\; l = r + 1, ..., n.$$

Basta agora observar que a condição $\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i w_i \wedge \theta_i \\ &= \sum_i w_i \wedge \sum_j a_{ij} w_j + \sum_l w_i \wedge \sum_l b_{il} w_l \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji}) w_i \wedge w_j + \sum_{i<l} b_{il} w_i \wedge w_l \end{aligned}$$

Como os $w_k \wedge w_s$, $s < k$, $k, s = 1, ..., n$, são linearmente independentes, conclui-se que $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{il} = 0$ □

Lema 1.7.2. *Sejam M uma variedade riemaniana, $p \in M$, e $U \subset M$ uma vizinhança de p. Sejam $\{e_1, ..., e_n\}$ campos diferenciáveis de vetores em U com $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ (um referencial ortonormal móvel em U). Sejam $\{w_1, ..., w_n\}$ formas diferenciais em U definidas pela condição $w_i(e_j) = \delta_{ij}$ (o coreferencial de $\{e_i\}_{i=1,...,n}^n$). Suponha que existe em U um conjunto de 1-formas diferenciais $\{w_{ij}\}_{i,j=1,..,n}^n$ satisfazendo as condições:*

$$\begin{aligned} w_{ij} &= -w_{ji} \\ dw_j &= \sum_{k=1}^{n} w_k \wedge w_{kj}. \end{aligned}$$

Então um tal conjunto é único.

Demonstração. Suponhamos que existe um outro conjunto de formas $\overline{w}_{ij}$ com

$$\begin{aligned} \overline{w}_{ij} &= -\overline{w}_{ji} \\ dw_j &= \sum_k w_k \wedge \overline{w}_{kj}. \end{aligned}$$

Então $\sum_k w_k \wedge (\overline{w}_{kj} - w_{ij}) = 0$, pelo lema de Cartan,

$$\overline{w}_{kj} - w_{kj} = \sum_i B_{ki}^j w_i, \ \ B_{ki}^j = B_{ik}^j$$

Observe que

$$\overline{w}_{kj} - w_{kj} = \sum_i B^j_{ki} w_i = -(\overline{w}_{jk} - w_{jk}) = -\sum_i B^k_{ji} w_i$$

e, como os w_i são linearmente independentes, $B^j_{ki} = -B^k_{ji}$.

Usando as simetrias obtidas, concluímos que

$$B^k_{ji} = -B^j_{ki} = -B^j_{ik} = B^i_{jk} = B^i_{kj} = -B^k_{ij} = -B^k_{ji} = 0,$$

ou seja, que $\overline{w}_{kj} = w_{kj}$ $\square$

1.8 Subvariedades de um espaço euclidiano

Nesta seção introduziremos as formas de curvatura para uma subvariedade.

Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+q}$ (de agora em diante, usaremos um índice superior quando quisermos indicar a dimensão de uma variedade). Seja $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M na qual a restrição $x|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$ e que em V esteja definido um referencial adaptado $\{e_1, ..., e_n, ..., e_{n+q}\}$. Pensaremos em x como uma inclusão de U em $V \subset \mathbb{R}^n$ e usaremos a mesma notação para uma expressão em V ou a sua restrição a U.

Usaremos a seguinte convenção para os índices:

$$1 \leq A, B, C, ... \leq n + q,$$

$$1 \leq i, j, k, ... \leq n,$$

$$n + 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, ... \leq n + q.$$

Dado o referencial $\{e_A\}$ em V, definimos o coreferencial $\{w_A\}$ e as formas de conexão $\{w_{AB}\}$ em V por:

$$dx = \sum w_A e_A, \tag{1}$$

$$de_A = \sum w_{AB} e_B. \tag{2}$$

As formas w_A e w_{AB} satisfazem as equações de estrutura:

$$dw_A = \sum w_B \wedge w_{BA}, \tag{3}$$

$$dw_{AB} = \sum w_{AC} \wedge w_{CB}. \tag{4}$$

As restrições das formas w_A, w_{AB} a $U \subset V$ satisfazem as equações (3) e (4), com a relação adicional $w_\alpha = 0$, para todo α. Esta última relação provem do fato que os vetores e_α são normais a U, e portanto, para todo $q \in U$ e todo $v = \sum v_i e_i \in T_p(M)$, tem-se

$$w_\alpha(v) = w_\alpha(\sum v_i e_i) = \sum v_i w_\alpha(e_i) = 0$$

Como $w_\alpha = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= dw_\alpha = \sum w_B \wedge w_{B\alpha} \\ &= \sum w_\beta \wedge w_{\beta\alpha} + \sum w_i \wedge w_{i\alpha} \\ &= \sum w_i \wedge w_{i\alpha} \end{aligned}$$

Pelo lema de Cartan,

$$w_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha w_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$$

A forma quadrática

$$II^\alpha = \sum_i w_i w_{i\alpha} = \sum_{ij} h_{ij}^\alpha w_i w_j$$

é chamada a segunda forma quadrática de x na direção e_α.
Para cada $p \in M$, o espaço tangente gerado pelos vetores de $\mathbb{R}^{n+q}$ que são normais a $dx_p(T_pM)$ é chamado o espaço normal da imersão x em p e indicado por $N_p(M)$. Um campo diferenciável de vetores normais é uma aplicação diferenciável $\nu : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$, em uma vizinhança U suficientemente pequena de p, podemos escolher um referencial adaptado e_A em U de tal modo que $e_{n+i} = \nu$. A segunda forma quadrática de x na direção de ν é indicada por II^ν.
Como a toda forma quadrática em um espaço vetorial está associada uma aplicação linear auto-adjunta $A^\nu : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$, tal que

$$II^\nu = < A^\nu(v), v >,$$

para todo $v \in T_p(M)$. Temos que a matriz de A^ν em um referencial adaptado com $e_{n+1} = \nu$ é dada por $(-h_{ij}^\alpha)$.
Vamos agora escrever as equações de estrutura (3) e (4), tendo o cuidado de separar as partes tangenciais (índices i,j,...) das partes normais (índices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

$$dw_i = \sum_j w_j \wedge w_{ji}, \tag{5}$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j}, \tag{6}$$

$$dw_{i\alpha} = \sum_j w_{ik} \wedge w_{j\alpha} + \sum_\beta w_{i\beta} \wedge w_{\beta\alpha}, \tag{7}$$

$$dw_{\alpha\beta} = \sum_j w_{\alpha j} \wedge w_{j\beta} + \sum_\gamma w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta}. \tag{8}$$

Observe que a equação (6) é semelhante a uma das equações de estrutura de um espaço euclidiano, com termo de correção dado por:

$$\sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} \;\; = \;\; \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}.$$

Para esclarecer o significado das 2-formas Ω_{ij}, notemos que a imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ induz uma métrica riemanniana $<,>$ em M dada por:

$$< v_1, v_2 >_p \;=\; < dx_p(v_1), dx_p(v_2) >, \quad p \in M \quad v_1, v_2 \in T_p(M),$$

onde o produto interno do segundo membro é o produto interno usual do $\mathbb{R}^{n+q}$. A métrica riemanniana $<,>$ em M é chamada a *métrica induzida* por x. A métrica induzida e a parte tangente $\{e_i\}$ do referencial determinam as formas w_i donde as formas dw_i. Pelo Lema 1.7.2 as formas w_{ij} ficam então inteiramente determinadas, e o mesmo se verifica para as formas:

$$\Omega_{ij} \;=\; dw_{ij} - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}.$$

Seja (Ω_{ij}) a matriz anti-simétrica de 2-formas. Temos então que ela depende apenas da métrica induzida (e da escolha do referencial).

Isto sugere que a matriz Ω_{ij} é uma espécie de medida de quanto a métrica induzida deixa de ser euclideana. A matriz (Ω_{ij}) é chamada a matriz das *formas de curvatura* no referencial $\{e_i\}$.

Para associar um significado geométrico à matriz das formas de curvatura, precisamos verificar como elas variam com uma mudança da parte tangente do referencial $\{e_i\}$ (a parte normal $\{e_\alpha\}$ do referencial não afeta as formas Ω_{ij})

Agora usaremos notação matricial; as matrizes das formas w_{ij} e Ω_{ij} serão indicadas por W e Ω, respectivamente, e o vetor coluna das formas w_i, por ω. As equações de estrutura (5) e (6) se escrevem então:

$$dw = W \wedge \omega$$

$$dW = W \wedge W + \Omega$$

Uma mudança na parte tangente $\{e_i\}$ do referencial será dada por $e_i = \sum u_{ij}\overline{e_j}$, onde $(u_{ij}) = U$ é uma matriz de funções diferenciáveis em M; além disso, U é ortogonal, isto é, $UU^* = \textit{identidade}$, onde U^* indica a matriz transposta de U.

Lema 1.8.1. *Por uma mudança do referencial tangente* $\{e_i\}$ *dada por* $e_i = \sum_j u_{ij}\bar{e}_j$, *a matriz das formas de conexão* W *muda por*

$$W = dUU^* + U\overline{W}U^*,$$

onde $U = (u_{ij})$, *a matriz das formas de curvatura* Ω *muda por:*

$$\Omega = U\overline{\Omega}U^*,$$

onde uma barra indica a entidade correspondente no referencial $\{\overline{e_i}\}$.

Demonstração. Ver [4], pag 34.

□

Decorre do lema anterior que, fixado $p \in M$, quando mudamos o referencial tangente $\{e_i\}$, a matriz de formas $((\Omega_{ij})_p)$ muda como a matriz de uma transformação linear em $T_p(M)$. Portanto, fixados dois vetores $X, Y \in M$, a matriz numérica $(\Omega_{ij})_p(X,Y)$ representa uma transformação linear que indicaremos por:

$$(R_{XY})_p \;:\; T_p(M) \longrightarrow T_p(M),$$

que não depende do referencial tangente. R_{XY} é chamado o *operador de curvatura* da métrica induzida.
Passemos agora a estudar a equação (8). Escrevendo (8) na forma

$$dw_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta}$$

onde

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{i} w_{\alpha i} \wedge w_{i\beta} = -\Omega_{\beta i}$$

Vemos que elas possuem uma certa analogia formal com as equações de estrutura de um espaço euclidiano com um termo de correção $\Omega_{\alpha\beta}$. Por um raciocínio inteiramente análogo ao do lema 1.8.1, verificaremos que a matriz de formas $(w_{\alpha\beta}) = W^{\perp}$ e a matriz de formas $(\Omega_{\alpha\beta}) = \Omega^{\perp}$ se transformam, por uma mudança da parte normal e_α do referencial, de modo semelhante às formas W e Ω, respectivamente.

Por esta razão, chamaremos $w_{\alpha\beta}$ as formas de conexão normal e $\Omega_{\alpha\beta}$ as formas de curvatura normal.
É claro que, fixados $p \in M$ e dois vetores $X, Y \in T_pM$, a matriz $(\Omega_{\alpha\beta})_p(X, Y)$ determina uma transformação linear $(R^{\perp}_{X,Y})_p : N_p(M) \longrightarrow N_p(M)$. $R^{\perp}_{X,Y}$ é chamado o operador de curva normal da imersão x.
Para este caso vejamos a interpretação geométrica das formas w_{ij}. Seja X um campo diferenciável de vetores tangentes em M, seja $Y \in T_pM$, e seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) :\longrightarrow M$, uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha^{'}(0) = Y$. Definamos

$$(\nabla_Y X)_p = proj.\ sobre\ T_p(M)\ de\ (\frac{dX}{dt})_{t=0},$$

onde t é o parâmetro da curva α. Vamos mostrar que $\nabla_Y X$ só depende da métrica induzida em M por X.
Para isto, escolhamos um referencial adaptado e_A em uma vizinhança $U \subset M$ e escrevamos $X = \sum x_i e_i$, onde x_i são funções diferenciáveis em U. como

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} e_i + \sum_i \frac{de_i}{dt} \\ &= \sum_j \frac{dx_j}{dt} e_j + \sum_i x_i \sum_j w_{ij}(\frac{\partial}{\partial t}) e_j + \sum_i x_i \sum_\alpha w_{i\alpha}(\frac{\partial}{\partial t}) e_\alpha \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X) &= \sum_j \{\frac{dx_j}{dt} + \sum_i w_{ij}(\frac{\partial}{\partial t}) x_i\} e_j \\ &= \sum_j \{dx_j(Y) + \sum_i w_{ij}(Y) x_i\} e_j \end{aligned}$$

O que mostra que $\nabla_Y X$ só depende dos w_{ij} e portanto da métrica induzida $(\nabla_Y X)_p$ é chamada a derivada covariante do campo X segundo o vetor Y no ponto p. Se $X = e_i$, obteremos

$$< \nabla_Y e_i, e_j >= w_{ij}(Y),$$

o que fornece a interpretação geométrica das formas de conexão w_{ij} em termos da derivação covariante.
Uma interpretação análoga pode ser dada às formas de conexão normal $w_{\alpha\beta}$, seja η um campo diferenciável de vetores normais em M e $y \in T_p(M)$. A derivada covariante normal $(\nabla^{\perp}_y \eta)_p$ de η em relação a y no ponto p é a projeção sobre o complemento ortogonal $N_p(M)$ de $T_p(M)$ da derivada usual $(\frac{d\eta}{dt})_{t=0}$. Como anteriormente, t é o parâmetro de uma curva diferenciável

$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha^{'}(0) = y$.
De uma maneira inteiramente análoga à anterior, verifica-se que

$$(\nabla_y^{\perp}\eta)_p = \sum_{\beta}\{d\eta_\alpha(y) + \sum_{\alpha} w_{\alpha\beta}(y)\eta_\alpha\}e_\beta, \;\; \eta = \sum_{\alpha}\eta_\alpha e_\alpha,$$

isto é, $\nabla_y^{\perp}\eta$ depende apenas das formas $w_{\alpha\beta}$. A interpretação geométrica das formas $w_{\alpha\beta}$ é obtida observando que, se $\eta = e_\eta$, temos

$$< \nabla_y^{\perp}e_\alpha, e_\beta >= w_{\alpha\beta}(y).$$

Finalmente, deve ser observado que as equações de definição

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \sum_{\alpha} w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \sum_{i} w_{\alpha i} \wedge w_{i\beta}, \end{aligned}$$

relacionan as formas de curvatura a métrica induzida e as formas da curvatura normal com as segundas formas quadráticas de imersão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= -\sum_{alpha}\{\sum_{l} h_{il}^{\alpha}w_l \wedge \sum_{k} h_{jk}^{\alpha}w_k\} \\ &= \sum_{k<l}\{\sum_{\alpha}(h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha} - h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha})\}w_k \wedge w_l. \\ \omega_{\alpha\beta} &= -\sum_{i}\{\sum_{k} h_{ik}^{\alpha}w_k \wedge \sum_{l} h_{il}^{\beta}w_l\} \\ &= \sum_{k<l}\{\sum_{i}(h_{ki}^{\alpha}h_{il}^{beta} - h_{ki}^{\beta}h_{il}^{\alpha})\}w_k \wedge w_l. \end{aligned}$$

As duas ultimas equações são chamadas as equações de Gauss e as equações de Ricci, respectivamente.

1.9 Variedades Riemannianas e Curvatura Seccional

Nesta seção definiremos a noção de curvatura seccional.

As equações de estrutura relativas a uma métrica induzida por uma imersão, a saber:

$$dw_i \;=\; \sum_j w_j \wedge w_{ji} \tag{1.11}$$

nos sugerem a possibilidade de desenvolver o método do referencial móvel para uma variedade Riemanniana M^n. Seja $p \in M$ um ponto de M e seja $U \subset M$ uma vizinhança de p em M, onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $\{e_1, ..., e_n\}$ tais que $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. O conjunto $\{e_i\}$, i=1,..,n, será chamado um referencial ortonormal móvel em U. Seja w_i as formas diferenciais em U definidas por $w_i(e_j) = \delta_{ij}$ (o coreferencial associado a $\{e_i\}$). Já vimos no lema 1.7.2 que se existem formas diferenciais $w_{ij} = -w_{ji}$, satisfazendo (1.11), elas estarão inteiramente determinadas.

Que tais formas existem a partir da métrica Riemanniana de M é dado pelo seguinte lema:

Lema 1.9.1. (***Levi Cevitta***)

Escolhido um referencial $\{e_i\}$ num aberto $U \subset M$ de uma variedade Riemanniana M, existe em U um (único) conjunto de formas diferencias $\{w_{ij}\}$ que são anti-simétricas $w_{ij} = -\ w_{ji}$ e satisfazem (1.11).

Demonstração. Façamos $dw_j(e_k, e_i) = -A^j_{ki}$, isto é,

$$dw_j = \sum_{k<i} A^j_{ki} w_k \wedge w_i, \;\; A^j_{ki} = -A^j_{ik}$$

Queremos determinar funções $C^i_{kj} = -C^i_{jk}$ tais que as formas diferenciáveis

$$w_{kj} = \sum_i C^i_{kj} w_i \tag{1.12}$$

satisfaçam 1.11. Se tais funções existirem, teremos

$$\begin{aligned}
dw_j &= \sum_{k<i} A^j_{ki} w_k \wedge w_i \\
&= \sum_k w_k \wedge w_{kj} \\
&= \sum_k w_k \wedge (\sum_i C^i_{kj} w_i) \\
&= \sum_{k<i} (C^i_{kj} - C^k_{ij}) w_k \wedge w_i.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de termos correspondentes nas equações acima, temos

$$\begin{aligned}
A^j_{ki} &= C^i_{kj} - C^k_{ij}, \\
A^k_{ij} &= C^j_{ik} - C^i_{jk}, \\
A^i_{kj} &= C^j_{ki} - C^k_{ij}.
\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, obteremos a seguinte condição necessaria para a existência dos C^i_{kj}

$$C = \frac{1}{2}(A^j_{ki} + A^k_{ij} + A^i_{kj})$$

definido C^i_{kj} pela equação acima e as formas w_{ij} por 1.12, verificaremos facilmente que elas satisfazem as condiçoes pedidas. $\square$

As formas $\{w_{ij}\}$ são chamadas as *formas de conexão* de M no referencial $\{e_i\}$. O interesse geométrico das formas de conexão é que elas permitem definir uma noção de derivação para campos de vetores em M.

Proposição 1.9.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em M e seja e_i um referencial em um aberto $U \subset M$. Suponhamos que $Y = \sum_i y_i e_i$ e façamos*

$$\nabla_X Y = \sum_j \{dy_j(X) + \sum_i w_{ij}(X) y_i\} e_j$$

Então $\nabla_X(Y)$ é independente do referencial e_i e, portanto, globalmente definido em M.

Demonstração. ver pag. 45 de [4] $\square$

$\nabla_X(Y)$ é chamada a derivação covariante de Y em relação a X. Temos a seguinte proposição.

Proposição 1.9.2. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis de vetores em M, F, G funções diferenciáveis em M e a e b números reais então*

i) $\nabla_{fX+gZ}Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z X;$

ii) $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z;$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y;$

iv) $< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >= X(< Y, Z >);$

v) *Se $p \in M$, $(\nabla_X T)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha^{'}(0) = X(p)$.*

Demonstração. Veja pag. 47 de [4] $\square$

Agora observe que temos a seguinte equação

$$< \nabla_X e_i, e_j >= w_{ij}.$$

Portanto

$$w_{ij}(e_k) =< \nabla_{e_k} e_i, e_j > .$$

Passemos agora à introdução da curvatura em uma variedade Riemanniana. Motivados pela seção anterior, definiremos

Definição 1.9.1. *Definimos as formas Ω_{ij}, por:*

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}.$$

As formas Ω_{ij} são chamadas as *formas de curvatura* de M no referencial $\{e_i\}$.

Para cada $p \in M$, e cada par de vetores $X, Y \in T_p(M)$, a matriz $(\Omega_{ij})_p(X,Y)$ é a matriz da aplicação linear

$$(R_{XY})_p \; : \; T_p(M) \longrightarrow T_p(M),$$

em relação à base $\{e_1, ..., e_n\}$.

R_{XY} é chamado o *operador de curvatura* de M. Como $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, e Ω_{ij} é uma forma bilinear alternada, temos as seguintes identidades para o operador de curvatura: Se X, Y, Z e T são campos diferenciáveis de vetores em M, então

$$< R_{XY}Z, T >= - < R_{YX}Z, T > \tag{1.13}$$

$$< R_{XY}Z, T >= - < R_{XY}T, Z > \tag{1.14}$$

Derivando exteriormente a equação 1.11, obteremos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k dw_k \wedge w_{kj} - \sum_k w_k \wedge dw_{kj} \\ &= \sum_{ki} w_i \wedge w_{ik} \wedge w_{kj} - \sum_i w_i \wedge dw_{ij} \\ &= \sum_i \wedge (\sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - dw_{ij}) \\ &= \sum_i w_i \wedge \Omega_{ij} \end{aligned}$$

ou seja

$$\sum_i w_i \wedge \Omega_{ij} = 0 \tag{1.15}$$

A equação 1.15 é chamada a primeira identidade de Bianchi. Em termos do operador curvatura, ela se traduz da maneira seguinte. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis de vetores em M, então, para todo $j = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i w_i \wedge \Omega_{ij}(X, Y, Z) \\ &= \sum_i \{w_i(X)\Omega_{ij}(Y, Z) - w_i(Y)\Omega_{ij}(X, Z) + w_i(Z)\Omega_{ij}X, Y\} \\ &= < R_{YZ}X - R_{XZ}Y + R_{XY}Z, e_j > . \end{aligned}$$

donde

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0 \tag{1.16}$$

De 1.16 e 1.14 decorre a seguinte identidade

$$< R_{XY}Z, T >=< R_{ZT}X, Y > \tag{1.17}$$

que pode ser demonstrada da maneira seguinte: A partir de 1.15, obtemos

$$\begin{aligned} < R_{XY}Z, T > + < R_{YZ}X, T > + < R_{ZX}Y, T > &= 0, \\ < R_{YZ}T, X > + < R_{ZT}Y, X > + < R_{TY}Z, X > &= 0, \\ < R_{ZT}X, Y > + < R_{TX}Z, Y > + < R_{XZ}T, Y > &= 0, \\ < R_{TX}Y, Z > + < R_{XY}T, Z > + < R_{YT}X, Z > &= 0. \end{aligned}$$

Somando as equações acima, concluímos que

$$2 < R_{ZX}T, Y > +2 < R_{TY}Z, X >= 0$$

donde, usando 1.14,

$$< R_{ZX}Y, T >=< R_{TY}Z, X >$$

que é equivalente a 1.17

Como as formas Ω_{ij} são formas de grau dois, elas podem ser escritas

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l.$$

As funções R_{ijkl} são chamadas as componentes do tensor curvatura de M. Observe que:

$$\begin{aligned} < R_{e_k e_l}(e_i), e_j > &= \Omega_{ji}(e_k, e_l) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{st} R_{jist} w_s \wedge w_t(e_k, e_l) \\ &= R_{ijkl} \\ &= < R_{e_i e_j}(e_k), e_l > \end{aligned}$$

As formas de curvatura permitem definir vários tipos de curvaturas em M, a mais importante sendo a curvatura seccional que passaremos a introduzir.

Seja $P \subset T_p(M)$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente $T_p(M)$ de M em $p \in M$. Escolheremos um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ em uma vizinhança de p de tal modo que $\{e_1, e_2\}$ geram P.

Temos a seguinte proposição:

Proposição 1.9.3. *O número $(\Omega_{12})_p(e_1, e_2)$ depende apenas do subespaço P.*

Demonstração. ver [4] pag. 54. □

Assim podemos definir,

Definição 1.9.2. *O número,*

$$
\begin{aligned}
K_p(P) &= -(\Omega_{12})_p(e_1, e_2) \\
&= < (R_{e_1 e_2})_p(e_1), e_2 >
\end{aligned}
$$

é chamado a curvatura seccional de M em p segundo P.

Com as mesmas notações acima, temos:

Proposição 1.9.4. *Sejam $X, Y \in P \in T_p(M)$, dois vetores linearmente independentes pertencentes a $T_p(M)$, e um referencial ortonormal $\{e_i\}$ tal que $\{e_1, e_2\}$ gerem P. Então:*

$$
K(p) = \frac{< R_{XY}X, Y >}{(A(X, Y))^2},
$$

onde $A(X, Y)$ é a área do paralelogramo formado por X e Y.

Demonstração. ver[4] pág.55. □

Definição 1.9.3. *Diz-se que uma variedade Riemanniana M, é isotrópica em $p \in M$ se todas as curvaturas seccionais em p têm o mesmo valor, isto é, se $K_p(P)$ não depende de $P \subset T_p(M)$.*

Proposição 1.9.5. *Seja M uma variedade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_i\}$ um referencial em uma vizinhança de p. Então M é isotrópica em p se e só se:*

$$\Omega_{ij} \;=\; -K_p w_i \wedge w_j.$$

Demonstração. ver [4] pág. 55. □

Definição 1.9.4. *Diz-se que uma variedade Riemanniana M tem curvatura constante, se $K_p(P)$ não depende de p e de P.*

*Exemplo*1. A esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centrada na origem. Escolhendo um referencial adaptado $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, teremos

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + w_{i(n+1)} \wedge w_{(n+1)j}, \;\; i, j = 1, ..., n$$

donde

$$\Omega_{ij} = w_{i(n+1)} \wedge w_{(n+1)j}.$$

Como podemos pensar em $x = e_{n+1}$ como o vetor posição da esfera S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, teremos

$$dx = \sum w_i e_i = de_{n+1} = \sum w_{(n+1)i} e_i,$$

donde $w_i = w_{(n+1)i}$. Decorre daí que $\Omega_{ij} = -w_i \wedge w_j$, isto é, S^n tem curvatura constante 1.

1.10 Tensores em variedades Riemannianas

Nesta seção definiremos a noção de derivada covariante e a noção de diferencial covariante de um tensor de ordem r.

Definição 1.10.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Um tensor de ordem r em M é uma correspondência F que a cada ponto $p \in M$ associa uma forma r-linear*

$$F_p \quad : \quad \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_p(M)}_{r fatores} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Um tensor F é *diferenciável* em $p \in M$ se escolhido um referencial $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, em uma vizinhança U de p, as funções $F_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ dadas por:

$$\begin{aligned} F_q(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}) &= F_{i_1 i_2 \ldots i_r}(q), \\ i_1, i_2, \ldots, i_r &= 1, \ldots, n \quad q \in U, \end{aligned}$$

são diferenciáveis em p.
mais na frente definiremos a noção de tensor para uma variedade qualquer.

Observe que se deixamos de indicar o ponto p e tomamos $X_1, \ldots, X_r$ campos diferenciáveis em M, então $F(X_1, \ldots, X_r)$ indica uma função diferenciável, que a cada $p \in M$ faz corresponder o valor $F((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p)$.

Assim, tem sentido falar na diferencial, $d(F(X_1, \ldots, X_r))$.

Em uma variedade Riemanniana, é possível estender a noção de diferencial covariante a tensores de ordem r. Seja F um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana M^n. Seja $p \in M$ e e_i um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p. A diferencial covariante ∇F é um tensor de ordem r+1 definido da seguinte maneira.
As componentes

$$F_{i_1 \ldots i_r, j} = \nabla F(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e_j), \;\; i_1, i_2, ..., i_r, j = 1, ...n$$

de ∇F no referencial $\{e_i\}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \sum_j F_{i_1 \ldots i_r; j} w_j &= dF_{i_1 \ldots i_r} + \sum_j F_{j i_2 \ldots i_r} w_{j i_1} \\ &\quad + \sum_j F_{i_1 j i_3 \ldots i_r} w_{j i_2} + ... + \sum_j F_{i_1 \ldots i_{r-1}, j} w_{j i_r} \end{aligned}$$

Obtemos assim a seguinte proposição.

Proposição 1.10.1. *Seja F um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana M^n. Seja $p \in M$ e $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p. A diferencial covariante ∇F é um tensor de ordem r+1 definido da seguinte maneira:*

$$\nabla F(X_1, \ldots, X_r, Y) =$$
$$d(F(X_1, \ldots, X_r))(Y) - F(\nabla_Y X_1, \ldots, X_r) - \ldots F(X_1, \ldots, \nabla_Y X_r).$$

Onde $X_1, \ldots, X_r, Y$ são r+1 campos diferenciáveis em U.

Demonstração. Veja pág. 71 de [4] □

Definição 1.10.2. *Seja F um tensor de ordem r, defini-se a derivada covariante de um tensor F em relação a um campo diferenciável de vetores X como sendo o tensor $\nabla_X F$ de mesma ordem que F dado por*

$$\nabla_X F(X_1, \ldots, X_r) \quad = \quad \nabla F(X_1, \ldots, X_r, X)$$

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana M. O gradiente de f é o campo vetorial *gradf* em M definido por

$$< gradf, X >_p = df_p(X),$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_p(M)$. em outras palavras, *gradf* é o dual na métrica Riemanniana da forma df.
Considerando um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M$, podemos escrever, em U, $df = \sum_i f_i w_i$. A função f_i é chamada a derivada de f na direção e_i. É imediato que, em U,

$$gradf = \sum_i f_i e_i.$$

A diferencial covariante de df é dada por

$$\nabla(df) = \sum_i f_{i,j} w_i$$

onde

$$f_{i,j} = \sum_j f_{i;j} w_j = df_i + \sum_j f_j w_{ji}.$$

A forma bilinear $\nabla(df)$ é chamada o hessiano de f na métrica de M. O traço desta forma bilinear, isto é, a função em M dada por

$$\sum_i f_{i;i} = \triangle f$$

é chamada o laplaciano de f. As funções em M para as quais $\triangle f = 0$ são chamadas harmônicas.
dado um campo diferenciável de vetores X em M, a métrica Riemanniana faz corresponder a X uma 1-forma diferencial ω^X dada por

$$\omega^X =< X, Y >_p,$$

para todo $p \in M$ e todo $Y \in T_p(M)$. dado um referencial local $\{e_i\}$, é imediato verificar que se $X = \sum x_i e_i$ então

$$\omega^X(Y) = \sum x_i w_i$$

A diferencial covariante $\nabla\omega^X$ de ω^X é uma forma bilinear

$$\nabla\omega^X = \sum_i x_{i,j} w_i$$

onde

$$x_{i,j} = \sum_j x_{i;j} w_j = dx_i + \sum_j x_j w_{ji}.$$

O traço de $\nabla\omega^X$, isto é, a função em M dada por

$$\sum_i x_{i;i} = diveX$$

é chamada a divergência de X. Observe que

$$\triangle f = div(gradf).$$

Temos a seguinte proposição

Proposição 1.10.2. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e X um campo de vetores em M, então se cumpre que*

$$div(fX) = fdivX + X(f)$$

$$\triangle(fg) = f\triangle g + g\triangle f + 2 < gradf, gradg > .$$

Demonstração. Veja pag. 77 de [4] □

1.11 Imersões Riemannianas

Seja M^n uma variedade Riemanniana e seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+q}$ uma imesão de M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Diremos que x é uma imersão isométrica (ou Riemanniana) se

$$< v_1, v_2 >_p = < dx(v_1), dx(v_2) >_{x(p)}$$

para todo $p \in M$ e todo par $v_1, v_2 \in T_p(M)$. Em outras palavras, x é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original.
Dado um ponto $p \in M$, escolhemos uma vizinhança $U \subset M$ de p de tal modo que x restrita a U seja injetiva. Seja $V \subset \overline{M}$ uma vizinhança de p em $\overline{M}$ tal que $V \supset x(U)$ e que em V seja possível definir um referencial ortonormal $\{e_A\}$, $A = 1, ..., n+q$, adaptado a x, isto é, restritos a $x(U)$ os vetores $e_1, ..., e_n$ são tangentes a $x(U)$. Faremos a convenção usual de identificar $U \subset M$ com $x(U) \subset \overline{M}$, e $1 \leq A, B, C... \leq n+q$, $1 \leq i, j, k... \leq n$, $n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma... \leq n+q$.
O espaço tangente $T_p(\overline{M})$ de $\overline{M}$ em p se decompõe em uma soma direta $T_p(\overline{M}) = T_p(M) \oplus N_p(M)$, onde identificamos $dx_p(T_p(M)) \approx T_p(M)$ e denotamos por $N_p(M)$ o complemento ortogonal de $T_p(M)$ em $T_p(\overline{M})$. $N_p(M)$ será chamado o espaço normal da imersão x em p. Um campo normal ν é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $\nu(v) \in N_p(M)$ de tal modo que para todo referencial adaptado em uma vizinhança $V \subset \overline{M}$ de p em V, as funções ν_α dadas por $\nu = \sum \nu_\alpha e_\alpha$ sejam diferenciáveis em p. É claro que uma tal condição não depende da escolha do referencial.

Em V temos as formas w_A, w_{AB} que satisfazem as equações de estrutura

$$dw_A = \sum_B w_B \wedge w_{BA},$$

$$dw_{AB} = \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} + \overline{\Omega}_{AB},$$

onde

$$\overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\sum \overline{R}_{ABCD} w_C \wedge w_D$$

As restrições destas formas em $U \subset V$ satisfazem as mesmas equações de estrutura e, como o referencial é adaptado, $w_\alpha = 0$. Decorre daí que

$$0 = dw_\alpha = \sum w_i \wedge w_{i\alpha}$$

e pelo lema de Cartan,

$$w_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij} w_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

A forma quadrática $II^\alpha = \sum_{ij} h^\alpha_{ij} w_i w_j$ é a segunda forma quadrática de x na direção de e_α.
Seja ν um campo unitário normal em M. É possível escolher a parte normal do referencial $\{e_\alpha\}$ em U de modo que $e_{n+1} = \nu$ em U. $II^\nu = II^{n+1}$ é então chamada a segunda forma quadrática de x na direção ν. Para mostrar que a definição não depende da escolha do referencial, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p$. Fazendo $\alpha^{'}(0) = v$, e escolhendo a parte tangente do referencial de modo que $\alpha^{'}(s) = e_1$, teremos

$$\begin{aligned} II^\alpha_p(v) &= II^{n+1}_p(e_1) \\ &= (\sum_i w_{i(n+1)} w_i)(e_i) \\ &= \sum_i < \overline{\nabla}_{e_1} e_i, e_{n+1} > w_i(e_1) \\ &= < \overline{\nabla}_{e_1} e_1, \nu > \\ &= < \overline{\nabla}_{\alpha^{'}(0)} \alpha^{'}(s), \nu > \end{aligned} \tag{1.18}$$

isto é, $II^\nu_p(v)$ é a componente segundo ν do vetor curvatura geodésica em $\overline{M}$ de uma curva passando por p com vetor tangente v. Portanto, II^ν não depende da escolha do referencial e está globalmente definida.

A transformação linear auto-adjunta em $T_p(M)$ associada à forma quadrática II^ν_p em $T_p(M)$ será indicada por

$$-A^\nu_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M).$$

Como $< v, \nu >= 0$, se $v \in T_p(M)$, teremos, usando 1.18,

$$< A^\nu_p(v), v >= -II^\nu_p(v) =< \overline{\nabla}_v \nu, v > .$$

As vezes é conveniente usar a aplicação bilinear $B_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow N_p(M)$ dada por

$$< B_p(X,Y), \nu >_p = - < A_p^\nu(X), Y >, \quad X, Y \in T_p(M) \quad \nu \in N_p(M).$$

Em um referencial local adaptado, B é dada por

$$B(X,Y) = \sum_\alpha (\sum_{ij} h_{ij}^\alpha w_j(Y)) e_\alpha,$$

O que mostra que B é uma aplicação biliniar simétrica. O traço de B em p, isto é,

$$\sum_\alpha (\sum_i h_{ij}^\alpha) e_\alpha = nH_p$$

dá origem a um vetor normal H_p chamado o vetor curvatura média em p.

Uma imersão $x : M \longrightarrow \overline{M}$ é mínima se $H \equiv 0$.

Separando as equações de estrutura nas partes tangenciais e normais, obteremos

$$dw_i = \sum_j w_j \wedge w_{ji}, \tag{1}$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} + \overline{\Omega}_{ij}, \tag{2}$$

$$dw_{i\alpha} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{k\alpha} + \sum_\beta w_{i\beta} \wedge w_{\beta\alpha} + \overline{\Omega}_{i\alpha}, \tag{3}$$

$$dw_{\alpha\beta} = \sum_j w_{\alpha j} \wedge w_{j\beta} + \sum_\gamma w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta} + \overline{\Omega}_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

As formas w_{ij} só dependem da métrica Riemanniana de M e de a parte tangente do referencial $\{e_i\}$.

As formas $dw_{ij} - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} = \Omega_{ij}$ são as formas de curvatura da métrica Riemanniana de M. As formas $dw_{\alpha\beta} - \sum_\gamma w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$ são chamadas as

formas de curvatura normal da imersão.
Da equação (2) decorre que o tensor curvatura R_{ijkl} de M está relacionado com as componentes tangentes $\overline{R}_{ijkl}$ do tensor curvatura de $\overline{M}$ por

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l &= \Omega_{ij} \\
&= dw_{ij} - \sum_{k} w_{ik} \wedge w_{kj} \\
&= \sum_{\alpha} w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} + \overline{\Omega}_{ij} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{kl}(\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk} - h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl}))w_k \wedge w_l - \\
& \quad -\frac{1}{2}\sum_{kl}\overline{R}_{ijkl} w_k \wedge w_l,
\end{aligned}$$

ou seja

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} - \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk} - h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl})$$

que é chamada a equação de Gauss. Usando a linearidade, é fácil verificar que a equação de Gauss se escreve

$$< R_{X,Y}(Z), T > = < \overline{R}_{X,Y}, T > -\{< B(X,T), B(X,Z) > - < B(X,Z), B(Y,T) >\}$$

para todo $X, Y, Z, T \in T_p(M)$, ou seja, em termos de curvatura seccionais

$$K(X,Y) = \overline{K(X,Y)} + \{< B(X,X), B(Y,Y) > -(B(X,Y))^2\}$$

onde $K(X,Y)$ indica a curvatura seccional do plano gerado por X,e Y.

Da equação (4) decorre, analogamente que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{\alpha\beta ij} w_i \wedge w_j &= \Omega_{\alpha\beta} \\
&= dw_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta} \\
&= \sum_{k} w_{\alpha k} \wedge w_{k\beta} + \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}(\sum_{k}(h^{\alpha}_{kj}h^{\alpha}_{ki} - \sum_{k} h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{kj}))w_i \wedge w_j - \\
& \quad -\frac{1}{2}\overline{R}_{\alpha\beta ij} w_i \wedge w_j,
\end{aligned}$$

ou seja

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_k (h^{\alpha}_{ik} h^{\beta}_{kj} - h^{\beta}_{ik} h^{\alpha}_{kj}) + \overline{R}_{\alpha\beta ij}$$

que é chamada a equação de Ricci.

1.12 Equações de estrutura de uma forma espacial

Seja $Q^{n+1}(c)$ uma Variedade Riemaniana (n+1)-dimensional com curvatura seccional constante c. Também chamaremos a este forma espacial. Quando $c > 0$, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{S}^{n+1}(c)$, (isto é: a esfera (n+1)-dimensional), quando c=0, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, (isto é: o espaço euclidiano (n+1)-dimensional), quando $c < 0$, $Q^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1}(c)$, (isto é: o espaço hiperbólico (n+1)-dimensional). Seja M uma hipersuperfície em $Q^{n+1}(c)$. Para qualquer ponto $p \in M$ escolhemos um referencial ortonormal local $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$ em $Q^{n+1}(c)$ em p tal que $e_1, e_2, ..., e_n$ sejam tangentes a M. Tome o co-referencial dual correspondente $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Neste trabalho faremos as seguintes convenções para os indices:

$$1 \leq A, B, C \leq n+1,$$

$$1 \leq i, j, k \leq n.$$

Devemos ter em conta que:

$$\begin{aligned}
dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \\
\overline{\Omega}_{AB} &= -\frac{1}{2} \sum R_{ABCD} w_C \wedge w_D, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_A, e_B) &= R_{ABAB}, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_B, e_A) &= -R_{ABAB}, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_C, e_D) &= 0, \quad se A \neq C, D; \quad B \neq D, C
\end{aligned}$$

Assim as equações de estrutura de $Q^{n+1}(c)$ são:

$$\begin{aligned} dw_A &= \sum_B w_{AB} \wedge w_B, \quad w_{AB} = -w_{BA} \\ dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} - c w_A \wedge w_B \end{aligned}$$

Observe que na última igualdade usamos o fato que $Q^{n+1}(c)$ tem curvatura constante e a proposição 1.9.5.
Se denotamos pelas mesmas letras as restrições a M de w_A, w_{AB}, temos:

$$dw_i = \sum_j w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} = -w_{ji} \tag{1.19}$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l, \tag{1.20}$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica induzida em M.
Como $w_{n+1} = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} 0 &= dw_{n+1} \\ &= \sum_i w_{(n+1)i} \wedge w_i. \end{aligned} \tag{1.21}$$

e pelo lema de Cartan temos :

$$w_{i(n+1)} = \sum_j h_{ij} w_j, \ h_{ij} = h_{ji} \tag{1.22}$$

A forma quadrática $B = \sum_{ij} h_{ij} w_i \otimes w_j$ é chamada a segunda forma fundamental de M.
Agora, separando a equação:

$$dw_{AB} = \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} - c w_A \wedge w_B$$

nas partes normais e tangenciais a M temos:

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + w_{i,n+1} \wedge w_{n+1,j} + \overline{\Omega}_{ij}.$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l &= \Omega_{ij} \\
&= dw_{ij} - \sum_{k} w_{ik} \wedge w_{kj} \\
&= w_{i,n+1} \wedge w_{n+1,i} + \overline{\Omega}_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{kl}(h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}) w_k \wedge w_l - \frac{1}{2}\sum_{kl} \overline{R}_{ijkl} w_k \wedge w_l
\end{aligned}$$

logo:

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} - (h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}).$$

$$R_{ijkl} = c - (h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}).$$

esto é,

$$\overline{R}_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Assim,

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \tag{1.23}$$

Capítulo 2

O Operador Auto-adjunto Cheng-Yau

Este capítulo tem como finalidade demonstrar um primeiro teorema de classificação para variedades Riemannianas compactas, para isto começaremos com algumas definições.

2.1 O hessiano e a diferencial covariante

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial local ortonormal em M, e $\{w_1, ..., w_n\}$ seu referencial dual. Então as equações de estrutura de M são dadas por:

$$dw_i = \sum_j w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} = -w_{ji}, \tag{2.1}$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}. \tag{2.2}$$

O lema 1.9.1, garante as existência das formas w_{ij} satisfazendo (2.1) a partir da métrica Riemanniana.
Observe que as formas Ω_{ij} são dadas por:

$$\Omega_{ij} \;=\; dw_{ij} - \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}.$$

Já vimos que elas podem ser escritas como:

$$\Omega_{ij} \;=\; -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \wedge w_l.$$

Dizemos que w_{ij} é a *forma de conexão Levi Cevitta* e R_{ijkl} é o *tensor Curvatura Riemanniana de M.*
Lembremos que, para cada $p \in M$ e cada par de vetores $x, y \in T_pM$ a matriz $\{(\Omega_{ij})_p\,(x,y)\}$ é a matriz de uma aplicação linear, (chamada operador de curvatura)

$$\left(R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\right)_p : T_pM :\longrightarrow T_pM,$$

Da seção 1.9 temos

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \left\langle R_{e_k e_l}\left(e_i\right), e_j\right\rangle \\ &= \Omega_{ji}\left(e_k, e_l\right). \end{aligned}$$

e,

$$R_{ijkl} + R_{ijlk} \;=\; 0.$$

Observação 2.1.1. *Se V é um espaço vetorial munido de um produto interno, temos que existe um isomorfismo canônico J entre V e seu dual V^*.*

Caracterizemos o gradiente de uma função diferenciável, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definido em um aberto A de M. Dado um ponto $p \in A$, a diferencial no ponto p é o funcional linear $df_p \in (T_pM)^*$, tal que $df_p(v) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$, para todo vetor $v \in T_pM$.
O *gradiente* (no ponto p) é definido como o vetor $\nabla f(p) \in T_pM$, que corresponde a df_p através do isomorfismo canônico $J : T_pM \longrightarrow (T_pM)^*$ (induzido pelo produto interno), assim $\nabla f(p) = J^{-1}(df_p)$
Portanto, o gradiente $\nabla f(p)$ fica caracterizado pela seguinte igualdade:

$$\nabla f(p).\mathbf{v} \;=\; df_p(\mathbf{v}), \quad \textit{para todo vetor } \mathbf{v} \in T_pM.$$

Para qualquer função f de classe C^2 definida em M, definimos seu Gradiente no ponto p, por:

$$\nabla f : (T_pM)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla f \quad = \quad \sum_i f_i w_i. \tag{2.3}$$

e seu Hessiano por:

$$\sum_j f_{ij} w_j \quad = \quad \nabla f_i + \sum_j f_j w_{ji}. \tag{2.4}$$

Vejamos agora que $f_{ij} = f_{ji}$ por diferenciação exterior de (2.3). Diferenciando (2.3) temos :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i (\nabla f_i \wedge w_i + f_i dw_i) \\
&= \sum_i \nabla f_i \wedge w_i + \sum_i f_i dw_i \\
&= \sum_i (\sum_j f_{ij} w_j - \sum_j f_j w_{ji}) \wedge w_i + \sum_i f_i (\sum_j w_{ij} \wedge w_j) \\
&= \sum_i \sum_j f_{ij} w_j \wedge w_i - \sum_i \sum_j f_j w_{ji} \wedge w_i + \sum_i f_i (\sum_j w_{ij} \wedge w_j).
\end{aligned}$$

como

$$\sum_i \sum_j f_j w_{ji} \wedge w_i \quad = \quad \sum_i f_i (\sum_j w_{ij} \wedge w_j),$$

temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i \sum_j f_{ij} w_j \wedge w_i \\
&= \sum_{i<j} (f_{ij} - f_{ji}) w_i \wedge w_j.
\end{aligned}$$

Portanto

$$f_{ij} \quad = \quad f_{ji}.$$

2.2 O tensor codazzi

Seja agora $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ um tensor simétrico definido em M. As componentes da *derivada covariante* de ϕ_{ij} são dada por,

$$\sum_k \phi_{ijk} w_k = \nabla \phi_{ij} + \sum_k \phi_{kj} w_{ki} + \sum_k \phi_{ik} w_{kj}. \tag{2.5}$$

Chamamos ao *tensor simétrico* $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ um *tensor Codazzi* se,

$$\phi_{ijk} = \phi_{ikj}. \tag{2.6}$$

As componentes da *segunda derivada covariante* de ϕ_{ij} são dadas por,

$$\sum_l \phi_{ijkl} w_l = \nabla \phi_{ijk} + \sum_m \phi_{mjk} w_{mi} + \sum_m \phi_{imk} w_{mj} + \sum_m \phi_{ijm} w_{mk}. \tag{2.7}$$

Vamos obter algumas relações da diferenciação exterior de (2.5).

Lema 2.2.1. *Seja agora $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ um tensor simétrico definido em M, então*

$$\sum_{lk} \phi_{ijkl} w_l \wedge w_k = \sum_m \phi_{mj} \Omega_{mi} + \sum_m \phi_{im} \Omega_{mj}.$$

Demonstração. Diferenciando exteriormente o lado direito da igualdade (2.5) temos,

$$
\begin{aligned}
d(\sum_k \phi_{ijk} w_k) &= \sum_k \nabla\phi_{kj} \wedge w_{ki} + \sum_k \phi_{kj} dw_{ki} + \sum_k d\phi_{ik} \wedge w_{kj} + \sum_k \phi_{ik} dw_{kj} \\
&= \sum_k [\sum_l \phi_{kjl} w_l - \sum_l \phi_{lj} w_{lk} - \sum_l \phi_{kl} w_{lj}] \wedge w_{ki} + \\
&+ \sum_k [\phi_{kj} [\sum_l w_{kl} \wedge w_{li} + \Omega_{ki}]] + \\
&+ \sum_k [\sum_l \phi_{ikl} w_l - \sum_l \phi_{lk} w_{li} - \sum_l \phi_{il} w_{lk}] \wedge w_{kj} + \\
&+ \sum_k [\phi_{ik} [\sum_l w_{kl} \wedge w_{lj} + \Omega_{kj}]].
\end{aligned}
$$

Por outro lado, diferenciando exteriormente o lado ezquerdo da igualdade (2.5) temos,

$$
\begin{aligned}
d(\sum_k \phi_{ijk} w_k) &= \textstyle\sum_k \nabla\phi_{ijk} \wedge w_k + \sum_k \phi_{ijk} dw_k \\
&= \sum_k [\sum_m \phi_{ijkm} w_m - \sum_l \phi_{ljk} w_{li} - \sum_l \phi_{ilk} w_{lj} - \sum_l \phi_{ijl} w_{lk}] \wedge w_k \\
&+ \textstyle\sum_k [\phi_{ijk} (\sum_j w_{kj} \wedge w_j)].
\end{aligned}
$$

Igualando os dois resultados, observamos,

$$
-\overbrace{\sum_k \sum_l \phi_{ljk} w_{li} \wedge w_k}^{a} - \overbrace{\sum_k \sum_l \phi_{ilk} w_{lj} \wedge w_k}^{e} -
$$

$$-\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{ijl}w_{lk}\wedge w_k}^{b}+\overbrace{\sum_k \phi_{ijk}\sum_l w_{kl}\wedge w_l}^{b}$$

$$=\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{kjl}w_l\wedge w_{ki}}^{a}-\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{lj}w_{lk}\wedge w_{ki}}^{f}-\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{kl}w_{lj}\wedge w_{ki}}^{c}+$$

$$+\overbrace{\sum_k \phi_{kj}\sum_l w_{kl}\wedge w_{li}}^{f}+\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{ikl}w_l\wedge w_{kj}}^{e}-\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{lk}w_{li}\wedge w_{kj}}^{c}-$$

$$-\overbrace{\sum_k\sum_l \phi_{il}w_{lk}\wedge w_{kj}}^{d}+\overbrace{\sum_k \phi_{ik}\sum_l w_{kl}\wedge w_{lj}}^{d}.$$

Os termos com letras iguais vão se cancelar.

Estas contas nos dizem que por diferenciação exterior de (2.5), obtemos,

$$\sum_{lk}\phi_{ijkl}w_l\wedge w_k = \sum_m \phi_{mj}\Omega_{mi}+\sum_m \phi_{im}\Omega_{mj}. \tag{2.8}$$

□

Calculando (2.8) em (e_k, e_l), temos as seguintes identidades Ricci,

$$\phi_{ijkl}-\phi_{ijlk} = \sum_m \phi_{mj}R_{mikl}+\sum_m \phi_{im}R_{mjkl}. \tag{2.9}$$

2.3 Operador □ (operador de Cheng-Yau)

Ressaltaremos a seguinte definição do operado auto-adjunto □ introduzido por Cheng-Yau.

Definição 2.3.1. *Seja* $\phi=\sum_{ij}\phi_{ij}w_i\otimes w_j$ *um campo tensorial Codazzi em uma Variedade Riemanniana M. Definimos o operador □ associado a* ϕ *por:*

$$\Box f=\sum_{ij}\left(\left(\sum_k \phi_{kk}\right)\delta_{ij}-\phi_{ij}\right)f_{ij},$$

para qualquer função f de classe C^2 definida em M.

Proposição 2.3.1. *Seja M uma Variedade Riemanniana compacta e orientável. Então o operador $\Box$ é auto-adjunto.*

Demonstração. Seja

$$\varphi_{ij} = \left(\sum_k \phi_{kk}\right)\delta_{ij} - \phi_{ij}.$$

Então,

$$\sum_l \varphi_{ijl} w_l = \sum_l \sum_k \phi_{kkl} w_l \delta_{ij} - \sum_l \phi_{ijl} w_l.$$

Quando calculamos em e_j, e depois somando em j, obtemos,

$$\begin{aligned}\sum_j \varphi_{ijj} &= \sum_j \sum_k \phi_{kkj}\delta_{ij} - \sum_j \phi_{ijj} \\ &= \sum_k \phi_{kki} - \sum_j \phi_{ijj} \\ &= \left(\sum_k \phi_{kk}\right)_i - \sum_j \phi_{ijj}.\end{aligned}$$

Sendo ϕ é um tensor simétrico, temos que,

$$\phi_{ij} = \phi_{ji}.$$

Logo, a derivada covariante da ultima igualdade nos dá,

$$\sum_l \phi_{ijl} w_l = \sum_l \phi_{jil} w_l.$$

Quando calcularmos no vetor e_k, teremos $\phi_{ijk} = \phi_{jik}$, e além disso, como ϕ é um tensor codazzi temos que $\phi_{jik} = \phi_{jki}$. Com essas observações,

$$\begin{aligned}\sum_k \phi_{kki} &= \sum_j \phi_{jji} \\ &= \sum_j \phi_{jij} \\ &= \sum_j \phi_{ijj},\end{aligned}$$

o que nos diz que,

$$\sum_j \varphi_{ijj} \;\; = \;\; 0.$$

Completamos a prova desta proposição, usando a seguinte proposição devido Cheng-Yau, veja [8].

Proposição.- (Cheng-Yau) Seja M uma Variedade Riemanniana compacta e orientável. Então o operador $\square$ é auto-adjunto se e somente se: $\sum_j \varphi_{ijj} = 0.$

Demonstração. ver [8] pag. 196. $\square$

$\square$

Agora intentemos relacionar em alguma equação o operador $\square$ com alguns invariantes da variedade M.

Como $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ é um campo tensorial codazzi em uma variedade Riemanniana, os coeficientes ϕ_{ij} são funções reais definidas em M, isto é,

$$\phi_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Assim podemos definir o laplaciano das funções ϕ_{ij}.

Definição 2.3.2. *O* Laplaciano *de* ϕ_{ij} *é definido por ser,*

$$\Delta\phi_{ij} \;\; = \;\; \sum_k \phi_{ijkk}.$$

Lema 2.3.1. *Seja* $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ *é um campo tensorial codazzi em uma variedade Riemanniana, então,*

$$\Delta\phi_{ij} = \sum_{km} \phi_{mk} R_{mijk} + \sum_{mk} \phi_{im} R_{mkjk} + \sum_k \phi_{kkij}$$

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{ij} &= \sum_k \phi_{ijkk}\\ &= \sum_k (\phi_{ijkk}-\phi_{ikjk}) + \sum_k (\phi_{ikjk}-\phi_{ikkj}) +\\ &\quad + \sum_k (\phi_{ikkj}-\phi_{kkij}) + \sum_k \phi_{kkij}.\end{aligned}$$

Agora de,

$$\phi_{ijkl}-\phi_{ijlk} = \sum_m \phi_{mj}R_{mikl} + \sum_m \phi_{im}R_{mjkl},$$

obtemos,

$$\phi_{ikjk}-\phi_{ikkj} = \sum_m \phi_{mk}R_{mijk} + \sum_m \phi_{im}R_{mkjk}.$$

Assim, a expressão de $\Delta\phi_{ij}$, resulta em,

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{ij} &= \sum_k (\phi_{ijkk}-\phi_{ikjk}) + \sum_{km} \phi_{mk}R_{mijk} + \sum_{mk} \phi_{im}R_{mkjk} +\\ &\quad + \sum_k \phi_{kkij} + \sum_k (\phi_{ikkj}-\phi_{kkij}).\end{aligned}$$

Observe que das equações,

$$\begin{aligned}\sum_k \phi_{ijkk}w_k &= \nabla\phi_{ijk} + \sum_m \phi_{mjk}w_{mi} + \sum_m \phi_{imk}w_{mj} + \sum_m \phi_{ijm}w_{mk}\\ \sum_k \phi_{ikjk}w_k &= \nabla\phi_{ikj} + \sum_m \phi_{mjk}w_{mi} + \sum_m \phi_{imj}w_{mj} + \sum_m \phi_{ikm}w_{mk}\end{aligned}$$

calculadas em e_k, e de (2.6) (ie, da definição de tensor Codazzi), obtemos,

$$\phi_{ijkk}-\phi_{ikjk} = 0.$$

Além disto, utilizando o fato que o tensor ϕ é um tensor simétrico e Codazzi, e das equações,

$$\begin{aligned}\sum_j \phi_{ikkj}w_j &= \nabla\phi_{ikk} + \sum_m \phi_{mkk}w_{mi} + \sum_m \phi_{imk}w_{mk} + \sum_m \phi_{ikm}w_{mk},\\ \sum_j \phi_{kkij}w_j &= \nabla\phi_{kki} + \sum_m \phi_{mki}w_{mk} + \sum_m \phi_{kmi}w_{mk} + \sum_m \phi_{kkm}w_{mi},\end{aligned}$$

calculadas em e_j, obtemos,

$$\phi_{kkij} = \phi_{ikkj},$$

isto é,

$$\phi_{kkij} - \phi_{ikkj} = 0.$$

Assim vemos que vários termos vão se cancelar na expressão de $\Delta\phi_{ij}$, obtendo,

$$\Delta\phi_{ij} = \sum_{km} \phi_{mk} R_{mijk} + \sum_{mk} \phi_{im} R_{mkjk} + \sum_{k} \phi_{kkij}. \tag{2.10}$$

□

Seja agora,

$$|\phi|^2 = \sum_{ij} \phi_{ij}^2, \quad |\nabla\phi|^2 = \sum_{ijk} \phi_{ijk}^2, \quad tr\phi = \sum_{k} \phi_{kk}.$$

Lema 2.3.2. *Seja $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ é um campo tensorial codazzi em uma variedade Riemanniana, então,*

$$\frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{ij} \phi_{ij} (tr\phi)_{ij} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{mk} R_{mijk} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{im} R_{mkjk}.$$

Demonstração. Sabemos que, para duas funções f e g, definidas em M, temse,

$$\Delta (fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle,$$

assim temos,

$$\Delta\left(\phi_{ij}^2\right) = \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + 2\langle \nabla\phi_{ij}\ \nabla\phi_{ij}\rangle$$

Como $\{e_i\}$ é uma base ortogonal, seu dual $\{w_i\}$, é também ortogonal, logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi_{ij} \ , \nabla\phi_{ij} \rangle &= \left\langle \sum_k \phi_{ijk} w_k \ , \sum_k \phi_{ijk} w_k \right\rangle \\ &= \sum_k \phi_{ijk}^2. \end{aligned}$$

Com isto, a equação (2.10) mostra que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 &= \sum_{ij} \frac{1}{2}\Delta\phi_{ij}^2 \\ &= \sum_{ij} [\phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + \sum_k \phi_{ijk}^2] \\ &= \sum_{ijk} \phi_{ijk}^2 + \sum_{ij} \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} \\ &= |\nabla\phi|^2 + \sum_{ij} \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} \\ &= |\nabla\phi|^2 + \sum_{ij} \phi_{ij} (tr\phi)_{ij} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{mk} R_{mijk} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{im} R_{mkjk} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{ij} \phi_{ij} (tr\phi)_{ij} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{mk} R_{mijk} + \sum_{ijmk} \phi_{ij}\phi_{im} R_{mkjk}. \tag{2.11}$$

□

Observe que a matriz $\Phi = (\phi_{ij})$ é uma matriz simétrica. Assim existe uma base ortonormal $\{e_i\}$ que a diagonaliza.

Em um ponto $p \in M$, escolhemos um campo referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ com seu correferencial dual $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, tal que,

$$\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j, \quad \phi_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \text{em } p.$$

Com as notações acima, temos o seguinte lema principal.

Lema 2.3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, e seja $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ um campo tensorial codazzi definido em M, então,*

$$\int_M \left[|\nabla \phi|^2 - |\nabla (tr\phi)|^2 \right] + \int_M \frac{1}{2} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0.$$

Demonstração. Então, em p temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 &= |\nabla \phi|^2 + \sum_{ij} \lambda_i \delta_{ij} (tr\phi)_{ij} + \sum_{ijmk} \lambda_i \delta_{ij} \lambda_m \delta_{mk} R_{mijk} + \sum_{ijmk} \lambda_i \delta_{ij} \lambda_i \delta_{im} R_{mkjk} \\ &= |\nabla \phi|^2 + \sum_{i} \lambda_i (tr\phi)_{ii} + \sum_{im} \lambda_i \lambda_m \ R_{miim} + \sum_{ik} \lambda_i \lambda_i R_{ikik}. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{im} \lambda_i \lambda_m R_{miim} + \sum_{ij} \lambda_i^2 R_{ikik} &= -\sum_{im} \lambda_i \lambda_m R_{imim} + \sum_{ik} \lambda_i^2 R_{ikik} \\ &= -\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j R_{ijij} + \sum_{ij} \lambda_i^2 R_{ijij} \\ &= \sum_{ij} \left(-\lambda_i \lambda_j + \lambda_i^2 \right) R_{ijij} \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{1}{2}\lambda_i^2 - \lambda_i \lambda_j + \frac{1}{2}\lambda_i^2 \right) R_{ijij} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \frac{1}{2}\lambda_i^2 R_{ijij} &= \sum_{ij} \frac{1}{2}\lambda_j^2 R_{jiji} \\ &= -\sum_{ij} \frac{1}{2}\lambda_j^2 R_{jiij} \\ &= \sum_{ij} \frac{1}{2}\lambda_j^2 R_{ijij}. \end{aligned}$$

Com essas observações temos,

$$\frac{1}{2}\Delta |\phi|^2 = |\nabla \phi|^2 + \sum_{i} \lambda_i (tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 . \qquad (2.12)$$

Denotando a segunda função simétrica de ϕ_{ij}, por Γ_2, temos,

$$\Gamma_2 = \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j.$$

Tendo em conta que,

$$\begin{aligned}(tr\phi)^2 &= (\phi_{11} + ... + \phi_{nn})(\phi_{11} + ... + \phi_{nn}) \\ &= (\lambda_1 + ... + \lambda_n)(\lambda_1 + ... + \lambda_n) \\ &= \sum_{ij} \lambda_i\lambda_j\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}|\phi|^2 &= \left(\phi_{11}^2 + \phi_{12}^2 + ... + \phi_{1n}^2\right) + ... + \left(\phi_{n1}^2 + ... + \phi_{nn}^2\right) \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2,\end{aligned}$$

a segunda função simétrica de ϕ_{ij}, fica,

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j \\ &= (tr\phi)^2 - |\phi|^2 \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Combinando (2.12) e (2.13) obtemos,

$$\frac{1}{2}\Delta (tr\phi)^2 = \frac{1}{2}\Delta\Gamma_2 + |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i (tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \qquad (2.14)$$

observe que,

$$\begin{aligned}\Delta(tr\phi)^2 &= \Delta(tr\phi)(tr\phi) \\ &= 2tr\phi\Delta tr\phi + 2 < \nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi) > \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Da definição de $\Box$ temos,

$$\begin{aligned}
\Box(tr\phi) &= \sum_{ij}(\sum_k \phi_{kk}\delta_{ij} - \phi_{ij})(tr\phi)_{ij} \\
&= \sum_{ij}\sum_k \phi_{kk}\delta_{ij}(tr\phi)_{ij} - \sum_{ij}\phi_{ij}(tr\phi)_{ij} \\
&= \sum_i\sum_k \lambda_k(tr\phi)_{ii} - \sum_i \lambda_i(tr\phi)_{ii} \\
&= \sum_i (tr\phi)(tr\phi)_{ii} - \sum_i \lambda_i(tr\phi)_{ii}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Observe que de (2.14) e (2.15)

$$\begin{aligned}
tr\phi\Delta tr\phi + <\nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi)> &= \frac{1}{2}\Delta\Gamma_2 + |\nabla\phi|^2 + \sum_i \lambda_i\,(tr\phi)_{ii} + \\
&+\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}\,(\lambda_i - \lambda_j)^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
tr\phi\Delta tr\phi - \sum_i \lambda_i\,(tr\phi)_{ii} &= \frac{1}{2}\Delta\Gamma_2 + |\nabla\phi|^2 - <\nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi)> + \\
&+\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}\,(\lambda_i - \lambda_j)^2,
\end{aligned}$$

agora de (2.16),

$$\Box(tr\phi) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma_2 + |\nabla\phi|^2 - <\nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi)> + \frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}\,(\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\langle\nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi)\rangle &= \left\langle \sum_{kl}\phi_{kkl}w_l, \sum_{kl}\phi_{kkl}w_l \right\rangle \\
&= \sum_{kl}\phi_{kkl}^2 \\
&= \sum_{kj}\phi_{kkj}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \nabla(tr\phi), \nabla(tr\phi)\rangle = |\nabla (tr\phi)|^2 . \quad (2.17)$$

Assim chegamos à seguinte equação,

$$\Box (tr\phi) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma_2 + |\nabla\phi|^2 - |\nabla (tr\phi)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 . \quad (2.18)$$

Observe agora que $\Box$ é auto-adjunto assim,

$$\int_M \Box(tr\phi) = \int_M \Box(tr\phi).1 = \int_M (tr\phi)\Box 1 = \int_M (tr\phi).0 = 0.$$

Além disso,

$$\Delta\Gamma_2 = div (\nabla\Gamma_2) .$$

Agora integrando (2.18) e utilizando o teorema de Stokes, como M é compacta, chegamos a,

$$\int_M \left[|\nabla\phi|^2 - |\nabla (tr\phi)|^2\right] + \int_M \frac{1}{2} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0. \quad (2.19)$$

$\Box$

2.4 Primeiro teorema de classificação para variedades Riemannianas compactas com curvatura constante

A equação (2.19) da seção anterior nos permitir dar uma classificação para as variedades Riemannianas compactas, isto é,

Teorema 2.4.1. *Seja* $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ *um campo tensorial Codazzi en uma Variedade Riemanniana compacta M. Suponha que,*

$$|\nabla\phi|^2 \geq |\nabla (tr\phi)|^2 . \tag{2.20}$$

i) *Se M tem curvatura seccional positiva, então todos os autovalores de* ϕ_{ij} *são iguais em M.*

ii) *Se M tem curvatura seccional não negativa, então temos:*

$$|\nabla\phi|^2 = |\nabla tr\phi|^2 \quad e\ R_{ijij} = 0,$$

quando $\lambda_i \neq \lambda_j$ *em M.*

Demonstração. De (2.20) temos que

$$\int_M [|\nabla\phi|^2 - |\nabla(tr\phi)|^2] \geq 0 \tag{2.21}$$

Para provar *i)*, como M tem curvatura seccional positiva temos que $R_{ijij} > 0$, por (2.19) e (2.21)

$$\int_M [|\nabla\phi|^2 - |\nabla(tr\phi)|^2] = 0 \quad \text{e} \int_M \frac{1}{2} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0.$$

Por tanto, $\lambda_i = \lambda_j, \forall i, j$.

Para provar *ii)*, Como M tem curvatura seccional não negativa temos que $R_{ijij} \geq 0$, de (2.21) e $\lambda_i \neq \lambda_j$ temos $R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0$; assim,

$$\int_M [|\nabla\phi|^2 - |\nabla(tr\phi)|^2] = 0,$$

isto implica,

$$|\nabla\phi|^2 = |\nabla(tr\phi)|^2.$$

Agora de,

$$\int_M \frac{1}{2} R_{ijij} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2 = 0,$$

fica,

$$R_{ijij} = 0.$$

□

Os dois lemas seguintes mostram que a condição (2.20) é natural.

Lema 2.4.1. *Seja* $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ *um campo tensorial Codazzi en uma Variedade Riemanniana compacta M. Suponha que,*

$$tr\phi = constant. \tag{2.22}$$

Então,

$$\left|\nabla\phi\right|^2 \geq \left|\nabla\left(tr\phi\right)\right|^2.$$

Demonstração. Como $tr\phi = constant$, temos que $\nabla tr\phi = 0$ □

Lema 2.4.2. *Seja* $\phi = \sum_{ij} \phi_{ij} w_i \otimes w_j$ *um campo tensorial Codazzi en uma Variedade Riemanniana compacta M. Se a segunda função simétrica de* ϕ_{ij} *é uma constante não negativa, ie:*

$$\Gamma_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = \left(tr\phi\right)^2 - \left|\phi\right|^2 = constant \geq 0. \tag{2.23}$$

Então,

$$\left|\nabla\phi\right|^2 \geq \left|\nabla\left(tr\phi\right)\right|^2.$$

Demonstração. Tomando a derivada covariante de (2.13) temos,

$$0 = 2\sum_k (tr\phi)_k \, w_k \, (tr\phi) - \sum_{ijk} \phi_{ijk} w_k \phi_{ij} - \sum_{ijk} \phi_{ij}\phi_{ijk} w_k,$$

isto é,

$$0 = 2\sum_k (tr\phi)_k \, w_k \, (tr\phi) - 2\sum_{ijk} \phi_{ij}\phi_{ijk} w_k,$$

o que implica que,

$$\sum_k (tr\phi)_k \, w_k \, (tr\phi) = \sum_{ijk} \phi_{ij}\phi_{ijk} w_k.$$

Calculando em e_k obtemos,

$$\sum_k (tr\phi)_k \, (tr\phi) = \sum_{ijk} \phi_{ij}\phi_{ijk}.$$

De,

$$|\nabla (tr\phi)|^2 = \sum_k (tr\phi)_k^2 \, ,$$

segue que,

$$\begin{aligned}
(tr\phi)^2 \, |\nabla (tr\phi)|^2 &= \sum_k (tr\phi)^2 \, (tr\phi)_k^2 \\
&= \sum_k \left(\sum_{ij} \phi_{ij}\phi_{ijk} \right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{ij} \phi_{ij} \right)^2 \left(\sum_{ijk} \phi_{ijk} \right)^2 \\
&= |\phi|^2 \, |\nabla\phi|^2 \, .
\end{aligned}$$

Utilizando (2.23) vamos a obter,

$$\begin{aligned}
(tr\phi)^2 \, |\nabla (tr\phi)|^2 &\leq |\phi|^2 \, |\nabla\phi|^2 \\
&\leq (tr\phi)^2 \, |\nabla\phi|^2 \, ,
\end{aligned}$$

com o que chegamos finalmente a,

$$|\nabla (tr\phi)|^2 \quad \leq \quad |\nabla \phi|^2 .$$

□

Neste trabalho, precisamos do seguinte lema algébrico devido a Okumura, Hilário Alencar e Manfredo do Carmo, ver Lema 2.6 de [1].

Lema 2.4.3. *Seja μ_i, $i = 1, ..., n$ números reais tal que $\sum_i \mu_i = 0$, e $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$, donde β=constante≥ 0. Então:*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \tag{2.24}$$

e a igualdade acontece em (2.24) se e somente se $(n-1)$ dos μ_i são iguais.

Demonstração. Podemos supor que $\beta > 0$, utilizaremos o método dos multiplicadores de lagrange para encontrar os pontos críticos de,

$$f \quad = \quad \sum_i \mu_i^3$$

sujeito as condições,

$$\begin{aligned} \sum \mu_i &= 0, \\ \sum_i \mu_i^2 &= \beta^2. \end{aligned}$$

Para isto consideremos $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e as funções,

$$\begin{aligned} g_1(\mu_1, ..., \mu_n) &= \sum \mu_i, \\ g_2(\mu_1, ..., \mu_n) &= \sum_i \mu_i^2 - \beta^2. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f = \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} g_1 + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_i} g_2,$$

ou seja,

$$3\mu_i^2 = \beta_1 + 2\beta_2\mu_i$$

isto é, se $\lambda_1 = 2\frac{\beta_2}{3}$ e $\lambda_2 = \frac{\beta_1}{3}$, a ultima equação se transforma em,

$$\mu_i^2 - \lambda_1\mu_i - \lambda_2 = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Assim os pontos críticos satisfazem a equação quadrática (1) que possui apenas duas raízes, logo de $\sum \mu_i = 0$, e de uma re-enumeração se necessário, estes são dados por,

$$\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_p = a > 0,$$

$$\mu_{p+1} = \mu_{p+2} = ... = \mu_n = -b < 0.$$

Portanto,

$$\beta^2 = \sum_i \mu_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2, \tag{2}$$
$$0 = \sum_i \mu_i = pa - (n-p)b, \tag{3}$$
$$f = \sum_i \mu_i^3 = pa^3 - (n-p)b^3. \tag{4}$$

Da equação (3) obtemos que,

$$pab = (n-p)b^2,$$

substituindo esta expressão na equação (2) temos,

$$\beta^2 = pa^2 + pab.$$

Com o valor b obtido da equação (3), a equação acima se reduz a:

$$\beta^2 = pa^2 + \frac{p^2a^2}{n-p}.$$

Assim fica,

$$a^2 = \frac{(n-p)\beta^2}{np}.$$

Substituindo o valor de a^2 na equação (2) obtemos,

$$b^2 = \frac{p\beta^2}{n(n-p)}.$$

Com isto obtemos,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{(n-p)\beta^2}{np}, \\ b^2 &= \frac{p\beta^2}{n(n-p)}. \end{aligned}$$

e de (4),

$$f = \left(\frac{n-p}{n}a - \frac{p}{n}b\right)\beta^2.$$

Observe que f decresce quando p cresce. Portanto, f atinge um máximo quando $p = 1$, e o máximo de f é dado por,

$$\begin{aligned} f &= \sum_i \mu_i^3 \\ &= pa^3 - (n-p)b^3 \\ &= a^3 - (n-1)b^3 \\ &= ((n-1)b)^3 - (n-1)b^3 \\ &= (n-2)n(n-1)b^2b \\ &= \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3. \end{aligned}$$

Como f é ímpar, isto prova a primeira parte do lema.

Observe que para $p = 1$ em (3),

$$0 = a - (n-1)b \Rightarrow a = (n-1)b.$$

Substituindo na equação (2),

$$\beta^2 = (n-1)^2 b^2 + (n-1) b^2 \tag{2.25}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\beta \tag{2.26}$$

Observe que a igualdade no lado direito é obtida se e só se (n-1) dos μ_i´s são da forma $-b = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^{1/2}\beta$, e o outro é $a = \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^{1/2}\beta$.

$\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies em uma forma espacial real.

Neste capitulo daremos a primeira aplicação referente ao que estudamos no capitulo anterior.

3.1 Equação de Gauss e curvatura escalar normalizada.

Lembremos que se $Q^{n+1}(c)$ é uma Variedade Riemanniana (n+1)-dimensional com curvatura seccional constante c (isto é uma forma espacial); M uma hipersuperfície em $Q^{n+1}(c)$. Para qualquer ponto $p \in M$ escolhemos um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, e o co-referencial dual correspondente $\{w_i\}_{i=1}^{n}$. Da seção 1.12 temos,

$$1 \leq A, B, C \leq n+1,$$

$$1 \leq i, j, k \leq n.$$

$$
\begin{aligned}
dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \\
\overline{\Omega}_{AB} &= -\frac{1}{2} \sum R_{ABCD} w_C \wedge w_D, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_A, e_B) &= R_{ABAB}, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_B, e_A) &= -R_{ABAB}, \\
\overline{\Omega}_{AB}(e_C, e_D) &= 0, \quad seA \neq C, D; \quad B \neq D, C
\end{aligned}
$$

As equações de estrutura de $Q^{n+1}(c)$ são,

$$
\begin{aligned}
dw_A &= \sum_B w_{AB} \wedge w_B, \quad w_{AB} = -w_{BA} \\
dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} - c w_A \wedge w_B
\end{aligned}
$$

Denotando pelas mesmas letras as restrições a M de w_A, w_{AB}, temos,

$$
\begin{aligned}
dw_i &= \sum_j w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} = -w_{ji} \\
dw_{ij} &= \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l,
\end{aligned}
$$

onde R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica induzida em M.
A forma quadrática $B = \sum_{ij} h_{ij} w_i \otimes w_j$ é a segunda forma fundamental de M.
Também temos,

$$
R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \tag{3.1}
$$

Definimos a curvatura de Ricci como sendo,

$$
Ric(x) = \sum_i < R(x, e_i)x, e_i > .
$$

Onde

$$
R(x, e_i) = R_{xe_i} : T_pM \longrightarrow T_pM,
$$

é o operador curvatura de M, e x é um vetor tangente a M no ponto p.
Definimos também a curvatura escalar $\mathtt{R}$ como sendo,

$$
\mathtt{R} = \sum_i Ric(e_j).
$$

Portanto,

$$\mathtt{R} = \sum_{ij} < R(e_i, e_j)e_i, e_j > .$$

Logo,

$$R_{ijij} =< R(e_i, e_j)e_i, e_j >= c + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji}, \qquad h_{ij} = h_{ji},$$

então,

$$\mathtt{R} = \sum_{ij}(c + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2).$$

$$\mathtt{R} = n(n-1)c + \sum_{ij}(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2).$$

A curvatura escalar normalizada é definida por,

$$R = \frac{1}{n(n-1)}\mathtt{R}.$$

Portanto,

$$n(n-1)(R-c) = \sum_{ij}(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2).$$

A curvatura média H é definida por,

$$\text{H}=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii},$$

e a norma $|B|$ da segunda forma fundamental B satisfaz,

$$|B|^2 = \sum_{ij} h_{ij}^2,$$

Assim temos que:

$$n(n-1)(R-c) = n^2H^2 - |B|^2, \tag{3.2}$$

que é chamada a equação de Gauss.
A equação de Codazzi nos diz que,

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \tag{3.3}$$

onde a derivada covariante da segunda forma fundamental é definida por,

$$\sum_k h_{ikj} w_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj} w_{ki} + \sum_k h_{ik} w_{kj}. \tag{3.4}$$

Com as definições e estimativas acima, podemos utilizar as estimativas do capitulo anterior da seguinte maneira:
Seja $\phi_{ij} = h_{ij}$ como no capitulo 2 e $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Então de (2.19), isto é de,

$$\int_M \left[|\nabla \phi|^2 - |\nabla (tr\phi)|^2 \right] + \int_M \frac{1}{2} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0,$$

obtemos,

$$\int_M \left[|\nabla B|^2 - n^2 |H|^2 \right] + \int_M \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0. \tag{3.5}$$

Agora tentemos estimar o segundo termo da equação (3.5).
Usando (3.1) obtemos,

$$R_{ijij} = c + h_{ii} h_{jj} - h_{ij}^2,$$

então,

$$\begin{aligned} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= c(\lambda_i - \lambda_j)^2 + h_{ii} h_{jj} (\lambda_i - \lambda_j)^2 - h^2 ij (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= c\lambda_i^2 - 2c\lambda_i \lambda_j + c\lambda_j^2 + h_{ii} h_{jj} \lambda_i^2 - 2h_{ii} h_{jj} \lambda_i \lambda_j + \\ &\quad + h_{ii} h_{jj} \lambda_j^2 - h_{ij}^2 \lambda_i^2 + 2h_{ij}^2 \lambda_i \lambda_j - h_{ij}^2 \lambda_j^2 \end{aligned}$$

Agora agrupemos em forma conveniente a ultima expressão tendo em conta as 9 seguintes igualdades,
1.- primeira

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

2.- segunda

$$\begin{aligned} \sum_{ij} (c\lambda_i^2 + c\lambda_j^2) &= nc \textstyle\sum_i \lambda_i^2 + nc \textstyle\sum_j \lambda_j^2 \\ &= 2nc \sum_j \lambda_j^2 \\ &= 2n |B|^2 . \end{aligned}$$

3.- terçeira

$$\sum_{ij}(c\lambda_i^2 + c\lambda_j^2) = nc\sum_i \lambda_i^2 + nc\sum_j \lambda_j^2$$

$$= 2nc\sum_j \lambda_j^2$$

$$= 2n\left|B\right|^2.$$

4.- quarta

$$\begin{aligned}\sum_{ij} h_{ii}h_{jj}\lambda_i\lambda_j &= \lambda_1^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2) + ... + \lambda_n^2(\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2) \\ &= \left|B\right|^4.\end{aligned}$$

5.- quinta

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(h_{ii}h_{jj}\lambda_i^2 + h_{ii}h_{jj}\lambda_j^2) &= \textstyle\sum_{ij}(\lambda_i\lambda_j\lambda_i^2 + \lambda_i\lambda_j\lambda_j^2) \\ &= \textstyle\sum_{ij}(\lambda_i^3\lambda_j + \lambda_i\lambda_j^3) \\ &= \sum_{ij}\lambda_i^3\lambda_j + \sum_{ij}\lambda_i\lambda_j^3 \\ &= 2\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j^3 \\ &= 2(\textstyle\sum_i \lambda_i)(\sum_j \lambda_j^3) = 2nH\sum_j \lambda_j^3.\end{aligned}$$

6.- sexta

$$\sum_{ij}(h_{ij}^2\lambda_i^2 + h_{ij}^2\lambda_j^2) = 2\sum_{ij} h_{ij}^2\lambda_i\lambda_j.$$

7.- sétima

$$\begin{aligned}\sum_{ij} h_{ij}^2\lambda_i\lambda_j &= \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + ... + \lambda_n^4 \\ &= \sum_i \lambda_i^4.\end{aligned}$$

8.- oitava

$$\begin{aligned}\sum_{ij}\lambda_{ij}^2\lambda_j^2 &= \lambda_1^2\lambda_1^2+...+\lambda_n^2\lambda_n^2\\ &= \sum_i \lambda_i^4.\end{aligned}$$

9.- nona

$$\sum_{ij}\lambda_{ij}^2\lambda_i^2=\sum_{ij}\lambda_{ij}^2\lambda_j^2.$$

Para obter,

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = nc\,|B|^2-n^2H^2c-|B|^4+nH\sum_i\lambda_i^3 \tag{3.6}$$

Seja,

$$\mu_i=\lambda_i-H \text{ e } |Z|^2=\sum_i\mu_i^2,$$

Assim,

$$\sum_i\mu_i=\sum_i(\lambda_i-H)=\sum_i\lambda_i-nH=0,$$

$$\begin{aligned}|Z|^2 &= \sum_i\mu_i^2\\ &= \textstyle\sum_i(\lambda_i-H)^2\\ &= \textstyle\sum_i(\lambda_i^2-2\lambda_iH+H^2)\\ &= |B|^2-2nH^2+nH^2\\ &= |B|^2-nH^2.\end{aligned}$$

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad |Z|^2 = |B|^2 - nH^2. \tag{3.7}$$

$$\textstyle\sum_i \lambda_i^3 = \displaystyle\sum_i (\mu_i + H)^3 = \sum_i (\mu_i^3 + 3\mu_i H(\mu_i^2 + \mu_i H) + H^3).$$

Como,

$$\mu_i H = (\lambda_i - H)H = \lambda_i H - H^2,$$

e,

$$\sum_i \mu_i H = nH^2 - nH^2 = 0,$$

temos que,

$$\sum_i \lambda_i^3 = \sum_i \mu_i^3 + 3H\,|Z|^2 + nH^3. \tag{3.8}$$

Observação 3.1.1. *Temos,*

$$\begin{aligned}
|B|^4 &= |B|^2\,|B|^2 \\
&= (|Z|^2 + nH^2)(|Z|^2 + nH^2) \\
&= |Z|^4 + 2nH^2\,|Z|^2 + n^2H^4.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2 &= nc\,|B|^2 - n^2H^2c - |B|^4 + nH\sum_i \lambda_i^3\\
&= nc(|B|^2 - nH^2) - (|Z|^4 + 2nH^2\,|Z|^2 + n^2H^4) +\\
&\quad +nH(\sum_i \mu_i^3 + 3H\,|Z|^2 + nH^3)\\
&= nc\,|Z|^2 - |Z|^4 - 2nH^2\,|Z|^2 - n^2H^4 +\\
&\quad +nH\sum_i \mu_i^3 + 3nH^2\,|Z|^2 + n^2H^4\\
&= nc\,|Z|^2 + nH^2\,|Z|^2 - |Z|^4 + nH\sum_i \mu_i^3.
\end{aligned}
$$

substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6) chegamos a,

$$
\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = |Z|^2\,(nc + nH^2 - |Z|^2) + nH\sum_i \mu_i^3. \tag{3.9}
$$

Pelo lema 2.4.3, e de,

$$
nH\sum_i \mu_i^3 \geq \frac{-nH(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3,
$$

onde $\beta = \sqrt{|B|^2 - nH^2}$,
Temos,

$$
\begin{aligned}
nH\sum_i \mu_i^3 &\geq \frac{-nH(n-2)\,|Z|^2}{\sqrt{n(n-1)}\,|Z|^2}(\sqrt{|Z|^2})^3\\
&\geq \frac{-Hn(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\,|Z|^2\,\sqrt{|Z|^2}\\
&= \frac{-Hn(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\,|Z|^2\,\sqrt{|B|^2 - nH^2}.
\end{aligned}
$$

Com isso, temos,

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \geq (|B|^2-nH^2)(nc+2nH^2-|B|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\,|H|\,\sqrt{|B|^2-nH_2}) \tag{3.10}$$

Agora observe que a seguinte igualdade,

$$\left(\sqrt{|B|^2-nH^2}+\frac{1}{2}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-1}}|H|+\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}\right)\times$$
$$\times\left(-\sqrt{|B|^2-nH^2}-\frac{1}{2}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-1}}|H|+\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}\right)=$$
$$=nc+2nH^2-|B|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\sqrt{|B|^2-nH^2},$$

se verifica se e somente se,

$$nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}-(|B|^2-nH^2)-(n-2)H\sqrt{|B|^2-nH^2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}-$$
$$-\frac{1}{4}(n-2)^2(\frac{n}{n-1})H^2=nc+2nH^2-|B|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\sqrt{|B|^2-nH^2},$$

ou seja, se e somente se,

$$\frac{n^3H^2}{4(n-1)}-|B|^2+nH^2-\frac{1}{4}(n-2)\left(\frac{n}{n-1}\right)H^2=2nH^2-|B|^2,$$

se e somente se,

$$\frac{n^3H^2}{4(n-1)}-\frac{1}{4}(n-2)\left(\frac{n}{n-1}\right)H^2=nH^2,$$

se e somente se,

$$\frac{n^3H^2-n^3H^2+4n^2H^2-4nH^2}{4(n-1)}=nH^2,$$

se e somente se,

$$\frac{4nH^2(n-1)}{4(n-1)}=nH^2,$$

que é claramente uma igualdade.

Substituindo (3.10) em (3.5) obtemos:

$$\int_M [|\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + (|B|^2 - nH^2)(nc + 2nH^2 - |B|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\sqrt{|B|^2 - nH^2})]$$
$$= \int_M [|\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2] + \int_M (|B|^2 - nH^2)(\sqrt{|B|^2 - nH^2} + \frac{1}{2}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-1}}|H| +$$
$$+ \sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}}) \times (-\sqrt{|B|^2 - nH^2} - \frac{1}{2}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-1}}|H| + \sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}})$$
$$\leq 0. \tag{3.11}$$

Observe que,

$$nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)} = \frac{n[n^2H^2 + 4(n-1)c]}{4(n-1)}.$$

Aqui supomos que,

$$n[n^2H^2 + 4(n-1)c] \geq 0,$$

se,

$$c < 0.$$

3.2 Segundo teorema de classificação e conseqüências

A estimativa dada pela equação (3.11) nos permitem dar uma classificação para hipersuperfícies compactas em uma forma espacial real, isto é, temos,

Teorema 3.2.1. *Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional em uma forma espacial (n+1)-dimensional $Q^{n+1}(c)$. Suponha que,*

$$|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2, \tag{3.12}$$

e

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq nc+\frac{n^3}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4+4(n-1)n^2H^2c}. \tag{3.13}$$

Então: ou

$$|B|^2 \equiv nH^2,$$

e M é uma hipersuperfície totalmente umbílica, ou

$$|B|^2 \equiv nc+\frac{n^3}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4+4(n-1)n^2H^2c}, \tag{3.14}$$

e M tem duas curvaturas principais diferentes λ_1 e λ_n, isto é:

$$\lambda_1 = ... = \lambda_k = \frac{nH+\sqrt{n^2H^2+4k(n-k)c}}{2k}$$

$$\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = \frac{nH-\sqrt{n^2H^2+4k(n-k)c}}{2(n-k)}$$

para algum k com $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. De,

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq nc+\frac{n^3}{2(n-1)}H^2-\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4+4(n-1)n^2H^2c}$$

fatorando o radicando, chegamos a,

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - (n-2)|H|\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}}$$

$$\begin{aligned} n^2H^2 \leq |B|^2 \quad &\leq \left[\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^2 - \\ &\quad -\frac{1}{4}\frac{n}{(n-1)}(n-2)^2H^2 + \frac{1}{4}\frac{n^3}{(n-1)}H^2. \\ n^2H^2 \leq |B|^2 \quad &\leq \left[\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{n-2}{(n-1)}H^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq |B|^2 - n^2H^2 \\ &\leq \left[\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{n-2}{(n-1)}H^2 - n^2H^2 \quad . \\ &\leq \left[\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^2 - \frac{(n-1)nH^2 + nH^2}{2(n-1)} \end{aligned}$$

Aqui usamos $a - b \leq a$, onde $a, b > 0$, para chegar a,

$$0 \leq |B|^2 - n^2H^2 \leq \left[\sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]^2$$

extraindo raiz temos,

$$0 \leq \sqrt{|B|^2 - n^2H^2} \leq \sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$0 \leq \sqrt{nc + \frac{n^3H^2}{4(n-1)}} - \frac{1}{2}(n-2)H\sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{|B|^2 - n^2H^2}$$

Com isto a desigualdade integral 3.11 se transforma em uma igualdade. Portanto ou,

$$|B|^2 \equiv nH^2,$$

ou que é equivalente a,

$$|Z|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i \mu_i = 0, \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = H, \ \forall i.$$

e M é uma hipersuperfície totalmente umbílica.
Ou

$$|B|^2 = nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}|H|\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n^2H^2c}$$

fazendo o processo inverso, e M tem duas curvaturas principais diferentes λ_1 e λ_n, pois de,

$$k\lambda_k + (n-k)\lambda_n = nH,$$

e de (3.5) tendo em conta que,

$$\lambda_k \neq \lambda_n$$

$$R_{knkn} = \lambda_k\lambda_n + c = 0$$

substituindo λ_n na primeira equação chegamos a,

$$k\lambda_k^2 - nH\lambda_k - c(n-k) = 0.$$

Assim,

$$\lambda_k = \frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-k)}}{2k},$$

tomemos,

$$\lambda_k = \frac{nH + \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-k)}}{2k}.$$

Com isto,

$$\lambda_n = \frac{nH - \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-k)}}{2(n-k)}.$$

Isto é,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \frac{nH + \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-k)}}{2k},$$

$$\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = \frac{nH - \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-k)}}{2(n-k)},$$

para algum k, $1 \leq k \leq n$. □

Corolário 3.2.1. *Seja M uma Hipersuperfície compacta n-dimensional em uma forma espacial (n+1)dimensional* $Q^{n+1}(c)$ *com curvatura media constante H, se,*

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n^2H^2c}.$$

Então, ou

1) $|B|^2 \equiv nH^2$ *e M é totalmente umbílica; ou*

2) $|B|^2 \equiv nc + \dfrac{n^3H^2}{2(n-1)} - \dfrac{(n-2)\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n2H^2c}}{2(n-1)}$

e caso o 2) *acontece, se e somente se:*

a) *Quando H=0, então* $c > 0$ *e M é um toro de Clifford em* $S^{n+1}(c)$,

b) *Quando* $H \neq 0$, *então* $c > 0$ *e* $M = S^{n-1} \times S^1$.

Demonstração. Do lema (2.4.1) e o teorema anterior se tem *1)* ou *2)* .

Prova de *a)* Agora quando H=0, então, $|B|^2 \equiv nc$, aqui existem $\lambda_1 \neq \lambda_2$ portanto $c > 0$.

Observe que da equação de Gauss,

$$
\begin{aligned}
R - 1 &= \frac{-|B|^2}{n(n-1)} \\
&= \frac{-[k\lambda_1^2 + (n-k)\lambda_n^2]}{n(n-1)} \\
&= \frac{-\left[k(\frac{4kc(n-k)}{4k^2}) + \frac{4kc(n-k)^2}{4(n-k)^2}\right]}{n(n-1)} \\
&= \frac{-nc}{n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Como $c > 0 \Rightarrow c = 1$, logo fica,

$$R = \frac{n-2}{n-1}$$

logo concluímos esta parte do teorema por aplicando o *teorema*1 de [15] (devido a H. Blaine Lawson, Jr.).

Isto é: Seja M^n uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) e seja $\Psi : M^n \longrightarrow S^{n+1}$ uma imersão minima isométrica.

*Teorema*1. – (*Lawson*) Se a curvatura escalar de M^n e´identicamente igual a $\frac{n-2}{n-1}$, então, a menos de rotação de S^{n+1}, (M^n, Ψ) é uma sub-variedade aberta de um dos produtos mínimos,

$$S^k(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times S^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}}) \qquad para \quad k = 1, ..., [\frac{n}{2}]$$

Demonstração. veja pag. 189 de [15] □

Prova de b). Quando $H \neq 0$, como $H = cte$, temos,

$$|\nabla H| = 0.$$

Assim,

$$|\nabla B|^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla B| = 0,$$

e, (n-1) dos λ_i são iguais por lema 2.0.3.

Seja $H > 0$, sem perda de generalidade; e $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$. então,

$$(n-1)\lambda_1 + \lambda_n = nH, \qquad R_{1n1n} = \lambda_1 \lambda_n + c = 0.$$

Analogamente aos cálculos anteriores, temos que,

$$\lambda_1 = \frac{nH + \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-1)}}{2(n-1)}, \qquad \lambda_n = \frac{nH - \sqrt{n^2H^2 + 4ck(n-1)}}{2}.$$

Quando $c > 0$,

$$M = S^{n-1}(1/\lambda_1) \times S^1(1/\lambda_n).$$

O caso $c \leq 0$ não acontece desde que M é compacto. Isto completa a prova do corolário. $\square$

Corolário 3.2.2. *Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional* $(n \geq 3)$ *com curvatura escalar normalizada R constante, em uma forma espacial (n+1)dimensional* $Q^{n+1}(c)$*, suponha que,*

1) $\overline{R} \equiv R - c \geq 0$

2) *A segunda forma fundamental* $|B|$ *satisfaz:*

$$n\overline{R} \leq |B|^2 \leq \frac{n\left[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R}c + nc^2\right]}{(n-2)(n\overline{R} + 2c)}. \tag{3.15}$$

Então: ou

$$|B|^2 \equiv n\overline{R}, \tag{3.16}$$

e M é totalmente umbílica; ou

$$|B|^2 \equiv \frac{n\left[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R}c + nc^2\right]}{(n-2)(n\overline{R} + 2c)}, \tag{3.17}$$

e (3.17) *ocorre, se e somente se,* $c > 0$ *e* $M = S^{n-1}(1/\lambda_1) \times S^1(1/\lambda_n)$.

Demonstração. Tomando $\phi_{ij} = h_{ij}$, no lema (2.4.2), temos da equação de Gauss

$$n^2H^2 - |B|^2 = n(n-1)(R-c) = n(n-1)\overline{R} \geq 0,$$

que,

$$|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2. \tag{3.18}$$

Vejamos que da equação de Gauss (3.2) a condição (3.13) é equivalente à equação (3.15).

Note primeiro que, $|\nabla B|^2 \geq nH^2$ é equivalente a, $n\overline{R} \leq |B|^2$, de fato,

$$n(n-1)\overline{R} + |B|^2 = n^2H^2 = n(nH^2) \leq n|\nabla B|^2,$$

se e somente se,

$$n(n-1)\overline{R} \leq (n-1)|B|^2$$

se e somente se,

$$n\overline{R} \leq |B|^2$$

Agora provaremos que (3.13) é equivalente a (3.15)

$$\begin{aligned} |B|^2 &\leq nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n^2H^2c} \\ |B|^2 &\leq \frac{n\left[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R}c + nc^2\right]}{(n-2)(n\overline{R}+2c)}. \end{aligned}$$

Temos a equação,

$$n^2H^2 = n(n-1)\overline{R} + |B|^2 \tag{1}$$

de 3.13 e a equação de Gauss (1) acima temos,

$$\begin{aligned} |B|^2 &\leq nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n^2H^2c} \\ 0 &\leq nc + \frac{nn^2}{2(n-1)}H^2 - |B|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^2n^2H^2 + 4(n-1)n^2H^2c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq nc + \frac{n^2(n-1)\overline{R}}{2(n-1)} - \frac{(n-2)}{2(n-1)}|B|^2 - \\ & -\frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{[n(n-1)\overline{R} + |B|^2][4(n-1)c + n(n-1)\overline{R} + |B|^2]}, \end{aligned}$$

colocando a raiz quadrada sozinha na esquerda da desigualdade temos,

$$\begin{aligned} \sqrt{[n(n-1)\overline{R} + |B|^2][4(n-1)c + n(n-1)\overline{R} + |B|^2]} &\leq \\ \leq \frac{2(n-1)}{(n-2)}\{nc + \frac{n^2(n-1)\overline{R}}{2(n-1)} - \frac{(n-2)}{2(n-1)}|B|^2\} \end{aligned}$$

elevando ao quadrados ambos membros da desigualdade, temos,

$$\begin{aligned} \{\sqrt{[n(n-1)\overline{R} + |B|^2][4(n-1)c + n(n-1)\overline{R} + |B|^2]}\}^2 &\leq \\ \{\frac{2(n-1)}{(n-2)}\{nc + \frac{n^2(n-1)\overline{R}}{2(n-1)} - \frac{(n-2)}{2(n-1)}|B|^2\}\}^2 \end{aligned}$$

$\square$

Observação 3.2.1. *Seja M uma hipersuperfície completa n-dimensional em um Espaço Euclidiano (n+1)-dimensional* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Neste caso (3.13)

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq nc + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4 + 4(n-1)n^2H^2c}.$$

torna-se:

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq \frac{n^2}{(n-1)}H^2, \tag{3.19}$$

pois neste caso $c = 0$ *e* (3.13) *fica,*

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}\sqrt{n^4H^4}.$$

isto é,

$$n^2H^2 \leq |B|^2 \leq \frac{n^2}{(n-1)}H^2,$$

analogamente (3.15)

$$n\overline{R} \leq |B|^2 \leq \frac{n\left[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R}c + nc^2\right]}{(n-2)(n\overline{R}+2c)}.$$

torna-se,

$$nR \leq |B|^2 \leq \frac{n(n-1)}{(n-2)}R. \tag{3.20}$$

*Do teorema*1. *em [6] (Chen-Okumura), sabemos que* (3.19) *ou* (3.20)*, implica que a curvatura seccional* K *de* M *é não negativa, isto é,* $K \geq 0$. *Pois o teorema*1 *de [6] diz que,*

*teorema*1. $-$ $(Chen - Okumura)$ *Seja* M *uma sub-variedade n-dimensional de uma variedade Riemanniana* N *de curvatura constante* c*. Se a curvatura escalar* $\mathtt{R}$ *satisfaz (adaptado a nosso caso),*

$$\mathtt{R} \geq (n-2)|B|^2,$$

em um ponto $p \in M$*, então as curvaturas seccionais de* M *são não negativas em* p*.*

Demonstração. Veja pag. 605 de Chen-Okumura [6] □

Nós temos,

$$\begin{aligned} |B|^2 &\leq \frac{n^2}{(n-1)}H^2 \\ &= \frac{n(n-1)(R-c)+|B|^2}{(n-1)} \end{aligned}$$

isto é,

$$(n-2)|B|^2 \leq n(n-1)R,$$

lembre que $R = \dfrac{1}{n(n-1)}\mathtt{R}$*, assim temos,*

$$(n-2)|B|^2 \leq \mathtt{R},$$

e a hipóteses do teorema$1(Chen - Okumura)$ *é satisfeito.*

Assim, o Teorema de Hartman, veja [14], diz que

$Teorema(*)(Hartman)$ *Seja* $M = M^n$ *uma variedade Riemanniana completa conexa de classe* C^2 *com curvatura seccional não negativa. Seja* $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de classe* C^2 *tal que* $X(M)$ *tenha uma constante positiva m-ésima curvatura* $H_m(x) \equiv C_0 > 0$, $x \in M$, *para algum* m, $1 \leq m \leq n$. *Então na decomposição:*

$$M = \mathbb{R}^{n-d} \times M_0^d \qquad X = X_1 \times X_0$$

tal que M_0^d *é uma variedade Riemanniana completa, a primeira aplicação* X_1 *em,*

$$X_1 : \mathbb{R}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} \qquad\qquad X_0 : M_0^d \longrightarrow R^{d+1}$$

é a identidade e o segundo é uma imersão isométrica.
$X_0(M_0^d)$ *é uma esfera (de dimensão* $m \leq d \leq n$*).*

Demonstração. Veja pag. 364 de [14]. □

Obtemos o seguinte resultado. Pois neste caso c=0.

Proposição 3.2.1. *Seja M uma hipersuperfície completa em um Espaço Euclidiano (n+1)-dimensional* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Se a curvatura meia H é constante e* (3.19) *se tem, ou se a curvatura escalar normalizada R é constante e* (3.20) *se tem, então ou M é totalmente umbilica, ou* $M = S^{n+1} \times \Re^1$.

Escolhendo $\phi_{ij} = h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ no Teorema 2.0.1 e notando que $\mathbb{R}_{ijij} = c + \lambda_i \lambda_j$, obtemos o seguinte Teorema:

Teorema 3.2.2. *Seja M uma hipersuperfície compacta n-dimensional em uma forma espacial real (n+1)-dimensional.*

1) *Se M tem curvatura seccional positiva e* (3.18)

$$|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2.$$

ocorre, então M é totalmente umbílica.

2) *Se M tem curvatura seccional não negativa e* (3.18)

$$|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2.$$

ocorre, então ou M é totalmente umbílica, ou M tem as seguintes duas curvaturas principais diferentes:

$$\lambda_1 = .. = \lambda_k = \frac{nH + \sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)c}}{2k}$$

$$\lambda_{k+1} = .. = \lambda_n = \frac{nH - \sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)c}}{2(n-k)}$$

donde $1 \leq k \leq n$.

Quando H=constante, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3. *([10]) Seja M uma hiper-superfície compacta n-dimensional em uma forma espacial real (n+1)-dimensional* $Q^{n+1}(c)$ *com curvatura media constante. Se M tem curvatura seccional não negativa, então ou M é totalmente umbilica, ou* $c > 0$ *e* $M = S^{n-k} \times S^k$, $1 \leq k \leq n$.

Corolário 3.2.4. *([8]) Seja M uma hiper-superfície compacta n-dimensional, com curvatura seccional não negativa em uma forma espacial real (n+1)-dimensional* $Q^{n+1}(c)$. *Suponha que a curvatura escalar normalizada de M é constante e não é menor que c. Então M é totalmente umbilica, ou* $c > 0$ *e* $M = S^{n-k} \times S^k$, $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Como supomos $\overline{R} \equiv R - c = constante \geq 0$, temos por (3.2).

$$n^2H^2 - |B|^2 = constante \geq 0 \tag{3.21}$$

Assim (3.18) se tem pelo lema (2.4.2)

Concluímos que existem no máximo dois λ_i constantes e distintos, (assim completamos a prova do corolário) por teorema (3.2.2) e a hipóteses:

$$\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j = n(n-1)R = constante.$$

$\square$

Capítulo 4

Superfícies em uma forma espacial 3-dimensional $Q^3(c)$

Nesta seção verificaremos o significado geométrico da condição,

$$|\nabla B|^2 \geq n^2 |\nabla H|^2, \tag{4.1}$$

como simples caso em que n=2.
Seja M uma superfície em uma forma espacial $Q^3(c)$ com métrica induzida $ds^2 = w_1^2 + w_2^2$.
Neste caso a equação de Gauss (3.2) é,

$$K = c + \lambda_1 \lambda_2, \tag{4.2}$$

de,

$$|B|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2,\ H^2 = \frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{4},$$

temos,

$$2(K - c) = 4H^2 - |B|^2 \tag{4.3}$$

também temos,

$$|B|^2 = h_{111}^2 + h_{121}^2 + h_{122}^2 + h_{211}^2 + h_{221}^2 + h_{222}^2.$$

Como B é Codazzi e simétrico temos,

$$h_{211} = h_{121} = h_{112},$$

$$h_{122} = h_{212} = h_{221}.$$

Assim fica,

$$|B|^2 = h_{111}^2 + 3h_{112}^2 + 3h_{221}^2 + h_{222}^2,$$

e,

$$\begin{aligned} 4|\nabla H|^2 &= (h_{111} + h_{221})^2 + (h_{112} + h_{222})^2 \\ &= h_{111}^2 + h_{221}^2 + h_{112}^2 + h_{222}^2 + 2h_{111}h_{221} + 2h_{112}h_{122}. \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$|\nabla B|^2 \geq 4|\nabla H|^2 \tag{4.4}$$

é equivalente a,

$$h_{112}^2 + h_{122}^2 \geq h_{111}h_{122} + h_{112}h_{222}. \tag{4.5}$$

4.1 W-superfície especial

Ressaltaremos a notação introduzida por S. S. Chern para superfícies em espaços Euclidianos 3-dimensionais (veja [11]).

Definição 4.1.1. *Seja M uma Superfície em uma forma espacial real 3-dimensional $Q^3(c)$. Em um ponto de M, seja λ_1 e λ_2 as curvaturas principais. Chamaremos a M uma W-superfície se $d\lambda_1$ e $d\lambda_2$ são linearmente dependentes, isto é, se existem funções f e g, não ambas zero, tal que:*

$$fd\lambda_1 + gd\lambda_2 = 0. \tag{4.6}$$

Chamamos M uma W-superfície especial, se f e g em (4.6) *podem ser escolhidos positivos.*

Agora seja M uma W-superfície especial,isto é, existem funções f e g positivos.
De (3.4),

$$\sum_k h_{ikj}w_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}w_{ki} + \sum_k h_{ik}w_{kj}.$$

temos,

$$h_{ii1} = (\lambda_i)_1,\ h_{ii2} = (\lambda_i)_2,\ i = 1, 2. \tag{4.7}$$

Da definição de gradiente temos,

$$d\lambda_i = (\lambda_i)_1 w_1 + (\lambda_i)_2 w_2, \quad i = 1, 2.$$

Assim da equação (4.6) temos,

$$f[(\lambda_1)_1 w_1 + (\lambda_1)_2 w_2] + g[(\lambda_2)_1 w_1 + (\lambda_2)_2 w_2] = 0$$
$$[f(\lambda_1)_1 + g(\lambda_2)_1]w_1 + [f(\lambda_1)_2 + g(\lambda_2)_2]w_2 = 0,$$

o que implica,

$$f(\lambda_1)_i + g(\lambda_2)_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.8}$$

Combinando (4.7) com (4.8), temos,

$$fh_{111} + gh_{221} = 0,\ fh_{112} + gh_{222} = 0. \tag{4.9}$$

Assim (4.5) é verificada, i.e. (4.4) é verificada. Do teorema (3.2.2), obtemos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1. *Seja M uma W-superfície compacta em uma forma espacial $Q^3(c)$ 3-dimensional com curvatura seccional não negativa. Então ou M é totalmente umbílica ou M é plana.*

Demonstração. A ultima conclusão do teorema (4.1.1) decorre do fato que $K \equiv 0$ quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Corolário 4.1.1. *Seja M uma superfície compacta em uma forma espacial real $Q^3(c)$ 3-dimensional com curvatura seccional não negativa, i.e. $K \geq 0$. Se*

$$a(K - c) + bH + d = 0, \tag{4.10}$$

a, b, d, são constantes tais que $b^2 - 4ad > 0$, então ou M é totalmente umbílica, ou M é plana.

Demonstração. Seja $F(\lambda_1, \lambda_2) = a(K - c) + bH + d = 0$. Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = a^2(K - c) + abH + \frac{b^2}{4} > a^2(K - c) + abH + ad = o.$$

Isto completa a prova do corolário □

Corolário 4.1.2. *Uma W-superfície especial em um espaço Euclideano 3-dimensional é uma esfera.*

Demonstração. Só precisamos notar que M é dito convexo, se $K > 0$ em M. □

Corolário 4.1.3. *Seja M uma superfície completa em* $Q^3(c)$ *com curvatura de Gauss constante K. If* $K > max\{c, 0\}$, *então M é totalmente umbílica.*

Observação 4.1.1. *Para* $n = 2$, *nossa condição* (4.1) *é essencialmente equivalente com o conceito de "W-superfície especial"inicialmente introduzido por S. S. Chern [11]. Assim a condição* (4.1) *pode ser considerada uma generalização natural do conceito de "W-superfície especial"para hipersuperfícies em* $Q^3(c)$.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H., e Do Carmo, M., Hipersurfaces with constant mean curvature in spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 120, (1994), 1223-1229

[2] Akatagawa, K., On spacelike hipersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. Math. Z. 196, (1987), 13-19

[3] Carmo, M. do, Formas diferenciais e aplicações, VIII Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio, Maio de 1971

[4] Carmo, M. do, O Metodo do Referencial Movel, III Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, 1976

[5] Carmo, M. do, Variedades Riemanianas

[6] Chen, B. Y. and Okumura, M., Scalar Curvature, inequality and submanifolds, Proc. Amer. Math¿ Soc. 38 (1973), 605-608.

[7] Cheng, Shiu-Yuen Courant institute of Mathematical Sciences, New York, N.Y. 10012, USA

[8] Cheng, S.Y., and Yau, S.T., Hipersurfaces with constant scalar curvature, Math. Ann. 225, 1977, 195-204

[9] Cheng, S.Y., and Yau, S.T., Minimal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, Ann. of Math. 104 (1976), 407-419.

[10] Chern, S. S., Do Carmo, M. and Kobayashi, S., Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant lengh, in Functional Analysis and Related Fields (F. Browder, ed.), pp. 59-75, Springer Velarg, Berlin, 1970.

[11] Chern, S. S., Some new characterizations of the Euclidian sphere, Duke Math. J. 12 (1945), 279-290

[12] Dajczer, M. and Nomuzi, K., On the flat surfaces in S_1^3 and H_1^3, in manifolds and Lie´s group (Hano, J., Morimoto, A., Murakami, S., Okamoto, K. and Ozeki, H., eds), pp. 71-108, Brikhause, Boston, Mass., 1981.

[13] Goddard, A, J., Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature, Math. Proc. Cambride Philos. Soc. 82 (1977), 489-495.

[14] Hartman, P., ON complete hypersurfaces of nonnegative sectional curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 363-374.

[15] Lawson, H., Local rigidity theorems for minimal hipersurfaces, Ann. of Math. 89, (1969), 187-197

[16] Leung, P., An estimative on the Ricci curvature on a submanifold and some applications, Proc. Aner. Math. Soc. 114 (1992) , 1051-1061.

[17] Li, H., Hipersurfaces with constant scalar curvature in space forms, Math. Ann. 305, 1996, 665-672

[18] Lima, L. Elon, Variedades Diferenciáveis, Rio de Janeiro, 1973

[19] Lima, L. Elon, Formas Diferenciais e Aplicações, Rio de Janeiro, IMPA, 1983

[20] Montiel, S., An integral inequalityfor compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and apications to the case of constant mean curvature, Indiana Uni. Math J. 37(1938), 909-917.

[21] Montiel, S., and Ros, A., Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures, in Differential Geometry, a Symposium in honor of M. do Carmo (Lawson, H. B. and Tenenblat, K., eds.). Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math 52, pp. 279-296, Longman, Harlow, 1991.

[22] Omori, H., Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205-214.

[23] Ramanathan, J., Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space, Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), 349-359.

[24] Rosenberg, H., Hipersurfaces df constant curvature in space forms, Bull SA Math. 117, 1993, n2 211-239

[25] Ros, A., Compact hypersurfaces with constant scallar curvature and a congruence theorem, J. Differential Geom. 27 (1988), 215-220

[26] Spivak, M., A comprehensive introduction to Differential Geometry, Vol. 4, 2nd ed., Publishor Perish, Wilmington, Del., 1979.

[27] Sun, Z., Compact hipersurfaces with constant scalar curvature in S^4, Chinese Ann. Ser. A 8:3 (1987), 273-286

[28] Warner, Frank, Foundations of Diferentiable Manifolds and Lie Groups, University of Pensylvania

[29] Yau, S. T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Cpmm. Pure Appli. Math. 28 (1975), 201-228.

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Brigadeiro Prontowsky s/n, CEP:

http://www.pg.im.ufrj.br/