O Teorema de Lefschetz sobre Seções Hiperplanas

Anuar Enrique Paternina Montalvo

UFRJ

Rio de Janeiro
Setembro de 2007

O Teorema de Lefschetz sobre Seções Hiperplanas

Anuar Enrique Paternina Montalvo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bruno Scárdua

Rio de Janeiro
Setembro de 2007

P295t
2007

Paternina Montalvo, Anuar Enrique
O Teorema de Lefschetz sobre seções hiperplanas/
Anuar Enrique Paternina Montalvo. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2007.
49 fl.; 29cm.
Dissertação (mestrado) - UFRJ/IM. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2007.
Orientador: Bruno Scárdua
Referências bibliográficas : fl.49.

1.Topologia algébrica - Tese. I.Scardua, Bruno Cezar Azevedo. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática. III. Título.

CDD 20a.: 514.2

O Teorema de Lefschetz sobre Seções Hiperplanas

Anuar Enrique Paternina Montalvo

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Bruno Scárdua, IM-UFRJ
(presidente)

Prof. Hossein Movasati, IMPA-CNPq-RJ

Prof. Samuel Senti, IM-UFRJ

Rio de Janeiro
Setembro de 2007

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma prova do Teorema de Lefschetz sobre Seções Hiperplanas devido a A. Andreotti e T. Frankel em [1]. Este teorema relaciona o i-ésimo grupo de homologia singular (com coeficientes inteiros) de uma variedade algébrica projetiva de dimensão n com o i-ésimo grupo de homologia singular de uma seção hiperplana da variedade, para $i \leq n-1$, e mostra que estes são iguais para $i < n-1$ e o primeiro é maior que o segundo para $i = n-1$. Enunciaremos este teorema na linguagem de cohomologia. A prova é derivada de um teorema sobre homologia de variedades de Stein, o qual também é provado usando as desigualdades de Morse para uma certa função distância. Apresentaremos as definições e resultados básicos requeridos nas demonstrações desses teoremas.

Conteúdo

Introdução

Aqui vamos a apresentar uma prova do seguinte Teorema de Lefschetz:

Teorema 0.0.1. *Seja V uma variedade algébrica irredutível de dimensão n no espaço projetivo $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Denote por V_0 a subvariedade obtida quando cortamos V com uma hipersuperficie W que contem o singular locus de V e não V. Então o homomorfismo*

$$i^* : H^r(V) \to H^r(V_0)$$

induzido pela aplicação inclusão $i : V_0 \to V$ é

1. *bijetor para $r < n - 1$*
2. *injetor para $r = n - 1$*

e o grupo quociente $H^{n-1}(V_0)/H^{n-1}(V)$ não tem torção.

Esta prova foi dada por A. Andreotti e T. Frankel no Artigo [1]. A prova é derivada de um teorema sobre homologia de variedades de Stein, o qual também é provado usando as desigualdades de Morse para uma certa função distância. Outras provas deste Teorema usando outras ferramentas podem ser encontradas na literatura, como por exemplo em [4] ou em [11].

Capítulo 1

Homologia Singular

Neste capítulo, primeiramente construiremos os grupos de homologia singular com coeficientes inteiros de um espaço topológico qualquer, daremos algumas propriedades e alguns exemplos. Depois, a partir de uma aplicação contínua dada entre espaços topológicos, obteremos homomorfismos entre os grupos de homologia singular destes espaços. O mesmo fazemos com os grupos de homologia singular relativos. Em seguida, enunciaremos um resultado básico e importante em homologia singular, o Teorema de Excisão. Por último, apresentaremos os grupos de homologia singular com coeficientes arbitrários e daremos uma relação entre a homologia com coeficientes arbitrários e a homologia com coeficientes inteiros enunciando o Teorema do Coeficiente Universal.
Para a apresentação deste capítulo foi tomado como base [5]. Outra boa referência para esta tema é [9]. As demonstrações das proposições, lemas e teoremas podem ser consultadas nestos textos.

1.1 Grupos de Homologia Singular

Definição 1.1.1. *O n-simplexo standard Δ_n em $\mathbb{R}^{n+1}$ é definido como o conjunto convexo $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$\Delta_n = \left\{ \ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{j=0}^{n} x_j = 1 \ \textit{e} \ x_j \geq 0 \ \ \textit{para} \ j = 0, ..., n \ \right\}.$$

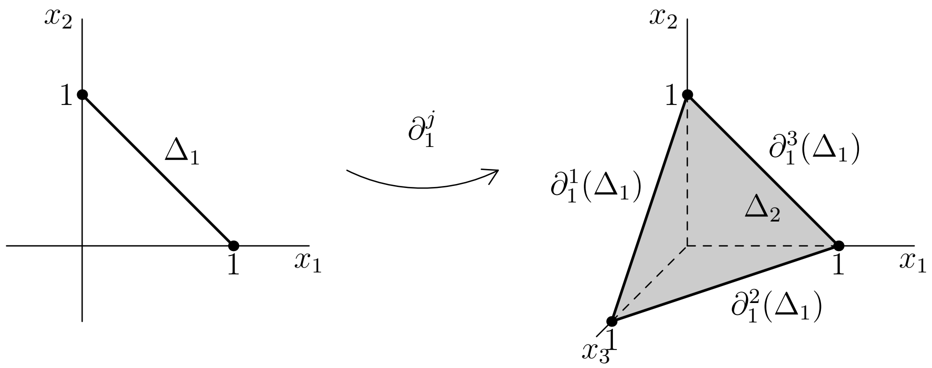
O subconjunto de Δ_n definido por

$$\Delta_n^{(j)} = \left\{ \ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n \ : \ x_j = 0 \ \right\}$$

é a j-ésima face de Δ_n.
O ponto $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ onde a j-ésima componente é um e as outras

são zero é o j-ésimo vértice de Δ_n. Também chamamos $\Delta_n^{(j)}$ de face oposta a e_j.

Para $n \geq 0$, e $0 \leq j \leq n$, define-se o **operador de bordo** ∂_n^j: $\Delta_n \to \Delta_{n+1}$ como $\partial_n^j(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., x_{j-1}, 0, x_j, ..., x_n)$. O operador ∂_n^j leva o n-simplexo Δ_n difeomorficamente a Δ_{n+1}.

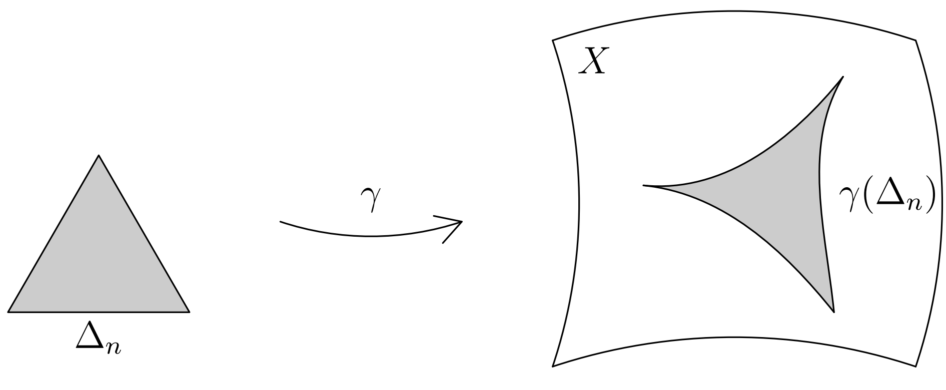


Lema 1.1. *Temos que* $\partial_{n+1}^i \circ \partial_n^j = \partial_{n+1}^j \circ \partial_n^{i-1} : \Delta_n \to \Delta_{n+2}$ *se* $0 \leq j < i \leq n-1$.

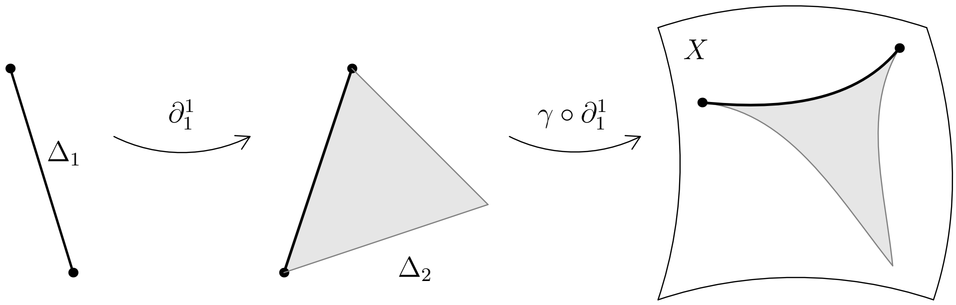
Seja X un espaço topológico (em geral X é uma variedade diferenciável).

Definição 1.1.2. *Um n-simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\gamma : \Delta_n \to X$. Se X é uma variedade diferenciável exigimos que γ seja de classe C^∞ (ou seja C^∞ numa vizinhança aberta de Δ_n em $\mathbb{R}^{n+1}$).*

Observação 1. *γ não é necessariamente um difeomorfismo, daí o nome* **singular**.



Definição 1.1.3. *A j-ésima face de um n-simplexo singular γ: $\Delta_n \to X$ é o $(n-1)-$simplexo singular $\gamma \circ \partial_{n-1}^j : \Delta_{n-1} \to X$.*



Definição 1.1.4. *$S_n(X)$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre das somas formais $\sum_\gamma a_\gamma \gamma$ onde $\gamma : \Delta_n \to X$ é um n-simplexo singular em X e $a_\gamma \in \mathbb{Z}$, e só um número finito de a_γ são diferentes de zero. Isto é,*

$$S_n(X) = \left\{ \sum_\gamma a_\gamma \gamma \ : \ \begin{array}{l} \gamma \text{ é } n\text{-simplexo singular, } a_\gamma \in \mathbb{Z} \text{ e só} \\ \text{um número finito de } a_\gamma \text{ são diferentes} \\ \text{de zero} \end{array} \right\}.$$

Os elementos de $S_n(X)$ são chamados n-cadeias singulares em X com coeficientes inteiros.

Definição 1.1.5. *A fronteira de um n-simplexo singular γ, é a $(n-1)$-cadeia singular definida por $\partial_n(\gamma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \gamma^{(j)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \gamma \circ \partial_{n-1}^j$, ou seja, é a soma formal de suas faces dotadas de sinal.*

Por linearidade, pode-se extender ∂_n a un operador (homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos), $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ definindo $\partial_n \left(\sum_\gamma a_\gamma \gamma \right) = \sum_\gamma a_\gamma \partial_n(\gamma)$.

Lema 1.2. *Para cada $n \geq 0$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 : S_{n+1}(X) \to S_{n-1}(X)$, isto é, $Im\,(\partial_{n+1}) \subset Nuc\,(\partial_n)$.*

Obtêm-se, seqüências de pares $(S_n(X), \partial_n)$ com $\mathrm{Im}\,(\partial_n) \subseteq \mathrm{Nuc}\,(\partial_{n-1})$. Assim, $S_*(X) := \{(S_n(X), \partial_n)\}$ define um complexo de cadeias chamado **complexo das cadeias singulares em X com coeficientes inteiros**.

Definição 1.1.6. *Um n-ciclo em X é uma n-cadeia singular $\alpha \in S_n(X)$ tal que $\partial_n \alpha = 0$, isto é, tal que $\alpha \in Nuc(\partial_n)$. Uma n-cadeia singular $\alpha \in S_n(X)$ é um n-bordo de alguma $(n+1)$-cadeia singular $\beta \in S_{n+1}(X)$, se $\partial_{n+1}\beta = \alpha$.*

Agora, como $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \mathrm{Nuc}(\partial_n)$, para cada $n \geq 1$, podemos definir o módulo quociente

$$H_n(S_*(X)) = \mathrm{Nuc}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

e chama-se **grupo de homologia singular de dimensão n de X com coeficientes inteiros**.

Obtemos então o complexo de cadeia

$$H_*(S_*(X)) = \{(H_n(S_*(X)), \partial_n)\},$$

$H_*(S_*(X))$:= **homologia singular de X com coeficientes inteiros**.

Abreviadamente escreveremos

$$H_n(X) = H_n(S_*(X)), \qquad H_*(X) = H_*(S_*(X)).$$

Exemplo 1. *Se X é um ponto, então $H_n(X) = 0$ para $n > 0$ e $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Proposição 1.1.1. *Se $X \neq \emptyset$ é conexo por caminhos, então $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Para uma aplicação contínua $f : X \to Y$, um homomorfismo induzido $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ é definido pela composição de cada n-simplexo singular $\gamma : \Delta_n \to X$ com f para obter um n-simplexo singular $f_\#(\lambda) = f \circ \lambda : \Delta_n \to Y$, então extendendo $f_\#$ linearmente via $f_\#\left(\sum_\gamma a_\gamma \gamma\right) = \sum_\gamma a_\gamma (f \circ \lambda)$.

Proposição 1.1.2. *O homomorfismo $f_\#$ comuta com ∂_n, isto é, $f_\# \partial_n = \partial_n f_\#$.*

Assim, temos um diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_\#"] & S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\#"] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tal que em cada quadrado $f_\# \partial_n = \partial_n f_\#$, ou seja, é um diagrama comutativo. O fato de que as aplicações $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ satisfazem $f_\# \partial_n = \partial_n f_\#$ é também expressado dizendo que as $f_\#$ definem uma **aplicação de cadeias** do complexo de cadeias singulares de X ao de Y. A relação $f_\# \partial_n = \partial_n f_\#$ implica que $f_\#$ leva ciclos a ciclos já que $\partial_n \alpha = 0$ implica $\partial_n(f_\# \alpha) = f_\#(\partial_n \alpha) = 0$. Além disso, $f_\#$ leva bordos a bordos já que $f_\#(\partial_n \beta) = \partial_n(f_\# \beta)$. Portanto, $f_\#$ induz um homomorfismo $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ definido por $f_*([\alpha]) = [f_\#(\alpha)]$ para $\alpha \in \mathrm{Nuc}\partial_n$.

Proposição 1.1.3. *Uma aplicação de cadeia entre complexos de cadeias induz homomorfismos entre os grupos de homologia dos dois complexos.*

Proposição 1.1.4. *Se $I : X \to X$ é a identidade, então $I_* : H_n(X) \to H_n(X)$ é a identidade. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Corolário 1.1.1. *Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então f_* é um isomorfismo.*

Teorema 1.1.2. *Se duas aplicações $f, g : X \to Y$ são homotópicas, então elas induzem o mesmo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$.*

Corolário 1.1.3. *Se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ é um isomorfismo.*

Proposição 1.1.5. *Homotopia de cadeias entre aplicações de cadeias induz o mesmo homomorfismo sobre homologia.*

Exemplo 2. *Como $\mathbb{R}^n$ é equivalente por homotopia a um ponto, então pelo Corolário 1..1.3., temos que*

$$H_i(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se \quad i = 0, \\ 0 & se \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo 3. *$\mathbb{S}^1$ é conexo por caminhos, então pela Proposição 1.1.1., tem-se que $H_0(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$. Além disso, pode-se mostrar que $H_1(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$ e $H_i(\mathbb{S}^1) = 0$ para $i > 1$.*

Exemplo 4. *Para a esfera $\mathbb{S}^2$ tem-se que $H_0(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z}$. Também, pode-se ver que $H_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $H_2(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z}$ e $H_i(\mathbb{S}^2) = 0$ para $i > 2$.*

Exemplo 5. *Para o toro $\mathbb{T}^2$ temos que $H_0(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}$. Além disso, pode-se ver que $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}$ e $H_i(\mathbb{T}^2) = 0$ para $i > 2$.*

1.2 Homologia Relativa

Se X é um espaço topológico e A é um subespaço, existe uma inclusão natural $S_n(A) \to S_n(X)$, i.e., $S_n(A)$ é um submódulo de $S_n(X)$. Pode-se então considerar o módulo quociente $S_n(X)/S_n(A)$ que se denota por $S_n(X, A)$. Como o operador fronteira $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ leva $S_n(A)$ a $S_{n-1}(A)$, este induz um operador fronteira $\partial_n : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$ definido por $\partial_n([\alpha]) = [\partial_n \alpha]$ onde $\alpha \in S_n(X)$. Logo, temos uma seqüência de operadores fronteira

$$\cdots \to S_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X, A) \to \cdots$$

Agora, vejamos que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Seja $\alpha \in S_n(X)$, então $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)([\alpha]) = (\partial_{n-1})(\partial_n([\alpha])) = \partial_{n-1}([\partial_n \alpha]) = [\partial_{n-1}(\partial_n)] = [(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(\alpha)] = [0] = 0$. Portanto, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \geq 1$.
Obtemos, então, seqüências de pares $(S_n(X, A), \partial_n)$ com $\mathrm{Im}(\partial_n) \subseteq \mathrm{Nuc}(\partial_{n-1})$.

Assim, $\{(S_n(X,A), \partial_n\}$ define um complexo de cadeias chamado **complexos das cadeias do par** (X,A) que denota-se $\boldsymbol{S_*(X,A)}$.
Como $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \mathrm{Nuc}(\partial_n)$, para cada $n \geq 1$, podemos definir os módulos quocientes $\mathrm{Nuc}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ que chamam-se os **grupos de homologia singular do par** (X,A) que denotam-se por $\boldsymbol{H_n(X,A)}$.

Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua com $f(A) \subset B$, ou mais concisamente $f : (X,A) \to (Y,B)$, então induz homomorfismos $f_\# : S_n(X,A) \to S_n(Y,B)$ já que a aplicação $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ leva $S_n(A)$ a $S_n(B)$. Assim obtemos uma aplicação bem definida sobre quocientes, $f_\# : S_n(X,A) \to S_n(Y,B)$.
Agora, vejamos que se cumpre a relação $f_\#\partial_n = \partial_n f_\#$. Seja $\alpha \in S_n(X)$, então $f_\#\partial_n([\alpha]) = f_\#([\partial_n\alpha]) = [f_\#\partial_n\alpha] = [\partial_n f_\#\alpha] = \partial_n([f_\#\alpha]) = \partial_n f_\#([\alpha])$. Então, $f_\#\partial_n = \partial_n f_\#$. Logo, $f_\#$ induz um homomorfismo $f_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$. Além disso, tem-se que se $I : (X,A) \to (X,A)$ é a identidade, então $I_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ é a identidade e se $f : (X,A) \to (Y,B)$ e $g : (Y,B) \to (Z,C)$ são aplicações contínuas, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Proposição 1.2.1. *Se duas aplicações $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ são homotópicas, então $f_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$.*

Agora, consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "i"] & S_n(A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "i"] & S_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "j"] & S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "j"] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & S_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde i é inclusão e j é a aplicação quociente. O diagrama é comutativo pela definição da aplicação fronteira. Além disso, para cada n, a seqüência vertical

$$0 \to S_n(A) \to S_n(X) \to S_n(X,A) \to 0$$

forma uma seqüência exata curta. Assim o diagrama é uma **seqüência exata curta de complexos de cadeias**.

A comutatividade dos quadrados significa que i e j são aplicações de cadeia, e por conseguinte induzem aplicações i_* e j_* sobre homologia. Para definir a aplicação fronteira $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$, seja $\big[[\alpha]\big] \in H_n(X,A)$ onde $[\alpha] \in S_n(X,A)$. Como j é sobre, $[\alpha] = j(\alpha_1)$ para algum $\alpha_1 \in S_n(X)$. O elemento $\partial\alpha_1 \in S_{n-1}(X)$ está em Nuc$j$ já que $j(\partial\alpha_1) = \partial([\alpha]) = 0$. Assim $\partial\alpha_1 = i(\alpha_2)$ para algum $\alpha_2 \in S_{n-1}(A)$ pois Nuc$j$ =Imi. Note que $\partial\alpha_2 = 0$ já que $i(\partial\alpha_2) = \partial i(\alpha_2) = \partial\partial\alpha_1 = 0$ e i é injetora. Definimos $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ por $\partial\left(\big[[\alpha]\big]\right) = [\alpha_2]$, $\big[[\alpha]\big] \in H_n(X,A)$.

Teorema 1.2.1. *A seqüência de grupos de homologia*

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

é exata.

A aplicação fronteira $\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ tem uma descrição muito simples: se $\big[[\alpha]\big] \in H_n(X,A)$ onde $[\alpha] \in S_n(X,A)(\alpha \in S_n(X)$ e é tal que $\partial\alpha \in S_{n-1}(A))$, então $\partial\left(\big[[\alpha]\big]\right)$ é a classe do ciclo $\partial\alpha$ em $H_{n-1}(A)$. É imediato da definição algébrica do homomorfismo fronteira na seqüência exata longa dos grupos de homologia associados a uma seqüência exata curta de complexos de cadeias. Esta seqüência exata longa faz precisa a idéia que os grupos $H_n(X,A)$ medem a diferença entre os grupos $H_n(X)$ e $H_n(A)$. Em particular, o fato da seqüência ser exata implica que se $H_n(X,A) = 0$ para todo n, então a inclusão $A \hookrightarrow X$ induz isomorfismos $H_n(A) \approx H_n(X)$ para todo n. A recíproca também vale.

1.3 Excisão

Esta seção foi tomada de [5], capítulo 2.
Uma propriedade fundamental dos grupos de homologia relativos é dada pelo teorema de excisão, descrevendo quando os grupos relativos $H_n(X,A)$ não são afetados por exclusão, ou supressão, de um subconjunto $Z \subset A$.

Definição 1.3.1. *A inclusão $i : (X - Z, A - Z) \to (X, A)$ é uma excisão, se induz um isomorfismo $i_* : H_n(X - Z, A - Z) \to H_n(X,A)$ para cada $n \geqslant 0$.*

Para um espaço X, seja $\mathcal{U} = \{U_j\}$ uma coleção de subespaços de X cujos interiores formam uma cobertura aberta de X, e seja $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ o subgrupo de $S_n(X)$ consistindo de cadeias $\sum_\gamma a_\gamma \gamma$ tal que cada γ tem imagem contida em algum conjunto na cobertura $\mathcal{U} = \{U_j\}$. A aplicação fronteira $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ leva $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ a $S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, assim os grupos $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ formam um complexo de cadeias. Denotemos os grupos de homologia deste complexo por $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Proposição 1.3.1. *A inclusão $i : S_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow S_n(X)$ é uma equivalência de homotopia de cadeia, isto é, existe uma aplicação de cadeia $\rho : S_n(X) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $i\rho$ e ρi são homotópicas de cadeia à identidade. Portanto, i induz isomorfismos $H_n^{\mathcal{U}}(X) \approx H_n(X)$ para todo n.*

Demonstração. Ver [5], pags. 119 - 124. □

Teorema 1.3.1 (Teorema de Excisão)**.** *Dados subespaços $Z \subset A \subset X$ tal que o fecho de Z está contido no interior de A, então a inclusão $(X-Z, A-Z) \to (X, A)$ é uma excisão, i.e., induz isomorfismos $H_n(X-Z, A-Z) \to H_n(X, A)$ para todo n. Equivalentemente, para subespaços $A, B \subset X$ cujos interiores cobrem X, a inclusão $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$ para todo n.*

Demonstração. Ver [5], pag. 124. □

1.4 O Teorema do Coeficiente Universal para Homologia

Esta seção foi tomada de [5], capítulo 3, seção tópicos adicionais.
Homologia com coeficientes arbitrários pode-se calcular em termos de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$ por meio de uma fórmula algébrica.
Seja G um grupo abeliano. O grupo de cadeia $S_n(X; G)$ consiste das somas formais $\sum_\gamma g_\gamma \gamma$ com $g_\gamma \in G$ e $g_\gamma = 0$, e só um número finito de g_γ são diferentes de zero. Isto significa que $S_n(X; G)$ é uma soma direta de cópias de G, com uma cópia para cada n-simplexo singular em X. Mais geralmente, o grupo de cadeia relativo $S_n(X, A; G) = S_n(X; G)/S_n(A; G)$ é também uma soma direta de cópias de G, uma para cada n-simplexo singular em X não contido em A. A aplicação fronteira $\partial_n : S_n(X; G) \to S_{n-1}(X; G)$ é definida como $\partial_n \left(\sum_\gamma g_\gamma \gamma \right) = \sum_\gamma \sum_{j=0}^{n} (-1)^j g_\gamma \gamma^{(j)}$. A composição de duas aplicações fronteira é zero, de modo que $\{(S_n(X; G), \partial_n)\}$ é um complexo de cadeias. Definimos o **n-ésimo grupo de homologia de X com coeficientes em G, $\boldsymbol{H_n(X; G)}$**, como o n-ésimo grupo de homologia deste complexo de cadeias.
Agora, formularemos a definição de homologia com coeficientes em termos de produtos tensoriais. Das propriedades básicas do produto tensorial segue-se que $S_n(X, A; G)$ é naturalmente isomorfo a $S_n(X, A) \otimes G$, via correspondência $\sum_\gamma g_\gamma \gamma \to \sum_\gamma \gamma \otimes g_\gamma$. Sob este isomorfismo a aplicação fronteira $S_n(X, A; G) \to S_{n-1}(X, A; G)$ torna-se na aplicação $\partial \otimes id : S_n(X, A) \otimes G \to S_{n-1}(X, A) \otimes G$ onde $\partial : S_n(X, A) \to S_{n-1}(X, A)$ é a aplicação fronteira usual para coeficientes em $\mathbb{Z}$. Assim, temos o complexo de cadeias

$\{(S_n(X,A) \otimes G, \partial \otimes id)\}$ cujos grupos de homologia chamam-se os **grupos de homologia de** (X,A) **com coeficientes em** G que denotam-se $\boldsymbol{H_n(X,A;G)}$.
Sejam $Z_n(X,A) = \mathrm{Ker}\partial_n \subset S_n(X,A)$ e $B_n(X,A) = \mathrm{Im}\partial_{n+1} \subset S_n(X,A)$. A restrição de ∂_n a esses dois subgrupos é zero, assim eles podem ser considerados como subcomplexos $Z_*(X,A)$ e $B_*(X,A)$ de $S_*(X,A)$ com aplicações fronteira triviais. Assim, temos uma seqüência exata curta de complexos de cadeias consistindo dos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & S_n(X,A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & B_{n-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X,A) \arrow[r] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & B_{n-2}(X,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

As linhas neste diagrama se decompõem já que cada $B_n(X,A)$ é livre, sendo um subgrupo do grupo livre $S_n(X,A)$. Assim $S_n(X,A) \approx Z_n(X,A) \oplus B_{n-1}(X,A)$, mas o complexo de cadeia $S_*(X,A)$ não é a soma direta dos subcomplexos de cadeia $Z_*(X,A)$ e $B_*(X,A)$ já que o último tem aplicações fronteira triviais e as aplicações fronteira em $S_n(X,A)$ podem ser não triviais. Agora tensorizando com G obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_n(X,A)\otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n\otimes id"] & S_n(X,A)\otimes G \arrow[r, "\partial_n\otimes id"] \arrow[d, "\partial_n\otimes id"] & B_{n-1}(X,A)\otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n-1}\otimes id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X,A)\otimes G \arrow[r] & S_{n-1}(X,A)\otimes G \arrow[r, "\partial_{n-1}\otimes id"] & B_{n-2}(X,A)\otimes G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

As linhas são exatas pois as linhas no diagrama anterior se decompõem e os produtos tensoriais satisfazem $(A\oplus B)\otimes G \approx A\otimes G \oplus B \otimes G$, assim as linhas neste diagrama também são seqüências exatas que se decompõem. Logo temos uma seqüência exata curta de complexos de cadeias $0 \to Z_n(X,A) \otimes G \to S_n(X,A) \otimes G \to B_n(X,A) \to 0$. Como as aplicações fronteira são triviais em $Z_n(X,A)\otimes G$ e $B_n(X,A)\otimes G$, a seqüência exata longa associada de grupos de homologia tem a forma

$$\begin{aligned} \cdots \to B_n(X,A)\otimes G \to Z_n(X,A)\otimes G \to H_n(X,A;G) \to \\ \to B_{n-1}(X,A)\otimes G \to Z_{n-1}(X,A)\otimes G \to \cdots . \end{aligned} \tag{1.1}$$

As aplicações 'fronteira' $B_n(X,A)\otimes G \to Z_n(X,A)\otimes G$ nesta seqüência são simplemente as aplicações $i_n \otimes id$ onde $i_n : B_n(X,A) \to Z_n(X,A)$ é a inclusão. Isto é evidente da definição da aplicação fronteira numa seqüência exata longa de grupos de homologia : no diagrama anterior tomamos um elemento de $B_{n-1}(X,A)\otimes G$, e o enviamos para trás via $(\partial_n \otimes id)^{-1}$ a $S_n(X,A)\otimes$

G, então se aplica $\partial_n \otimes id$ para obter um elemento em $S_{n-1}(X,A) \otimes G$, então o enviamos para trás a $Z_{n-1}(X,A) \otimes G$.
A seqüência exata longa (1.1) pode ser dividida em seqüências exatas curtas

$$0 \to \operatorname{Coker}(i_n \otimes id) \to H_n(X,A;G) \to \operatorname{Ker}(i_{n-1} \otimes id) \to$$

onde $\operatorname{Coker}(i_n \otimes id) = (Z_n(X,A) \otimes G)/\operatorname{Im}(i_n \otimes id)$. O seguinte lema prova que este cokernel é justamente $H_n(X,A) \otimes G$.

Lema 1.3. *Se a seqüência de grupos abelianos $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ é exata, então assim o é $A \otimes G \xrightarrow{i \otimes id} B \otimes G \xrightarrow{j \otimes id} C \otimes G \to 0$.*

A situação é que tensorizando a seqüência exata curta

$$0 \to B_n(X,A) \xrightarrow{i_n} Z_n(X,A) \to H_n(X,A) \to 0 \tag{1.2}$$

com G produz-se uma seqüência a qual dá exata só por inserção do termo extra $\operatorname{Ker}(i_n \otimes id)$:

$$0 \to \operatorname{Ker}(i_n \otimes i) \to B_n(X,A) \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes i} Z_n(X,A) \otimes G \to H_n(X,A) \otimes G \to 0\ ,$$

o que provaremos é que $\operatorname{Ker}(i_n \otimes id)$ realmente não depende de $B_n(X,A)$ e $Z_n(X,A)$ mas somente de seus quocientes $H_n(X,A)$, e de fato de G.
A seqüência (1.2) é uma resolução livre de $H_n(X,A)$, onde uma resolução livre de um grupo abeliano H é uma seqüência exata

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$$

com cada F_n livre. Tensorizando uma resolução livre desta forma com um grupo fixado G produz-se um complexo de cadeia

$$\cdots \to F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes id} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes id} H \otimes G \to 0$$

pelo lema anterior esta é exata em $F_0 \otimes G$ e $H \otimes G$, mas à esquerda desses termos esta pode não ser exata. Por ora, escrevamos $H_n(F \otimes G)$ para o grupo de homologia $\operatorname{Ker}(f_n \otimes id)/\operatorname{Im}(f_{n+1} \otimes id)$.

Lema 1.4. *Para quaisquer duas resoluções livres F e F' de H existem isomorfismos $H_n(F \otimes G) \approx H_n(F' \otimes G)$ para cada n.*

O grupo $H_n(F \otimes G)$, o qual só depende de H e G, é denotado por $\operatorname{Tor}_n(H,G)$. Como uma resolução livre $0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$ sempre existe, segue-se que $\operatorname{Tor}_n(H,G) = 0$ para $n > 1$. Usualmente $\operatorname{Tor}_1(H,G)$ é

escrito simplesmente como $\mathrm{Tor}(H, G)$.
Existe um grupo $\mathrm{Tor}_0(H, G)$? Com a definição dada acima este seria zero já que o lema 1.3. implica que $F_1 \otimes G \to F_0 \otimes G \to H \otimes G \to 0$ é exata. Provavelmente é melhor modificar a definição de $H_n(F \otimes G)$ para ser os grupos de homologia da seqüência $\cdots \to F_1 \otimes G \to F_0 \otimes G \to 0$, omitindo o termo $H \otimes G$ o qual pode ser considerado como um tipo de aumento. Com esta nova definição, o lema 1.3. então dá um isomorfismo $\mathrm{Tor}_0(H, G) \approx H \otimes G$. Notemos que $\mathrm{Tor}(H, G)$ é um functor de G e H : homomorfismos $\alpha : H \to H'$ e $\beta : G \to G'$ induzem homomorfismos $\alpha_* : \mathrm{Tor}(H, G) \to \mathrm{Tor}(H', G)$ e $\beta_* : \mathrm{Tor}(H, G) \to \mathrm{Tor}(H, G')$, satisfazendo $(\alpha\alpha^{'})_* = \alpha_*\alpha^{'}_*$, $(\beta\beta^{'})_* = \beta_*\beta^{'}_*$, e $id_* = id$.
Relembremos que temos um complexo de cadeia $S_*(X, A)$ de grupos abelianos livres, com grupos de homologia denotados por $H_n(X, A)$, e tensorizando $S_*(X, A)$ com G dá outro complexo $S_*(X, A) \otimes G$ cujos grupos de homologia são denotados por $H_n(X, A; G)$. O seguinte resultado é conhecido como **o teorema do coeficiente universal para homologia** já que este descreve homologia com coeficientes arbitrários em termos de homologia com o grupo de coeficiente 'universal' $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.4.1. *Para cada par de espaços* (X, A) *existem seqüências exatas que se decompõem*

$$0 \to H_n(X, A) \otimes G \to H_n(X, A; G) \to Tor(H_{n-1}(X, A), G) \to 0$$

para todo n*, e essas seqüências são naturais com respeito às aplicações* $(X, A) \to (Y, B)$*.*

Demonstração. Ver [5], pag. 264. □

A decomposição das seqüências acima implica que $H_n(X, A; G)$ é a soma direta de $H_n(X, A) \otimes G$ e $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(X, A); G)$.

Capítulo 2

Cohomologia Singular

Aqui definiremos os grupos de cohomologia singular com coeficientes inteiros sobre $\mathbb{R}$ para um espaço topológico qualquer. Também definiremos os grupos de cohomologia singular relativos. Em seguida, a partir de uma aplicação contínua dada entre espaços topológicos, obteremos homomorfismos entre os grupos de cohomologia singular destes espaços. Depois, definiremos o Produto Cup entre duas cocadeias, e o Produto Cap entre uma cocadeia e uma cadeia. Obterá-se, um Produto Cup induzido entre dois grupos de cohomologia singular, e um Produto Cap induzido entre um grupo de cohomologia singular e um grupo de homologia singular. Enunciaremos o Teorema de Dualidade de Poincaré. Por último, apresentaremos a cohomologia com suporte compacto e alguns resultados da teoria de cohomologia singular.
Para a apresentação deste capítulo foi tomado como base [3] e [5]. As ferramentas necessárias para as provas dos teoremas dados neste capítulo, assim como os detalhes das suas demonstrações, podem ser encontrados em [3], [5] ou [10].

2.1 Grupos de Cohomologia Singular

Seja $S^n(X) := \mathrm{Hom}[S_n(X), \mathbb{R}]$.

Definição 2.1.1. *$S^n(X)$ é o grupo das n-cocadeias singulares de X com coeficientes inteiros sobre $\mathbb{R}$.*

Definição 2.1.2. *A cofronteira de uma n-cocadeia singular $h \in S^n(X)$ é a $(n+1)$-cocadeia singular $\delta^n h$ definida por $\delta^n h(\alpha) = h(\partial_{n+1}\alpha)$, α $(n+1)$-*

cadeia singular.

$$\begin{tikzcd} S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[dr, "\delta^n h"'] & S_n(X) \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Lema 2.1. *Para cada* $n \geq 0$, $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0 : S^n(X) \to S^{n+2}(X)$.

Obtemos, seqüências de pares $(S^n(X), \delta^n)$ com $\mathrm{Im}\,(\delta^n) \subseteq \mathrm{Nuc}\,(\delta^{n+1})$. Assim, $S^*(X) := \{(S^n(X), \delta^n)\}$ define um complexo de cadeias chamado **complexo das cocadeias singulares em** X **com coeficientes inteiros sobre** $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.3. *Um elemento* $h \in S^n(X)$ *é um* n*-cociclo se* $\delta^n h = 0$ *e denotamos por* $Z^n(X)$ *o subgrupo de tais elementos. Um elemento* $h \in S^n(X)$ *é um* n*-cobordo se existe* $g \in S^{n-1}(X)$ *tal que* $h = \delta^{n-1} g$. *Tais elementos são agrupados em* $B^n(X)$. *Obviamente tem-se* $B^n(X) \subset Z^n(X)$.

Agora, como $B^n(X) \subset Z^n(X)$, para cada n, pode-se definir o grupo quociente $H^n(X) := Z^n(X)/B^n(X)$ que chama-se **grupo de cohomologia singular (com coeficientes inteiros) de dimensão** n **de** X **sobre** $\mathbb{R}$. O complexo $H^*(X) := \{(H^n(X), \delta^n)\}$ é a **cohomologia singular (com coeficientes inteiros) de** X **sobre** $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.1. $H^n(X)$ *é canonicamente isomorfo ao módulo* $Hom[H_n(X), \mathbb{R}]$.

Exemplo 6. *Se* X *é um ponto, então* $H^n(X) = 0$ *para* $n > 0$ *e* $H^0(X) \approx \mathbb{Z}$.

Para uma aplicação contínua $f : X \to Y$, temos um homomorfismo $f^\# : S^n(Y) \to S^n(X)$ definido pela composição de $f_\#$ com cada homomorfismo $h : S_n(Y) \to \mathbb{R}$ obtendo um homomorfismo $f^\#(h) = h \circ f_\# : S_n(X) \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.1. *Se* $f : X \to Y$ *é uma aplicação contínua, então* $f^\# \delta^n = \delta^n f^\#$.

A proposição anterior mostra que se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, o homomorfismo $f^\#$ aplica cociclos a cociclos e cobordos a cobordos. Portanto, $f^\#$ induz um homomorfismo $f^* : H^n(Y) \to H^n(X)$ definido por $f^*([h]) = \left[f^\#(h)\right]$ para $h \in Z^n(Y)$.

Teorema 2.1.2. *Se duas aplicações* $f, g : X \to Y$ *são homotópicas, então elas induzem o mesmo homomorfismo* $f^* = g^* : H^n(Y) \to H^n(X)$.

Exemplo 7. $H^0(\mathbb{R}^n) \approx \mathbb{Z}$, *e* $H^i(\mathbb{R}^n) = 0$ *para* $i > 0$.

Exemplo 8. *$H^0(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$, $H^1(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$, e $H^i(\mathbb{S}^1) = 0$ para $i > 1$.*

Se X é um espaço topológico e A é um subespaço, o grupo das n-cocadeias singulares do par (X, A) é $S^n(X, A) := \operatorname{Hom}[S_n(X, A), \mathbb{R}]$. A cofronteira de uma n-cocadeia singular $h \in S^n(X, A)$ é a $(n+1)$-cocadeia singular $\delta^n h$ definida por $\delta^n h(\alpha) = h(\partial_{n+1}\alpha)$, $\alpha \in S_{n+1}(X, A)$.
Tem-se também, que se cumpre $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ para todo $n \geq 0$. Assim, $S^*(X, A) := \{(S^n(X, A), \delta^n)\}$ define um complexo de cadeia chamado **complexo das cocadeias singulares do par** (X, A).
Agora, como $\operatorname{Im}(\delta^n) \subseteq \operatorname{Nuc}(\delta^{n+1})$, para cada n, podem-se definir os grupos quocientes $H^n(X, A) := \operatorname{Nuc}(\delta^{n+1})/\operatorname{Im}(\delta^n)$ que chamam-se os **grupos de cohomologia singular do par** (X, A).

Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua com $f(A) \subset B$, ou mais concisamente $f : (X, A) \to (Y, B)$, temos um homomorfismo $f^\# : S^n(Y, B) \to S^n(X, A)$ definido pela composição de $f_\#$ com cada homomorfismo $h : S_n(Y, B) \to \mathbb{R}$ obtendo um homomorfismo $f^\#(h) = h \circ f_\# : S_n(X, A) \to \mathbb{R}$.
Também se cumpre a relação, $f^\# \delta^n = \delta^n f^\#$. Portanto, $f^\#$ induz um homomorfismo $f^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, A)$ definido por $f^*([h]) = \left[f^\#(h)\right]$ para $h \in \operatorname{Nuc}(\delta^n)$.

Agora, da seqüência exata

$$0 \to S_n(A) \xrightarrow{i} S_n(X) \xrightarrow{j} S_n(X, A) \to 0,$$

temos a seqüência exata

$$0 \to S^n(X, A) \xrightarrow{j^\#} S^n(X) \xrightarrow{i^\#} S^n(A) \to 0.$$

Assim, podemos identificar $S^n(X, A)$ com um submódulo de $S^n(X)$. Mais exatamente, podemos considerar que $S^n(X, A)$ é o submódulo formado por todas as cocadeias $h \in S^n(X)$ tais que $i^\#(h) = 0$, i.e., que se anulam sobre os simplexos contidos em A. Como $j^\#$ comuta com o operador cofronteira, através desta identificação a cofronteira de $S^n(X, A)$ passa a ser a restrição da cofronteira de $S^n(X)$.

Teorema 2.1.3. *Se duas aplicações $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, então $f^* = g^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, A)$.*

Teorema 2.1.4. *A seqüência de grupos de cohomologia*

$$\cdots \to H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A) \xrightarrow{j^*} H^{n+1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n+1}(A) \to \cdots$$

é exata.

Teorema 2.1.5 (Teorema de Excisão). *Dados subespaços $Z \subset A \subset X$ tal que o fecho de Z está contido no interior de A, então a inclusão $(X - Z, A - Z) \to (X, A)$ é uma excisão, i.e., induz isomorfismos $H^n(X - Z, A - Z) \to H^n(X, A)$ para todo n. Equivalentemente, para subespaços $A, B \subset X$ cujos interiores cobrem X, a inclusão $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $H^n(B, A \cap B) \to H^n(X, A)$ para todo n.*

2.2 Os Produtos Cup e Cap

Para definir os produtos cup e cap, consideremos a cohomologia com coeficientes em um anel R. Seja $\gamma : \Delta_{m+n} \to X$ um simplexo singular. Consideremos a m-face frontal de γ dada pela composição $\gamma \circ \alpha_m : \Delta_m \to X$ onde

$$\alpha_m(x_0, ..., x_m) = (x_0, ..., x_m, 0, ..., 0),$$

e a n-face dorsal de γ dada pela composição $\gamma \circ \beta_n : \Delta_n \to X$ onde

$$\beta_n(x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}) = (0, ..., 0, x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}).$$

Dadas cocadeias $h \in S^m(X; R)$ e $g \in S^n(X; R)$, **o produto cup** $h \smile g \in S^{m+n}(X; R)$ é a cocadeia cujo valor sobre um simplexo singular $\gamma : \Delta_{m+n} \to X$ é dado pela fórmula

$$(h \smile g)(\gamma) = h(\gamma \circ \alpha_m)g(\gamma \circ \beta_n).$$

Esta operação produto é bilinear e associativa, mas não é comutativa. A co-cadeia constante $1 \in S^0(X; R)$ age como elemento identidade.

Lema 2.2. *$\delta(h \smile g) = \delta h \smile g + (-1)^m h \smile \delta g$ para $h \in S^m(X; R)$ e $g \in S^n(X; R)$.*

Da fórmula $\delta(h \smile g) = \delta h \smile g \pm h \smile \delta g$ tem-se que o produto cup de dois cociclos é outra vez um cociclo. Além disso, o produto cup de um cociclo e um cobordo é um cobordo, já que $h \smile \delta g = \pm\delta(h \smile g)$ se $\delta h = 0$; e $\delta h \smile g = \delta(h \smile g)$ se $\delta g = 0$. Segue-se, então, que existe um produto cup induzido

$$H^m(X; R) \times H^n(X; R) \xrightarrow{\smile} H^{m+n}(X; R)$$

dado por $[h] \smile [g] = [h \smile g]$, que é bilinear e associativo.

Agora, sejam a cocadeia $h \in S^m(X; R)$ e o simplexo $\gamma \in S_{m+n}(X; R)$, **o produto cap** $h \frown \gamma \in S_n(X; R)$ é o simplexo

$$h \frown \gamma = h(\gamma \circ \alpha_m)(\gamma \circ \beta_n).$$

Lema 2.3. *Para $h \in S^m(X;R)$ e $\gamma \in S_{m+n}(X;R)$, temos*

$$\partial(h \frown \gamma) = (-1)^m(h \frown \partial\gamma - \delta h \frown \gamma).$$

Da relação anterior, temos que o produto cap de um cociclo e um ciclo é um ciclo. Além disso, se $\partial\gamma = 0$ então $\partial(h \frown \gamma) = \pm(\delta h \frown \gamma)$, portanto o produto cap de um cobordo e um ciclo é um bordo; e se $\delta h = 0$ então $\partial(h \frown \gamma) = \pm(h \frown \partial\gamma)$, portanto o produto cap de um bordo e um cociclo é um bordo. Estes fatos implicam que existe um produto cap induzido

$$H^m(X;R) \times H_{m+n}(X;R) \xrightarrow{\frown} H_n(X;R)$$

o qual é dado por $[h] \frown [\gamma] = [h \frown \gamma]$.

Teorema 2.2.1 (Dualidade de Poincaré)**.** *Sejam M uma n-variedade R-orientável compacta e $[M] \in H_n(M;R)$ uma classe fundamental de M, então a aplicação $D : H^k(M;R) \to H_{n-k}(M;R)$ definida por $D(h) = h \frown [M]$ é um isomorfismo para todo k.*

2.3 Cohomologia com Suporte Compacto

Para a apresentação desta seção foi tomado como base o capítulo 3 de [5] e a parte III de [3], onde encontram-se as ferramentas para provar os teoremas dados aqui, assim como suas demonstrações.
Diz-se que uma cocadeia $h \in S^n(X)$ tem suporte compacto se existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $h \in S^n(X, X-K) \subset S^n(X)$, i.e., se h anula-se em todo simplexo singular em $X - K$. As cocadeias com suporte compacto formam um submódulo, o qual será denotado por $S^n_c(X) \subset S^n(X)$. Notemos que δh também é zero sobre cadeias em $X - K$, assim δh encontra-se em $S^{n+1}_c(X)$; portanto os grupos $S^n_c(X)$ formam um subcomplexo do complexo de cocadeias singulares de X. Os grupos de cohomologia $\boldsymbol{H^n_c(X)}$ deste subcomplexo são os **grupos de cohomologia com suporte compacto**. Pode-se mostrar que $H^n_c(X)$ é isomorfo ao limite direto dos grupos $H^n(X, X-K)$ quando K varia sobre o conjunto dirigido consistindo de todos os subconjuntos compactos de X. Notemos que se X é compacto, então $H^n_c(X) = H^n(X)$.

Agora, seja M uma n-variedade orientável não necessariamente compacta. Definamos a aplicação dualidade

$$D : H^k_c(M) \to H_{n-k}(M)$$

como segue. Para qualquer $h \in H_c^k(M) = \varinjlim H^k(M, M-K)$ escolha um representante $h' \in H^k(M, M-K)$ e seja

$$D(h) = h' \frown [K].$$

Esta está bem definida ja que, para $K \subset L$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^k(M, M-K) \arrow[r] \arrow[dr, "\frown[K]"'] & H^k(M, M-L) \arrow[d, "\frown[L]"] \\ & H_{n-k}(M) \end{tikzcd}$$

é comutativo. No caso especial onde M é compacto, note que $D(h) = h \frown [M]$.

As ferramentas necessárias para a prova do seguinte teorema, tanto como sua demonstração podem ser encontradas em [3], [5] ou [10].

Teorema 2.3.1. *Seja M uma n-variedade orientável. Então o homomorfismo D aplica $H_c^k(M)$ isomorficamente sobre $H_{n-k}(M)$.*

Por outro lado, consideremos uma variedade topológica M e um subespaço fechado A. Seja $U = M - A$. Para cada conjunto compacto $K \subset U$, do Teorema de Excisão temos que a inclusão $i : (U, U-K) \to (M, M-K)$ induz um isomorfismo entre os grupos de cohomologia. Consideremos o inverso deste isomorfismo $H^n(U, U-K) \to H^n(M, M-K)$. Estes isomorfismos comutam con os homomorfismos inclusão, portanto determinam um único homomorfismo $i : H_c^n(U) \to H_c^n(M)$.
A familia de todas as vizinhanças abertas V de A, formam um sistema indutivo com o ordem dado pela inclusão inversa, i.e., $V \leq V'$ se e só se $V' \subset V$. Os grupos $H^n(V)$ formam um sistema indutivo com os homomorfismos induzidos pelas inclusões, pelo que podemos formar el límite indutivo

$$\check{H}^n(A) = \varinjlim_{V} H^n(V) \; .$$

Os homomorfismos inclusão $H^n(V) \to H^n(A)$ induzidos pelas inclusões determinam um homomorfismo límite $k : \check{H}^n(A) \to H^n(A)$. Se este é um isomorfismo, dize-se que A está *tensamente imerso* em M.

Proposição 2.3.1. *Seja M uma variedade topológica metrizable e A um subespaço fechado de M. Se A é um retracto absoluto de entornos então o homomorfismo natural $k : \check{H}^n(A) \to H^n(A)$ é um epimorfismo. Se M é também um retrato absoluto de entornos, então k é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver [3] pags. 231 e 232. □

Agora, suponhamos que M é compacta. Para cada entorno V de A em M, temos que $K = M - V$ é um subespaço compacto de $U = M - A$. Consideremos a composição

$$H^n(V) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M, V) \to H^{n+1}(U, U - K) \ ,$$

onde δ é o homomorfismo de conexão e o segundo homomorfismo é a excisão. É imediato comprobar que si trocamos V por um entorno menor obtemos um diagrama comutativo, pelo que podemos formar el límite indutivo destes homomorfismos

$$\delta^* : \check{H}^n(A) \to H_c^{n+1}(U) \ .$$

Seja $j : H^n(M) \to \check{H}^n(A)$ o homomorfismo ι_V associado ao límite indutivo que define a $\check{H}^n(A)$.

Teorema 2.3.2. *Se M é uma variedade topológica compacta, A um subespaço fechado e $U = M - A$, então a seqüência*

$$\cdots \to H_c^n(U) \xrightarrow{i} H^n(M) \xrightarrow{j} \check{H}^n(A) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{n+1}(U) \to \cdots$$

é exata.

Demonstração. Ver [3] pag. 232. □

Capítulo 3

Funções de Morse

Primeiro definiremos funções de Morse e provaremos o Lema de Morse. Depois, daremos exemplos deste tipo de funções.
Este capítulo esta baseado nas seções 2 e 6 da parte I de [8].

3.1 Definições e Lemas

Sejam M^n uma variedade de classe C^∞ e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função C^∞.

Definição 3.1.1. *Um ponto $p \in M$ chama-se ponto crítico de f se $Df(p) \equiv 0$.*

Definição 3.1.2. *Um ponto crítico $p \in M$ de f chama-se não-degenerado se a matriz $D^2f(p)$ é não-singular. Caso contrário, dizemos que p é um ponto crítico degenerado.*

Definição 3.1.3. *Se todos os pontos críticos de f são não-degenerados, f é chamada função de Morse.*

Associada a $D^2f(p)$ temos uma forma quadrática $Q(x)$, a qual é definida por $Q(x) = \langle D^2f(p)x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e chama-se a **Hessiana de f em p**.
Como $D^2f(p)$ é simétrica a forma quadrática $Q(x) = \langle D^2f(p)x, x\rangle$ pode ser reduzida à forma canônica

$$\left\langle D^2f(p)x, x\right\rangle = -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_h^2$$

para uma escolha conveniente das coordenadas $y_1, ..., y_h$, onde $h \leq n$. Se a matriz $D^2f(p)$ é não-singular, então $h = n$. O número λ é chamado **o índice de f em p**, e o número $n - \lambda$ é chamado **o grau de singularidade de f em p**.

Lema 3.1. *Seja f uma função C^∞ numa vizinhança convexa V de 0 no $\mathbb{R}^n$, com $f(0) = 0$. Então*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(x_1, ..., x_n)$$

para algumas funções C^∞ convenientes g_i definidas em V, com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Lema 3.2 (Lema de Morse)**.** *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ e $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f. Então existe uma vizinhança U de p em M e um sistema de coordenadas locais $(y_1, ..., y_n)$ tal que $y_i(p) = 0$, $i = 1, ..., n$ e a seguinte identidade se cumpre em U*

$$f(q) = f(p) - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_n^2,$$

onde $(y_1, ..., y_n)$ são as coordenadas de q, e λ é o índice de f em p.

Demonstração. Notemos primeiro que se existe alguma tal expressão para f, então λ deve ser o índice de f em p. Para qualquer sistema de coordenadas $(z_1, ..., z_n)$, se $f(q) = f(p) - (z_1(q))^2 - \cdots - (z_\lambda(q))^2 + (z_{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (z_n(q))^2$ então temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(p) = \begin{cases} -2 & \textit{se } i = j \leq \lambda, \\ \ \ 2 & \textit{se } i = j > \lambda, \\ \ \ 0 & \textit{se } i \neq j, \end{cases}$$

o qual mostra que $D^2 f(p)$ é uma matriz diagonal, onde os elementos da diagonal são ± 2, e o número de valores proprios nagativos é igual ao número λ da representação anterior para f.

Agora provaremos que tal representação para f existe. Seja $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança U de p tal que $(x_1(p), ..., x_n(p))$
$= 0$. Sustituindo f por $f - f(p)$ podemos supor que $f(p) = f(0) = 0$.
Pelo lema anterior podemos escrever

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, ..., x_n)$$

em alguma vizinhança convexa V de 0 no $\mathbb{R}^n$, onde $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, pois p é um ponto crítico de f.

Agora, aplicando o lema anterior a g_i temos

$$g_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

para certas funções suaves h_{ij}. Segue-se que

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, ..., x_n).$$

Denotando $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, temos que $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$ e

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \bar{h}_{ij}(x_1, ..., x_n).$$

Como $\bar{h}_{ij}(p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$, a matriz $\left(\bar{h}_{ij}(p)\right)$ é igual à matriz $\frac{1}{2}D^2 f(p)$ então $\left(\bar{h}_{ij}(p)\right)$ é não-singular.
Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que a matriz (h_{ij}) é simétrica. Se as funções h_{ij} são constantes então para provar o teorema é suficiente reduzir a forma quadrática associada a $f(x_1, ..., x_n)$ à forma canônica.
Tendo escrito f na forma

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

onde a matriz (h_{ij}) é simétrica e não-singular em 0, podemos fazer uma mudança de coordenadas linear $(x_1^{'}, ..., x_n^{'})$ para obter uma representação da forma

$$f(x_1^{'}, ..., x_n^{'}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i^{'} x_j^{'} \tilde{h}_{ij}(x_1^{'}, ..., x_n^{'})$$

de modo que $\tilde{h}_{11}(0, ..., 0) \neq 0$. Logo, podemos assumir que de fato temos $h_{11}(0, ..., 0) \neq 0$. Por continuidade, podemos supor que h_{11} tem sinal constante numa vizinhança de $(0, ..., 0)$. Portanto, numa vizinhança de $(0, ..., 0)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, ..., x_n) \\ &= h_{11}x_1^2 + 2\sum_{i>1}^{n} h_{i1}x_i x_1 + \sum_{i,j>1}^{n} h_{ij}x_i x_j \\ &= sinal(h_{11}(0, ..., 0))\left(\sqrt{|h_{11}|}x_1 + \sum_{i>1}^{n} \frac{h_{i1}x_i}{sinal(h_{11}(0, ..., 0))\sqrt{|h_{11}|}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{|h_{11}|}\sum_{i,j>1}^{n} h_{i1}h_{1j}x_ix_j + \sum_{i,j>1}^{n} h_{ij}x_ix_j$$

$$= sinal(h_{11}(0,...,0))y_1^2 + \sum_{i,j>1}^{n}\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{1j}}{|h_{11}|}\right)x_ix_j$$

onde a nova coordenada y_1 é dada por

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}(x_1,...,x_n)|}x_1 + \sum_{i>1}^{n}\frac{h_{i1}(x_1,...,x_n)x_i}{sinal(h_{11}(0,...,0))\sqrt{|h_{11}(x_1,...,x_n)|}}.$$

Pelo teorema da função inversa, a transformação de coordenadas $(x_1,...,x_n)$ $\longmapsto (y_1,x_2,...,x_n)$ é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem em outra vizinhança da origem. Notemos também que a matriz

$$\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{1j}}{|h_{11}|}\right)_{1<i,j\leq n}$$

é não-singular no ponto $(0,...,0)$ e é simétrica. Portanto podemos aplicar o raciocínio anterior à função

$$\sum_{i,j>1}^{n}\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{1j}}{|h_{11}|}\right)x_ix_j \ ,$$

e assim sucessivamente, reduzindo finalmente a forma quadrática à forma canônica, o qual completa a prova do teorema. □

Corolário 3.1.1. *Todo ponto crítico não-degenerado é isolado.*

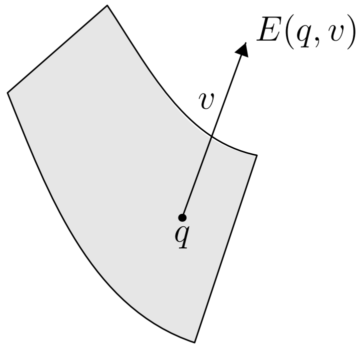
3.2 Variedades em Espaços Euclidianos

Seja M^n uma variedade diferenciável. Um resultado clássico de Whitney mostra que M^n esta mergulhada diferenciavelmente num espaço euclidiano de dimensão menor ou igual que $2n+1$. Portanto, é suficiente supor que M é uma subvariedade num espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$.
Seja $N \subset M \times \mathbb{R}^{n+k}$ definido por

$$N = \{\ (q,v) : q \in M \text{ e } v \text{ é ortogonal a } M \text{ em } q\ \}\,.$$

N é uma variedade diferenciável de dimensão $n+k$ mergulhada diferenciavelmente em $\mathbb{R}^{2(n+k)}$ (N é o espaço total do fibrado vetorial normal de M).

Consideremos a aplicação $E : N \to \mathbb{R}^{n+k}$ definida por $E(q, v) = q + v$ (E é a aplicação " ponto final ").



Definição 3.2.1. *Um ponto $e \in \mathbb{R}^{n+k}$ é chamado um ponto focal de (M, q) com multiplicidade μ se $e = q + v$ onde $(q, v) \in N$ e o jacobiano de E em (q, v) tem nulidade $\mu > 0$. O ponto e é chamado um ponto focal de M se e é um ponto focal de (M, q) para algum $q \in M$.*

Lema 3.3. *Para quase todo $x \in \mathbb{R}^{n+k}$, o ponto x não é um ponto focal de M.*

Demonstração. Temos que N é uma variedade de dimensão $n+k$. Um ponto x é um ponto focal de M se e só se x está na imagem do conjunto dos pontos críticos de $E : N \to \mathbb{R}^{n+k}$. Portanto, pelo teorema de Sard, o conjunto dos pontos focais tem medida zero. $\square$

Agora, seja $u = (u_1, ..., u_n)$ um sistema de coordenadas para uma região da variedade $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Consideremos a parametrização

$$x(u_1, ..., u_n) = u^{-1}(u_1, ..., u_n) = (x_1(u_1, ..., u_n), ..., x_{n+k}(u_1, ..., u_n)).$$

A **primeira forma fundamental** associada com o sistema de coordenadas é definida como a matriz $n \times n$ simétrica de funções de valor real

$$(\ g_{ij}\ ) = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} \right) .$$

A **segunda forma fundamental** é a matriz $n \times n$ simétrica $(\ l_{ij}\ )$ de funções de valor vetorial, onde l_{ij} é definida como segue. O vetor $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ num ponto de M pode ser expressado como a soma de um vetor tangente a M e um vetor normal a M. Defina l_{ij} como a componente normal de $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$.

Dado um vetor unitário v normal a M em q, a matriz $\left(v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}\right) = (\ v \cdot l_{ij}\ )$ chama-se a segunda forma fundamental de M em q na direção v.
Suponha que o sistema de coordenadas foi escolhido de forma que a matriz $(\ g_{ij}\ )$ avaliada em q é a matriz identidade. Então os autovalores da matriz $(\ v \cdot l_{ij}\ )$ são chamados **as curvaturas principais** $k_1, ..., k_n$ de M em q na direção normal v. Os valores $k_1^{-1}, ..., k_n^{-1}$ são chamados **os raios de curvatura principal**. De fato, pode acontecer que a matriz $(\ v \cdot l_{ij}\ )$ seja singular. Neste caso um ou mais dos k_i seriam zero, logo o raio correspondente k_i^{-1} não estaria definido.

Agora considere a linha normal ℓ consistindo de todos os $q + tv$, onde v é um vetor normal a M em q.

Lema 3.4. *Os pontos focais de (M, q) ao longo de ℓ são precisamente os pontos $q + k_i^{-1} v$, onde $1 \leq i \leq n$, $k_i \neq 0$. Assim, existem no máximo n pontos focais de (M, q) ao longo de ℓ, contadas as multiplicidades.*

Demonstração. Localmente, escolhamos k campos vetoriais ortonormais $w_1(u_1, ..., u_n)$, ... , $w_k(u_1, ..., u_n)$ ao longo da variedade, ortogonais a esta. Introduzamos coordenadas $(u_1, ..., u_n, t_1, ..., t_k)$ sobre a variedade $N \subset M \times \mathbb{R}^{n+k}$ como segue. Seja $(u_1, ..., u_n, t_1, ..., t_k)$ correspondente ao ponto

$$\left(x(u_1, ..., u_n), \sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha w_\alpha(u_1, ..., u_n)\right) \in N.$$

Então a função $E : N \to \mathbb{R}^{n+k}$ dá a correspondência

$$(u_1, ..., u_n, t_1, ..., t_k) \xrightarrow{e} x(u_1, ..., u_n) + \sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha w_\alpha(u_1, ..., u_n),$$

com derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \\ \frac{\partial e}{\partial t_\beta} = w_\beta \end{cases}.$$

Multiplicando a matriz jacobiana de e à esquerda pela matriz $(n+k) \times (n+k)$ não-singular cujas linhas são os $(n+k)$-vetores linearmente independentes $\frac{\partial x}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial x}{\partial u_n}, w_1, ..., w_k$ obtemos uma matriz $n \times n$ cujo posto é igual ao posto da matriz jacobiana de E no ponto correspondente. Esta matriz $n \times n$ tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) & 0 \\ & \\ \left(\sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot w_\beta\right) & I_{k \times k} \end{pmatrix},$$

assim o posto é igual ao posto do bloco superior esquerdo. Usando a identidade

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(w_\alpha \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + w_\alpha \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \ ,$$

vemos que este bloco superior esquerdo é a matriz

$$\left(\ g_{ij} - \sum_\alpha t_\alpha w_\alpha \cdot l_{ij} \ \right) .$$

Logo, $q + tv$ é um ponto focal de (M, q) com multiplicidade μ se e só se a matriz

$$(\ g_{ij} - tv \cdot l_{ij} \ )$$

é singular com nulidade μ.
Agora, suponha que $(\ g_{ij} \ )$ é a matriz identidade. Então, $(\ g_{ij} - tv \cdot l_{ij} \ )$ é singular se e só se $\frac{1}{t}$ é um autovalor da matriz $(v \cdot l_{ij})$. Além disso, a multiplicidade μ é igual à multiplicidade de $\frac{1}{t}$ como autovalor. $\square$

Agora, seja $p \in \mathbb{R}^{n+k}$. Consideremos a função $L_p : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$L_p(x(u_1, ..., u_n)) = \|x(u_1, ..., u_n) - p\|^2 = x \cdot x - 2x \cdot p + p \cdot p \ .$$

Temos que

$$\frac{\partial L_p}{\partial u_i} = 2\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot (x - p) \ .$$

Logo, L_p tem um ponto crítico em q se e só se $q - p$ é normal a M em q.
As segundas derivadas parciais de L_p são

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \frac{\partial x}{\partial u_i \partial u_j} \cdot (x - p) \right) .$$

Assim, se $v = p - q$ é normal a M em q, então q é um ponto crítico de L_p e a matriz hessiana de L_p em q está dada por

$$\mathcal{H}_q(L_p) = 2\left(\ \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} - \frac{\partial x}{\partial u_i \partial u_j} \cdot v \ \right) = 2(\ g_{ij} - v \cdot l_{ij} \ ) \ .$$

Lema 3.5. *O ponto $q \in M$ é um ponto crítico degenerado de L_p se e só se p é um ponto focal de (M, q). A nulidade de q como ponto crítico é igual à multiplicidade de p como ponto focal.*

Teorema 3.2.1. *Para quase todo $p \in \mathbb{R}^{n+k}$ a função $L_p : M \to \mathbb{R}^n$ é uma função de Morse.*

Lema 3.6. *O índice de L_p num ponto crítico não-degenerado $q \in M$ é igual ao número de pontos focais de (M, q) que se encontram sobre o segmento de p a q; cada ponto focal sendo contado com sua multiplicidade.*

Demonstração. O índice da matriz

$$\mathcal{H}_q(L_p) = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} - v \cdot l_{ij} \right)$$

é igual ao número de seus autovalores negativos. Se escolhemos um sistema de coordenadas tal que a matriz $(\; g_{ij} \;)$ é a matriz identidade, então este índice é igual ao número de autovalores de $(\; v \cdot l_{ij} \;)$ que são maiores que 1. $\square$

Capítulo 4

Campos Gradiente e Homologia Relativa

Seja M uma variedade diferenciável Riemanniana.

Definição 4.0.2. *Um campo de vetores* X *em* M *é dito um campo gradiente se existe* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciável tal que* $\mathrm{X} = grad\ f$ *com respeito à métrica Riemanniana dada em* M*.*

Proposição 4.0.1. *Suponhamos que* M *é compacta. Sejam* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciável e* X = *-grad* f *o campo gradiente associado à função* $-f$ *com respeito à métrica Riemanniana dada em* M*. Então:*

1. f *é monótona decrescente ao longo das trajetórias não-singulares de* X*,*

2. *X não possui órbita periódica não constante,*

3. *Se* $p \in M$ *é um mínimo isolado de* f*, então* p *é uma singularidade assintoticamente estável de* X*,*

4. *Os conjuntos límite* $\alpha(p)$ *e* $\omega(p)$*,* $p \in M$*, consistem somente de pontos críticos de* f*.*

Corolário 4.0.2. *Suponhamos que* M *é compacta e seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciável. Existe uma homotopia* $\mathcal{H}_t : M \to M$ *tal que:*

1. $\mathcal{H}_0 = Id$*,*

2. $\mathcal{H}_t(q) = q$*, para todo* q *ponto crítico de* f*,*

3. *Se* $q \in M$ *não é ponto crítico de* f *então* $f(\mathcal{H}_t(q))$ *é monótona decrescente.*

Proposição 4.0.2. *Sejam M compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável. Para cada $c \in \mathbb{R}$ denote por $E(f,c)$ o conjunto dos pontos críticos de f com nível c. Existe um isomorfismo entre os grupos de homologia singular relativa*

$$H_n\left([f \leq c], [f < c]\right) \text{ e } H_n([f < c] \bigcup E(f,c), [f < c]),$$

sendo este dado pela inclusão

$$([f < c] \bigcup E(f,c), [f < c]) \longmapsto ([f \leq c], [f < c]).$$

Demonstração. Seja $g : ([f \leq c], [f < c]) \to ([f \leq c], [f < c])$ definida por $g(q) = \mathcal{H}_1(q)$ onde $\mathcal{H}_t : M \to M$ é a homotopia do corolário anterior. Note que como $t \longmapsto f(\mathcal{H}_t(q))$ é monótona não-crescente temos que $g([f \leq c]) \subset [f \leq c]$, $g([f < c]) \subset [f < c]$, ou seja, g é bem definida como aplicação de pares.

Por simplicidade, denotamos $A = [f \leq c]$, $\overset{\circ}{A} = [f < c], B = g(A)$ e $\overset{\circ}{B} = g\left(\overset{\circ}{A}\right)$. Seja $i : \left(B, \overset{\circ}{B}\right) \to \left(A, \overset{\circ}{A}\right)$ a aplicação inclusão.

Afirmação. $\left(A, \overset{\circ}{A}\right) \underset{i}{\overset{g}{\rightleftarrows}} \left(B, \overset{\circ}{B}\right)$ *é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração da afirmação. Com efeito, para cada $t \in [0,1]$ vale $\mathcal{H}_t(B) \subseteq B$, $\mathcal{H}_t\left(\overset{\circ}{B}\right) \subseteq \overset{\circ}{B}$, $\mathcal{H}_t(A) \subseteq A$ e $\mathcal{H}_t\left(\overset{\circ}{A}\right) \subseteq \overset{\circ}{A}$. $\square$

Logo, pelo Corolário 1.1.3., $i_* : H_n\left(B, \overset{\circ}{B}\right) \to H_n\left(A, \overset{\circ}{A}\right)$ é um isomorfismo. Assim, consideramos agora

$$j : \left(B, \overset{\circ}{B}\right) \to \left(\overset{\circ}{A} \bigcup E(f,c), \overset{\circ}{A}\right)$$

e

$$k : \left(\overset{\circ}{A} \bigcup E(f,c), \overset{\circ}{A}\right) \to \left(A, \overset{\circ}{A}\right)$$

as aplicações inclusão (note que $B \subseteq \overset{\circ}{A} \bigcup E(f,c)$ uma vez que se $q \in A$ não é ponto crítico de f então vale que $f(g(q)) = f(\mathcal{H}_1(q)) < f(\mathcal{H}_0(q)) = f(q) \leq$

c). O seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} H_n\left(B, \overset{\circ}{B}\right) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"'] & H_n\left(A, \overset{\circ}{A}\right) \\ H_n\left(\overset{\circ}{A} \cup E(f,c), \overset{\circ}{A}\right) \arrow[ur, "k_*"'] & \end{tikzcd}$$

e sendo i_* um isomorfismo segue então que k_* é um isomorfismo. $\square$

Corolário 4.0.3. *Se* $H_n([f \leq c], [f < c]) \neq 0$ *então* $E(f, c) \neq \emptyset$.

Corolário 4.0.4. *Nas hipóteses da proposição acima, se* $E(f, c)$ *é discreto então*

$$H_n([f \leq c], [f < c]) \approx \bigoplus_{p \in E(f;c)} H_n([f < c] \bigcup \{p\}, [f < c]).$$

Demonstração. Como M é compacta e $E(f, c)$ é discreto então $E(f, c)$ é finito. Logo, pelo Teorema de Excisão, temos que

$$H_n([f \leq c], [f < c]) \approx \bigoplus_{p \in E(f;c)} H_n([f < c] \bigcup \{p\}, [f < c]).$$

$\square$

A seguir calcularemos efetivamente a homologia de cada parcela no corolário anterior.

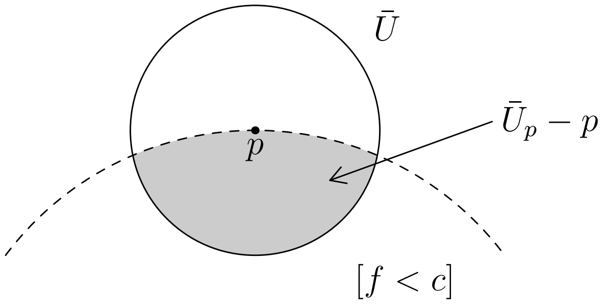
Proposição 4.0.3. *Sejam* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciável e* $p \in E(f, c)$. *Suponhamos* p *não-degenerado de índice* r_0. *Então*

$$H_n([f < c] \bigcup \{p\}, [f < c]) \approx \begin{cases} 0 & se\ n \neq r_0, \\ \mathbb{Z} & se\ n = r_0. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Lema de Morse, existe um sistema de coordenadas local (y, V), centrado em $p \in V$, com $y(p) = 0$, tal que

$$f - c = -y_1^2 - \cdots - y_{r_0}^2 + y_{r_0+1}^2 + \cdots + y_m^2.$$

Agora, tomemos uma vizinhança $p \in U \subset V$ com $y(\bar{U}) = \bar{\mathbb{B}}(0; \varepsilon)$ bola fechada em $\mathbb{R}^m$. Seja $\bar{U}_p := \bar{U} \bigcap([f < c] \bigcup\{p\})$.

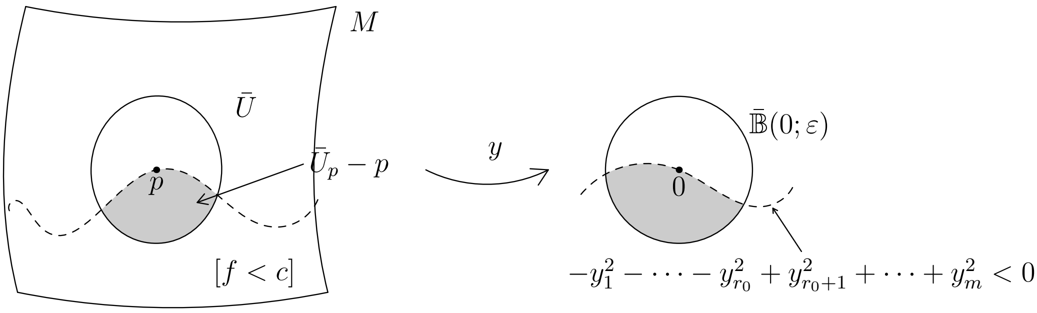


Afirmação. $H_n([f<c]\bigcup\{p\},[f<c]) \approx H_n\left(\bar{U}_p, \bar{U}_p - \{p\}\right)$.

Demonstração da afirmação. Com efeito, $\bar{U}_p$ é vizinhança fechada de p tal que $\bar{U}\bigcap[f<c] = \bar{U}_p - \{p\}$. Pelo Teorema de Excisão, temos que $H_n([f<c] \bigcup\{p\},[f<c]) \approx H_n(([f<c]\bigcup\{p\})\bigcap\bar{U},[f<c]\bigcap\bar{U}) = H_n\left(\bar{U}_p, \bar{U}_p - \{p\}\right)$. $\square$

Agora, o sistema de coordenadas (y, V) induz um homomorfismo de pares entre $\left(\bar{U}_p, \bar{U}_p - \{p\}\right)$ e $(W\bigcup\{0\}, W)$ onde

$$W := \left\{(y_1, ..., y_m) \in \bar{\mathbb{B}}(0;\varepsilon) \mid -y_1^2 - \cdots - y_{r_0}^2 + y_{r_0+1}^2 + \cdots + y_m^2 < 0\right\}.$$



Defina $\mathcal{G}_t : (W\bigcup\{0\}, W) \to (W\bigcup\{0\}, W)$ pondo $\mathcal{G}_t(y_1, ..., y_m) = (y_1, ..., y_{r_0}, (1-t)y_{r_0+1}, ..., (1-t)y_m),\ t \in [0,1]$. Obtemos então uma homotopia de pares entre a aplicação identidade e a projeção $\pi : (y_1, ..., y_m) \longmapsto (y_1, ..., y_{r_0}, 0, ..., 0)$. Seja $\bar{\mathbb{B}}^{r_0} := y\left(\bar{U}\right)\bigcap(\mathbb{R}^{r_0}\times\{0\}) = \bar{\mathbb{B}}(0;\varepsilon)\bigcap(\mathbb{R}^{r_0}\times\{0\})$. Então $\pi : (W\bigcup\{0\}, W) \to \left(\bar{\mathbb{B}}^{r_0}, \bar{\mathbb{B}}^{r_0} - \{0\}\right)$ define uma equivalência de homotopia (note que $\bar{\mathbb{B}}^{r_0} \subset W\bigcup\{0\}$ e que $G_t\left(\bar{\mathbb{B}}^{r_0}\right) \subset \bar{\mathbb{B}}^{r_0}, \forall t$). Logo, pela Proposição 1.2.1., $H_n(W\bigcup\{0\}, W)$ e $H_n\left(\bar{\mathbb{B}}^{r_0}, \bar{\mathbb{B}}^{r_0} - \{0\}\right)$ são isomorfos. Assim, como

$$H_n\left(\bar{\mathbb{B}}^{r_0}, \bar{\mathbb{B}}^{r_0} - \{0\}\right) \approx H_n\left(\bar{\mathbb{B}}^{r_0}, \mathbb{S}^{r_0-1}\right) \approx \begin{cases} 0 & se\ n \neq r_0, \\ \mathbb{Z} & se\ n = r_0, \end{cases}$$

obtemos o resultado. $\square$

Corolário 4.0.5. *Sejam M compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que $E(f,c)$ contém somente pontos críticos não-degenerados. Então temos que posto*$(H_n([f \leq c],[f < c])) = \#\{p \in M|\ p$ *é ponto crítico com* $f(p) = c$ *e índice* $n\}$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.1., $E(f,c)$ é discreto. Logo, pelo Corolário 4.0.6., temos que

$$H_n([f \leq c],[f < c]) \approx \bigoplus_{p \in E(f;c)} H_n([f < c] \bigcup \{p\},[f < c])$$

onde, pela proposição anterior,

$$\text{posto}(H_n([f < c] \bigcup \{p\},[f < c]) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ tem índice} \neq n, \\ 1 & \text{se } p \text{ tem índice} = n, \end{cases}$$

donde segue-se o resultado. □

Capítulo 5

As Desigualdades de Morse

Consideraremos um espaço topológico qualquer X. Definiremos os números de Betti de X, e os números de Betti do par (X, Y) onde Y é um subespaço de X. Daremos dois lemas que relacionam alguns destes números sob certas condições. Em seguida, definiremos os números de Morse para uma função de Morse qualquer, e veremos duas propriededes destes. Por fim, daremos as desigualdes de Morse que relacionam os números de Betti com os números de Morse.

Definição 5.0.3. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Os números $R_q(X) = posto(H_q(X))$, $R_q(Y) = posto(H_q(Y))$ e $R_q(X, Y) = posto(H_q(X, Y))$ são chamados, respectivamente, o q-ésimo número de Betti de X, Y e (X, Y).*

Lema 5.1. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Suponhamos que os números de Betti $R_q(X) = posto(H_q(X))$, $R_q(Y) = posto(H_q(Y))$ e $R_q(X, Y) = posto(H_q(X, Y))$ são todos finitos e que $R_q(\cdot) = 0$ para todo $q \notin \{0, 1, ..., m\}$. Então vale a seguinte fórmula*

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(X, Y)$$

onde, por definição, $\chi(\cdot) := \sum_{q=0}^{m} (-1)^q R_q(\cdot)$.

Demonstração. Consideremos a seqüência exata do Teorema 1.2.1.

$$\cdots \to H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \to \cdots .$$

Das hipotéses e a exatidão da seqüência, segue-se que

$$0 = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q (posto(H_q(Y)) - posto(H_q(X)) + posto(H_q(X, Y))).$$

Logo, $\chi(X) = \chi(Y) + \chi(X, Y)$. □

Lema 5.2. *Sejam X um espaço topológico e $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = X$. Suponhamos que os números de Betti $R_q(X_i, X_{i-1})$ e $R_q(X)$ são todos finitos e se anulam para $q \notin \{0, ..., m\}$. Então vale que*

$$\chi(X) = \sum_{j=1}^{k} \chi(X_j, X_{j-1}).$$

Definição 5.0.4. *Sejam M variedade diferenciável compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ função de Morse. O r-ésimo número de Morse de f é, por definição, o número*

$$M(f, r) := \#\{ \text{ pontos críticos de } f \text{ com índice } r\}.$$

Proposição 5.0.4. *Sejam M variedade diferenciável compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ função de Morse. $M(f, r)$ satisfaz as seguintes igualdades:*

1. $M(f, r) = \sum_{i=1}^{k+1} posto(H_r([f \leq c_i], [f < c_i]))$,
2. $M(f, q) = \sum_{i=1}^{k+1} R_q([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}])$,

onde $a_0 = -\infty$, $a_{k+1} = +\infty$ e $a_1 < \cdots < a_k$ são números reais quaisquer tais que entre a_i e a_{i+1} exista somente um nível crítico, digamos c_i, de f.

Demonstração. 1. Segue-se da Proposição 4.0.3..
2. Consideremos dois casos:
1° Caso - Suponha que f assume valores distintos nos seus pontos críticos. Denotemos por $p_1, ..., p_{k+1}$ os pontos críticos de f, com $f(p_i) = c_i \in (a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, ..., k+1$. Como p_i é o único ponto crítico de f em $[a_{i-1} < f < a_i]$, segue-se que $[f \leq a_i]$ e $[f \leq a_{i-1}] \bigcup e^{r_i}$ são homotopicamente equivalentes, onde e^{r_i} é uma $r_i -$ célula e r_i é o índice de p_i. Logo, $H_q([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}])$ e $H_q([f \leq a_{i-1}] \bigcup e^{r_i}, [f \leq a_{i-1}])$ são isomorfos. Pelo Teorema de Excisão, temos que $H_q([f \leq a_{i-1}] \bigcup e^{r_i}, [f \leq a_{i-1}]) \approx H_q(e^{r_i}, \dot{e}^{r_i})$ onde $\dot{e}^{r_i}$ é o bordo de e^{r_i}. Então,

$$H_q([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}]) \approx H_q(\mathbb{B}^{r_i}, \mathbb{S}^{r_i - 1}) \approx \begin{cases} 0 & se\ q \neq r_i, \\ \mathbb{Z} & se\ q = r_i, \end{cases}$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^{k+1} R_q([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}]) = M(f, q).$$

2° Caso (caso geral) - Podemos efetuar uma pequena perturbação em f em torno de seus pontos críticos, sem alterá-los e sem alterar seus índices. Assim, podemos supor que f assume valores distintos nos seus pontos críticos. O resultado seguirá então do 1° Caso. □

Corolário 5.0.6. *Nas hipotéses da proposição anterior,*

$$\chi(M) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r M(f, r).$$

Demonstração. Sejam os subespaços $\emptyset = [f \leq a_0] \subset [f \leq a_1] \subset \cdots \subset [f \leq a_k] \subset [f \leq a_{k+1}] = M$. Os números de Betti $R_q([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}])$ são todos finitos e se anulam para $q \notin \{0, 1, ..., m\}$, de modo que pelo Lema 5.2. temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{m} (-1)^r M(f, r) &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \sum_{j=1}^{k+1} R_r([f \leq a_j], [f \leq a_{j-1}]) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r R_r([f \leq a_j], [f \leq a_{j-1}]) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \chi([f \leq a_j], [f \leq a_{j-1}]) \\
&= \chi(M).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.0.7 (Desigualdades de Morse)**.** *Sejam M variedade diferenciável compacta e $f : M \to \mathbb{R}$ função de Morse. Sejam $a_0 = -\infty$, $a_{k+1} = +\infty$ e $a_1 < \cdots < a_k$ números reais quaisquer tais que $[f \leq a_i]$ contém exatamente i pontos críticos. Então, entre os números de Morse de f e os números de Betti de M existem as seguintes relações:*

$$M(f, 0) \geq R_0(M)$$

$$M(f, 1) - M(f, 0) \geq R_1(M) - R_0(M)$$

$$\vdots$$

$M(f, q) - M(f, q-1) + \cdots + (-1)^q M(f, 0) \geq R_q(M) - R_{q-1}(M) + \cdots + (-1)^q R_0(M)$.
Além disso, tem-se $M(f, r) \geq R_r(M)$, para todo $r \geq 0$, e se existe r_0 tal que $M(f, r_0 + 1) = 0$, então
$M(f, r_0) - M(f, r_0 - 1) + \cdots + (-1)^{r_0} M(f, 0) = R_{r_0}(M) - R_{r_0-1}(M) + \cdots + (-1)^{r_0} R_0(M)$.

Notação. *Consideremos a seqüência exata do par* $([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}])$ *do Teorema 1.2.1.*

$$\cdots \to H_n([f \leq a_{i-1}]) \xrightarrow{i_*} H_n([f \leq a_i]) \xrightarrow{j_*} H_n([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}]) \xrightarrow{\partial}$$
$$H_{n-1}([f \leq a_{i-1}]) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}([f \leq a_i]) \to \cdots .$$

Ponhamos $R_r(a_i) = posto(H_r([f \leq a_i]))$, $R_r = R_r(M)$, $l_r(a_i) = posto(j_*(H_r([f \leq a_i]))) = posto(Nuc(\partial))$, $L_r = \sum_i l_r(a_i)$, $n_r(a_i) = posto(\partial(H_r([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}])))$ *e* $N_r = \sum_i n_r(a_i)$.

Demonstração. Temos que

$$n_r(a_i) + l_r(a_i) = R_r([f \leq a_i], [f \leq a_{i-1}]),$$

logo pela Proposição 5.0.4.,

$$N_r + L_r = M(f, r).$$

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} l_r(a_i) &= R_r(a_i) - \text{posto}(i_*(H_r([f \leq a_{i-1}]))) \\ &= R_r(a_i) - R_r(a_{i-1}) + \text{posto}(\text{Nuc}(i_*)) \\ &= R_r(a_i) - R_r(a_{i-1}) + n_{r+1}(a_i), \end{aligned}$$

portanto,

$$R_r(a_{i-1}) = -l_r(a_i) + R_r(a_i) + n_{r+1}(a_i).$$

Contudo, utilizando-se a equação anterior de modo sucessivo para se extrair o valor de $R_r(a_i)$ com $i \in \{0, ..., k+1\}$, obtém-se

$$R_r(a_k) = -l_r(a_{k+1}) + R_r(a_{k+1}) + n_{r+1}(a_{k+1}),$$

$$R_r(a_{k-1}) = -l_r(a_{k+1}) - l_r(a_k) + R_r(a_{k+1}) + n_{r+1}(a_{k+1}) + n_{r+1}(a_k),$$

$$\vdots$$

$$R_r(a_0) = -l_r(a_{k+1}) - \cdots - l_r(a_1) + R_r(a_{k+1}) + n_{r+1}(a_{k+1}) + \cdots + n_{r+1}(a_1).$$

Agora, como $R_r(a_0) = R_r(-\infty) = 0$ e $R_r(a_{k+1}) = R_r(+\infty) = R_r$, da última igualdade acima obtemos

$$0 = -L_r + R_r + N_{r+1}, \text{ i.e., } R_r = L_r - N_{r+1}.$$

Logo, como $N_r + L_r = M(f, r)$, $M(f, r) - R_r = N_r + N_{r+1}$. Portanto,

$$M(f, r) \geq R_r, \forall r \geq 0.$$

Temos também que $M(f,0)-R_0 = N_0+N_1 = N_1 \geq 0$, pois $N_0 = 0$ uma vez que $\partial(H_0(\cdot)) = 0$. Assim, vale

$$(M(f,1)-R_1)-(M(f,0)-R_0) = N_1+N_2-N_1 = N_1 \geq 0,$$

$$\begin{aligned}(M(f,2)-R_2)-(M(f,1)-R_1)+(M(f,0)-R_0) =& \\ N_2+N_3-N_1-N_2+N_1 = N_3 \geq 0,&\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}(M(f,m)-R_m)-(M(f,m-1)-R_{m-1})+\cdots& \\ +(-1)^m(M(f,0)-R_0) = N_{m+1} \geq 0&\end{aligned}$$

o que prova as desigualdades de Morse.
Agora, se $M(f,r_0+1)=0$ então $R_{r_0+1}=0$. Logo, temos que

$$-M(f,r_0)+\cdots+(-1)^{r_0+1}M(f,0) \geq -R_{r_0}+\cdots+(-1)^{r_0+1}R_0,$$

donde obtém-se

$$R_{r_0}-R_{r_0-1}+\cdots+(-1)^{r_0}R_0 \geq M(f,r_0)-M(f,r_0-1)+\cdots+(-1)^{r_0}M(f,0).$$

Como a desigualdade inversa também se cumpre, temos a igualdade. □

Capítulo 6

O Teorema de Lefschetz

Aqui daremos uma prova do Teorema de Lefschetz baseada no seguinte resultado sobre homologia de variedades de Stein.

Uma variedade de Stein é uma variedade complexa que pode ser mergulhada biholomorficamente como um subconjunto fechado de algum espaço $\mathbb{C}^N$.

Teorema 6.0.8. *Seja X uma variedade de Stein n-dimensional. Então*

$$H_i(X) = 0 \text{ para } i > n,$$

e

$$H_n(X) \text{ não tem torção.}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.1. podemos escolher um ponto $p_0 \in (\mathbb{C}^N - X)$ tal que a função $L_{p_0} : X \to \mathbb{R}$ dada por $L_{p_0}(q) = ||q - p||^2,\ q \in X$ é uma função de Morse. A função L_{p_0} é uma função própria, portanto podemos aplicar as desigualdades de Morse

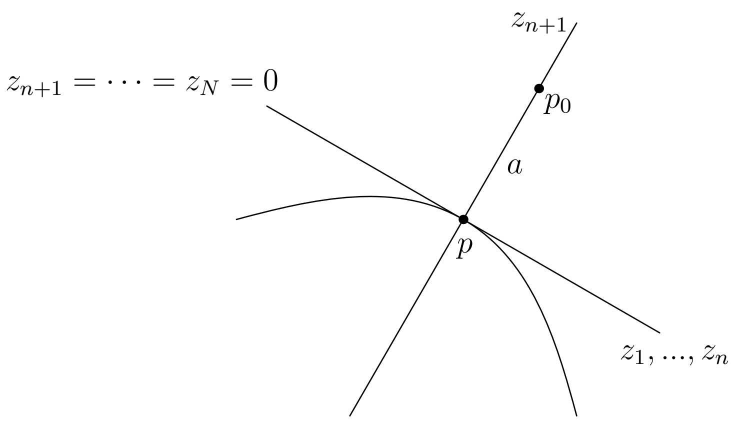
$$M(L_{p_0}, i) \geq R_i(X, \kappa) = \text{posto}(H_i(X; \kappa))$$

onde κ é um campo arbitrário.
Pelo Teorema do coeficiente universal, temos que

$$H_i(X, \kappa) = H_i(X) \otimes \kappa \ \oplus \ \text{Tor}(H_{i-1}(X), \kappa).$$

Logo, o resultado segue-se se provamos que $M(L_{p_0}, i) = 0$ para $i > n$, i.e., se provamos que nenhum ponto crítico tem índice maior que n.
Seja p um ponto crítico de L_{p_0}. Escolhamos coordenadas complexas $z_\beta = x_{2\beta-1} + ix_{2\beta},\ 1 \leq \beta \leq N$, com $x_1, ..., x_{2N}$ como coordenadas retangulares

para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2N}$, e tais que p está no origem e o espaço tangente a X em p tem equações $z_{n+1} = \cdots = z_N = 0$. Além disso, suponha que p_0 tem coordenadas $z_\beta = 0$ para $\beta \neq n+1$, $z_{n+1} = a > 0$, i.e., p_0 encontra-se no eixo real x_{2n+1} positivo.



Numa vizinhança de p, $z_1, ..., z_n$ podem ser usadas como um sistema de coordenadas locais em X, de forma que esta possa ser representada localmente em $\mathbb{C}^N$ por

$$z(z_1, ..., z_n) = (z_1, ..., z_n, z_{n+1}(z_1, ..., z_n), ..., z_N(z_1, ..., z_n)).$$

Agora, numa vizinhança de p tem-se que

$$z_{n+1} = z_{n+1}(0) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_\beta}(0) z_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial z_\beta \partial z_\gamma}(0) z_\beta z_\gamma + H(z_1, ..., z_n)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial z_\beta \partial z_\gamma}(0) z_\beta z_\gamma + H(z_1, ..., z_n),$$

onde H junto com suas primeira e segunda derivadas anulam-se em 0. Seja,

$$x_{2n+1} = \mathrm{Re}(z_{n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} b_{i,j} x_i x_j + \text{termos de ordem superior.}$$

Podemos supor que a parte quadrática está na forma diagonal, e escrevamos

$$x_{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} b_i x_i^2 + \text{termos de ordem superior.}$$

Logo, temos que

$$\mathcal{H}_p(L_{p_0}) = 2\left(I - \frac{1}{2}a(\ b_{i,j}\ ) \right) \sim \text{diag}(\ 2 - ab_1, ..., 2 - ab_{2n}).$$

Então, o índice de p é igual ao número dos b_i tais que $b_i > \frac{1}{a} > 0$. Mas os b_i são os autovalores da parte real de uma forma quadrática complexa, logo se $b_i > 0$ é um autovalor então $-b_i < 0$ também é um autovalor. Portanto, no máximo n deles podem ser maior que zero.
Por conseguinte, $M(L_{p_0}, i) = 0$ para todo $i > n$. Logo, posto$(H_i(X;\kappa)) = 0$ para $i > n$ onde κ é um campo arbitrário, e assim $H_i(X) = 0$ para $i > n$.
Também temos que

$$0 = H_{n+1}(X,\kappa) = [H_{n+1}(X) \otimes \kappa] \oplus \text{Tor}(H_n(X),\kappa)\ .$$

Logo, $\text{Tor}(H_n(X),\kappa) = 0$ onde κ é um campo arbitrário. Como $\text{Tor}(H_n(X), \mathbb{Z}_n)$ é o subgrupo de $H_n(X)$ de elementos de ordem n, e $\text{Tor}(H_n(X),\mathbb{Z}_n) = 0$ para todo n, então $H_n(X)$ não tem torção. □

O seguinte é o Teorema de Lefschetz sobre Seções Hiperplanas e a prova foi dada por A. Andreotti e T. Frankel em [1].

Teorema 6.0.9 (Teorema de Lefschetz)**.** *Seja V uma variedade algébrica irredutível de dimensão n no espaço projetivo $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Denote por V_0 a subvariedade obtida quando cortamos V com uma hipersuperficie W que contem o singular locus de V e não V. Então o homomorfismo*

$$i^* : H^r(V) \to H^r(V_0)$$

induzido pela aplicação inclusão $i : V_0 \to V$ é

1. *bijetor para $r < n-1$*
2. *injetor para $r = n-1$*

e o grupo quociente $H^{n-1}(V_0)/H^{n-1}(V)$ não tem torção.

Demonstração. Seja p o grau de W. Consideremos o morfismo de Veronese $\vartheta : \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C})$, $N_1 = \binom{N+p}{p} - 1$ (ver Apêndice A). Seja $V' = \vartheta(V)$. Temos que, V' é uma imagem biregular de V, sobre a qual V_0 aparece como uma seção hiperplana V_0'. Portanto, não é restrição assumir que V_0 é uma seção hiperplana de V. Logo, $V - V_0$ é uma variedade de Stein, sendo analiticamente imersa como um subconjunto fechado do espaço afim $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) - W$. Assim, pelo Teorema 6.0.8., temos que $H_i(V - V_0) = 0$ para $i > n$, e

$H_n(V-V_0)$ não tem torção. Por outro lado, como V_0 é um subespaço fechado de V, pelo Teorema 2.3.2., temos uma seqüência exata

$$\cdots \to H^i_c(V-V_0) \to H^i(V) \to \check{H}^i(V_0) \to$$
$$\to H^{i+1}_c(V-V_0) \to H^{i+1}(V) \to \check{H}^{i+1}(V_0) \to \cdots \ .$$

Como $V-V_0$ é não singular, então é orientável e portanto pelo Teorema 2.3.1., temos que

$$H^i_c(V-V_0) \approx H_{2n-i}(V-V_0) \ .$$

Logo, $H^i_c(V-V_0)=0$ para $i<n$. Além, pela Proposição 2.3.1., $\check{H}^i(V_0) \approx H^i(V_0)$. Assim, temos seqüências exatas curtas

$$0 \to H^r(V) \xrightarrow{i^*} H^r(V_0) \to 0 \qquad \text{para } r < n-1 \ .$$

Donde temos que o homomorfismo i^* é bijetor para $r<n-1$.
Também, temos a seqüência exata curta

$$0 \to H^{n-1}(V) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(V_0) \to H_n(V-V_0).$$

Donde temos que o homomorfismo i^* é injetor para $r=n-1$. Além disso, $H^{n-1}(V_0)/H^{n-1}(V) \approx H_n(V-V_0)$, logo $H^{n-1}(V_0)/H^{n-1}(V)$ não tem torção já que $H_n(V-V_0)$ também não tem. $\square$

Apêndice A

Variedades Projetivas

Basicamente aqui daremos a definição de uma variedade projetiva, morfismos entre elas e pontos não-singulares. Também apresentaremos o morfismo de Veronese. Foi tomado como referência [6] e [7], onde pode-se complementar este material.

O espaço projetivo n-dimensional $\mathbb{P}^n(k)$ sobre o corpo k é o quociente

$$\left\{(a_0, ..., a_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}\right\} /_{\sim}$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por

$(a_0, ..., a_n) \sim (b_0, ..., b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k\backslash\{0\}$ tal que $a_i = \lambda b_i \; \forall i \Leftrightarrow a_i b_j = a_j b_i \; \forall i, j$.

$\mathbb{P}^n(k)$ é o conjunto das retas que passam pela origem.

Se P é um ponto de $\mathbb{P}^n(k)$, então qualquer $(n+1)$-upla $(x_0, ..., x_n)$ na classe de equivalência P é chamada um sistema de coordenadas homogêneas para P.
Um ponto $P \in \mathbb{P}^n(k)$ chama-se um zero de um polinômio $F \in k\,[X_0, ..., X_n]$ se $F(x_0, ..., x_n) = 0$ para todo sistema de coordenadas homogêneas $(x_0, ..., x_n)$ de P; escrevemos $F(P) = 0$. Se F é homogêneo, é suficiente que esta condição se cumpra para um sistema $(x_0, ..., x_n)$ com $P = [x_0, ..., x_n]$. Em geral, se $F = F_0 + \cdots + F_d$ é a decomposição de F em polinômios homogêneos F_i de grau i e se k é um corpo infinito, então $F(P) = 0$ se e só se $F_i(x_0, ..., x_n) = 0$ para todo i e um sistema $(x_0, ..., x_n)$ com $P = [x_0, ..., x_n]$. De fato,

$$F(\lambda(x_0, ..., x_n)) = F_0(x_0, ..., x_n) + \lambda F_1(x_0, ..., x_n) + \cdots + \lambda^d F_d(x_0, ..., x_n).$$

Como k é um corpo infinito, a igualdade $F(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \neq 0$, implica que $F_i(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = 0$. Assim, se F se anula num ponto P então todas suas componentes homogêneas F_i também se anulam em P.

Definição A.0.5. *$V \subset \mathbb{P}^n(k)$ chama-se uma variedade algébrica projetiva se existem polinômios homogêneos $F_1, ..., F_n \in k[X_0, ..., X_n]$ tais que V é o conjunto de todos os zeros comuns dos F_i em $\mathbb{P}^n(k)$.*

Uma variedade que seja o conjunto solução de um sistema de equações lineares homogêneas é chamada de *variedade linear*. Se o sistema de equações tem posto $n-d$, obtemos uma variedade linear *d-dimensional*, em particular para $d = 1$ uma *linha projetiva*.
Uma variedade projetiva que seja o conjunto de todos os zeros de um polinômio homogêneo F é chamada de *hipersuperfície*. Se F é linear, dizemos que é um *hiperplano projetivo*. O grau de F é o grau da hipersuperfície.

Proposição A.0.5. *Seja k algebricamente fechado, $n \geq 2$.*

1. *Uma variedade projetiva de dimensão $d \geq 1$ e uma hipersuperfície sempre se intersectam.*

2. *Quaisquer duas hipersuperfícies se intersectam.*

Definição A.0.6. *Seja $A \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $A \neq \emptyset$. Definamos*

$$I(A) = \{\ F \in k[X_0, ..., X_n] : \text{cada } P \in A \text{ é um zero de } F\ \}.$$

$I(A)$ chama-se o ideal de A. Fazemos, $I(\emptyset) := (X_0, ..., X_n)$.

Lema A.1. *Uniões finitas e interseções arbitrárias de variedades projetivas em $\mathbb{P}^n(k)$ são variedades projetivas.*

Definição A.0.7. *Definimos a* topologia de Zariski *sobre $\mathbb{P}^n(k)$ tomando como conjuntos abertos os complementos das variedades projetivas.*

Uma variedade projetiva é *irredutível* se não é união de duas variedades projetivas próprias.
A dimensão de uma variedade projetiva é sua dimensão como espaço topológico.
Um subconjunto aberto de uma variedade projetiva é chamado uma *variedade quase-projetiva.*

Lema A.2. *Qualquer variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ tem uma única decomposição em componentes irredutíveis. Se k é um corpo infinito, V é irredutível se e só se $I(V)$ é um ideal primo de $k[X_0, ..., X_n]$.*

Definição A.0.8. *Seja $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ uma variedade quase-projetiva e $f : U \to k$ uma função. f é regular num ponto $P \in U$ se existe uma vizinhança aberta U_0 com $P \in U_0 \subseteq U$, e polinômios homogêneos $g, h \in k[X_0, ..., X_n]$ de graus iguais, tais que h é diferente de zero em U_0, e $f = \frac{g}{h}$ sobre U_0. Dizemos que f é regular em U se esta é regular em todo ponto.*

Definição A.0.9. *Sejam V e W variedades quase-projetivas. Uma aplicação $\varphi : V \to W$ é chamada regular (ou um morfismo) se φ é contínua (na topologia de Zariski) e para todo conjunto aberto $U \subseteq W$, e toda função regular $f : U \to k$, a função $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \to k$ é regular.*

Proposição A.0.6. *A composição de dois morfismos é um morfismo.*

Definição A.0.10. *Sejam V e W variedades quase-projetivas. Um* isomorfismo *$\varphi : V \to W$ é um morfismo que admite um morfismo inverso $\psi : W \to V$ com $\psi \circ \varphi = id_V$ e $\varphi \circ \psi = id_W$.*

Proposição A.0.7. *Sejam V e W variedades quase-projetivas. Uma aplicação $\varphi : V \to W$ é um morfismo se e só se existem coberturas abertas $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ e $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ tais que $\varphi|_{V_i} : V_i \to W_i$ é um morfismo para cada i.*

Teorema A.0.10. *Sejam $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ variedades quase-projetivas. Uma aplicação $\varphi : V \to W$ é um morfismo se e só se para cada $x \in V$ existem uma vizinhança aberta U de x em V e polinômios homogêneos $F_0, ..., F_m \in k[X_0, ..., X_n]$ do mesmo grau tais que*

$$\varphi([x_0, ..., x_n]) = [F_0(x_0, ..., x_n), ..., F_m(x_0, ..., x_n)] \text{ para cada } [x_0, ..., x_n] \in U .$$

Teorema A.0.11 (O morfismo de Veronese)**.** *Sejam n, d inteiros positivos. A aplicação $\vartheta : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^N(k)$, $N = \binom{n+d}{d} - 1$, dada por*

$$\vartheta([x_0, ..., x_n]) = \left[..., x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}, ...\right]_{i_0 + \cdots + i_n = d} ,$$

$[x_0, ..., x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$, é um isomorfismo de $\mathbb{P}^n(k)$ sobre a variedade projetiva

$$Y = \Big\{ [..., y_{i_0 i_1 \cdots i_n}, ...] \in \mathbb{P}^N(k) : \quad y_{i_0 i_1 \cdots i_n} y_{j_0 j_1 \cdots j_n} = y_{k_0 k_1 \cdots k_n} y_{l_0 l_1 \cdots l_n} \\ \text{se } i_0 + j_0 = k_0 + l_0, ..., i_n + j_n = k_n + l_n \Big\}.$$

Demonstração. Claramente qualquer ponto da imagem está em Y. Vejamos que todo ponto de Y está na imagem de ϑ. Seja $[..., y_{i_0 \cdots i_n}, ...] \in Y$. Alguma coordenada da forma $y_{0 \cdots 0 d 0 \cdots 0}$ é diferente de zero. De fato, tomemos uma coordenada $y_{i_0 \cdots i_n} \neq 0$. Se $i_0 = d$ então $(i_0, ..., i_n) = (d, ..., 0)$ já que $i_0 + \cdots + i_n = d$ e portanto $y_{d0 \cdots 0} \neq 0$. Suponhamos que $0 < i_0 < d$, então existem vetores $(l_0, ..., l_n)$ e $(k_0, ..., k_n)$ de inteiros não-negativos tais que $l_0 + \cdots + l_n = d = k_0 + \cdots + k_n$, $l_0 > i_0$, e $(l_0, ..., l_n) + (k_0, ..., k_n) = 2(i_0, ..., i_n)$. Logo, $y_{l_0 \cdots l_n} y_{k_0 \cdots k_n} = (y_{i_0 \cdots i_n})^2 \neq 0$ e então $y_{l_0 \cdots l_n} \neq 0$. Após um número finito de passos obtemos que $y_{d0 \cdots 0} \neq 0$. Se $i_0 = 0$ então podemos fazer o mesmo procedimento anterior para algum $i_j \neq 0$, $j > 0$. Logo, temos que

$Y = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$ onde $V_i = \left\{ \ [..., y_{i_0 \cdots i_n}, ...] \in Y : y_{0 \cdots d \cdots 0} \neq 0 \ \right\}$ e é um aberto em Y. Suponhamos que $[..., y_{i_0 \cdots i_n}, ...] \in V_0$. Temos que

$$\vartheta\left([y_{d0\cdots 0}, y_{d-110\cdots 0}, ..., y_{d-10\cdots 01}]\right) = [..., y_{i_0\cdots i_n}, ...]$$

já que $y_{d0\cdots 0}^{i_0} y_{d-110\cdots 0}^{i_1} \cdots y_{d-10\cdots 01}^{i_n} = y_{i_0\cdots i_n} y_{d0\cdots 0}^{d-1}$. Quando $[..., y_{i_0\cdots i_n}, ...] \in V_i, \ i \neq 0$, tem-se uma expressão similar.
Agora, pelo Teorema anterior, ϑ é um morfismo. Além disso ϑ é um a um. De fato, se $\vartheta\left([x_0, ..., x_n]\right) = \vartheta\left([z_0, ..., z_n]\right)$ então $\left[..., x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}, ...\right]_{i_0+\cdots+i_n=d} = \left[..., z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n}, ...\right]_{i_0+\cdots+i_n=d}$. Logo, $\mu x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} = z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n}$ para algum $\mu \neq 0$. Escolhamos $x_i \neq 0$ e seja $\lambda = \frac{z_i}{x_i}$. Temos que $\mu x_i^d = z_i^d$ então $\mu = \frac{z_i^d}{x_i^d} = \left(\frac{z_i}{x_i}\right)^d = \lambda^d$. Seja $x_j \neq 0$. Tem-se que $\mu x_i^{d-1} x_j = z_i^{d-1} z_j, \ \mu x_j = \left(\frac{z_i}{x_i}\right)^{d-1} z_j, \ \mu x_j = \lambda^{d-1} z_j, \ \lambda^d x_j = \lambda^{d-1} z_j, \ \lambda x_j = z_j$. Logo, $\lambda x_j = z_j$ para todo j e, portanto, $[x_0, ..., x_n] = [z_0, ..., z_n]$.
Agora, temos que $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ onde $A_i = \vartheta^{-1}(V_i)$ e é um aberto de $\mathbb{P}^n(k)$. Além disso, as expressões que obtemos para as $\vartheta^{-1}|_{V_i} : V_i \to A_i$ mostram que estas também são regulares, logo isomorfismos. Portanto, ϑ é um isomorfismo. $\square$

O morfismo de Veronese permite reduzir problemas sobre hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n(k)$ a problemas sobre hiperplanos em $\mathbb{P}^N(k)$.
Seja $F \in k[X_0, ..., X_n]$ um polinômio homogêneo de grau d, digamos

$$F = \sum_{i_0+\cdots+i_n=d} c_{i_0} \cdots c_{i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$$

e seja $H \subset \mathbb{P}^n(k)$ a hipersuperfície definida pelo conjunto de todos os zeros de F, então ϑ induz um isomorfismo $H \to Y \cap H_1$ onde $H_1 = \left\{ [..., y_{i_0\cdots i_n}, ...] \in \mathbb{P}^N(k) : \sum c_{i_0} \cdots c_{i_n} y_{i_0\cdots i_n} = 0 \right\}$ hiperplano em $\mathbb{P}^N(k)$.
O morfismo de Veronese também induz um isomorfismo

$$\mathbb{P}^n(k) \backslash H \to Y \cap \left(\mathbb{P}^N(k) \backslash H_1\right)$$

onde $Y \cap \left(\mathbb{P}^N(k) \backslash H_1\right)$ é afim. Isto mostra que $\mathbb{P}^n(k) \backslash H$ é afim.

Observação 2. *Se $k = \mathbb{C}$ então $\mathbb{P}^n(k) \backslash H$ é uma variedade de Stein.*

Definição A.0.11. *Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ uma variedade projetiva de dimensão r. Sejam $F_1, ..., F_t \in k\left[X_0, ..., X_n\right]$ os polinômios homogêneos que geram o ideal de V. Seja $P \in V$ um ponto, com coordenadas homogêneas $(x_0, ..., x_n)$. P é chamado um ponto não-singular de V se posto $\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x_0, ..., x_n)\right) = n - r$.*

Os pontos de uma variedade projetiva que não são não-singulares são chamados *pontos singulares*.
Dizemos que uma variedade projetiva V é uma *variedade não-singular* se todo ponto de V é não-singular.
O conjunto de todos os pontos singulares de V é chamado o *singular locus* de V.

Proposição A.0.8. *O conjunto de todos os pontos não-singulares de uma variedade projetiva é aberto e não vazio.*

Bibliografia

[1] A. Andreotti and T. Frankel, *The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections*, Ann. of Math.(2) 69 1959 713-717.

[2] A. Banyaga and D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers, c2004.

[3] M. J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, 1967.

[4] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, c1978.

[5] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, c1977.

[7] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäuser, c1985.

[8] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.

[9] J. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, c1984.

[10] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

[11] A.H. Wallace, *Homology Theory on Algebraic Varieties*, Pergamon Press, 1958.