Taxas de Decaimento da Energia do Sistema Timoshenko para Placas Termoelásticas

Dugán Paúl Nina Ortiz

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Equações Diferencias Parciais.

Rio de Janeiro

27 de agosto 2007

Taxas de Decaimento da Energia do Sistema Timoshenko para Placas Termoelásticas

Dugán Paúl Nina Ortiz

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

(Presidente)

Prof. Gustavo Alberto Perla menzala - LNCC & IM/UFRJ

Prof. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Rio de Janeiro

27 de agosto 2007

Agradecimentos

A Deus, que não sessou de interceder por mim em todo momento.

Aos meus pais e meus irmãos, pelo apoio e compreensão.

A todos os professores que tornaram possível minha formação, pelos ensinamentos, críticas, conselhos e incentivo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador e amigo Professor Ademir Fernando Pazoto, pela forma como conduziu este trabalho, pelo apoio e incentivo e pela maneira como ensina e convive com seus alunos, se tornando um exemplo a ser seguido.

Resumo

Consideramos um modelo que descreve a dinâmica não linear de uma placa termoelástica não limitada. Provamos que o sistema acima é globalmente bem posto e analizamos o comportamento da energia total $E(t)$, quando $t \to +\infty$. Nosso resultado principal mostra que a energia total do sistema satisfaz a seguinte estimativa: Existe uma constante $\gamma = \gamma(E(0)) > 0$, tal que

$$E(t) \leqslant 4E(0)exp(-\gamma t), \ \forall t \geqslant 0.$$

O resultado é provado construindo uma função de Lyapunov que é uma perturbação adequada da energia e satisfaz a desigualdade diferencial que conduz à estimativa de decaimento.

Abstract

We consider a model describing nonlinear dynamical motions of an unbounded thermoelastic plate. We prove the well-posedness of the system and analyse the behaviour of the total energy $E(t)$, when $t \to +\infty$. Our main result result shows that the total energy of the system satisfies the following estimate: There exist a constant $\gamma = \gamma(E(0)) > 0$ such that

$$E(t) \leqslant 4E(0)exp(-\gamma t) \text{ for all } t \geqslant 0.$$

The result is proved by constructing Lyapunov functional which is a suitable perturbation of the energy and it satisfies the differential inequality leading to the desired decay estimate.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, a estabilização de modelos matemáticos envolvendo estruturas flexíveis sujeitas a vibração, têm sido consideravelmente estimulada pelo número crescente de questões de interesse prático. Dentre esses modelos, podemos destacar aqueles relacionados à engenharia estrutural moderna, que requerem mecanismos de controle ativos para estabilizar estruturas intrinsecamente instáveis ou que possuem um amortecimento natural muito fraco, como por exemplo, os modelos que descrevem os deslocamentos de vigas e placas finas. Dentro desse mesmo contexto aplicado, os modelos acima mencionados ainda sugerem que se considere o efeito do calor atuando sobre toda a viga (ou placa) interagindo com os outros efeitos, o que nos leva a analisar a sensibilidade do material diante da variação de temperatura; ou seja; verificar se as variações de temperatura influenciarão as deformações do material em cada instante de tempo.

Os modelos matemáticos que regem esse tipo de fenômeno são sistemas temporais hiperbólicos/parabólicos e, teoricamente, surge a questão de qual dos comportamentos, o parabólico ou o hiperbólico, vai determinar o perfil das soluções, como por exemplo, o comportamento assintótico, e qual das equações modificará o comportamento da outra.

Nesse trabalho, consideramos o problema de Cauchy para o modelo termoelástico

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + u - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right)\Delta u - \theta + \Delta\theta = 0 \\ \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \theta_t + \theta - \Delta\theta + u_t - \Delta u_t = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_o(x), u_t(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_o(x) \text{ em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ denota o deslocamento em x no tempo t e $\theta = \theta(x,t)$ é a diferença de temperatura com relação a uma temperatura de referência fixa. $M = M(s)$ é uma função real de uma variável real satisfazendo as condições

$$M \in C^1(\mathbb{R}^+) \text{ e } \mathrm{M(s), M'(s)} \geqslant 0,\ \forall \mathrm{s} \geqslant 0. \tag{2}$$

A energia total $E(t)$ associada a (1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2 + u^2 + \theta^2) dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right), \tag{3}$$

onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$, e através de um cálculo formal verificamos que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = -\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2\, dx; \tag{4}$$

ou seja; que $E(t)$ decresce ao longo das trajetórias do sistema. Nesse caso, o estudo de estabilização da energia é um problema que pode ser abordado.

Nosso objetivo principal é mostrar que $E(t)$ se aproxima de zero exponencialmente, quando $t \to \infty$. Mais precisamente, desejamos provar que

$$E(t) \leqslant 4E(0)e^{-\gamma t},\ \forall t \geqslant 0,$$

onde $\gamma = \gamma(E(0)) > 0$ e $\{u, u_t, \theta\}$ é uma solução forte do sistema (1). Para obter o resultado, construiremos um funcional de Lyapunov H satisfazendo

$$\frac{dH(t)}{dt} \leqslant -cH(t),\ c > 0$$

e

$$c_1 E(t) \leqslant H(t) \leqslant c_2 E(t),\ c_1, c_2 > 0.$$

A construção do funcional é inspirada nas técnicas multiplicativas que foram recentemente usadas em [16] e [17] para a análise do sistema de von Kármán com efeitos térmicos.

Observe que o modelo (1) faz parte de uma classe de sistemas da forma

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + f(u, \theta, \nabla u, \Delta u) = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

$$\theta_t - \Delta\theta + g(\theta, u_t, \Delta u_t) = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \ \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

onde f e g são funções satisfazendo condições adequadas. O modelo (5) com f e g específicas foi recentemente estudado em [24], [5] e [15]. Em [24], os autores estudam o modelo (5) em $\Omega \times (0, \infty)$ com

$$f = u + \Delta\theta \text{ e } g = -\Delta u_t \tag{5}$$

onde Ω é um domínio limitado em R^n com fronteira suave e $u = \frac{\partial u}{\partial v} = \theta = 0$ sobre $(0, +\infty) \times \partial\Omega$, sendo v o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Eles provam a existência e unicidade de solução forte do modelo cuja energia total decae exponencialmente. A prova do decaimento de energia foi obtido usando o método de energia. Enamoto em [5], considera o modelo (5) em $\Omega \times (0, \infty)$ com f e g dadas em (6) onde Ω é um domínio exterior com fronteira suave $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^3$ e $u = \frac{\partial u}{\partial v} = \theta = 0$ em $(0, +\infty) \times \partial\Omega$. Usando técnicas multiplicativas e considerando condições iniciais com suporte compacto em $\Omega_R = \{x \in \Omega;\ |x| < R\}$ foi provada a estimativa

$$\begin{gathered}(1+t)^{3/2} \|u(t,.)\|_{H^2(\Omega_R)} + (1+t)^{5/2} \|u(t,.)\|_{H^1(\Omega_R)} \\ +(1+t)^{3/2} \|\theta(t,.)\|_{L^2(\Omega_R)} \leq c\left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_1\|_{H^2(\Omega)} + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}\right)\end{gathered}$$

para toda $\{u, u_t, \theta\}$ solução forte do modelo (5), onde c é uma constante positiva.

Em [15], os autores estudam o modelo (5) em $R \times (0, +\infty)$ com $f = M\left(\int_{\rm I\!R} u_x^2 dx\right) u_{xx} + \theta_{xx}$ e $g = u_{xxt}$, onde M é uma função real satisfazendo

$$M \in C^1, M(s) \geq C_0 > 0,\ \forall s \geq 0 \text{ e alguma constante } C_0. \tag{6}$$

O resultado de existência e unicidade foi obtido em um espaço de Sobolev adequado e para o análise do decaimento da energia foi usada a análise de Fourier. Nesse caso, mostrou-se que $E(t) = O(t^{-1/2})$, quando $t \to \infty$. Observe que o caso $M(s) = s$ não está incluído na hipótese (7). Nesse trabalho, estendemos os resultados obtidos em [15] (incluindo o caso em que $M(0) = 0$) considerando em (5) o caso $f = u - \theta + \Delta\theta - a(t)\Delta u$ e $g = \theta + u_t - \Delta u_t$ com $a(t) = M\left(\int_{R^n} |\nabla u|^2 dx\right)$. Poderíamos questionar a eliminação dos termos $-\theta$ em f e u_t em g. Neste caso, é possivel provar a existência e unicidade global do modelo, porém na demonstração do comportamento assintótico da energia total quando $t \to +\infty$, teríamos que fazer mudanças nos funcionais ou então substituí-los por outros. Atualmente, esse problema está em aberto. Por outro lado, uma das principais contribuções do presente trabalho é a construção de um novo funcional de Lyapunov para o sistema não linear (1).

A análise acima descrita, foi dividida em três Capítulos e um Apêndice.

No **Capítulo 1**, apresentamos alguns resultados clássicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

No **Capítulo 2**, mostramos a existência e unicidade de solução forte para o sistema (1). O resultado é obtido utilizando a Teoría de semigrupos e estimativas a priori.

No **Capítulo 3**, mostramos que $E(t)$ tende a zero de maneira exponencial, quando $t \to \infty$.

No **Apéndice**, mostramos a 'proximidade' (no sentido fraco) entre as soluções de um sistema não linear acoplado para vibrações de vigas e o modelo linear

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u = 0, \ em \ \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = w_0(x), \ \ u_t(x,0) = w_1(x), \ em \ \mathbb{R}. \end{cases}$$

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demostrações são omitidas por se tratar de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demostrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, que eventualmente poderá ser todo $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{\mathrm{n}}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1 ... \alpha_n) \in \mathbb{N}^{\mathrm{n}}$.

4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então o gradiente de f, que será denotado por ∇f, é definido como o vetor do $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ dado por
   $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

5. Se $x \in \partial\Omega$ e u é diferenciável em x, então $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \eta(x).\nabla u(x)$ é a derivada normal em x, sendo $\eta(x)$ o vetor unitário exterior a Ω em x.

6. Se $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ é um campo vectorial de classe C^1, definimos o divergente de $F(x)$, denotado por div$F$, como div$F = \nabla.F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido por $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

7. O Laplaciano de uma função f é definido por $\text{div}(\nabla f) = \nabla.\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por Δf.

Identidades úteis

Se f e g são funções escalares de classe $C^1(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, c é uma constante real e F e G são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$.

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

4. $\text{div}(F+G) = \text{div}F + \text{div}G$.

5. $\text{div}(fF) = f\text{div}F + \nabla f.F$.

Observação 1.1. *O ponto "."em $x.y$ indica o produto interno em* $\mathbb{R}$ *entre os vetores* x *e* y.

1.2 Distribuições

Seja u uma função numérica e mensurável definida em Ω e seja $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω, tais que $u = 0$ quase sempre em K_i.

Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então,

$$u = 0 \text{ quase sempre em } K.$$

Como conseqüência, define-se o suporte de u, que será denotado por *supp* u, como sendo o subconjunto fechado de Ω, $supp\,(u) = \Omega / K$.

Definição 1.1. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$, cujas derivadas de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar .

Noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2. *Sejam $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$uma seqüência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

i) $\exists K \subset \Omega, K$ compacto, tal que supp$\varphi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

ii) Para cada $\alpha \in \mathrm{\mathbb{N}^n, D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)}$ uniformemente em Ω.

Definição 1.3. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $D(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4. *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $D(\Omega)$ e contínuo em relação à noção de convergência definida em $D(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $D'(\Omega)$.*

Desse modo, $D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{K}; \mathrm{T \text{ é linear e contínuo}}\}$. Observamos que $D'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $T \in D'(\Omega)$ e $\varphi \in D(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ o valor de T aplicado ao elemento φ.

Noção de convergência em $D'(\Omega)$

Definição 1.5. *Dizemos que* $T_k \to T$ *em* $D'(\Omega)$ *se* $< T_k, \varphi > \to < T, \varphi >$, *para toda* $\varphi \in D(\Omega)$.

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho, as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6. *Sejam* Ω *um conjunto mensurável e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Indicamos por* $L^p(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *tais que* $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ *onde*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}, \; se \; 1 \leqslant p < \infty,$$

e

$$\|f\|_\infty = \sup ess_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf \left\{C \in \mathbb{R}^+ / \mathrm{med}\{\mathrm{x} \in \Omega / |\mathrm{f(x)}| > \mathrm{C}\} = 0\right\}$$

$$= \inf \{C; |f| \leqslant C \; quase \; sempre\}.$$

Observação 1.2. *As funções* $\|.\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+, 1 \leqslant \mathrm{p} \leqslant \infty$, *são normas. Na verdade* $L^p(\Omega)$ *deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em* Ω.
Os espaços $L^p(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, *são espaços de Banach, sendo* $L^2(\Omega)$ *um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para* $1 < p < \infty, L^p(\Omega)$ *é reflexivo.*

Teorema 1.1. $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Teorema 1.2. (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. *Se* $f \in L^p(\Omega) \bigcap L^q(\Omega)$, *então* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $r \in [p, q]$. *Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$, *tal que* $\frac{1}{r} = \alpha\frac{1}{p} + (1-\alpha)\frac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7. *Sejam* Ω *um aberto do espaço* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leqslant p < \infty$. *Indicamos por* $L^p_{loc}(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *tais que* $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, *para todo* K *compacto de* Ω, *onde* χ_K *é a função característica de* K.

Observação 1.3. $L^p_{loc}(\Omega)$ *é chamado o espaço das funções localmente integráveis.*

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideramos o funcional $T = T_u : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por

$$< T, \varphi > = < T_u, \varphi > = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1. (Du Bois Reymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então,* $T_u = 0$ *se e somente se* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} L^p_{loc}(\Omega) & \to & D'(\Omega) \\ u & \mapsto & T(u) \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.1). Em decorrência disso, é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido, tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8. *Sejam* $T \in D'(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *A derivada de ordem* α *de* T, *denotada por* $D^\alpha T$, *é definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \text{ para toda } \varphi \in D(\Omega).$$

Como esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$, então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leqslant k$, onde D^α indica a derivada clássica de u. Se $T \in D'(\Omega)$, então $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathrm{n}}$.

1.4 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [3] e Kesavan [8].

Definição 1.9. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaços de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*
Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant m\}$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, p = \infty$$

definem uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.4. .

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}\right)$ *é um espaço de Banach .*

2. *Quando* $p = 2$, *o espaço de Sobolev* $W^{m,2}(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com produto interno dado por*

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^p(\Omega)} \, ; \; u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. *Denota-se* $W^{m,2}(\Omega)$ *por* $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ *é reflexivo e separável.*

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10. *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.5. .

1. *Quando* $p = 2$, *escreve-se* $H_0^m(\Omega)$ *em lugar de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. *Se* $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, *o complemento de* Ω *em* $\mathbb{R}^n$ *possui media de Lebesgue igual a zero.*

3. *Vale que* $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.11. *Suponha que* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $q > 1$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Os Espaços $H^s(\mathbb{R}^n), \mathrm{s} \in \mathbb{R}$

Definição 1.12. *Uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito, se é infinitamente diferenciável e*

$$p_k(f) = \sup_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^k |(D^\alpha f)(x)| < \infty, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito.

Considere o espaço vetorial $S(\mathbb{R}^n)$, no qual definimos a seguinte noção de convergência : uma seqüência $\{f_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ converge para zero, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a seqüência $\{p_k(f_v)\}_{v \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{K}$. A seqüência $\{f_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ converge para f em $S(\mathbb{R}^n)$ se $\{p_k(f_v - f)\}_{v \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As formas lineares definidas em $S(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $S(\mathbb{R}^n)$ são denominadas distribuições temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de seqüências será representado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.13. *Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotamos por $\widehat{f}$ a Transformada de Fourier de f dada por*

$$(\widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.y} f(y) dy.$$

Proposição 1.1. (Identidade de Plancherel) *Para toda função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem-se que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Proposição 1.2. *O espaço $H^m(\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}$ coincide com o conjunto*

$$\left\{u \in S'(\mathbb{R}^n); \mathrm{J_m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)}\right\}$$

onde J_m é a função dada por $J_m(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{m}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$. Além disso , a função $|\,\|.\|\,|_m : H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$|\,\|u\|\,|_m = \|J_m \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

é uma norma equivalente à norma de Sobolev.

A partir dessa proposição se define :

Definição 1.14. *Para $s \in (\mathbb{R}^+)$, indicamos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ o conjunto*

$$\left\{u \in S'(\mathbb{R}^n); \mathrm{J_m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)}\right\}$$

onde $J_s(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{s}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.3. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J_s \hat{u}, J_s \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

1.5 Imersões de Sobolev

Teorema 1.3. (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geqslant 1$ e $1 \leqslant p < \infty$.*

i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega),\ q \in [p, \infty)$;

iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

1.6 Desigualdades importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} .$$

Desigualdade de Young

Se $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

1.7 Operadores elíticos

Definição 1.15. *Um operador diferencial de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$ da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, x \in \Omega$$

é chamado operador elítico se existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geqslant C |\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 1.4. (Teorema de regularidade elítica)*Sejam L um operador diferencial elítico de ordem $2m, m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ e $u \in D'(\Omega)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$ então $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2].

1.8 Formas bilineares e o Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.16. *Seja H um espaço de Hilbert real . Um funcional $B : H \times H \to \mathbb{R}$ é chamado uma forma bilinear se $B(.,y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x,.)$ é linear para cada $x \in H$.*

B é dito limitado (contínuo) se existe uma constante $K > 0$, tal que

$$|B(x,y)| \leqslant K \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H.$$

B é dito coercivo se existe uma constante $\delta > 0$, tal que

$$B(x,u) \geqslant \delta \|x\|^2, \forall x \in H.$$

Teorema 1.5. (Lax-Milgram)*Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então, para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$, tal que*

$$B(x,u) = F(x), \forall x \in H.$$

A demonstração do teorema de Lax-Milgram pode ser encontrada em Brezis [3].

1.9 Semigrupos de operadores lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências, Brezis [3], Gomes [7] e Pazy [21].

Definição 1.17. *Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{L(X)}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se :*

I) $S(0) = I$, *onde* I *é operador identidade de* $L(X)$;

II) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S *é de classe* C_0 *se*

III) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \forall x \in X$.

Proposição 1.4. *Todo semigrupo de classe* C_0 *é contínuo em* $\mathbb{R}^+$, *isto é,*

$$\lim_{t\to 0^+} S(s)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

Definição 1.18. *Se* $\|S(t)\| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0, S$ *é dito semigrupo de contrações.*

Definição 1.19. *O operador* $A : D(A) \to X$ *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.5. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em* X.

Proposição 1.6. *Seja* S *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *seu gerador infinitesimal. Se* $x \in D(A)$, *então* $S(t)x \in D(A), \forall t \geqslant 0$ *e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 1.20. *Seja* S *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *seu gerador infinitesimal. Ponhamos* $A^0 = I, A^1 = A$ *e, supondo que* A^{k-1} *esteja definido, vamos definir* A^k *pondo*

$$D(A^k) = \left\{ x; x \in D(A^{k-1}) \text{ e } A^{k-1}x \in D(A) \right\}$$

e

$$A^k x = A(A^{k-1}x), \ \forall x \in D(A^k).$$

Proposição 1.7. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então,*

I) *$D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X.*

II) *Se $x \in D(A^k)$, então $S(t)x \in D(A^k), t \geqslant 0$ e*

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \forall k \in \mathbb{N};$$

III) *$\cap_k D(A^k)$ é denso em X.*

Lema 1.2. *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \left\| A^j x \right\| \tag{1.1}$$

o funcional $|.|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ e $(\mathcal{D}(A^k), |.|_k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.21. *A norma (1.1) é dita norma do gráfico . O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A^k)$ da norma (1.1) será representado por $[D(A^k)]$.*

Teorema Lumer-Phillips

Definição 1.22. *Seja A um operador linear de X . O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$. O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, representado por $R(\lambda, A)$, é dito resolvente de A.*

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle .,. \rangle$ a dualidade entre X e X^*.

Ponhamos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach,$J(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$.

Definição 1.23. *Uma aplicação dualidade é uma aplicação* $j : X \to X^*$ *tal que* $j(x) \in J(x), \forall x \in X$. *Imediatamente se vê que* $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.24. *Diz-se que o operador linear* $A : X \to X$ *é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade* j*,*

$$Re\,\langle Ax, j(x)\rangle \leqslant 0, \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.6. (Lumer-Phillips). *Se* A *é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0*, então*

i) A *é dissipativo;*

ii) $R(\lambda - A) = X,\ \lambda > 0\ \ (R(\lambda - A) =$ *imagen de* $\lambda I - A \equiv \lambda I - A)$.

Reciprocamente, se

i) $D(A)$ *é denso em* X*;*

ii) A *é dissipativo ;*

iii) $R(\lambda_0 - A) = X$*, para algum* $\lambda_0 > 0$,

então A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t, u(t));\ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $T(t)$; $t \geqslant 0$ sobre um espaço de Banach H e $f : [0, T] \times H \to H$ é uma função contínua em t e satisfaz uma condição de Lipschitz em u. Seja $Y = (\mathcal{D}(A); |.|_A)$ onde para $x \in A$, $|x|_A = \|x\|_H + \|Ax\|_H$. Prova-se que $T(t)$; $t \geqslant 0$ é um semigrupo C_0 sobre Y. Com as considerações acima temos que vale o resultado:

Teorema 1.7. *Seja $f : [0,T] \times Y \to Y$ uma função localmente Lipschitziana contínua em Y, uniformemente em $[0,T]$. Então, se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ o problema de valor inicial (1.2) possui uma única solução forte sobre o intervalo maximal $[0, t_{max})$ e se $t_{max} < T$ então*

$$\lim_{t \to t_{max}} (\|u(t)\|_H + \|Au(t)\|_H) = +\infty. \tag{1.3}$$

A demonstração dos fatos acima podem ser encontrados em A. Pazy [21].

Equação de Sobolev

Equações do tipo

$$Au'(t) = Bu(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.4}$$

são chamadas equações de Sobolev.

Teorema 1.8. *Sejam B m-dissipativo e A positivo e auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Suponha que $0 \in \rho(A)$ e $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ ou $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B)$. Então, o problema de Cauchy associado a (1.4) é bem-posto e é governado por um semigrupo de contrações de classe C_o no espaço de Hilbert $\mathcal{K} = \mathcal{D}(A^{1/2})$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em A. Goldstein [6].

Capítulo 2

Existência e Unicidade

Antes de iniciar a demonstração dos resultados, vamos definir o que entendemos por solução.

Definição 2.1. *Dizemos que $\{u, \theta\}$ é solução forte do sistema (1) se está na classe*

$$\{u, \theta\} \in C\left([0,T]; H^4 \times H^2\right) \cap C^1\left([0,T]; H^2 \times L^2\right), \forall\, T > 0,$$

e satisfaz o sistema quase sempre.

A existência e unicidade de soluções do problema (1) será obtida combinando a Teoria de Semigrupos e estimativas a priori. Por isso, inicialmente fazemos a mudança de variável $u_t = v$ e reescrevemos o modelo (1) como um sitema de primeira ordem em t:

$$\begin{cases} u_t = v \\ (I - \Delta)\, v_t = (-I - \Delta^2)\, u + (I - \Delta)\, \theta + M\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u \\ \theta_t = (-I + \Delta)\, v + (-I + \Delta)\, \theta. \end{cases}$$

O sistema acima pode ser representado pelo seguinte modelo de primeira ordem

$$A\frac{d}{dt}U = BU + \widetilde{N}U \tag{2.1}$$

onde

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \\ v(t) \\ \\ \theta(t) \end{pmatrix}, \ \widetilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \\ N & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com N dada por

$$N(u) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right) \Delta u,$$

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \\ 0 & I - \Delta & 0 \\ \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \\ -I - \Delta^2 & 0 & I - \Delta \\ \\ 0 & -I + \Delta & -I + \Delta \end{pmatrix}.$$

Introduzimos agora os espaços de Hilbert $\mathcal{H} = H^2 \times L^2 \times L^2$ e

$\mathcal{K} = H^2 \times H^1 \times L^2$ com os respectivos produtos internos

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ \\ v \\ \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \\ \tilde{v} \\ \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = (u, \tilde{u})_{H^2} + (v, \tilde{v}) + (\theta, \tilde{\theta})$$

e

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ \\ v \\ \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \\ \tilde{v} \\ \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{K}} = (u, \tilde{u})_{H^2} + (v, \tilde{v})_{H^1} + (\theta, \tilde{\theta})$$

onde (.,.) denota o produto interno em L^2. Os dominios de A e B são dados, respectivamente, por

$$\mathcal{D}(A) = H^2 \times H^2 \times L^2 \ \ e \ \ \mathcal{D}(B) = H^4 \times H^2 \times H^2.$$

Observe que $\mathcal{K} = \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Com as notações acima, provamos agora o principal resultado desse capítulo:

Teorema 2.1. *A parte linear de (2.1), $A\frac{d}{dt}(U) = BU$, com A e B dados acima, é gerador de um semigrupo de classe C_0 em $\mathcal{K}$.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.8 [6], é suficiente provar que A é um operador positivo e auto-adjunto sobre $\mathcal{H}$, $0 \in \rho(A)$, $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B)$ e que B é um operador m-dissipativo sobre $\mathcal{H}$. Aqui,

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \text{ é um operador linear limitado em } \mathcal{H} \right\}$$

onde I é o operador identidade sobre $\mathcal{H}$.

A demonstração dos fatos acima será feita em vários passos.

(i) $0 \in \rho(A)$.

Sejam $U = [u, v, \theta], V = [\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}] \in \mathcal{D}(A)$, tais que $AU = AV$ onde

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

foi definido anteriormente. Então,

$$\begin{aligned} &u = \widetilde{u} \\ &(I - \Delta)v = (I - \Delta)\widetilde{v} \\ &\theta = \widetilde{\theta}. \end{aligned}$$

Daí, $u = \widetilde{u}, v = \widetilde{v}$ e $\theta = \widetilde{\theta}$, o que mostra que A é injetiva e, portanto, existe A^{-1}.

Além disso,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (I - \Delta)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad e \quad A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ (I - \Delta)^{-1} v \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, para $[u, v, \theta] \in \mathcal{H}$, pela imersão contínua $H^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e pela identidade

$$\left\| (I - \Delta)^{-1} \theta \right\|_{H^2}^2 = \|\theta\|_{L^2}^2, \ \forall \theta \in L^2,$$

temos que

$$\left\|A^{-1}(u,v,\theta)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{H^2}^2 + \left\|(I-\Delta)^{-1} v\right\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant \|u\|_{H^2}^2 + \left\|(I-\Delta)^{-1} v\right\|_{H^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2$$

$$= \|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 .$$

Assim, A^{-1} é um operador linear limitado em $\mathcal{H}$; ou seja; $0 \in \rho(A)$.

(ii) A é positivo.

Seja $U = [u, v, \theta] \in \mathcal{D}(A)$. Então,

$$\begin{aligned}
(AU, U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} u \\ v - \Delta v \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (u,u)_{H^2} + (v - \Delta v, v) + (\theta, \theta) \\
&= (u,u)_{H^2} + (v,v) - (\Delta v, v) + (\theta, \theta) \\
&= \|u\|_{H^2}^2 + (v,v) + (\nabla v, \nabla v) + (\theta, \theta) \\
&= \|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

o que mostra que A é um operador positivo sobre $\mathcal{H}$.

(iii) A é auto-adjunto .

Basta observar que

$$
\begin{aligned}
(AU,V)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} u \\ v-\Delta v \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ \widetilde{\theta} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (u,\widetilde{u})_{H^2} + (v-\Delta v,\widetilde{v}) + (\theta,\widetilde{\theta}) \\
&= (u,\widetilde{u})_{H^2} + (v,\widetilde{v}) - (\Delta v,\widetilde{v}) + (\theta,\widetilde{\theta}) \\
&= (u,\widetilde{u})_{H^2} + (v,\widetilde{v}) - (v,\Delta\widetilde{v}) + (\theta,\widetilde{\theta}) \\
&= (U,AV)_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

para todo $U=[u,v,\theta]$ e $V=[\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{\theta}]\in\mathcal{D}(A)$.

(iv) B é m-dissipativo.

Para todo $U=[u,v,\theta]\in\mathcal{D}(B)$, temos

$$
(BU,U)_{\mathcal{H}} = \left(\begin{bmatrix} v \\ -u-\Delta^2 u+\theta-\Delta\theta \\ -v+\Delta v-\theta+\Delta\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (v,u)_{H^2} + (-u-\Delta^2 u+\theta-\Delta\theta, v) + (-v+\Delta v-\theta+\Delta\theta,\theta) \\
&= (v,u)_{H^2} - (u,v) - (\Delta^2 u,v) + (\theta,v) - (\Delta\theta,v) - (v,\theta) + (\Delta v,\theta) \\
&\quad -(\theta,\theta) + (\Delta\theta,\theta) \\
&= (v,u) + (\Delta v,\Delta u) - (u,v) - (\Delta^2 u,v) + (\theta,v) - (\Delta\theta,v) - (v,\theta) \\
&\quad +(\Delta v,\theta) - (\theta,\theta) + (\Delta\theta,\theta) \\
&= (v,u) + (\Delta v,\Delta u) - (u,v) - (\Delta u,\Delta v) + (\theta,v) - (\Delta\theta,v) - (v,\theta) \\
&\quad +(v,\Delta\theta) - (\theta,\theta) + (\Delta\theta,\theta) \\
&= -(\theta,\theta) + (\Delta\theta,\theta) = -\|\theta\|_{L^2}^2 - (\nabla\theta,\nabla\theta) = -\|\theta\|_{L^2}^2 - \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Assim, B é um operador dissipativo sobre $\mathcal{H}$. Agora, provaremos que dado

$[f, g, h] \in \mathcal{H}$, existe um elemento $[u, v, \theta] \in \mathcal{D}(B)$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) implica que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -I - \Delta^2 & 0 & I - \Delta \\ 0 & -I + \Delta & -I + \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix};$$

ou então,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ -u - \Delta^2 u + \theta - \Delta\theta \\ -v + \Delta v - \theta + \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

donde concluímos que

$$\begin{cases} u - v = f \\ v + u + \Delta^2 u - \theta + \Delta\theta = g \\ \theta + v - \Delta v + \theta - \Delta\theta = h. \end{cases}$$

Substituindo $v = u - f$ na segunda e na terceira equação, temos

$$\begin{cases} u - f + u + \Delta^2 u - \theta + \Delta\theta = g \\ \theta + u - f - \Delta(u - f) + \theta - \Delta\theta = h \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2u + \Delta^2 u - \theta + \Delta\theta = f + g \\ 2\theta + u - \Delta u - \Delta\theta = f - \Delta f + h. \end{cases}$$

Assim, resolver (2.2) é equivalente a resolver o sistema acima, o que será feito utilizando o Lema de Lax-Milgram.

Multiplicando a primeira equação por $w \in C_0^\infty$, a segunda por $\tau \in C_0^\infty$ e integrando (formalmente) em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} 2uw + \Delta u \Delta w - \theta w + \theta \Delta w dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) w dx \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} 2\theta\tau + u\tau - \Delta u.\tau + \nabla\theta.\nabla\tau dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f - \Delta f + h)\tau dx \end{cases}$$

Logo, considerando a forma bilinear

$$a : \left[H^2 \times H^1\right]^2 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ \tau \end{bmatrix}\right) &= 2(u,w) + (\Delta u, \Delta w) - (\theta, w) + (\theta, \Delta w) \\ &\quad +2(\theta,\tau) + (u,\tau) - (\Delta u, \tau) + (\nabla\theta, \nabla\tau), \end{aligned}$$

e a forma linear

$$\begin{aligned} T : H^2 \times H^1 &\to \mathbb{R} \\ (w,\tau) &\to T([w,\tau]) \end{aligned}$$

onde

$$T([w,\tau]) = \int_{\mathbb{R}^n} (f+g) w dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f - \Delta f)\tau dx + \int_{\mathbb{R}^n} h\tau dx,$$

o sistema acima pode ser escrito como

$$a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ \tau \end{bmatrix}\right) = T(w,\tau).$$

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\left| a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ \tau \end{bmatrix} \right) \right| &\leqslant 2\left|(u,w)\right| + \left|(\Delta u, \Delta w)\right| + \left|(\theta, w)\right| \\
&\quad + \left|(\theta, \Delta w)\right| + 2\left|(\theta,\tau)\right| + \left|(u,\tau)\right| \\
&\quad + \left|(\Delta u, \tau)\right| + \left|(\nabla\theta, \nabla\tau)\right| \\
&\leqslant 2\left\|u\right\|\left\|w\right\| + \left\|\Delta u\right\|\left\|\Delta w\right\| + \left\|\theta\right\|\left\|w\right\| \\
&\quad + \left\|\theta\right\|\left\|\Delta w\right\| + 2\left\|\theta\right\|\left\|\tau\right\| \\
&\quad + \left\|u\right\|\left\|\tau\right\| + \left\|\Delta u\right\|\left\|\tau\right\| + \left\|\nabla\theta\right\|\left\|\nabla\tau\right\| \\
&\leqslant 2(\left\|u\right\| + \left\|\Delta u\right\| + \left\|\theta\right\| + \left\|\nabla\theta\right\|) \\
&\quad (\left\|w\right\| + \left\|\Delta w\right\| + \left\|\tau\right\| + \left\|\nabla\tau\right\|) \\
&= 2(\left\|u\right\|_{H^2} + \left\|\theta\right\|_{H^1})(\left\|w\right\|_{H^2} + \left\|\tau\right\|_{H^1})
\end{aligned}
$$

o que mostra que $a(.,.)$ é contínua. Além disso,

$$
\begin{aligned}
a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \right) &= 2(u,u) + (\Delta u, \Delta u) - (\theta, u) + (\theta, \Delta u) \\
&\quad +2(\theta,\theta) + (u,\theta) - (\Delta u, \theta) + (\nabla\theta, \nabla\theta) \\
&= 2\left\|u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\Delta u\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|\theta\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\theta\right\|_{L^2}^2 \\
&\geqslant \left\|u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\Delta u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\theta\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\theta\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\|u\right\|_{H^2}^2 + \left\|\theta\right\|_{H^1}^2
\end{aligned}
$$

o que mostra que $a(.,.)$ é coerciva.

Com relação à forma linear T, temos que para todo $[w,\tau] \in H^2 \times H^1$

$$
\begin{aligned}
\left|\langle T, [w,\tau]\rangle\right| &\leqslant \left\|f+g\right\|_{L^2}\left\|w\right\|_{L^2} + (\left\|f\right\|_{L^2} + \left\|\Delta f\right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\|h\right\|_{L^2})\left\|\tau\right\|_{L^2} \leqslant C\left(\left\|w\right\|_{L^2} + \left\|\tau\right\|_{L^2}\right)
\end{aligned}
$$

onde

$$C = max\left\{\|f+g\|_{L^2}, \|f\|_{L^2} + \|\Delta f\|_{L^2} + \|h\|_{L^2}\right\} < \infty$$

pois $f \in H^2, g \in L^2$ e $h \in L^2$.

Os fatos acima e o Teorema de Lax-Milgram nos garantem que existe um único par $[u, \theta] \in H^2 \times H^1$, solução de

$$a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ \tau \end{bmatrix}\right) = (f+g, w) + (f, \tau) - (\Delta f, \tau) + (h, \tau) \tag{2.3}$$

para todo $[w, \tau] \in H^2 \times H^1$.

Tomando $w = 0$ em (2.3), temos

$$2(\theta, \tau) + (u, \tau) - (\Delta u, \tau) + (\nabla\theta, \nabla\tau) = (f, \tau) - (\Delta f, \tau) + (h, \tau), \ \forall \tau \in H^1$$

que implica que θ é solução da equação

$$2\theta - \Delta\theta = f - \Delta f + h - u + \Delta u \text{ em } D'(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}).$$

Daí, $\Delta\theta = 2\theta - f + \Delta f - h + u - \Delta u \in L^2(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$; ou seja; $\theta \in H^2$.

Agora, tomando $\tau = 0$ em (2.3), temos

$$2(u, w) + (\Delta u, \Delta w) - (\theta, w) + (\theta, \Delta w) = (f+g, w), \forall w \in H^2(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}).$$

que implica que u é solução da equação

$$2u + \Delta^2 u = f + g + \theta - \Delta\theta \text{ em } D'(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}).$$

Daí, $\Delta^2 u = f + g + \theta - \Delta\theta - 2u \in L^2(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$; ou seja; $u \in H^4(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$.

Combinando os fatos acima concluímos que (2.2) se verifica, finalizando assim a demonstração do Teorema 2.1 $\blacksquare$

O próximo resultado também será útil na obtenção do resultado de existência e unicidade:

Lema 2.1. *Sejam $N = N(u)$ definida anteriormente e M satisfazendo* (2). *Então, $N : H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma função localmente Lipschitziana.*

Demonstração: Sejam $u, v \in H^2$, tal que $\|u\|_{H^2} \leqslant C_1$ e $\|v\|_{H^2} \leqslant C_1$, onde $C_1 > 0$.

Pelo teorema de Plancherel,

$$\|N(u) - N(v)\|^2{}_{L^2} = \left\|\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)\right\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)\right|^2 d\xi$$

onde $\widehat{N}$ é a transformada de Fourier de N e $\xi = (\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Como $M \in C^1(R^+)$, o Teorema de Valor Médio e a desigualdade triangular nos garantem que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)\right| &= \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\widehat{u} + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{v}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\widehat{v}\right| \\
&= \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\widehat{u} + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\widehat{v}\right. \\
&\quad \left. -M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\,\widehat{v} + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{v}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\,\widehat{v}\right| \\
&\leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)\left|-|\xi|^2\,\widehat{u} + |\xi|^2\widehat{v}\right| \\
&\quad + \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{v}|^2 d\xi\right)\right| |\xi|^2 |\widehat{v}| \\
&\leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2 |\widehat{u} - \widehat{v}| \\
&\quad + \max_{0 \leqslant s \leqslant C_1} |M'(s)| \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 - |\xi|^2 |\ \widehat{v}|^2\right) d\xi\right| |\xi|^2 |\ \widehat{v}|.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e a desigualdade triangular obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2 |\ \widehat{u}|^2 - |\xi|^2 |\ \widehat{v}|^2\right) d\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi| |\ \widehat{u}| + |\xi| |\ \widehat{v}|)(|\xi| |\ \widehat{u}| - |\xi| |\ \widehat{v}|) d\xi\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|\,|\,\widehat{u}| + |\xi|\,|\,\widehat{v}|\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|\,|\,\widehat{u}| - |\xi|\,|\,\widehat{v}|\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|\,|\,\widehat{u}| + |\xi|\,|\,\widehat{v}|\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} 2\left(|\xi|^2\,|\,\widehat{u}|^2 + |\xi|^2\,|\,\widehat{v}|^2\right) d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{2}\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2\,|\,\widehat{u}|^2\, d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2\,|\,\widehat{v}|^2\, d\xi\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{2}\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 |\widehat{u}|^2\, d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 |\widehat{v}|^2\, d\xi\right)^{1/2}\right\} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{2}\left(\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\right)\|u-v\|_{H^2} \leqslant \sqrt{2}\left(C_1 + C_1\right)\|u-v\|_{H^2} \\
&= 2\sqrt{2}C_1\,\|u-v\|_{H^2}\,.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\|N(u) - N(v)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)\right|^2 d\xi \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg(M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\,\widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\left|\widehat{u} - \widehat{u}\right| \\
&\quad + \max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)|\, 2\sqrt{2}C_1\,\|u-v\|_{H^2}\,|\xi|^2\,|\,\widehat{v}|\Bigg)^2 d\xi \\
&\leqslant 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi \\
&\quad +16C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)|\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4\,|\widehat{v}|^2\, d\xi \\
&\leqslant 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 \left|\widehat{u} - \widehat{v}\right|^2 d\xi \\
&\quad +16C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)|\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^2 |\widehat{v}|^2\, d\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 \\
&\quad +16C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)|\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 \|v\|_{H^2}^2 \\
&\leqslant 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 \\
&\quad +16C_1^4\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)|\right)^2 \|u-v\|_{H^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\|N(u)-N(v)\|_{L^2} &\leqslant \sqrt{2}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)\|u-v\|_{H^2} \\
&\quad +4C_1^2 \max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\,\|u-v\|_{H^2} .
\end{aligned}
$$

Denotando

$$
C_2=\max\left\{\sqrt{2}\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\,,4\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\right\}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\|N(u)-N(v)\|_{L^2} &\leqslant C_2\|u-v\|_{H^2}+{C_1}^2C_2\|u-v\|_{H^2} \\
&= C_2\left(1+{C_1}^2\right)\|u-v\|_{H^2}=C_3\|u-v\|_{H^2}
\end{aligned}
$$

onde $C_3=C_2\left(1+{C_1}^2\right)$, o que completa a demonstração de Lema 2.1. ■

Observação 2.1. *A aplicação* $N: H^m(\mathbb{R}^n)\rightarrow H^{m-2}(\mathbb{R}^n), m\in N, m\geqslant 2$ *é localmente Lipschitziana .*

De fato, se $s,s'\in\mathbb{R}, s\geqslant s'$, então $H^s(\mathbb{R}^2)\subset H^{s'}(\mathbb{R}^2)$. Alem disso, essa imersão é contínua e densa. Logo, existe $C_3>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
\|N(u)-N(v)\|_{H^{m-2}} &\leqslant \|N(u)-N(v)\|_{L^2}\leqslant C_3\|u-v\|_{H^2} \\
&\leqslant C_3\|u-v\|_{H^m}\,,\ m\in N, m\geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, N é uma função localmente Lipschitziana.

A seguir, utilizando o Teorema 1.7 do Capítulo 1, provaremos o resultado de solução local para o modelo (1):

Lema 2.2. *(Solução Local)Sejam A, B e $\tilde{N}$ dados no Teorema 2.1, onde M satisfaz* (2). *Então, se $\{u_0, u_1, \theta_o\} = U_o \in H^4 \times H^2 \times H^2$ existe uma única $U(t) = \{u(t), v(t), \theta(t)\}$ e $T_0 > 0$, tal que*

$$U \in C\left([0, T_0); H^4 \times H^2 \times H^2\right) \cap C^1\left([0, T_0); H^2 \times H^1 \times L^2\right)$$

e $U(t)$ satisfaz (2.1).

Demonstração: Segue do Teorema 2.1 que $A^{-1}B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ de classe C_0 em $H^4 \times H^2 \times H^2$. Além disso, $A^{-1} : H^4 \times L^2 \times H^2 \to H^4 \times H^2 \times H^2$ é uma isometria. De fato, se $U = [u, v, \theta], V = \left[\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\theta}\right] \in H^4 \times L^2 \times H^2$

$$\begin{aligned}
\left\|A^{-1}U - A^{-1}V\right\|^2_{H^4 \times H^2 \times H^2} &= \left\|A^{-1}(U - V)\right\|^2 \\
&= \|u - \widetilde{u}\|^2_{H^4} + \left\|(I - \Delta)^{-1}(v - \widetilde{v})\right\|^2_{H^2} \\
&\quad + \left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|^2_{H^2} \\
&= \|u - \widetilde{u}\|^2_{H^4} + \|v - \widetilde{v}\|^2_{L^2} + \left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|^2_{H^2} \\
&= \|U - V\|^2_{H^4 \times L^2 \times H^2}.
\end{aligned}$$

Assim, segue do Lema 2.1 que a aplicação $f : [0, \infty] \times H^4 \times H^2 \times H^2 \to H^4 \times H^2 \times H^2$ definida por $f(t, U) = A^{-1}\widetilde{N}U$ é localmente Lipschitziana:

$$
\begin{aligned}
\|f(t,U)-f(t,V)\|_{H^4\times H^2\times H^2} &= \left\|A^{-1}\widetilde{N}U - A^{-1}\widetilde{N}V\right\|_{H^4\times H^2\times H^2} \\
&= \left\|A^{-1}\left(\widetilde{N}U - \widetilde{N}V\right)\right\|_{H^4\times H^2\times H^2} \\
&= \left\|\widetilde{N}U - \widetilde{N}V\right\|_{H^4\times L^2\times H^2} \\
&= \|N(u)-N(\widetilde{u})\|_{L^2} \leqslant C_3\,\|u-\widetilde{u}\|_{H^2}\,;
\end{aligned}
$$

ou seja;

$$\|f(t,U)-f(t,V)\|_{H^4\times H^2\times H^2} \leqslant C_3\,\|U-V\|_{H^4\times H^2\times H^2}$$

onde C_3 é uma constante positiva. O resultado segue do Teorema 1.4 de [21]. ■

Lema 2.3. *Sejam A, B e $\tilde{N}$ definidos no Teorema 2.1, onde M satisfaz* (2)*. Então, se $\{u_0,u_1,\theta_0\} = U_0 \in H^4\times H^3\times H^2$, existe uma única $U(t) = \{u(t),v(t),\theta(t)\}$ e $T_0>0$, tal que*

$$U\in C\left([0,T_0);H^4\times H^3\times H^2\right)\cap C^1\left([0,T_0);H^2\times H^1\times L^2\right)$$

e $U(t)$ satisfaz (2.1).

Demonstração: Empregamos os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 2.1 considerando $\mathcal{D}(A) = H^4\times H^4\times H^2$ e $\mathcal{D}(B) = H^6\times H^4\times H^2$. Como $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^4\times H^3\times H^2$, obtemos que a parte linear de (2.1) é governada por um semigrupo de classe C_0 em $H^4\times H^3\times H^2$. Usando este fato e a observação 2.1 temos que a solução local de (2.1) obtida no Lema 2.2 satisfaz $U\in C\left([0,T_0);H^4\times H^3\times H^2\right)\cap C^1\left([0,T_0);H^2\times H^1\times L^2\right)$ sempre que $U_0\in H^4\times H^3\times H^2$. ■

Teorema 2.2. *(Solução Global) Assumamos que M satisfaz* (2)*. Se $\{u_0,u_1,\theta_\theta\}\in H^4\times H^3\times H^2$, então* (1) *admite uma única solução forte $\{u,u_t,\theta\}$ satisfazendo $U\in C\left([0,T];H^4\times H^3\times H^2\right)\cap C^1\left([0,T];H^2\times H^1\times L^2\right), \forall\, T>0$.*

Demonstração: O Lema 2.3 nos garante que existe um par de funções $\{u, \theta\}$, tal que $u \in H^4, u_t \in H^3, u_{tt} \in H^1, \theta \in H^2$ e $\theta_t \in L^2$, solução de (1) em $[0, T_0)$ para algum $T_0 > 0$. Pelo Lema de Zorn podemos assumir que $T_0 = T_{max}$; isto é; que temos existência local no intervalo maximal de existência. Falta mostrar que $T_{max} = +\infty$. Suponha (por contradição) que $T_{max} < +\infty$ e seja $0 \leqslant t < T_{max}$. Então, para mostrar a existência global basta provar que a solução local $\{u, u_t, \theta\}$ de (1) permanece limitada em $0 \leqslant t < T_{max}$ por uma constante positiva (que depende de T_{max}) na norma do espaço $H^4 \times H^3 \times H^2$.

Segue da lei de dissipação de energia (4) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_t^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2 + u^2 + \theta^2\right)dx + \widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx\right)\right\}$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_t^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2 + u^2 + \theta^2\right)dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx\right) \leqslant E(0) \qquad (2.4)$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \geqslant 0.$$

A estimativa (2.4) nos garante que

$$\|u\|_{H^2}^2 \leqslant 2E(0), \|u_t\|_{H^1}^2 \leqslant 2E(0), \|\theta\|^2 \leqslant 2E(0). \qquad (2.5)$$

Para obter as demais estimativas, aplicaremos a transformada de Fourier em (1):

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + |\xi|^2\,\widehat{u}_{tt} + |\xi|^4\widehat{u} + \widehat{u} + M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2\widehat{u} - \widehat{\theta} - |\xi|^2\widehat{\theta} = 0 \\ \widehat{\theta}_t + \widehat{\theta} + |\xi|^2\widehat{\theta} + \widehat{u}_t + |\xi|^2\widehat{u}_t = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primera equação por $\overline{\widehat{u_t}}$, a segunda por $\overline{\widehat{\theta}}$, tomando a parte real e somando as identidades, tem-se que

$$
\begin{aligned}
Re \quad & \Big\{ \left(1+|\xi|^2\right) \widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u_t}} + \left(1+|\xi|^4\right) \widehat{u}\overline{\widehat{u_t}} + \widehat{\theta}_t\overline{\widehat{\theta}} \\
& + \left(1+|\xi|^2\right) |\widehat{\theta}|^2 + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2 \widehat{u}\overline{\widehat{u}} \Big\} = 0.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left\{ M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2|\widehat{u}|^2 \right\} \\
& \quad = M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) \frac{d}{dt}\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi \right\} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\
& \quad\quad + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2 2\widehat{u}\overline{\widehat{u_t}}
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \left(1+|\xi|^2\right) |\widehat{u}_t|^2 + \left(1+|\xi|^4\right) |\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2 + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2|\widehat{u}|^2 \right\} \\
& = Re\left[M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \widehat{u}\overline{\widehat{u_t}} d\xi\right) |\xi|^2|\widehat{u}|^2 - (1+|\xi|^2)\, |\widehat{\theta}|^2 \right].
\end{aligned}
$$

Multiplicando a identidade acima por $|\xi|^4$ segue que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2}|\xi|^4 \left(\left(1+|\xi|^2\right) |\widehat{u}_t|^2 + \left(1+|\xi|^4\right) |\widehat{u}|^2 + q(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2 \right) \right\} \\
& \quad = p(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\xi}|^2 Re\left\{ \widehat{u}\overline{\widehat{u_t}} \right\} d\xi\right) |\xi|^6|\widehat{u}|^2 - |\xi|^4 \left(1+|\xi|^2\right) |\widehat{\theta}|^2
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

onde

$$
q(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) \quad e \quad p(t) = M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right).
$$

Denotamos por

$$
\varsigma(\xi,t) = \frac{1}{2}|\xi|^4 \left(\left(1+|\xi|^2\right) |\widehat{u}_t|^2 + \left(1+|\xi|^4\right) |\widehat{u}|^2 + q(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2 \right)
$$

o lado direito da igualdade acima. Se mostrarmos que

$$
\frac{d}{dt}\varsigma(\xi,t) \leqslant \varsigma(\xi,0)e^{ct}, c > 0,
$$

concluimos as estimativas a priori. De fato, combinando (2.5) e o fato de que $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$, segue que

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right) \leqslant C,\ M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right) \leqslant C,\ C>0.$$

Logo, pelas desigualdades de Hölder e Gronwall e por (2.5)-(2.6) obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{\zeta(\xi,t)\} &\leqslant p(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\xi}|^2 Re\left\{\widehat{u}\overline{\widehat{u}_t}\right\} d\xi\right)|\xi|^6|\widehat{u}|^2 - |\xi|^4|\widehat{\theta}|^2\\
&\leqslant p(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2\,|\widehat{u}|\,|\widehat{u}_t|\, d\xi\right)|\xi|^6|\widehat{u}|^2 + |\xi|^4|\widehat{\theta}|^2\\
&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|_t^2 d\xi\right)^{1/2} |\xi|^6|\widehat{u}|^2 + |\xi|^4|\widehat{\theta}|^2\\
&\leqslant C\sqrt{2E(0)}\sqrt{2E(0)}|\xi|^6|\widehat{u}|^2 + |\xi|^4|\widehat{\theta}|^2\\
&\leqslant K|\xi|^4\left(|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2\right)\\
&\leqslant K|\xi|^4\left\{(1+|\xi|^2)\,|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}\left(1+|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 + q(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2\right\}\\
&\leqslant K|\xi|^4\left\{(1+|\xi|^2)\,|\widehat{u}_t|^2 + (1+|\xi|^4)\,|\widehat{u}|^2 + q(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{d}{dt}\{\zeta(\xi,t)\} \leqslant K\zeta(\xi,t)$ onde $K = max\{2CE(0),1\}; t\in[0,T_{max}]$. Portanto,

$$\zeta(\xi,t) \leqslant \zeta(\xi,0)e^{KT_{max}}. \tag{2.7}$$

Integrando a desigualdade anterior sobre $\mathbb{R}^n$ segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|\xi|^4\left\{\left(1+|\xi|^2\right)|\widehat{u}_t|^2 + \left(1+|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 + q(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2\right\} d\xi\\
&\leqslant e^{KT_{max}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|\xi|^4\left\{\left(1+|\xi|^2\right)|\widehat{u}_t(\xi,0)|^2 + \left(1+|\xi|^4\right)|\widehat{u}(\xi,0)|^2\right.\\
&\quad \left. + q(t)|\xi|^2\,|\widehat{u}(\xi,0)|^2 + |\widehat{\theta}(\xi,0)|^2\right\} d\xi\\
&\leqslant e^{KT_{max}}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^3|\widehat{u}_t(\xi,0)|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^4|\widehat{u}(\xi,0)|^2\\
&\quad + q(t)\,(1+|\xi|^2)^4\,|\widehat{u}(\xi,0)|^2 + (1+|\xi|^2)^2\,|\widehat{\theta}(\xi,0)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Como $\{u_0,u_1,\theta_0\} \in H^4\times H^3\times H^2$, obtemos a existência de uma constante

$C = C(T_{max})$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left(1 + |\xi|^2\right) |\widehat{u}_t|^2 d\xi \leqslant C(T_{max}) \\ &\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^8 |\widehat{u}|^2 d\xi \leqslant C(T_{max}) \\ &\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{\theta}|^2 d\xi \leqslant C(T_{max}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, o Teorema de Plancherel nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{D^2 u_t}\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{D^3 u_t}\right|^2 d\xi \leqslant C(T_{max});$$

ou seja;

$$\left\|D^2 u_t\right\|_{L^2}^2 \leqslant C(T_{max}) \text{ e } \left\|D^3 u_t\right\|_{L^2}^2 \leqslant C(T_{max}).$$

Combinando as estimativas acima com a identidade de energia, concluimos que

$$u_t \in L^\infty\left(0, T, H^3\right), \forall T > 0.$$

Retornando a (2.8) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^8 |\widehat{u}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |D^4 u|^2 dx \leqslant C(T_{max})$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{\theta}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 \theta|^2 dx \leqslant C(T_{max}).$$

As desigualdades acima e a identidade de energia nos permite concluir que $u \in L^\infty\left(0, T, H^4\right)$ e $\theta \in L^\infty\left(0, T, H^2\right)$, $\forall T > 0$, o que completa a prova da Existência Global.

Resta mostrar a unicidade. Para isso, suponhamos que (1) tenha duas soluções $\{u, u_t, \theta\}$ *e* $\{\widetilde{u}, \widetilde{u}_t, \widetilde{\theta}\}$ com os mesmos dados iniciais no tempo $t = 0$, isto é,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + u - M\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u - \theta + \Delta\theta = 0 \\ \theta_t + \theta - \Delta\theta + u_t - \Delta u_t = 0 \\ u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x); \theta(x,0) = \theta_0(x) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u}_{tt} + \Delta^2\widetilde{u} + \widetilde{u} - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\widetilde{u}|^2\right)\Delta\widetilde{u} - \widetilde{\theta} + \Delta\widetilde{\theta} = 0 \\
\widetilde{\theta}_t + \widetilde{\theta} - \Delta\widetilde{\theta} + \widetilde{u}_t - \Delta\widetilde{u}_t = 0 \\
\widetilde{u}(x,0) = u_0(x); \widetilde{u}_t(x,0) = u_1(x); \widetilde{\theta}(x,0) = \theta_0(x).
\end{cases}
$$

Então, a diferença $w = u - \widetilde{u}$ e $z = \theta - \widetilde{\theta}$ satisfaz

$$
\begin{cases}
w_{tt} - \Delta w_{tt} + \Delta^2 w + w - z + \Delta z = r(t)\Delta u - s(t)\Delta\widetilde{u} \\
z_t + z - \Delta z + w_t - \Delta w_t = 0 \\
w(x,0) = 0; w_t(x,0) = 0; z(x,0) = 0
\end{cases} \tag{2.9}
$$

onde $r(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right)$ e $s(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\widetilde{u}|^2\, dx\right)$.

Multiplicando a primeira equação de (2.9) por w_t, a segunda por z, somando e integrando em $\mathbb{R}^n$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(w_{tt}w_t - \Delta w_{tt}w_t + \Delta^2 w w_t + w w_t - z w_t + \Delta z w_t\right) dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} r(t)\left(\Delta u w_t\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} s(t)\left(\Delta\widetilde{u} w_t\right) dx \\
&\int_{\mathbb{R}^n} z_t z + z^2 - \Delta z z + w_t z - \Delta w_t z dx = 0.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left(w_t^2 + |\nabla w_t|^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + z^2\right) dx\right\} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} z^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla z|^2\, dx + r(t)\left(\Delta u, w_t\right) - s(t)\left(\Delta\widetilde{u}, w_t\right) \\
&\leqslant r(t)\left(\Delta u, w_t\right) - s(t)\left(\Delta\widetilde{u}, w_t\right).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Agora, observe que de (4) $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \leqslant E(0), \forall t \geqslant 0$. Como $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$, temos que $M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right) \leqslant C$, e $M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right) \leqslant C$,$\forall t \geqslant 0$.

Usando as observações de acima, o Teorema do Valor Médio e a desigualdade de Hölder obtemos que (veja a demonstração do Lema 2.1)

$$
\begin{aligned}
&\left| M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)(\Delta u, w_t) - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)(\Delta \widetilde{u}, w_t)\right| \\
&= \left| M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)(\Delta u, w_t) - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)(\Delta \widetilde{u}, w_t)\right. \\
&\quad \left. + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)(\Delta \widetilde{u}, w_t) - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)(\Delta \widetilde{u}, w_t)\right| \\
&\leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)|\,(\Delta w, w_t)\,| + \left| M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)\right. \\
&\quad \left. - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)\right| |(\Delta \widetilde{u}, w_t)| \\
&\leqslant C\,|(\Delta w, w_t)| + C\left|\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right| |(\nabla \widetilde{u}, \nabla w_t)| \\
&\leqslant C\,|(\Delta w, w_t)| + C\left|\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| + |\nabla \widetilde{u}|)(|\nabla u| - |\nabla \widetilde{u}|)\,dx\right| |(\nabla \widetilde{u}, \nabla w_t)| \\
&\leqslant C\,|(\Delta w, w_t)| + C\int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla u| + |\nabla \widetilde{u}||\,||\nabla u| - |\nabla \widetilde{u}||\,dx\,|(\nabla \widetilde{u}, \nabla w_t)| \\
&\leqslant C\,|(\Delta w, w_t)| + C\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| + |\nabla \widetilde{u}|)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u| - |\nabla \widetilde{u}|)^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\quad |(\nabla \widetilde{u}, \nabla w_t)| \\
&\leqslant C\,|(\Delta w, w_t)| + \sqrt{2}C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |\nabla \widetilde{u}|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u - \nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\quad |(\nabla \widetilde{u}, \nabla w_t)| \\
&\quad \leqslant C\,\|\Delta w\|_{L^2}\,\|w_t\|_{L^2} + \sqrt{2}C\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)^{1/2}\right\} \\
&\qquad \|\nabla w\|_{L^2}\,\|\nabla \widetilde{u}\|_{L^2}\,\|\nabla w_t\|_{L^2} \\
&\quad \leqslant C\,\|\Delta w\|_{L^2}\,\|w_t\|_{L^2} + \sqrt{2}C\left(2\sqrt{E(0)}\right)\sqrt{2}\sqrt{E(0)}\,\|\nabla w\|_{L^2}\,\|\nabla w_t\|_{L^2} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}\left(\|\Delta w\|_{L^2}^2 + \|w_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_t\|_{L^2}^2\right)
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{C} = max\left\{\frac{C}{2}, 2CE(0)\right\}$.

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\left| M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx\right)(\Delta u, w_t) - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2\,dx\right)(\Delta \widetilde{u}, w_t)\right| \\
&\qquad \leqslant \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla w|^2 + |\nabla w_t|^2 + |\Delta w|^2 + w_t^2\right)dx.
\end{aligned}
$$

Assim,por (2.10) deduzimos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_t^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w^2+z^2\right)dx\right\} \\ &\qquad \leqslant \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla w|^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w_t^2\right)dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Claramente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w|^2dx\right\} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}2\nabla w.\nabla w_t dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w_t|^2dx. \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdade com (2.11), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}w_t^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w^2+z^2+|\nabla w|^2dx\right\} \\ &\quad \leqslant \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla w|^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w_t^2\right)dx \\ &\qquad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w_t|^2dx \\ &\quad \leqslant k\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla w|^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w_t^2\right)dx \\ &\quad \leqslant k\int_{\mathbb{R}^n}w_t^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w^2+z^2+|\nabla w|^2dx \end{aligned}$$

onde $k=\widetilde{C}+\frac{1}{2}$. Logo, pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_t^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w^2+z^2+|\nabla w|^2\right)dx \\ &\quad \leqslant e^{\int_0^t 2kds}\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_t(x,0)^2+|\nabla w_t(x,0)|^2+|\Delta w(x,0)|^2\right. \\ &\qquad \left.+\,w(x,0)^2+z(x,0)^2+|\nabla w(x,0)|^2\right)dx. \end{aligned}$$

Como $w(x,0)=0, w_t(x,0)=0, z(x,0)=0$ tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_t^2+|\nabla w_t|^2+|\Delta w|^2+w^2+z^2+|\nabla w|^2\right)dx \leqslant 0.$$

Daí, $w=z=0$, o que implica que $u=\widetilde{u}$ e $\theta=\widetilde{\theta}$, $\forall t\geqslant 0$. ∎

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Nesse capítulo, provaremos o resultado principal desse trabalho:

Teorema 3.1. *Seja $\{u, u_t, \theta\}$ a solução do sistema (1) obtida no Teorema 2.2 com $\{u_0, u_1, \theta_0\} \in H^4 \times H^3 \times H^2$. Assumimos que M satizfaz (2). Então, a enegia total*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2 + u^2 + \theta^2)dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$$

satisfaz

$$E(t) \leqslant 4E(0)exp(-\gamma t),\ \forall t \geqslant 0$$

onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ e γ é uma constante positiva dependendo somente da energia inicial.

A demonstração é feita construindo um funcional de Lyapunov $H = H(t)$, satisfazendo

$$\frac{dH(t)}{dt} \leqslant -cE(t),\ c > 0$$

e

$$c_1 E(t) \leqslant H(t) \leqslant c_2 E(t),\ c_1, c_2 > 0.$$

O funcional $H(t)$ é uma perturbação da energia $E(t)$ e será obtido utilizando técnicas multiplicativas que serão descritas nos seguintes lemas:

Lema 3.1. *Sejam $\epsilon > 0$ e $\{u, u_t, \theta\}$ a solução do problema (1) obtida no Teorema 2.2. Definamos $J(t) = \epsilon F(t) + \frac{\epsilon}{2} G(t)$ onde*

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_t (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t (I-\Delta)^{-1}\theta dx \text{ e} \\
G(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} u u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u . \nabla u_t dx.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J(t)\} \;=\; & -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx \\
& + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \theta|^2 dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u (I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
& - \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} u (I-\Delta)^{-1}\theta dx + \epsilon a(t) \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u (I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
& + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \theta (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta (I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
& - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
& - \frac{\epsilon}{2} a(t) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta\theta dx.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Aqui $(I-\Delta)^{-1}$denota a inversa do operador $I - \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e $a(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$.

Demonstração: Inicialmente, observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{F(t)\} &= \frac{d}{dt}\left\{-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_t (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_t (I-\Delta)^{-1}\theta dx\right\} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_{tt} (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_t \frac{d}{dt}\left\{(I-\Delta)^{-1}\theta\right\} dx - \int_{\mathbb{R}^n} \theta\theta_t dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt} (I-\Delta)^{-1}\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t \frac{d}{dt} (I-\Delta)^{-1}\theta dx.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{d}{dt}\left\{(I-\Delta)^{-1}\theta\right\} = (I-\Delta)^{-1}\theta_t
$$

e

$$
\begin{aligned}
\theta_t &= -\theta - u_t + \Delta\theta + \Delta u_t = -\left(\theta + u_t\right) + \Delta\left(\theta + u_t\right)\\
&= -\left(I - \Delta\right)\left(\theta + u_t\right)
\end{aligned}
$$

obtém-se

$$
\frac{d}{dt}\left\{\left(I - \Delta\right)^{-1}\theta\right\} = -\theta - u_t.
$$

Além disso, multiplicando a segunda equação de (1) por θ e integrando em $\mathbb{R}^n$,

vem que

$$
-\int_{\mathbb{R}^n}\theta_t\theta dx = \int_{\mathbb{R}^n}(\theta^2 - \theta\Delta\theta + \theta u_t - \theta\Delta u_t)dx.
$$

Consequentemente, dF/dt pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{F(t)\right\} &= -\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_{tt}\left(I - \Delta\right)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t\left(-\theta - u_t\right)dx\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^n}\theta\theta_t dx + \int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}\left(I - \Delta\right)^{-1}\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n}u_t\left(-\theta - u_t\right)dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_{tt}\left(I - \Delta\right)^{-1}\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t u_t dx\\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n}\theta u_t dx - \int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta u_t dx\\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}\left(I - \Delta\right)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}\theta u_t dx - \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2 dx.
\end{aligned}
$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (1) por $-\Delta u_t$ e integrando em $\mathbb{R}^n$,

temos

$$
-\int_{\mathbb{R}^n}\theta\theta_t dx = \int_{\mathbb{R}^n}(\theta^2 - \theta\Delta\theta + \theta u_t - \theta\Delta u_t)dx \tag{3.2}
$$

e

$$
-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t\left(\theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\theta\Delta u_t + u_t\Delta u_t\right)dx. \tag{3.3}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left(I - \Delta\right)\left(\theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t\right) &= \theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t - \Delta\theta_t + \Delta\left(\Delta\theta\right) + \Delta\left(\Delta u_t\right)\\
&= \theta_t - \Delta\left(\theta_t + \theta - \Delta\theta + u_t - \Delta u_t\right) = \theta_t,
\end{aligned}
$$

segue que

$$(I-\Delta)^{-1}\theta_t = \theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t.$$

Substituindo a expressão acima em (3.3), obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_t (I-\Delta)^{-1}\theta_t dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\theta\Delta u_t + u_t\Delta u_t)\, dx. \tag{3.4}$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (1), por $(I-\Delta)^{-1}\theta$ e integrando em $\mathbb{R}^n$ deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt} (I-\Delta)^{-1}\theta dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_{tt} (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u (I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} u (I-\Delta)^{-1}\theta dx + a(t)\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u (I-\Delta)^{-1}\theta dx \qquad (3.5)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \theta (I-\Delta)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta (I-\Delta)^{-1}\theta dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J(t)\} &= \frac{d}{dt}\{\epsilon F(t)+\epsilon/2G(t)\}\\
&= \epsilon\frac{d}{dt}\{F(t)\}+\frac{\epsilon}{2}\frac{d}{dt}\{G(t)\}\\
&= -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\Delta u_t dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta u_t dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta u_t dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta u_t dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx\\
&\quad +\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}uu_{tt}dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u\nabla u_{tt}dx\\
&= -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_t\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\Delta u_t dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta u_t dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta u_t dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx\\
&\quad -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u(I-\Delta)^{-1}\theta dx+\epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx\\
&\quad -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\theta dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}uu_{tt}dx\\
&\quad +\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u\nabla u_{tt}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\Delta u_t dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\Delta\theta dx\\
&\quad -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u(I-\Delta)^{-1}\theta dx\\
&\quad +\quad \epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx\\
&\quad -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u.u_{tt}dx+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2dx\\
&\quad +\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u.\nabla u_{tt}dx.
\end{aligned}
$$

Para concluir a demonstração, multiplicamos a primeira equação de (1) por u e integramos em $\mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u u_{tt} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta u_{tt} dx - \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta^2 u dx - \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
&\quad + a(t)\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta u dx + \int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u_{tt} dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
&\quad - a(t)\int |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J(t)\} &= -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx \\
&\quad + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u\,(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
&\quad - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} u\,(I-\Delta)^{-1}\theta dx + \epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\,(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
&\quad + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta\,(I-\Delta)^{-1}\theta dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta\,(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\
&\quad - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
&\quad - \frac{\epsilon}{2} a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx \\
&\quad - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx + \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 3.2. *Sejam $\epsilon > 0$, $\{u, u_t, \theta\}$ a solução do problema (1) obtida no Teorema 2.2 e $J(t)$ definido no Lema 3.1. Então, existe uma constante positiva $C_4 = C_4(E(0))$, tal que*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J(t)\} &\leqslant -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
&\quad - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2} a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad + C_4\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx
\end{aligned}
$$

para todo $t \geqslant 0$.

Demonstração: Por (3.1) temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{J(t)\right\} \;=\;& -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2dx \\
&+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
&-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx + \epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
&+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
&-\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2dx \\
&+\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx \qquad (3.6)\\
=\;& -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2dx \\
&+I_1+I_2+I_3+I_4+I_5
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2dx \\
I_2 &= -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
I_3 &= \epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
I_4 &= -\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \\
I_5 &= \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx.
\end{aligned}
$$

Na seqüência limitaremos os termos I_j , $2 \leqslant j \leqslant 5$:

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leqslant |I_2(t)| = \left| -\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u \, (I-\Delta)^{-1} \theta dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta \, (I-\Delta)^{-1} \theta dx \right| \\
&= \left| -\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \theta \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta dx \right| \\
&\leqslant \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u| |\Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta| dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\theta| |\Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta| dx \\
&\leqslant \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \epsilon \, \|\Delta u\|_{L^2} \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{L^2} + \epsilon \, \|\theta\|_{L^2} \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{L^2} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \epsilon \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{\epsilon}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{3\epsilon}{2} \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{L^2}^2 . \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\left\| (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{H^2}^2 = \|\theta\|_{L^2}^2 , \ \forall \theta \in L^2, \qquad (3.8)$$

segue de (3.7) que

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leqslant \frac{\epsilon}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{3\epsilon}{2} \left\| \Delta \, (I-\Delta)^{-1} \theta \right\|_{H^2}^2 \\
&= \frac{\epsilon}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{3\epsilon}{2} \|\theta\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{\epsilon}{4} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \|\theta\|_{L^2}^2 . \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Para estimar I_3, observe que

$$a(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right) \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant E(0)} M(s) = M(E(0)) = d \in \mathbb{R}^+,$$

pois $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \leqslant 2E(0)$ e $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Usando a observação acima deduzimos que

$$\begin{aligned}
I_3(t) &\leqslant \left|\epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx\right|\\
&\leqslant \epsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|u||\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|dx\\
&\leqslant \epsilon a(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2dx\right)^{1/2}\\
&= \epsilon a(t)\,\|u\|_{L^2}\left\|\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}\\
&\leqslant \epsilon d\,\|u\|_{L^2}\left\|\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}\\
&= \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+2\epsilon d^2\left\|\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+2\epsilon d^2\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{H^2}^2\\
&= \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+2\epsilon d^2\,\|\theta\|_{L^2}^2\,. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Agora, por (3.8) podemos limitar I_4 da siguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_4(t) &\leqslant \left|-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx\right|\\
&\leqslant \epsilon\int_{\mathbb{R}^n}|u||\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|dx+\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\theta||\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|dx\\
&\leqslant \epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2dx\right)^{2}\\
&\quad+\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^2dx\right)^{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2dx\right)^{1/2}\\
&= \epsilon\,\|u\|_{L^2}\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}+\epsilon\,\|\theta\|_{L^2}\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+2\epsilon\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon}{2}\,\|\theta\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon}{2}\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}^2\\
&= \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon}{2}\,\|\theta\|_{L^2}^2+\frac{5}{2}\epsilon\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon}{2}\,\|\theta\|_{L^2}^2+\frac{5}{2}\epsilon\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{H^2}^2\\
&= \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+\frac{\epsilon}{2}\,\|\theta\|_{L^2}^2+\frac{5}{2}\epsilon\,\|\theta\|_{L^2}^2\\
&= \frac{\epsilon}{8}\,\|u\|_{L^2}^2+3\epsilon\,\|\theta\|_{L^2}^2\,. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Finalmente, da desigualdade de Hölder temos que

$$
\begin{aligned}
I_5(t) &\leqslant \left|\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\theta dx\right| \\
&= \left|\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u\theta dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\theta dx\right| \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u||\theta| dx + \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u||\theta| dx \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta| dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{\epsilon}{2}\|u\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2} + \frac{\epsilon}{2}\|\Delta u\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2\right) + \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2\right) \\
&= \frac{\epsilon}{8}\|u\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Logo, de (3.6) e das desigualdades (3.9)-(3.12) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J(t)\} &= -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \\
&\leqslant -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx \\
&\quad +\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx + \frac{\epsilon}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2\epsilon\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{8}\|u\|_{L^2}^2 \\
&\quad +2\epsilon d^2\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{8}\|u\|_{L^2}^2 + 3\epsilon\|\theta\|_{L^2}^2 \\
&\quad +\frac{\epsilon}{8}\|u\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad + (7 + 2d^2)\,\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx
\end{aligned}
$$

onde $C_4 = 7 + 2d^2$. ∎

Lema 3.3. *Sejam* $0 < \epsilon \leqslant 1/7$ *e* $H(t) = E(t) + J(t)$*, com* $E(t)$ *e* $J(t)$ *definidos em (3) e no Lema 3.1, respetivamente. Então,*

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant H(t) \leqslant 2E(t)\ ,\ \forall t \geqslant 0. \tag{3.13}$$

*Demonstração:*Usando as desigualdades de Hölder e Young temos por (3.8) que

$$\begin{aligned}
|F(t)| &= \left| -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_t \,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t \,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \right| \\
&= \left| -\int_{\mathbb{R}^n} u_t \Delta \,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t \,(I-\Delta)^{-1}\,\theta dx \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u_t||\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta| dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_t||\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta| dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\,(I-\Delta)^{-1}\,\theta|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\left\|(I-\Delta)^{-1}\,\theta\right\|_{H^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx \\
&\leqslant 2E(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e

$$
\begin{aligned}
|G(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u_t dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_t \Delta u dx\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |u||u_t| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_t||\Delta u| dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
&\leqslant E(t) + 2E(t) = 3E(t).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Logo, pela desigualdade triangular, (3.13) e (3.14) obtemos

$$|J(t)| = \left|\epsilon F(t) + \frac{\epsilon}{2}G(t)\right| \leqslant \epsilon|F(t)| + \frac{\epsilon}{2}|G(t)| \leqslant 2\epsilon E(t) + \frac{3\epsilon}{2}E(t) = \frac{7\epsilon}{2}E(t).$$

Daí,

$$-\frac{7}{2}\epsilon E(t) \leqslant J(t) \leqslant \frac{7}{2}\epsilon E(t)$$

e, consequentemente,

$$E(t) - \frac{7\epsilon}{2}E(t) \leqslant E(t) + J(t) \leqslant E(t) + \frac{7\epsilon}{2}E(t).$$

Como $H(t) = E(t) + J(t)$, concluímos que

$$(1 - \frac{7}{2}\epsilon)E(t) \leqslant H(t) \leqslant (1 + \frac{7}{2}\epsilon)E(t).$$

Por outro lado,

$$0 < \epsilon \leqslant \frac{1}{7} \Rightarrow 0 < \frac{7}{2}\epsilon \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < 1 + \frac{7}{2}\epsilon \leqslant \frac{3}{2}$$

e

$$0 < \frac{7}{2}\epsilon \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{7}{2}\epsilon < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{7}{2}\epsilon < 1$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, donde

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant H(t) \leqslant 2E(t), \ \forall t \geqslant 0. \quad \blacksquare$$

Lema 3.4. *Sejam $\epsilon > 0$ e $H(t)$ definido no lema anterior. Então,*

$$\frac{d}{dt}H(t) \leqslant -\frac{\epsilon}{8}E(t), \ \forall t \geqslant 0$$

para algum $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon C_4 < \frac{1}{2}$, onde C_4 é a constante definida no Lema 3.2.

Demonstração: Da identidade de energia (4) e do Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}J(t) \\
&\leqslant -\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad +\epsilon C_4 \int_{\mathbb{R}^n} |\theta|^2 dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Agora, se $C_4 < \dfrac{1}{2\epsilon}$, então $\epsilon < \dfrac{1}{14}$ (porque $C_4 = 7 + 2d^2 \geqslant 7$). Logo, de (3.16) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &\leqslant (-1+\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx + (-1+\epsilon C_4)\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\leqslant \frac{-13}{14}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&\leqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Como $M(.)$ é uma função não decrecente e $a(t) > 0$, então

$$\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx} M(s)ds \leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - 0\right);$$

ou seja;

$$-a(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leqslant -\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx} M(s)ds.$$

Logo, por (3.16) deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(t) &\leqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 dx \\ &\quad -\frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx - \frac{\epsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx - \frac{\epsilon}{2}\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx} M(s)ds \\ &\leqslant -\frac{\epsilon}{8}E(t) \end{aligned}$$

onde $\frac{\epsilon}{8} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{8}\right\}$. Isto conclui a demonstração do Lema 3.4. ∎

Agora, estamos em condições de demonstrar o nosso resultado principal.

Demonstração do Teorema 3.1: De acordo com os Lemas 3.3 e 3.4, temos

$$\frac{d}{dt}H(t) \leqslant -\frac{\epsilon}{8}E(t), \ \forall t \geqslant 0$$

e

$$H(t) \leqslant 2E(t), \ \forall t \geqslant 0.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}H(t) \leqslant -\frac{\epsilon}{16}H(t)$$

e, consequentemente,

$$H(t) \leqslant H(0)exp(-(\epsilon/16)t), \ \forall t \geqslant 0.$$

Logo, pelo Lema 3.3, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E(t) &\leqslant H(t) \\ &\leqslant H(0)exp(-(\epsilon/16)t) \\ &\leqslant 2E(0)exp(-(\epsilon/16)t); \end{aligned}$$

ou seja;

$$E(t) \leqslant 4E(0)exp(-(\epsilon/16)t),\ \forall t \geqslant 0. \quad \blacksquare$$

Apêndice

Em [10], Lagnese e Leugering consideram o modelo

$$\begin{cases} \epsilon v_{tt} - \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x = 0, \\ w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} - \left[w_x\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

$0 < x < L$ e $t > 0$, para descrever a dinâmica não linear de uma viga uniforme de comprimento $x = L$, que está presa somente em um extremo. As quantidades v e w representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais e transversais da viga, cujo movimento é impulsionado por um momento fletor, uma força axial (ou normal) e uma força cortante (ou força de cisalhamento) que atuam no extremo da viga que está livre. Num caso especial, quando as condições de contorno são do tipo Dirichlet/Neumann, G.P Menzala e E. Zuazua mostraram em [18] que, quando $\epsilon \to 0$, o modelo (3.18) se 'aproxima', no sentido fraco, da equação escalar

$$u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2L}\left(\int_0^L u_x^2 dx\right) u_{xx} = 0, \tag{3.19}$$

onde $0 < x < L$ e $t > 0$.

Aqui, consideramos o sistema

$$\begin{cases} \epsilon v_{tt} - \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ w_{tt} - w_{xxtt} + w + w_{xxxx} - \left[w_x\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v(x,0) = v_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad \text{em } \mathbb{R} \\ v_t(x,0) = v_1(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \text{em } \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.20}$$

e mostraremos que, quando $\epsilon \to 0$, o modelo limite é linear. Antes porém, enunciamos o resultado de existência e unicidade.

Teorema 3.2. (veja [12]) *Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $(v_0, w_0, v_1, w_1) \in H^1(\mathbb{R}) \times \mathrm{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$*. Então, o sistema (3.20) possui uma única solução global generalizada*

$$v^\epsilon \in C\left([0,\infty);\ H^1(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,\infty);\ L^2(\mathbb{R})\right),$$

$$w^\epsilon \in C\left([0,\infty);\ H^2(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,\infty);\ H^1(\mathbb{R})\right).$$

Quando $\epsilon > 0$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $(v^\epsilon, v_t^\epsilon, w^\epsilon, w_t^\epsilon)$ *a solução do sistema (3.20) dada pelo Teorema 1. Então, quando* $\epsilon \to 0$*,*

$$(w^\epsilon, w_t^\epsilon) \rightharpoonup^* (u, u_t)\ \text{em}\ L^\infty\left(0,\infty; H^2(\mathbb{R})\right) \times L^\infty\left(0,\infty; H^1(\mathbb{R})\right) \tag{3.21}$$

onde u *é solução de*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u = 0,\ \text{em}\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = w_0(x),\quad u_t(x,0) = w_1(x),\quad \text{em}\ \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Demonstração: A demonstração será feita em vários passos.

(i) A energia total $E_\epsilon(t)$ associada a (3.20) é dada por

$$E_\epsilon(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \epsilon(v_t^\epsilon)^2 + (v_x^\epsilon + \frac{1}{2}(w_x^\epsilon)^2)^2 + (w^\epsilon)^2 + (w_t^\epsilon)^2 + (w_{xx}^\epsilon)^2 + (w_{xt}^\epsilon)^2 dx, \tag{3.23}$$

e podemos verificar que

$$\frac{d}{dt}\{E_\epsilon(t)\} = 0; \tag{3.24}$$

ou seja;

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0),\ \forall t \geqslant 0.$$

(ii) De (i) temos as seguintes limitações:

$$
\begin{aligned}
&\{\sqrt{\epsilon} v_t^\epsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{v_x^\epsilon + \tfrac{1}{2}(w_x^\epsilon)^2\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{w^\epsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{w_t^\epsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{w_{xt}^\epsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{w_{xx}^\epsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})).
\end{aligned}
$$

As limitações acima implicam a existência de subseqüências (que ainda denotaremos pelo mesmo índice ϵ), tais que, quando $\epsilon \to 0$,

$$
\begin{aligned}
&\{\sqrt{\epsilon} v_t^\epsilon\} \rightharpoonup^* \xi \text{ em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{v_x^\epsilon + \tfrac{1}{2}(w_x^\epsilon)^2\} \rightharpoonup^* \eta \text{ em } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R})),\\
&\{w^\epsilon\} \rightharpoonup^* u \text{ em } L^\infty(0,\infty; H^2(\mathbb{R})),\\
&\{w_t^\epsilon\} \rightharpoonup^* u_t \text{ em } L^\infty(0,\infty; H^1(\mathbb{R})).
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Além disso, usando o Lema de compacidade de Aubin-Lions, deduzimos que

$$w^\epsilon \to u \text{ fortemente em } L^\infty(0,T; H^{2-\delta}_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.26}$$

$\forall \delta > 0$ e $0 < T < \infty$. Logo,

$$w_x^\epsilon \to u_x \text{ fortemente em } L^\infty(0,T; H^{1-\delta}_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.27}$$

quando $\epsilon \to 0$, $\forall \delta > 0$ e $0 < T < \infty$. Em particular, o Teorema de imersão de Sobolev, implica que

$$(w_x^\epsilon)^2 \to u_x^2 \text{ fortemente em } L^\infty(0,T; L^p_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.28}$$

quando $\epsilon \to 0$, para todo $p < \infty$ e $0 < T < \infty$. Com (3.25) e (3.28), podemos passar o limite no termo não linear como segue:

$$w_x^\epsilon (v_x^\epsilon + \frac{1}{2}(w_x^\epsilon)^2) \rightharpoonup^* u_x \eta \text{ em } L^\infty(0,T; L^2_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.29}$$

quando $\epsilon \to 0$.

(iii) Agora, identificaremos o limite fraco η em (3.25). Usando a limitação de $E_\epsilon(t)$ e observando que $\{v_x^\epsilon\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R}))$, podemos extrair uma subseqüência de $\{v^\epsilon\}$, tais que

$$v_x^\epsilon \rightharpoonup^* \rho \;\text{ em } L^\infty(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.30}$$

quando $\epsilon \to 0$, para algum $\rho = \rho(x,t)$. Logo, de (3.26) e (3.30) temos que

$$v_x^\epsilon + \frac{1}{2}(w_x^\epsilon)^2 \rightharpoonup \rho + \frac{1}{2}u_x^2 \;\text{ em } L^\infty(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R})), \tag{3.31}$$

e por (3.25) obtemos

$$\eta = \rho + \frac{1}{2}u_x^2. \tag{3.32}$$

(iv) Mostraremos que η independe de x. De fato, devido a (3.25), temos que

$$\epsilon v_{tt}^\epsilon \rightharpoonup 0 \;\text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\mathbb{R})), \tag{3.33}$$

quando $\epsilon \to 0$, e de (3.20), (3.33) e (3.31) segue

$$\eta_x = [\rho + \frac{1}{2}u_x^2]_x = 0. \tag{3.34}$$

Assim, $\eta = \eta(t)$.

(v) Finalmente, podemos passar o limite em (3.20) quando $\epsilon \to 0$,obtendo

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u - u_{xxtt} = [u_x\eta]_x \;\text{ em } \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{3.35}$$

Como η é uma função que só depende de t, (3.35) tem a forma

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u - u_{xxtt} = \eta(t)u_{xx} \;\text{ em } \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{3.36}$$

Agora, da semicontinuidate inferior da norma L^2, obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_{xt}^2 + u^2 + u_{xx}^2 + (\eta(t))^2 dx \leqslant \liminf_{\epsilon\to 0} E_\epsilon(t) < +\infty, \tag{3.37}$$

o que implica claramente que $\eta \equiv 0$.

(vi) Para concluir o resultado, precisamos provar que u verifica os dados iniciais. Devido a (3.25) e (3.26),

$$w^\epsilon \to u \ \text{ em } C([0,\, T]; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$$

e, portanto, $w_0(x) = w^\epsilon(x,0) \to u(x)$. Consequentemente, $u(x,0) = w_0(x)$. Para provar que $u_t(x,0) = w_1(x)$, usamos a equação (3.20):

$$(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})w^\epsilon_{tt} = -w^\epsilon_{xxxx} - w^\epsilon + [w^\epsilon_x(v^\epsilon_x + \frac{1}{2}(w^\epsilon_x)^2)]_x. \tag{3.38}$$

Como $\{w^\epsilon\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty; H^2_{loc}(\mathbb{R}))$, então $\{w^\epsilon_{xxxx}\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty; H^{-2}_{loc}(\mathbb{R}))$. Já sabemos que $\{v^\epsilon_x + \frac{1}{2}(w^\epsilon_x)^2\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$, e portanto, tambem é limitada em $L^\infty(0,\infty; H^{-\delta}_{loc}(\mathbb{R}))$, para todo $\delta > 0$. Assim, segue que $[w^\epsilon_x(v^\epsilon_x + \frac{1}{2}(w^\epsilon_x)^2)]_x$ é limitado em $L^\infty(0,\infty; (H^{-\delta-1}_{loc}(\mathbb{R}))^2)$, para todo $\delta > 0$. Logo, de (3.38) obtemos que $\{w^\epsilon_{tt}\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$. Como $\{w^\epsilon_t\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty; H^1_{loc}(\mathbb{R}))$, novamente, podemos usar o Lema de compacidade de Aubin-Lions para extrair uma subseqüência de $\{w^\epsilon_t\}$, tal que $w^\epsilon_t \to u_t$ em $C([0,T]; L^2_{loc}(\mathbb{R}))$, para todo $\delta > 0$, quando $\epsilon \to 0$. Analogamente, deduzimos que $u_t(x,0) = w_1(x)$, e concluimos que o limite u satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u = 0, \ em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = w_0(x), \ \ u_t(x,0) = w_1(x), \ em\ \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Referências Bibliográficas

[1] R.A ADAMS & J.F. FOURNIER, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York (2003).

[2] S. AGMON, H. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[3] H. BREZIS, *Analise Fonctionelle.Théorie et Applications*, Dunod, Paris (1999).

[4] C. BURIOL, *Energy decay rates for the Timoshenko system of thermoelastic plates*, Nonlinear Analysis 64 (2006), 92-108.

[5] Y. ENAMOTO, *On a thermoelastic plate equation in an exterior domain*, Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 443-472.

[6] J.A. GOLDSTEIN, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, Clarendon Pess. Oxford (1985).

[7] A.M. GOMES, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro (1985).

[8] S. KESAVAN, *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, Bangalore (1989).

[9] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley e Sons (1978).

[10] J.E. LAGNESE & G. LEUGERING, *Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback.* Jr. Diff. Equations 91 (1991), 355-388.

[11] J.L. LIONS & E. MAGENES, *Problèmes Aux Limites non Homogénes et Applications,* Tome 1, Dunod, Paris (1968).

[12] J.R. LUYO SANCHEZ, *O Sistema dinâmico de von Kármán em dominios não limitados é globalmente bem posto no sentido da Hadamard: Análise do seu limite singular,* Tese de Doutorado, IM/UFRJ (2003).

[13] L.A. MEDEIROS & MILLA M., *Introdução aos Espaços Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Método Matemáticos, n^o 25 .IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).

[14] L.A. MEDEIROS & P.H. RIVERA, *Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Métodos Matemáticos n^o 9. IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[15] G.P. MENZALA, A.F. PAZOTO, *Rates of decay of a nonlinear model in thermoelasticity*, Mat. Contemp. 19 (2000), 71-88.

[16] G.P. MENZALA, E. ZUAZUA, *Energy decay rates for the von Kármán system of thermoelastic plates.* Diff. Int. Equations 11 (5) (1998), 755-770.

[17] G.P. MENZALA, E. ZUAZUA, *On the energy decay rate for the modified von Kármán system of thermoelastic plates: an improvement*, Appl. Math. Lett. 16 (4) (2003), 531-534.

[18] G.P. MENZALA, E. ZUAZUA, *Timoshenko's beam equation as a limit of a nonlinear one-dimensional von Kármán system*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 130A (2000), 855-875.

[19] G. PERLA MENZALA, *Equações Diferenciais: Ordinárias e Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos n^o14, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1977).

[20] G. PERLA MENZALA & E. ZUAZUA, *Timoshenko's plate equations as a singular limit of the dinamical von Kármán system*. J. Math. Pures et Appli. 79 (2000), 73-94.

[21] A.PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (2003).

[22] J. PUEL & M. TUSCNAK, *Global existence for the full von Kármán system*, Appl. Math. Optim. 34 (1996), 139-160.

[23] J.E. RIVERA,*Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais,* Série de Textos de Graduação, Rio de Janeiro (2004).

[24] J.E.M. RIVERA, Y. SHIBATA, *A linear thermoelastic plate equation with Dirichlet boundary condition*, Math. Meth. Appl. Sci. 20 (1997), 915-932.

[25] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin (1969).