O TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS

Alex Farah Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Luiza Amália de Moraes

Rio de Janeiro

Outubro de 2005

O TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS

Alex Farah Pereira

Orientadora: Luiza Amália de Moraes

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Profa. Luiza Amália de Moraes - IM/UFRJ

Prof. Antônio Roberto da Silva - IM/UFRJ

Prof. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - FAMAT/UFU

Profa. Walcy Santos - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Outubro de 2005

Aos meus pais
Celio e Angela.
A minha irmã
Monica.

Agradecimentos

À Deus, por mais uma conquista em minha vida.

À minha orientadora, Professora Luiza Amália de Moraes, por todo seu apoio, dedicação e paciência ao longo da minha formação superior.

Aos meus parentes e amigos que sempre estiveram ao meu lado incentivando na minha formação matemática.

Ao CNPq pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Ficha Catalográfica

Pereira, Alex Farah.

O Teorema de Dvoretzky-Rogers/ Alex Farah Pereira.- Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2005.

vii, 65f; 1cm.

Orientadora: Luiza Amália de Moraes

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2005.

Referências Bibliográficas: f.64-65.

1. Convergência de Seqüências em Espaços de Banach. 2. O Teorema de Dvoretzky-Rogers. I. Moraes, Luiza Amália de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática. III. Título.

O Teorema de Dvoretzky-Rogers

Alex Farah Pereira

Orientadora: Luiza Amália de Moraes

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar o seguinte teorema provado por Dvoretzky e Rogers (1950): "Se toda série incondicionalmente convergente em um espaço de Banach X é absolutamente convergente, então X tem dimensão finita". Provaremos o teorema através da abordagem de Grothendieck. Começaremos introduzindo a classe dos operadores (absolutamente) p-somantes e provaremos os teoremas de representação e fatoração de Pietsch. Feito isso, mostraremos vários resultados de composição de operadores e provaremos que se X é um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então a identidade é um operador (absolutamente) p-somante se, e somente se, X tem dimensão finita. Finalmente, provaremos o teorema de Bessaga-Pelczyński e faremos a prova do teorema de Dvoretzky-Rogers feito por Diestel em [4].

Dvoretzky-Rogers Theorem

Alex Farah Pereira

Supervisor: Luiza Amália de Moraes

The main purpose of this work is to present the following theorem due to Dvoretzky and Rogers (1950): "If every unconditionally convergent series in a Banach space X is absolutely convergent, then X is finite dimensional". We follow the Grothendieck's approach to this theorem. We start by introducing the class of (absolutely) p-summing operators and proving the representation and the factorization theorems of Pietsch. After this we show various results on composition of operators and prove that if X is a Banach space and $1 \leq p < \infty$, then the indentity is an (absolutely) p-summing operator if and only if X is finite dimensional. Finally we prove the Bessaga-Pelczyński theorem and present the proof of the Dvoretzky-Rogers theorem given by Diestel in [4].

Sumário

Introdução

O principal objetivo deste trabalho foi estudar a convergência de séries em espaços normados. Sabemos que no caso de espaços de dimensão finita, a convergência absoluta implica na convergência simples enquanto que os conceitos de convergência absoluta e de convergência incondicional são equivalentes. Entretanto, um exemplo em $\wp([0,1])$ nos mostra que nos espaços normados de dimensão infinita a convergência absoluta nem sempre implica na convergência simples. Na verdade, é uma caracterização dos espaços normados completos o fato de toda série que converge absolutamente ser convergente. Como conseqüência imediata disto e da equivalência entre os conceitos de convergência absoluta e convergência incondicional no caso escalar, temos que um espaço normado é completo se, e somente se toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. Por outro lado, observando exemplos em c_0 e ℓ_2, o fato de um espaço normado ser completo não é suficiente para garantir a convergência absoluta das séries incondicionalmente convergentes. Mais precisamente, em um espaço normado de dimensão infinita sempre existe uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente. Este fato foi mostrado em 1950 por A. Dvoretzky e C.A. Rogers em [5] (ver também [1] e [9]). Em 1956, A. Grothendieck introduziu e estudou os operadores p-somantes no caso p=1 ou 2. A extensão ao caso em que p é um número real positivo qualquer se deve a A. Pietsch (1967). Nesta dissertação apresentamos o que Diestel chama de abordagem de Grothendieck ao teorema de Dvoretzky-Rogers, ou seja, provaremos através dos operadores p-somantes que uma seqüência fracamente p-somável em um espaço de Banach X é p-somável se, e somente se X tem dimensão finita. Além disso mostraremos o teorema de Bessaga-Pelczyński, que nos garate que uma seqüência fracamente 1-somável em um espaço de Banach X é incondicionalmente somável se, e somente se X não possui uma cópia de c_0. Usando estes dois resultados provaremos que toda série incondicionalmente convergente em um espaço de Banach X é absolutamente convergente se, e somente se X tem dimensão finita, que é o teorema de Dvoretzky-Rogers.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 enunciaremos sem demonstração alguns teoremas da Análise Funcional e da Teoria da Integração que serão usados nos outros capítulos. No capítulo 2 estudaremos as convergências absoluta e incondicional em espaços normados. Provaremos que um espaço normado é completo se, e somente se toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. Apresentaremos dois exemplos de séries em espaços de Banach que convergem incondicionalmente mas não convergem absolutamente. Depois faremos um estudo das seqüências p-somáveis e fracamente p-somáveis e provaremos o teorema de Bessaga-Pelczyński. Fecharemos este capítulo apresentando um exemplo de uma seqüência em c_0 que é fracamente p-somável mas não é p-somável. No cápitulo 3 definiremos os operadores p-somantes entre espaços de Banach e provaremos algumas de suas caracterizações. Demonstraremos também os teoremas de fatoração e dominação de Pietsch. Estudaremos os operadores compactos e fracamente compactos. Provaremos que todo operador p-somante Ú fracamente compacto e que a composição de dois operadores p-somantes é compacto. Com isso, mostraremos o que Diestel chama de abordagem ao teorema de Dvoretzky-Rogers que nos diz que se X é um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então toda seqüência fracamente p-somável é p-somável se, e somente se X tem dimensão finita. Como corolário disto, segue que o operador identidade é p-somante se, e somente se X tem dimensão finita. Concluiremos este capítulo com a prova do teorema de Dvoretzky-Rogers.

Capítulo 1

Resultados Preliminares de Análise Funcional e Teoria da Integração

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos e principais teoremas das teorias da análise funcional e integração que serão usados neste trabalho.

1.1 Análise Funcional

Estaremos interessados em espaços vetoriais reais ou complexos e, portanto, representaremos por $I\!\!K$ o corpo dos reais ou dos complexos. Consideraremos sempre X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $I\!\!K$. Começaremos enunciando duas desigualdades.

Proposição 1.1. (Desigualdade de Hölder) *Se* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!\!K^n$ *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

onde $p, q > 1$ *são tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Veja [6], teorema 1.5, p.1. $\square$

Proposição 1.2. (Desigualdade de Minkowski) *Se* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ *então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $p \geq 1$.

Demonstração. Veja [6], teorema 1.7, p.2. $\square$

A seguir, iremos definir alguns espaços de seqüências que são exemplos clássicos de espaços normados e que aparecerão muitas vezes neste trabalho. Todos estes espaços são completos, isto é, são espaços de Banach.

Dado $1 \leq p < \infty$ um número real fixo, definimos $\ell_p = \ell_p(\mathbb{K})$ como sendo o conjunto de todas as seqüências $(x_n)_n$ tais que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Se $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ estão em ℓ_p e $\lambda \in \mathbb{K}$, tornamos ℓ_p um espaço vetorial com as seguintes operações $x + y = (x_n + y_n)_n$ e $\lambda x = (\lambda x_n)_n$. Fazendo $||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, usando a desigualdade de Minkowski mostra-se que $\ell_p = (\ell_p, ||\cdot||_p)$ é um espaço de Banach.

Definimos $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K})$ como sendo o conjunto de todas as seqüências $(x_n)_n$ tais que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sup_n |x_n| < \infty$. Tornamos ℓ_∞ um espaço vetorial com as mesmas operações de ℓ_p. Se $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$, fazendo $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$ obtém-se uma norma em ℓ_∞. É fácil ver que $\ell_\infty = (\ell_\infty, ||\cdot||_\infty)$ é um espaço de Banach.

Definimos c_0 como sendo o conjunto de todas as seqüências $(x_n)_n$ tais que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Observe que $c_0 \subsetneq \ell_\infty$ e é claro que c_0 é um subespaço vetorial fechado de ℓ_∞. Considerando em c_0 a norma induzida pela norma de ℓ_∞, segue que $c_0 = (c_0, ||\cdot||_\infty)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.1. *Uma seqüência de elementos* $(x_n)_n$ *de um espaço de Banach* X *é dita um* *base para X se para cada $x \in X$ existe uma única seqüência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.*

Definição 1.2. *Uma seqüência de elementos $(x_n)_n$ de um espaço de Banach é dita uma seqüência básica se $(x_n)_n$ é uma base para $\overline{Lin}[x_n]$, onde $Lin[x_n]$ denota o conjuto de todas as combinações lineares de $(x_n)_n$.*

É claro que toda subseqüência de uma seqüência básica é uma seqüência básica. Seja uma seqüência $(x_n)_n$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in I\!N$. É possível mostrar que uma condição necessária e suficiente para que $(x_n)_n$ seja uma seqüência básica é que exista um número real $K > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{m+n} a_i x_i\right\| \geq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \qquad (*)$$

para todos $m, n \in I\!N$ e $a_i \in I\!K$ (veja [10]). Chamamos ao supremo de todos os K tais que a desigualdade $(*)$ é satisfeita de constante básica. É fácil ver que se K é a constante básica de uma seqüência básica $(x_n)_n$ então para $a_1, \ldots, a_n$ arbitrários temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \geq \frac{K}{2} \max_{1\leq i\leq n}\{|a_i| \|x_i\|\}.$$

Denotaremos por $(e_n)_n$ a seqüência canônica tal que $e_n = (\delta_{nm})_m$ onde $\delta_{nm} = 1$ se $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$ para $n, m \in I\!N$. Observe que esta seqüência $(e_n)_n$ pertence aos espaços c_0 e ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$. É fácil ver que para todo elemento x de c_0 ou ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ existe uma única seqüência de escalares $(\alpha_n)_n$ em $I\!K$ tal que $x = \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$, o que torna esses espaços separáveis. Dizemos então que a seqüência (e_n) é a seqüência básica canônica de c_0 ou de ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. Observe que $c_0 = \overline{Lin}[e_n] \subsetneq \ell_\infty$ e $\ell_p = \overline{Lin}[e_n]$ (fechos nas respectivas normas).

Um outro exemplo clássico de espaço normado completo que aparecerá neste trabalho é o seguinte: Seja K um subconjunto compacto de um espaço topológico X. Definimos $C(K)$ como sendo o conjunto das funções contínuas $f : K \longrightarrow I\!K$. Se $f, g \in C(K)$ e

$\lambda \in I\!K$, tornamos $C(K)$ um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Fazendo $||f||_K = \sup\limits_{x\in K}|f(x)|$, mostra-se que $C(K) = (C(K), ||\cdot||_K)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.3. *Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é dita um operador linear quando para todos $u, v \in X$ e $\lambda \in I\!K$, $T(u + \lambda v) = Tu + \lambda Tv$.*

Definição 1.4. *Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é limitado se existe $c > 0$ tal que $||Tu|| \leq c||u||$ para todo $u \in X$.*

A rigor deveríamos escrever $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_Y$ para indicarmos normas em X e Y, respectivamente. Porém, para não sobrecarregarmos a notação, iremos usar a mesma notação $||\cdot||$ para indicar as normas em X e Y.

Teorema 1.1. *Sejam X e Y espaços normados e seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *T é limitado.*

b) *T é contínuo em algum $u_0 \in X$.*

c) *T é contínuo.*

Demonstração. Veja [6], proposição 1.17, lembrando que, como T é linear, é claro que vale (b) se, e somente se T é contínua na origem. □

Definição 1.5. *Sejam X e Y espaços normados. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares $T : X \longrightarrow Y$ que são limitados.*

Observação 1.1. *Definindo $||T|| = \inf\{c > 0; ||Tu|| \leq c||u||$ para todo $u \in X\}$ para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ temos:*

1) $||T|| = \sup\limits_{u\neq 0}\frac{||Tu||}{||u||} = \sup\limits_{||u||=1}||Tu|| = \sup\limits_{||u||\leq 1}||Tu||.$

2) *T é contínuo se, e somente se $||T|| < \infty$.*

3) $||\cdot||$ *define uma norma em* $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposição 1.3. *Se* X *e* Y *são espaços normados, então* $\mathcal{L}(X,Y)$ *é um espaço normado com as operações usuais de funções e com a norma acima.*

Demonstração. Trivial. □

A partir de agora $\mathcal{L}(X,Y)$ denotará este espaço normado.

Definição 1.6. *Sejam* X *e* Y *espaços normados. Dizemos que* X *e* Y *são isomorfos se existe um operador linear bijetivo contínuo* $T : X \longrightarrow Y$. *Se, além disso,* T *for uma isometria (isto é,* $||Tu|| = ||u||$ *para todo* $u \in X$*) então dizemos que* X *e* Y *são isometricamente isomorfos.*

Lembremos que uma função contínua com inversa também contínua é dita um homeomorfismo. Quando um espaço normado tem dimensão finita temos a seguinte:

Proposição 1.4. *Suponhamos que o espaço normado* X *tem dimensão finita e seja* n *a dimensão de* X. *Então* X *e* $\mathbb{K}^n$ *são isomorfos. Além disso,* X *e* $\mathbb{K}^n$ *são homeomorfos e* X *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [4], teorema 1, p.1. □

Definição 1.7. *Seja* X *um espaço normado. O dual topológico de* X*, denotado por* X^**, é o conjunto dos funcionais lineares contínuos de* X *em* $\mathbb{K}$*, isto é,* $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Teorema 1.2. *Sejam* X *um espaço normado e* Y *um espaço de Banach. Então* $\mathcal{L}(X,Y)$ *é um espaço de Banach. Em particular,* X^* *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [6], proposição 1.19, p.5. □

Exemplo 1.1. Dado $\xi = (\xi_n)_n \in \ell_1$, seja $T_\xi : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por $T_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ para todo $x = (x_n)_n \in c_0$. A aplicação $T : \ell_1 \longrightarrow (c_0)^*$ definida por $T(\xi) = T_\xi$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $(c_0)^*$ e ℓ_1, isto é, $(c_0)^* = \ell_1$ a menos de uma isometria.

Exemplo 1.2. Seja $1 \leq p \leq \infty$ e tomamos p^* tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ se $p > 1$ (ou $p^* = \infty$ se $p = 1$). Dado $\xi = (\xi_n)_n \in \ell_{p^*}$, seja $T_\xi : \ell_p \longrightarrow I\!K$ definido por $T_\xi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \lambda_n$ para todo $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$. A aplicação $T : \ell_{p^*} \longrightarrow (\ell_p)^*$ definida por $T(\xi) = T_\xi$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $(\ell_p)^*$ e ℓ_{p^*}, isto é, $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$ a menos de uma isometria.

Exemplo 1.3. Seja $\ell_p^m = \{(\lambda_n)_n \in \ell_p : \lambda_n = 0, n > m\}$, para $1 \leq p \leq \infty$. É claro que $\ell_{p^*}^m \subset \ell_{p^*}$ e a aplicação T do exemplo 1.2 restrita a $\ell_{p^*}^m$ estabelece um isomorfismo isométrico entre $(\ell_p^m)^*$ e $\ell_{p^*}^m$.

Proposição 1.5. (Extensão de Operadores Lineares Limitados) *Sejam X um espaço normado, G um subespaço de X e Y um espaço de Banach. Se $T : G \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado, então existe extensão $\widetilde{T} : \overline{G} \longrightarrow Y$ linear e limitada tal que $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in G$ e $||\widetilde{T}|| = ||T||$.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{G}$. Logo, existe uma seqüência (x_n) em G tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Como T é um operador linear limitado, temos que a seqüência (Tx_n) é de Cauchy no espaço de Banach Y. Portanto, existe $y \in Y$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Como isto vale para todo $x \in \overline{G}$, podemos definir $\widetilde{T} : \overline{G} \longrightarrow Y$ como sendo $\widetilde{T}x = y$, onde $y = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$ para alguma seqüência (x_n) em G tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Como T é uniformemente contínua, segue que $\widetilde{T}$ está bem definida. É fácil ver que $\widetilde{T}$ é um operador linear limitado tal que $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in G$ e, além disso, $||\widetilde{T}|| = ||T||$. □

Teorema 1.3. (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam X um espaço normado e $G \subsetneqq X$ um subespaço. Se $f : G \longrightarrow I\!K$ é linear e contínua, então existe $\widetilde{f} : X \longrightarrow I\!K$, $\widetilde{f} \in X^*$ tal que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ e $||\widetilde{f}|| = ||f||$.*

Demonstração. Veja [2], corolário I.2, p.3. □

Como conseqüências imediatas do teorema de Hahn-Banach temos:

Corolário 1.1. *Sejam X um espaço normado e $x \in X$, $x \neq 0$. Então existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$ e $f(x) = ||x||$.*

Corolário 1.2. *Seja X um espaço normado. Se $f(x) = 0$ para toda $f \in X^*$, então $x = 0$.*

Corolário 1.3. *Seja X um espaço normado. Para todo $x \in X$ tem-se*

$$||x|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||_{X^*}=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||_{X^*}\leq 1}} |f(x)|$$

Lembremos que um conjunto A de um espaço vetorial é convexo se dados quaisquer $x, y \in A$ então o segmento de reta que liga estes dois pontos está em A, isto é, $tx+(1-t)y \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

Teorema 1.4. (Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, A e B subconjuntos convexos de X, não vazios tais que $A \cap B = \varnothing$. Suponhamos que A é aberto. Então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in X^*$, $f \neq 0$ tais que $f(x) < \alpha \leq f(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.*

Demonstração. Veja [2], teorema I.6, p.5. □

Teorema 1.5. (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço normado. Seja $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\sup_{\alpha \in I} ||T_\alpha x||$ é finito para cada $x \in X$. Então tem-se que $\sup_{\alpha \in I} ||T_\alpha||$ é finito.*

Demonstração. Veja [2], teorema II.1, p.16. □

Teorema 1.6. *Seja B um subconjunto de um espaço normado X. Então B é um subconjunto limitado de X se, e somente se $f(B)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$ para todo $f \in X^*$.*

Demonstração. Veja [2], corolário II.3, p.17. □

Definição 1.8. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto $G_T = \{(x, y) \in X \times Y; \, y = Tx\}$.*

Teorema 1.7. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se o gráfico de T é fechado.*

Demonstração. Veja [2], teorema II.7, p.20. □

Definição 1.9. *Sejam X e Y espaços normados e seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definimos o adjunto de T, e denotamos por T^*, como sendo a aplicação $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ definida por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$ para todo $\varphi \in Y^*$.*

Observe que como $T : X \longrightarrow Y$ e $\varphi : Y \longrightarrow I\!K$ são lineares e contínuas, temos que $\varphi \circ T : X \longrightarrow I\!K$ é linear e contínua. Daí T^* está bem definida. A linearidade de T^* é clara. Além disso, pelo Teorema de Hahn-Banach (corolário 1.3) temos que $\sup\limits_{||\varphi|| \leq 1} |\varphi(Tx)| = ||Tx||$, donde segue que $||T^*|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Tx|| = ||T||$. Concluímos que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e $||T^*|| = ||T||$.

Vamos denotar por B_X a bola fechada de centro na origem e raio 1 e por S_X a esfera de centro na origem e raio 1, isto é, $B_X = \{x \in X; ||x|| \leq 1\}$ e $S_X = \{x \in X; ||x|| = 1\}$. Temos a seguinte caracterização:

Teorema 1.8. (Teorema de Riesz) *Seja X um espaço normado. Então B_X é compacta se, e somente se a dimensão de X é finita.*

Demonstração. Veja [4], teorema 4, p.3. □

Sabemos que nos espaços métricos e, conseqüentemente, nos espaços normados, valem o critério seqüencial de continuidade e a caracterização dos subconjuntos compactos K através do comportamento das seqüências contidas em K. Da topologia geral sabemos que, quando trabalhamos com espaços topológicos arbitrários, torna-se necessária a introdução do conceito de net (ou seqüência generalizada) que definiremos a seguir.

Definição 1.10. *Um conjunto $\mathcal{D}$ é dito dirigido se existe uma relação binária, denotada por $\leq$, em $\mathcal{D}$ que satisfaz:*

i) *$d \leq d$ para todo $d \in \mathcal{D}$.*

ii) *se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$ para todos $a, b, c \in \mathcal{D}$.*

iii) *dados $a, b \in \mathcal{D}$ existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $a \leq d$ e $b \leq d$.*

Definição 1.11. *Seja X um espaço topológico. Um net em X é uma aplicação $\lambda : \mathcal{D} \longrightarrow X$, onde $\mathcal{D}$ é um conjunto dirigido. Denotamos este net por $(\lambda_d)_{d\in\mathcal{D}}$. Dizemos que um net $(\lambda_d)_{d\in\mathcal{D}}$ converge para $x \in X$ se, para toda vizinhança U de x em X, existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\lambda_d \in U$ se $d_0 \leq d$.*

Lembremos que uma sub-base $\mathcal{S}$ para uma topologia Γ em X é uma coleção de subconjuntos não vazios de X cuja união dos elementos de $\mathcal{S}$ é igual a X e, que a base $\mathcal{B}$ associada a $\mathcal{S}$ é a coleção de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$. A seguir, definiremos uma topologia em espaços normados que é, em geral, estritamente menos fina do que a topologia da norma e que desempenha um papel muito importante na análise funcional.

Definição 1.12. *Seja X um espaço normado. A topologia fraca de X, denotada por w, é a topologia que tem como sub-base a coleção $\mathcal{S} = \{\varphi^{-1}(A);\ \varphi \in X^*,\ A \subset I\!\!K$ aberto $\}$.*

Dizemos que a topologia da norma é a topologia forte de X e indicaremos por β. A partir da definição, é fácil ver que $w \subset \beta$. Pela definição de topologia fraca, temos que a coleção $\{V_{\varphi,\epsilon}(x_0);\ x_0 \in X;\ \varphi \in X^*;\ \epsilon > 0\}$, onde $V_{\varphi,\epsilon}(x_0) = \{x \in X;\ |\varphi(x - x_0)| < \epsilon\}$ para $x_0 \in X$, $\varphi \in X^*$ e $\epsilon > 0$, forma uma sub-base para a topologia fraca de X. Assim, um net $(x_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset X$ converge para $x \in X$ na topologia fraca se, e somente se $\varphi(x_d) \to \varphi(x)$ para toda $\varphi \in X^*$. Neste caso, dizemos que $(x_d)_{d\in\mathcal{D}}$ converge fracamente para x e indicamos este fato por $x_d \xrightarrow{w} x$.

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [9], nos diz que, em um espaço de Banach X, qualquer seqüência fracamente convergente a zero tal que nenhuma de suas subseqüências converge a zero na norma admite sempre uma subseqüência básica.

Teorema 1.9. (Princípio da Seleção de Bessaga-Pelczyński) *Seja $(x_i)_i$ uma seqüência de elementos de um espaço de Banach X tal que $x_i \xrightarrow{w} 0$ e $\inf\limits_i ||x_i|| > 0$. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma subseqüência $(y_i)_i$ de $(x_i)_i$ que é uma seqüência básica com constante básica maior ou igual a $1-\epsilon$.*

Demonstração. Veja [4], p.42. □

Seja K um subconjunto de um espaço normado X. Neste trabalho $\overline{K}$ representará o fecho de K na topologia da norma e $\overline{K}^w$ representará o fecho de K na topologia fraca. Em geral, $\overline{K} \subsetneqq \overline{K}^w$. O seguinte resultado é uma conseqüência do teorema de Hahn-Banach:

Teorema 1.10. *Sejam X um espaço normado e K um subconjunto convexo de X. Então $\overline{K}^w = \overline{K}$.*

Demonstração. Veja [2], teorema III.7, p.38. □

Teorema 1.11. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se, e somente se $T \in \mathcal{L}((X,w),(Y,w))$.*

Demonstração. Veja [2], teorema III.9, p.39. □

Representaremos por X^{**} o dual topológico de X^*, onde X é um espaço normado. Definimos $J : X \longrightarrow X^{**}$ como sendo $Jx = \delta_x$ para todo $x \in X$, onde $\delta_x : X^* \longrightarrow I\!\!K$ é tal que $\delta_x(f) = f(x)$ para toda $f \in X^*$. J é chamada a aplicação canônica de X em X^{**}. É fácil ver que J está bem definida, é linear e é uma isometria, portanto X e $J(X) \subset X^{**}$ são isometricamente isomorfos.

Definição 1.13. *Dizemos que um espaço de Banach X é reflexivo se J for sobrejetora. Neste caso, X e X^{**} são isometricamente isomorfos.*

Teorema 1.12. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se B_X é compacta pela topologia fraca de X.*

Demonstração. Veja [2], teorema III.16, p.44. □

Proposição 1.6. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se M é um subespaço vetorial fechado de X então M é um subespaço de Banach reflexivo.*

Demonstração. Veja [2], proposição III.17, p.45. □

Seja X^* o dual topológico de um espaço normado X. Podemos considerar em X^*, além das topologias forte e fraca, uma outra topologia importante, a chamada topologia fraca estrela.

Definição 1.14. *Seja X um espaço normado. A topologia fraca estrela de X^*, denotada por w^*, é a topologia que tem como sub-base a coleção $\mathcal{S} = \{\varphi^{-1}(A); \varphi \in J(X) \subset X^{**}, A \subset \mathbb{K} \text{ aberto }\} = \{\delta_x^{-1}(A); x \in X, A \subset \mathbb{K} \text{ aberto }\}$.*

É claro que a topologia fraca estrela de X^* é menos fina do que a topologia fraca de X^*. Da definição temos que a coleção $\mathcal{S} = \{W_{x,\epsilon}(\varphi_0);\ x \in X,\ \varphi_0 \in X^*,\ \epsilon > 0\}$, onde $W_{x,\epsilon}(\varphi_0) = \{\psi \in X^*;\ |(\psi - \varphi_0)(x)| < \epsilon\}$ para $x \in X$, $\varphi_0 \in X^*$ e $\epsilon > 0$ é uma sub-base para a topologia fraca estrela. Além disso, um net $(\varphi_d)_{d\in\mathcal{D}} \subset X^*$ converge para $\varphi \in X^*$ na topologia fraca estrela se, e somente se $\varphi_d(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que $(\varphi_d)_{d\in\mathcal{D}}$ converge fraca estrela para φ e indicamos este fato por $\varphi_d \xrightarrow{w^*} \varphi$. Temos o seguinte teorema para a bola unitária fechada do dual de um espaço de Banach X com respeito a topologia fraca estrela:

Teorema 1.13. (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Seja X um espaço de Banach. Então o conjunto B_{X^*} é compacto na topologia fraca estrela de X^*.*

Demonstração. Veja [2], teorema III.15, p.42. □

1.2 Teoria da Integração

Definição 1.15. *Seja X um conjunto não-vazio arbitrário. Uma σ-álgebra em X é uma coleção $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, onde $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto das partes de X, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *$X \in \mathcal{A}$.*

(ii) *se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$.*

(iii) *se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in I\!N$, então $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.*

Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X, então dizemos que os elementos de $\mathcal{A}$ são os conjuntos mensuráveis em X e que $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável.

Proposição 1.7. *Seja X um conjunto qualquer. Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, então existe uma menor σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ em X que contém $\mathcal{F}$, isto é, se $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$ então $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C}$. Dizemos que $\sigma(\mathcal{F})$ é a σ-álgebra em X gerada por $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Veja [3], proposição 1.1.1, p.2. □

Definição 1.16. *Seja (X, Γ) um espaço topológico qualquer e seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra em X gerada por Γ, isto é, $\mathcal{B} = \sigma(\Gamma)$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos de Borel, ou conjuntos Borel mensuráveis ou conjuntos mensuráveis a Borel.*

Definição 1.17. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma medida sobre X é uma função $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *sempre que* $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ *é uma família enumerável de elementos de* $\mathcal{A}$ *dois a dois disjuntos.*

Definição 1.18. *Um espaço medida é um espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$ *que tem uma medida* μ *definida na* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de seus conjuntos mensuráveis. Denotamos estes espaços como triplas* $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Observação 1.2. *O caso em que* $X = \mathbb{R}^n$, *H.Lebesgue construiu uma* σ*-álgebra* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *que contém os borelianos e uma medida* m *sobre* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. *Esta medida* m *é chamada de medida de Lebesgue.*

Definição 1.19. *Uma medida* μ *definida na* σ*-álgebra de todos os conjuntos de Borel num espaço de Hausdorff localmente compacto* X *é chamada uma medida de Borel sobre* X. *Suponhamos que* $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra que contém todos os borelianos. Então, uma medida* μ *definida em* $\mathcal{A}$ *é dita regular se*

(i) *para todo subconjunto compacto* K *de* X *tem-se* $\mu(K) < \infty$.

(ii) *para cada* $A \in \mathcal{A}$ *temos* $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, V \, aberto\}$.

(iii) *para cada conjunto aberto* U *de* X *temos* $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \, compacto\}$.

Uma medida que satisfaz condições **(ii)** *e* **(iii)** *é dita regular exterior e interior, respectivamente.*

Observação 1.3. *Lembremos que um espaço de Hausdorff* X *é um espaço topológico que dados* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existem abertos disjuntos* V *e* W *tais que,* $x \in V$ *e* $y \in W$. *Um espaço topológico* X *é localmente compacto se todo ponto* x *de* X *está contido em um aberto* V *tal que* $\overline{V}$ *é compacto.*

Definição 1.20. *Se* $(X, \mathcal{A})$ *é um espaço mensurável e* (Y, Γ) *é um espaço topológico, então uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita mensurável se* $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ *para todo* $V \in \Gamma$.

Observação 1.4. *Se* $(X, \mathcal{B})$ *é um espaço mensurável onde* $\mathcal{B}$ *é a* σ*-álgebra de Borel e* Y *é um espaço topológico, então toda função contínua* $f : X \longrightarrow Y$ *é mensurável, ou Borel mensurável. As funções Borel mensuráveis são freqüentemente chamadas de funções de Borel.*

Nas definições que se seguem, iremos sempre considerar $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra num conjunto X qualquer e μ uma medida definida em $\mathcal{A}$. Se $A \in \mathcal{A}$, então definimos a função característica I_A como sendo

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definição 1.21. *Uma função* $u : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *é uma função simples se o seu conjunto imagem é finito, isto é,* $u(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$*. Neste caso* u *é da forma* $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}$*, onde* $A_i = \{x \in X; u(x) = \alpha_i\}$*.*

Definição 1.22. *Se* u *é uma função simples e* $E \in \mathcal{A}$*, definimos a integral de* u *sobre* E *como sendo*

$$\int_E u\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Observação 1.5. *Como pode acontecer que* $\alpha_i = 0$ *e* $\mu(A_i \cap E) = \infty$ *para algum* i*, convencionamos escrever* $0.\infty = 0$*.*

Definição 1.23. *Se* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *é mensurável e* $E \in \mathcal{A}$*, definimos*

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E u\, d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples mensuráveis u *tais que* $0 \leq u \leq f$*. O número* $\int_E f d\mu$ *é chamado integral de Lebesgue de* f *sobre* E *com respeito à medida* μ*.*

Seja $f : X \longrightarrow I\!\!R$, podemos associar a f, a sua parte positiva (f^+) e negativa (f^-) do seguinte modo

$$f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = -(f \wedge 0)(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Logo, temos que $f = f^+ - f^-$ e que $|f| = f^+ + f^-$. Portanto, mostra-se que

- $f : X \longrightarrow I\!R$ é mensurável se, e somente se f^+ e f^- são mensuráveis.
- se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável.

Definição 1.24. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Definimos $\mathcal{L}^1(\mu)$ como sendo o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow I\!K$ tais que $\int_X |f| d\mu < \infty$. Os elementos de $\mathcal{L}^1(\mu)$ são chamados funções Lebesgue integráveis (com respeito a μ).*

Definição 1.25. *Seja $f = u + iv$ onde u e v são funções reais mensuráveis em X. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e $E \in \mathcal{A}$, definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu,$$

onde u^+, u^- e v^+, v^- são as partes positivas e negativas de u e v, respectivamente.

Proposição 1.8. *$\mathcal{L}^1(\mu)$ é um espaço vetorial e $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ para toda $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Além disso, a aplicação $\varphi : \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ é um funcional linear.*

Demonstração. Veja [3], proposição 2.3.7, p.66. □

Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Denotamos por $C_c(X)$ como sendo o conjunto das funções contínuas f de X em $I\!K$ tais que $suppf = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$ é compacto. Dizemos que um funcional linear φ sobre $C_c(X)$ é positivo se $\varphi(f) > 0$ para todo $f \in C_c(X)$ tal que $f > 0$.

Teorema 1.14. (Teorema da Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e seja φ uma aplicação linear, contínua e positiva sobre $C_c(X)$. Então existe uma única medida de Borel regular μ sobre X tal que para toda $f \in C_c(X)$ tem-se*

$$\varphi(f) = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. veja [3], teorema 7.2.8, p.209. □

Observação 1.6. *O teorema da representação de Riesz continua válido se trocarmos $C_c(X)$ por $C(X)$ e considerarmos X um espaço compacto.*

Se $\mathcal{M}(X)$ denota o conjunto das medidas de Borel μ sobre X, isto é, $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de todos os conjuntos de Borel no espaço compacto X, podemos definir em $\mathcal{M}(X)$ a norma $||\mu|| = \mu(X)$ e o teorema da representação de Riesz nos diz que a cada aplicação linear positiva φ sobre $C(X)$ corresponde uma e só uma $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $||\varphi|| = ||\mu||$.

Teorema 1.15. *Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, X um espaço mensurável com medida μ e $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ funções mensuráveis, então:*

a) Desigualdade de Hölder

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

b) Desigualdade de Minkowski

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Veja [3], proposições 3.3.2 e 3.3.3, p.101. □

Definição 1.26. *Se $0 < p < \infty$, o espaço $\mathcal{L}^p(\mu)$ consiste de todas as funções complexas mensuráveis definidas em X tais que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.*

Proposição 1.9. *Seja $1 < p < \infty$. Definindo*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

tem-se que $|| \cdot ||_p$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Demonstração. Veja [3], corolário 3.3.4, p.102. □

Definição 1.27. *Seja $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável. Definimos o supremo essencial de f, e denotamos por $||f||_\infty$, como sendo o "número"*

$$||f||_\infty = \begin{cases} \inf S, & S \neq \varnothing \\ \infty, & S = \varnothing \end{cases}$$

onde $S = \{\alpha > 0; \mu(|f|^{-1}[(\alpha, \infty)]) = 0\}$.

Definição 1.28. *Definimos $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ como sendo o espaço de todas as funções complexas mensuráveis em X tais que $||f||_\infty < \infty$.*

Proposição 1.10. *Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, então*

$$fg \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e } ||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Demonstração. Segue direto da desigualdade de Hölder. □

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Podemos definir em $\mathcal{L}^p(\mu)$ a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \text{ se, e só se } ||f - g||_p = 0 \text{ se, e só se } \mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Denotaremos por $L^p(\mu)$ como sendo o espaço quociente $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$. Deste modo temos que $||\cdot||_p$ é uma norma. Assim, temos então o seguinte:

Teorema 1.16. (Teorema de Riesz-Fisher) *$(L^p(\mu), ||\cdot||_p)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Veja [3], teorema 3.4.1, p.106. □

Teorema 1.17. *Os espaços $L^p(\mu)$ são reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Veja [2], teorema IV.10, p.59. □

Teorema 1.18. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma seqüência de funções mensuráveis em* X *tal que existe* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *para todo* $x \in X$*. Suponha que exista* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para todos* $x \in X$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Então:*

$$f \in L^1(\mu) \ e \ \int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3], teorema 2.4.4, p.72. □

Capítulo 2

Convergência de Seqüências em Espaços de Banach

Neste capítulo, iremos definir convergências de séries em espaços normados e veremos sobre que condições essas definições são equivalentes. Em particular, mostraremos que o fato de uma série absolutamente convergente ser incondicionalmente convergente está relacionado com a completude do espaço. Porém, apresentaremos exemplos em c_0 e ℓ_2 que nos mostram a existência de séries incondiocionalmente convergentes que não convergem abolutamente. Estudaremos as seqüências p-somáveis e fracamente p-somáveis e, por fim, provaremos o teorema de Bessaga-Pelczyński.

2.1 Convergências Absoluta e Incondicional

Definição 2.1. *Sejam X um espaço normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se a seqüência das suas somas parciais converge, isto é, se existe um $x \in X$ tal que a seqüência $(s_k)_k$ converge para x, onde $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2. *Sejam X um espaço normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ converge.*

Quando uma função $\pi : I\!N \longrightarrow I\!N$ é bijetora, dizemos que π é uma permutação de $I\!N$.

Definição 2.3. *Sejam X um espaço normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge qualquer que seja a permutação π de $I\!N$.*

Observação 2.1. *Observe que se uma série converge incondicionalmente, então converge pois a identidade é uma permutação de $I\!N$.*

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata de um conhecido resultado da análise real.

Proposição 2.1. *Seja X um espaço normado. Sejam $(x_n)_n$ e $(a_n)_n$ seqüências em X e em $I\!R$, respectivamente, tais que $||x_n|| \leq a_n$ para todo $n \in I\!N$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente.*

A definição de séries incondicionalmente convergentes não exige que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ sejam convergentes para o mesmo limite, seja qual for a permutação π de $I\!N$. Quando estudamos convergência de séries de números reais, temos o seguinte:

Teorema 2.1. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de números reais absolutamente convergente, então para toda permutação π de $I\!N$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Riemann provou um fato surpreendente para as séries condicionalmente convergentes, isto é, séries que convergem mas não convergem absolutamente.

Teorema 2.2. (Teorema de Riemann) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais condicionalmente convergente. Então, fixado $a \in I\!R$, existe uma perumtação π de $I\!N$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = a$. Além disso, existem permutações para os quais a série diverge para $+\infty$ e $-\infty$.*

Sua demonstração pode ser vista em [12] (teorema 3.54, página 76). Como conseqüência deste teorema temos:

Teorema 2.3. *Uma série de números reais converge absolutamente se, e somente se converge incondicionalmente.*

Isto nos diz que convergências absoluta e incondicional de séries de números reais são conceitos equivalentes. Este teorema continua válido em $\mathbb{R}^n$ devido à convergência coordenada a coordenada e, portanto continua válido, também, para qualquer espaço de dimensão finita. Além disso, os teoremas 2.1 e 2.3 mostram que se uma série de números reais converge incondicionalmente então toda permutação converge para o mesmo limite. Veremos agora que este fato continua válido em espaços normados não importando sua dimensão.

Proposição 2.2. *Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço normado X é incondicionalmente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para o mesmo limite, qualquer que seja a permutação π de $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ e que exista uma permutação π tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s' \neq s$. Pelo corolário 1.1, como $s \neq s'$, existe funcional $f \in X^*$ tal que $f(s) \neq f(s')$. Como f é linear e contínua temos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ é uma série convergente em $\mathbb{K}$. Por outro lado, pelo teorema 2.3, esta série não pode convergir absolutamente pois a permutação π é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = f(s) \neq f(s') = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\pi(n)})$. Logo pelo teorema de Riemann (teorema 2.2) existe uma permutação σ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\sigma(n)})$ diverge. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ diverge, pois se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = a$, então pela linearidade e continuidade de f, teríamos $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\sigma(n)}) = f(a)$ o que contraria a escolha de σ. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é divergente e isto contradiz a hipótese de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ser incondicionalmente convergente. $\square$

O exemplo a seguir mostra que num espaço normado de dimensão infinita podemos ter uma série que converge absolutamente mas não converge.

Exemplo 2.1. Seja $X = \wp(K)$ o espaço dos polinômios reais com domínio em $K = [0,1]$. Para todo $n \in I\!\!N$, seja $p_n : K \longrightarrow I\!\!R$ definida por $p_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Temos que $(p_n)_n \subset \wp(K) \subset C(K)$ e $||p_n||_K = \frac{1}{n!}$ para todo $n \in I\!\!N$. Sabemos da análise real que $\sum_{n=0}^{\infty} ||p_n||_K = e$, de modo que a série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$ é absolutamente convergente para todo $x \in K$. Por outro lado temos que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge em $C(K)$ para a função $f \in C(K)$ definida por $f(x) = e^x$, que não é um polinômio.

Na verdade, veremos no teorema 2.4 que a existência de uma série absolutamente convergente que não seja convergente só é possível se este espaço não é completo. Antes de apresentarmos o teorema 2.4, vamos enunciar o critério de Cauchy, cuja demonstração se faz analogamente ao caso de séries em $I\!\!K$, uma vez que os espaços de Banach são completos.

Proposição 2.3. (Critério de Cauchy) *Seja X um espaço de Banach. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, e somente se a seqüência das suas somas parciais é de Cauchy, isto é*

$$\lim_{n,m\to\infty} \left|\left| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right|\right| = 0.$$

Teorema 2.4. *Um espaço normado X é um espaço de Banach se, e somente se toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série em um espaço de Banach X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ converge. Mostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, usando a proposição anterior. De fato, seja $n > m$, então temos que $|| \sum_{i=m+1}^{n} x_i|| \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||x_i||$ e daí, como $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||$ é uma série convergente de números reais temos que $\lim\limits_{n,m\to\infty} || \sum_{i=m+1}^{n} x_i|| = 0$ donde segue da proposição anterior que a série converge. Reciprocamente, seja $(x_n)_n$ uma seqüência de Cauchy em X. Então para cada $k \in I\!\!N$ existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $||x_m - x_n|| < \frac{1}{2^k}$ para todos $m, n \geq n_k$. Como $n_{k+1} > n_k$ temos $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$. Chamando $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ tem-se $||y_k|| \leq \frac{1}{2^k}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ converge absolutamente e, por hipótese, é convergente. Mas temos que $x_{n_1} + y_1 + ... + y_k = x_{n_{k+1}}$ e fazendo $k \to \infty$ segue que $(x_{n_k})_k$ é convergente. Logo $(x_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy e tem uma subseqüência convergente, donde segue que $(x_n)_n$ é convergente, o que prova que X é um espaço de Banach. $\square$

Corolário 2.1. *Um espaço normado X é um espaço de Banach se, e somente se toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Suponhamos que toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. Logo, em particular, temos que a série é ela própria convergente, e portanto, pelo teorema anterior, temos que X é um espaço de Banach. Reciprocamente, seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série absolutamente convergente em um espaço de Banach X. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ é absolutamente convergente em $I\!\!R$, donde pelo teorema 2.3 temos que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{\pi(n)}||$ converge para toda permutação π de $I\!\!N$. Como X é um espaço de Banach pelo teorema anterior, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ é convergente para toda permutação π de $I\!\!N$, isto é $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente. $\square$

Vimos então que para toda série absolutamente convergente num espaço normado ser incondicionalmente convergente o importante é o espaço ser completo e isto independe da dimensão do espaço. Por outro lado, o fato do espaço ser completo não é suficiente para garantir a convergência absoluta das séries incondicionalmente convergentes. Veremos a seguir, através de dois exemplos, que ao contrário do caso de dimensão finita, num espaço de Banach de dimensão infinita a convergência incondicional de uma série não garante a convergência absoluta desta série.

Exemplo 2.2. Seja $X = c_0$ e tomemos a seqüência $(x_n)_n$ como sendo $x_n = \frac{e_n}{n}$ para todo $n \in I\!\!N$. Analisemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em c_0.
Esta série não converge absolutamente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é a série harmônica. Agora vejamos que esta série converge incondicionalmente para $x = (\frac{1}{n})_n \in c_0$. Com efeito, seja σ uma permutação de $I\!\!N$ e seja $\epsilon > 0$. Existe $N \in I\!\!N$ tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Para todo $k \in \{1, ..., N\}$ existe $n_k \in I\!\!N$ tal que $\sigma(n_k) = k$. Seja $n_0 = \max\{n_1, ..., n_N\}$. Para $n \geq n_0$,

temos

$$\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(1)} + \ldots + x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n_1)} + \ldots + x_{\sigma(n_N)} + \sum_{j\in A} x_{\sigma(j)} = x_1 + \ldots + x_N + \sum_{j\in A} x_{\sigma(j)}$$

onde $A = \{1, \ldots, n\} \setminus \{n_1, \ldots, n_N\}$.

Logo para todo $n \geq n_0$,

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right|\right|_{\infty} \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Como a permutação σ foi tomada arbitrária temos que a série converge incondicionalmente.

Exemplo 2.3. Seja $X = \ell_2$ e tomemos a mesma seqüência $(x_n)_n$ do exemplo 2.2 e analisemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em ℓ_2.

Assim como no exemplo 2.2, temos que esta série não converge absolutamente em ℓ_2, pois $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é a série harmônica. Resta verificar que esta série converge incondicionalmente para $x = (\frac{1}{n})_n \in \ell_2$. Para isso, seja σ uma permutação qualquer de $I\!N$ e seja $\epsilon > 0$. Tomemos $N \in I\!N$ tal que para todo $n > N$ temos $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \epsilon^2$. Para $k \in \{1, \ldots, N\}$ existe $n_k \in I\!N$ tal que $\sigma(n_k) = k$. Seja $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Para $n \geq n_0$, já vimos que

$$\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} = x_1 + \ldots + x_N + \sum_{j\in A} x_{\sigma(j)}$$

onde $A = \{1, \ldots, n\} \setminus \{n_1, \ldots, n_N\}$.

Reorganizamos os elementos do conjunto A de forma que $A = \{j_1, \ldots, j_{n-N}\}$ onde $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \ldots < \sigma(j_{n-N})$. Como $\sigma(j_i) \geq N + i$ para todo $i = 1, \ldots, n-N$, obtemos que $|| \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x||_2^2 = ||(0, \ldots, 0, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \ldots)||_2^2$ que terá apenas um número finito de zeros, logo

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right|\right|_2^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \epsilon^2.$$

E portanto, como σ foi tomada uma permutação qualquer, temos que a série converge incondicionalmente.

Observe que se trocarmos a seqüência $(\frac{1}{n})_n$ por uma outra seqüência $(a_n)_n$ tal que $(a_n)_n \in \ell_2$ mas $(a_n)_n \notin \ell_1$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge incondicionalmente mas não absolutamente. O Teorema Clássico de Dvoretzky-Rogers, que será demonstrado no capítulo 3, nos garantirá que em um espaço de Banach de dimensão infinita sempre podemos encontrar uma série incondicionalmente convergente que não seja absolutamente convergente.

Antes de terminar este parágrafo vamos introduzir o conceito de série perfeitamente convergente e mostrar que, em espaços de Banach, este conceito é equivalente ao de série incondicionalmente convergente.

Definição 2.4. *Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço normado é dita perfeitamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge para toda seqüência $(\alpha_n)_n$ onde $\alpha_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in I\!N$.*

Teorema 2.5. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série num espaço de Banach X. São equivalentes:*

a) *a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.*

b) *toda série da forma $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ (subsérie da série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$), onde $(n_i)_i$ é uma seqüência crescente, converge.*

c) *a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge perfeitamente.*

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (c)
Seja $(\alpha_n)_n$ uma seqüência arbitrária tal que $\alpha_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in I\!N$. Particionemos o conjunto dos números naturais da seguinte maneira, $I\!N = A \cup B$, onde $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$ é o conjuntos dos índices tais que $\alpha_n = 1$ e $B = \{m_1, m_2, \ldots\}$ é o conjunto dos índices tais que $\alpha_n = -1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que as seqüências $(n_i)_i$ e $(m_j)_j$ são crescentes. Por hipótese, temos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ convergem. Como para todo $k \in I\!N$ temos $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} - \sum_{j=1}^{k} x_{m_j}$, então, tomando o limite quando $k \to \infty$ segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ converge.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Seja $(n_i)_i$ uma seqüência arbitrária crescente em $I\!N$. Considere $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$ e $B = I\!N \backslash A$. Sejam $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_k)_k$ seqüências tais que $\alpha_k = 1$ para todo $k \in I\!N$ e $\beta_k = 1$ se $k \in A$ ou -1 se $k \in B$. Por hipótese, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k$ convergem e, portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\alpha_k x_k + \beta_k x_k)$ converge.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Suponhamos, por absurdo, que exista seqüência crescente de números naturais $(n_i)_i$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ diverge. Logo, pelo critério de Cauchy, existem $\epsilon_0 > 0$ e números naturais $m_k < r_k < m_{k+1}$ tais que $\left|\left|\sum_{i=m_k}^{r_k} x_{n_i}\right|\right| \geq \epsilon_0$ para todo $k \in I\!N$. Denotemos os termos da seqüência $(x_k)_k$ que não aparecem em nenhum dos segmentos $(x_{n_i})_{i=m_k}^{r_k}$ por $y_1, y_2, \ldots$. Construimos um rearranjo da série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ da seguinte maneira: somamos os elementos do segmento $(x_{n_i})_{i=m_1}^{r_1}$ com y_1, depois os elementos do segmento $(x_{n_i})_{i=m_2}^{r_2}$ seguido do termo y_2 e assim por diante. Por construção, temos que esta série diverge, o que contradiz (a).

(b) $\Rightarrow$ (a)

Suponhamos, por absurdo, que exista uma permutação π de $I\!N$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ diverge. Pelo critério de Cauchy temos que existem $\epsilon_0 > 0$ e números naturais $l_i < p_i < l_{i+1}$ tais que $\left|\left|\sum_{k=l_i}^{p_i} x_{\pi(k)}\right|\right| \geq \epsilon_0$ para todo $i \in I\!N$. Denotemos por Δ_i o segmento $(x_{\pi(k)})_{k=l_i}^{p_i}$ para todo $i \in I\!N$. Temos que os Δ_i são disjuntos e $\inf\limits_i \left|\left|\sum_{k=l_i}^{p_i} x_{\pi(k)}\right|\right| = \delta > 0$. Rearrumamos os Δ_i de modo crescente e denotamos por m_i e r_i como o menor e o maior índice, respectivamente. Logo, $\Delta_i \subset (x_n)_{n=m_i}^{r_i}$ para todo $i \in I\!N$. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos escolher os Δ_i de modo que $r_1 < m_2 < r_2 < m_3 < r_3 < \ldots$. Portanto, somando os termos de Δ_1 com Δ_2 depois Δ_3 e assim sucessivamente, obtemos uma subsérie da série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ que diverge, o que contradiz (b). $\square$

2.2 Os espaços $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$

Definição 2.5. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma seqüência $(x_n)_n$ em X é fortemente p-somável (ou, simplesmente, p-somável) se $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p < \infty$, isto é, a seqüência de escalares $(||x_n||)_n$ está em ℓ_p.*

Por simplicidade, denotaremos as seqüências $(x_n)_n$ por (x_n). Observe que diretamente da definição, temos (x_n) é 1-somável se, e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

Indicaremos por $\ell_p(X)$ o conjunto das seqüências p-somáveis em X. Definindo a adição e o produto por escalar em $\ell_p(X)$ da seguinte maneira

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad (x_n), (y_n) \in \ell_p(X),$$

$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n), \qquad \lambda \in I\!\!K, (x_n) \in \ell_p(X),$$

mostra-se que $\ell_p(X)$ é um espaço vetorial sobre $I\!\!K$.
É natural definir $|| \cdot ||_p : \ell_p(X) \longrightarrow I\!\!R$ por

$$||(x_n)||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda $(x_n) \in \ell_p(X)$. Afirmamos que $|| \cdot ||_p$ é uma norma em $\ell_p(X)$ e que $(\ell_p(X), || \cdot ||_p)$ é um espaço de Banach. A demonstração deste fato se faz de modo análogo ao caso de ℓ_p.

Definição 2.6. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma seqüência (x_n) em X é fracamente p-somável se $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para todo $\varphi \in X^*$, isto é, $(\varphi(x_n)) \in \ell_p$ para todo $\varphi \in X^*$.*

Indicaremos por $\ell_p^w(X)$ como sendo o conjunto das seqüências fracamente p-somáveis em X. Tornamos $\ell_p^w(X)$ um espaço vetorial sobre $I\!\!K$ definindo em $\ell_p^w(X)$ uma adição e um produto por escalar de maneira análoga à feita em $\ell_p(X)$.

Observação 2.2. *Temos que* $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

Com efeito, se $(x_n) \in \ell_p(X)$, *então* $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p$ *converge. Se* $\varphi \in X^*$, *então para todo* $k \in I\!N$, $\sum_{n=1}^{k} |\varphi(x_n)|^p \leq ||\varphi||^p \sum_{n=1}^{k} ||x_n||^p$ *e daí temos que* $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p$ *converge. Como* φ *foi tomada arbitrariamente, segue que* $(x_n) \in \ell_p^w(X)$.

É natural definir $|| \cdot ||_p^w : \ell_p^w(X) \longrightarrow I\!R$ por

$$||(x_n)||_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda $(x_n) \in \ell_p^w(X)$.

Proposição 2.4. *A função* $|| \cdot ||_p^w$ *é uma norma em* $\ell_p^w(X)$ *e* $(\ell_p^w(X), || \cdot ||_p^w)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. É de fácil verificação que $\ell_p^w(X)$ é um espaço vetorial sobre $I\!K$ com as operações definidas. Vejamos que $||(x_n)||_p^w$ é uma norma em $\ell_p^w(X)$. Temos que $||(x_n)||_p^w < \infty$ para toda $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. De fato, associemos a cada $(x_n) \in \ell_p^w(X)$ a seguinte aplicação:

$$u : X^* \longrightarrow \ell_p$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(x_n))$$

Temos que u está bem definida, pois $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. Além disso, é claro que u é linear. Vejamos que u é contínua. Para provarmos este fato, usaremos o teorema do gráfico fechado (teorema 1.7). Suponhamos que $(\varphi_k, u(\varphi_k)) \to (\varphi, (y_n))$ em $X^* \times \ell_p$. Isto significa que quando $k \to \infty$ temos $\varphi_k \to \varphi$ em X^* e $(\varphi_k(x_n))_n = u(\varphi_k) \to (y_n)$ em ℓ_p. Mostraremos que $u(\varphi) = (y_n)$, donde o gráfico de u é fechado e, portanto, u é contínua. Com efeito, como $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para toda $\varphi \in X^*$ temos que $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = 0$ para toda $\varphi \in X^*$, logo $\{\varphi(x_n); n \in I\!N\}$ é um conjunto limitado para toda $\varphi \in X^*$. Pelo teorema 1.6 temos que o conjunto $\{x_n; n \in I\!N\}$ é limitado em X, isto é, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in I\!N$, $||x_n|| \leq M$, ou seja, $||\frac{1}{M} x_n|| \leq 1$ para todo $n \in I\!N$. Mas como $\varphi_k \to \varphi$ em X^*, dado $\epsilon > 0$, existe um $k_1 \in I\!N$ tal que $||\varphi_k - \varphi|| < \frac{\epsilon}{2M}$ para todo $k \geq k_1$, isto é, $|\varphi_k(z) - \varphi(z)| < \frac{\epsilon}{2M}$ para todo $k \geq k_1$ e para todo $z \in X$ com $||z|| \leq 1$. Em particular, para $z_n = \frac{1}{M}x_n, n \in I\!N$, temos que

$$|\varphi_k(x_n) - \varphi(x_n)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (*)$$

para todo $k \geq k_1$ e para todo $n \in I\!N$. Por outro lado, temos $u(\varphi_k) \to (y_n)$ em ℓ_p mas $u(\varphi_k) = (\varphi_k(x_n))_n$, logo existe $k_2 \in I\!N$ tal que $(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k(x_n) - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \geq k_2$, donde

$$|\varphi_k(x_n) - y_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (**)$$

para todo $k \geq k_2$ e para todo $n \in I\!N$. Seja $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Então para todo $n \in I\!N$ temos

$$0 \leq |\varphi(x_n) - y_n| \leq \underbrace{|\varphi(x_n) - \varphi_{k_0}(x_n)|}_{(*)} + \underbrace{|\varphi_{k_0}(x_n) - y_n|}_{(**)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo para todo $\epsilon > 0$ temos $0 \leq |\varphi(x_n) - y_n| < \epsilon$ para todo $n \in I\!N$. Donde $\varphi(x_n) = y_n$ para todo $n \in I\!N$, isto é, $(y_n) = (\varphi(x_n)) = u(\varphi)$. Portanto u é contínua. De $||u|| < \infty$ e

$$||u|| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} ||u(\varphi)||_p = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} ||(\varphi(x_n))_n\|_p = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = ||(x_n)||_p^w,$$

concluímos que $||(x_n)||_p^w < \infty$.

Verifiquemos as condições de norma. Sejam $(x_n), (y_n) \in \ell_p^w(X)$ e $\lambda \in I\!K$. Temos:

(i) $||(x_n)||_p^w \geq 0$, pela definição.

(ii) Se $||(x_n)||_p^w = 0$ então $(x_n) = 0$. De fato, pois se $(x_n) \neq 0$, então existe $n_0 \in I\!N$ tal que $x_{n_0} \neq 0$ e pelo teorema de Hahn-Banach (corolário 1.1), existe $\varphi_0 \in X^*$ tal que $||\varphi_0|| = 1$ e $\varphi_0(x_{n_0}) = ||x_{n_0}|| \neq 0$. Portanto,

$$||(x_n)||_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |\varphi_0(x_{n_0})| > 0$$

isto é, $||(x_n)||_p^w \neq 0$ se $(x_n) \neq 0$.

(iii) $||\lambda(x_n)||_p^w = |\lambda| \, ||(x_n)||_p^w$. Com efeito,

$$||\lambda(x_n)||_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left[|\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] = |\lambda| \, ||(x_n)||_p^w.$$

(iv)$||(x_n)+(y_n)||_p^w \leq \|(x_n)\|_p^w + \|(y_n)\|_p^w$. Basta lembrar que pela desigualdade de Minkowski temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) + \varphi(y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e tomar o supremo quando $\varphi \in B_{X^*}$.

Vejamos finalmente que $(\ell_p^w(X), ||\cdot||_p^w)$ é um espaço de Banach. Seja $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\ell_p^w(X)$. Para cada $k \in I\!N$, seja $x^k = (x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in I\!N$ tal que para todo $k' > k \geq k_0$ temos $||x^{(k)} - x^{(k')}||_p^w < \epsilon$, isto é

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n^{(k')})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Logo, para todo $k' > k \geq k_0$ e para toda $\varphi \in B_{X^*}$ tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n^{(k')})|^p < \epsilon^p. \qquad (***)$$

Assim, para cada $n \in I\!N$ temos que $|\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n^{(k')})| < \epsilon$ para toda $\varphi \in B_{X^*}$ e para todo $k' > k \geq k_0$.

Pelo corolário 1.3, temos que para todo $n \in I\!N$,

$$||x_n^{(k)} - x_n^{(k')}|| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n^{(k')})| < \epsilon$$

para todo $k' > k \geq k_0$. Assim, fixando $n \in I\!N$, temos que $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em X que é completo, donde existe $x_n \in X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$. Vejamos que $x = (x_n) \in \ell_p^w(X)$ e $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ em $\ell_p^w(X)$.

Para $\varphi \in B_{X^*}$ temos $\lim_{k'\to\infty} \varphi(x_n^{(k')}) = \varphi(x_n)$ donde por $(***)$ segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n)|^p \leq \epsilon^p$$

para todo $k \geq k_0$. Então

$$\|x - x^{(k)}\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)}) - \varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$.
Agora, observe que $x = (x_n) = (x_n^{(k_0)}) - (x_n^{(k_0)} - x_n)$ e como $(x_n^{(k_0)} - x_n), (x_n^{(k_0)}) \in \ell_p^w(X)$ e $\ell_p^w(X)$ é um espaço vetorial sobre $I\!K$, temos que $x \in \ell_p^w(X)$. Concluímos que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ em $(\ell_p^w(X), ||\cdot||_p^w)$ o que completa a demonstração. $\square$

Observação 2.3. *Pela obersevação 2.2 a aplicação* $id : (\ell_p(X), ||\cdot||_p) \longrightarrow (\ell_p^w(X), ||\cdot||_p^w)$, *onde id é a aplicação identidade, está bem definida e além disso, para todo* $(x_n) \in \ell_p(X)$ *e* $\varphi \in X^*$ *temos*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\varphi||\,||(x_n)||_p$$

e, portanto, tomando o supremo em relação a todos $\varphi \in B_{X^*}$ *temos que* $||(x_n)||_p^w \leq ||(x_n)||_p$. *Isto significa que a aplicação inclusão acima definida é contínua.*

Observação 2.4. *Seja E um espaço vetorial sobre $I\!K$ e seja P um conjunto dirigido de semi-normas em E. Suponhamos que P separa os pontos de E, isto é, dado $x \neq 0, x \in E$, existe $\alpha \in P$ tal que $\alpha(x) \neq 0$. Seja $\mathcal{S} = \{B_\epsilon^\alpha : \epsilon > 0, \alpha \in P\}$ onde $B_\epsilon^\alpha = \{x \in E; \alpha(x) < \epsilon\}$. O conjunto $\{a + \mathcal{S}\}$ é uma base para uma topologia de Hausdorff em E tal que as operações de espaço vetorial $(x, y) \in E \times E \longmapsto x + y \in E$ e $(\lambda, x) \in I\!K \times E \longmapsto \lambda x \in E$ são contínuas. Além disso, $\mathcal{S}$ é uma base de vizinhanças do zero nesta topologia (formada por conjuntos absolutamente convexos). Dizemos que o espaço E munido desta topologia é um espaço vetorial topológico localmente convexo ou, simplesmente, um espaço localmente convexo. Podemos definir $\ell_p(E)$ como sendo o conjunto das seqüências (x_n) em E tais que $\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(x_n)]^p < \infty$ para toda $\alpha \in P$. Dizemos que os elementos de $\ell_p(E)$ são as seqüências p-somáveis ou absolutamente p-somáveis no espaço localmente convexo E.*

Se E é um espaço normado com dual topológico E^*, podemos associar a cada $\varphi \in E^*$ a semi-norma m_φ definida por $m_\varphi(x) = |\varphi(x)|$ para todo $x \in E$. Observe que a família $P = \{m_\varphi; \varphi \in E^*\}$ é um conjunto de semi-normas que separa os pontos de E. Com efeito, dado $x \neq 0, x \in E$, pelo corolário 1.2, existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ e, portanto, existe

$m_\varphi \in P$ tal que $m_\varphi(x) \neq 0$. A topologia gerada em E por esta família de semi-normas é a topologia fraca.

Vamos denotar por E_w o espaço normado E munido da topologia fraca. Então

$$\ell_p(E_w) = \ell_p^w(E)$$

pois $(x_n) \in \ell_p(E_w)$ se, e somente se $\sum_{n=1}^\infty [m_\varphi(x_n)]^p < \infty$ para toda $\varphi \in E^*$, o que equivale a dizer que $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para toda $\varphi \in E^*$, ou seja, $(x_n) \in \ell_p^w(E)$.

Seja E um espaço normado. Uma seqüência $(x_n) \subset E$ será dita incondicionalmente somável se a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge incondicionalmente em E. Mostramos na proposição 2.2 que se (x_n) é uma seqüência incondicionalmente somável, então todas as seqüências $(\sum_{n=1}^k x_{\pi(n)})$ convergem em E para o mesmo limite quando π percorre o conjunto das permutações de $I\!N$.

Proposição 2.5. *Toda seqüência incondicionalmente somável num espaço normado é fracamente 1-somável.*

Demonstração. Com efeito, seja (x_n) uma seqüência incondicionalmente somável em um espaço normado E. Mostraremos que $(x_n) \in \ell_1^w(E)$. Por hipótese a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge incondicionalmente em E, isto é, $\left(\sum_{n=1}^k x_{\pi(n)}\right)_k$ converge para toda permutação π de $I\!N$. Isto implica que para todo $\varphi \in E^*$ a seqüência $\left(\sum_{n=1}^k \varphi(x_n)\right)$ converge incondicionalmente em $I\!K$, donde pelo teorema 2.3 converge absolutamente, isto é, $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|$ converge para toda $\varphi \in E^*$. Ou seja $(x_n) \in \ell_1^w(E)$. $\square$

É natural perguntarmos quando uma seqüência fracamente 1-somável será incondicionalmente somável. O exemplo a seguir nos mostra que nem sempre isto será verdade.

Exemplo 2.4. Considere a seqüência canônica (e_n) em c_0. Temos que $(e_n) \in \ell_p^w(c_0)$. De fato, para todo $\varphi \in (c_0)^* = \ell_1$ temos $\varphi = (\alpha_i)$, donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{n,i} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = ||\varphi|| < \infty.$$

Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ diverge pois $||e_n||_\infty = 1$ para todo $n \in I\!N$. Portanto (e_n) não é incondicionalmente somável.

Além disso, $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ diverge também na topologia fraca, pois caso contrário, existiria um $s = (x_j) \in c_0$ tal que $\varphi(s_k) \to \varphi(s)$ para toda $\varphi \in (c_0)^*$, onde (s_k) é a seqüência das suas somas parciais. Em particular, dado $j \in I\!N$, tomando $\varphi = e_j \in (c_0)^*$ temos $\varphi(s_k) = 1$ para todo $k \geq j$ e daí concluímos que $x_j = \varphi(s) = 1$ para todo $j \in I\!N$. Portanto teríamos que $(1, 1, 1, \ldots) = s \in c_0$, o que é um absurdo.

Definição 2.7. *Dizemos que um espaço de Banach X contém uma cópia de c_0 se existe um homeomorfismo linear entre c_0 e um subespaço de X.*

Observe que pelos exemplos 2.2 e 2.4 temos que em qualquer espaço de Banach que contenha uma cópia de c_0 existem uma série que converge incondicionalmente mas não absolutamente e uma seqüência fracamente 1-somável que tem série fortemente (fracamente) divergente. O teorema de Bessaga-Pelczyński nos garantirá que quando o espaço de Banach não contiver uma cópia de c_0 então toda seqüência fracamente 1-somável será incondicionalmente somável. Antes de provarmos este teorema, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n) \in \ell_1^w(X)$. Então existe uma constante $A > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| \leq A||\varphi||$ para toda $\varphi \in X^*$.*

Demonstração. Seja $(x_n) \in \ell_1^w(X)$ e considere (e_n) a seqüência canônica de ℓ_1. Definimos para todo $k \in I\!N$ os operadores $S_k : X^* \longrightarrow \ell_1$ como sendo $S_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{k} \varphi(x_n) e_n$ para toda $\varphi \in X^*$. É fácil ver que $(S_k) \subset \mathcal{L}(X^*, \ell_1)$. Como $(x_n) \in \ell_1^w(X)$, temos que $\sup_k ||S_k(\varphi)||_1$ é finito para toda $\varphi \in X^*$. Como X^* é um espaço de Banach, pelo teorema de Banach-Steinhaus (teorema 1.5), temos que $\sup_k ||S_k||$ é finito. Daí, tomando $A = \sup_k ||S_k||$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| \leq A||\varphi||$ para toda $\varphi \in X^*$. $\square$

Teorema 2.6. (Teorema de Bessaga-Pelczyński) *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

a) *X não contém uma cópia de c_0.*

b) *Toda seqüência em $\ell_1^w(X)$ tem série fracamente convergente.*

c) *Toda seqüência em $\ell_1^w(X)$ é incondicionalmente somável.*

d) *Toda seqüência em $\ell_1^w(X)$ tem série convergente.*

Demonstração. (d) $\Rightarrow$ (c)
Suponhamos que $(x_n) \in \ell_1^w(X)$ e seja uma seqüência de escalares $(\alpha_n) \subset \{-1, 1\}$. Então para $\varphi \in X^*$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\alpha_n x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|$ converge. Logo, $(\alpha_n x_n) \in \ell_1^w(X)$ e, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge. Como a seqüência dos $(\alpha_n) \subset \{-1, 1\}$ foi escolhida arbitrariamente, temos pelo teorema 2.5 que (x_n) é incondicionalmente somável.
(c) $\Rightarrow$ (b)
Seja $(x_n) \in \ell_1^w(X)$. Por hipótese, (x_n) é incondicionalmente somável, donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente convergente.
(b) $\Rightarrow$ (a)
Segue do fato de que todo espaço de Banach que contém uma cópia de c_0 tem uma seqüência fracamente 1-somável que tem série fracamente divergente (ver exemplo 2.4).
(a) $\Rightarrow$ (d)
Suponhamos que exista em X uma seqüência (x_i) fracamente 1-somável tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ diverge. Pelo critério de Cauchy, existem $\epsilon_0 > 0$ e números naturais $n_{k+1} > n_k + 1$ tais que $\left|\left|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i\right|\right| \geq \epsilon_0$ para todo $k \in I\!N$. Consideremos a seqüência (y_k) tal que $y_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i$ para todo $k \in I\!N$. Temos então que $\inf_k ||y_k|| = \delta \geq \epsilon_0 > 0$. Além disso, $(y_k) \in \ell_1^w(X)$. De fato, se $\varphi \in X^*$ temos que se $p \in I\!N$, então

$$\sum_{k=1}^{p} |\varphi(y_k)| = \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \varphi(x_i) \right| \leq \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |\varphi(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n_{p+1}} |\varphi(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|$$

e fazendo $p \to \infty$ temos que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(y_k)|$ converge pois (x_i) é fracamente 1-somável. Consequentemente $y_k \xrightarrow{w} 0$ e, como $\inf_k ||y_k|| > 0$, pelo teorema 1.9, podemos extrair de (y_k) uma subseqüência básica (z_k). Claramente, (z_k) é fracamente 1-somável donde, pelo lema 2.1, existe uma constante $A > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(z_k)| \leq A||\varphi||$ para toda $\varphi \in X^*$. Seja (e_k) a seqüência canônica de c_0 e considere $T : Lin[e_k] \longrightarrow \overline{Lin}[z_k] \subset X$ definida por $Te_k = z_k$ para todo $k \in I\!N$. Por definição temos que T é linear. Vejamos que T é contínua. De fato, seja $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in Lin[e_k]$. Então, pelo teorema de Hahn-Banach (corolário 1.3) temos

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\right|\right| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} \left|\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\right)\right| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(z_k)\right| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \sup_{\varphi \in S_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(z_k)| \leq A \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| = A||x||_{\infty}, \end{aligned}$$

e isto vale para todo $x \in Lin[e_k]$, donde T é contínua. Portanto, temos que T é um operador linear contínuo e $\overline{Lin}[z_k]$ é um espaço de Banach e, daí, a proposição 1.5 nos garante que existe um operador linear contínuo $\widetilde{T} : \overline{Lin}[e_k] \longrightarrow \overline{Lin}[z_k]$ que estende T. Vejamos que $\widetilde{T}^{-1}$ é contínua. Com efeito, seja $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \in \overline{Lin}[z_k]$, então como (z_k) é uma subseqüência básica existe uma constante $M > 0$ tal que $|| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|| \geq M \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \, ||z_k||$ donde segue que $|| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|| \geq M \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \inf_k ||z_k|| \geq M\delta \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$. Observando que $T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k$, segue que $||T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right)|| \geq M\delta \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right|\right|_{\infty}$. Lembrando que $\widetilde{T}$ é uma extensão contínua de T, tomando o limite quando $n \to \infty$ na desigualdade anterior temos que $\left|\left|\widetilde{T}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right)\right|\right| \geq M\delta \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right|\right|_{\infty}$ e isto mostra que T é um homeomorfismo linear. Observando que o fecho na norma em c_0 do espaço gerado pela seqüência canônica é o próprio c_0, temos que X contém uma cópia de c_0, mas isto contradiz nossa hipótese. $\square$

Observação 2.5. *Seja X um espaço de Banach e $K \subset X^*$. Suponhamos que para todo $x \in X$ tem-se $||x|| = \sup_{\varphi \in K} |\varphi(x)|$. Se $(x_n) \in \ell_p^w(X)$ então*

$$||(x_n)||_p^w = \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Com efeito, pela definição temos

$$||(x_n)||_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{m} \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{m} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então,

$$||(x_n)||_p^w = \sup_{m} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} ||(\varphi(x_n))_{n=1}^m||_p \,.$$

Mas pelo corolário 1.3 e o exemplo 1.3, se $(\varphi(x_n))_{n=1}^m \in \ell_p^m$*,*

$$||(\varphi(x_n))_{n=1}^m||_p = \sup_{\alpha \in B_{(\ell_p^m)^*}} |\alpha[(\varphi(x_n))]| = \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \left| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi(x_n) \right|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
||(x_n)||_p^w &= \sup_{m} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \left| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi(x_n) \right| = \sup_{m} \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right) \right| \\
&= \sup_{m} \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \left|\left| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right|\right| = \sup_{m} \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \sup_{\varphi \in K} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right) \right| = \\
&= \sup_{m} \sup_{\varphi \in K} \sup_{(\alpha_n) \in B_{\ell_{p^*}^m}} \left| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi(x_n) \right| = \sup_{m} \sup_{\varphi \in K} ||(\varphi(x_n))_{n=1}^m||_p \\
&= \sup_{\varphi \in K} \sup_{m} \left(\sum_{n=1}^{m} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Já vimos que $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$. A igualdade não vale em geral, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.5. Seja $X = c_0$ e $x_n = \frac{1}{n} e_n$ para todo $n \in I\!N$.

Temos $x_n = (x_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ onde

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{n}, & k = n \end{cases}$$

donde $||x_n||_\infty = \frac{1}{n}$ para todo $n \in I\!N$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_\infty$ diverge e daí $(x_n) \notin \ell_1(c_0)$.

Vejamos que $(x_n) \in \ell_1^w(c_0)$. Para isso lembremos que $\ell_1 = (c_0)^*$ (exemplo 1.1).

Logo, para toda $\xi = (\xi_k) \in \ell_1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_{n,k} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty.$$

Assim $\ell_1(c_0) \subsetneqq \ell_1^w(c_0)$.

Mais ainda, $\ell_p(c_0) \subsetneqq \ell_p^w(c_0)$ para $p > 1$. Basta tomar para todo $n \in I\!N$ a seqüência $x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} e_n$ e usando o mesmo argumento acima, lembrando que $\ell_1 \subsetneqq \ell_p$.

Pelo exemplo anterior, temos que nem sempre $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ para um espaço de Banach X qualquer e $1 \leq p < \infty$. Mostraremos no capítulo 3 que uma condição necessária e suficiente para que isto ocorra é que a dimensão de X seja finita.

Capítulo 3

O Teorema de Dvoretzky-Rogers

Neste capítulo, salvo quando dito explicitamente o contrário, nossos espaços serão sempre espaços de Banach. Afim de provaramos o teorema de Dvoretzky-Rogers, definiremos os operadores p-somantes, daremos exemplos desses operadores e provaremos algumas caracterizações destes operadores bem como o teorema de dominação e fatoração de Pietsch. Além disso, provaremos que todo operador p-somante é completamente contínuo, isto é, leva seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes na norma. Por fim, definiremos os operadores compactos e fracamente compactos, veremos que todo operador p-somante é fracamante compacto donde concluiremos que a composição de operadores p-somantes é compacto. Assim, mostraremos que o operador identidade em X será p-somante se, e somente se X tem dimensão finita. Usando este resultado em conjunto com o teorema de Bessaga-Pelczyński, provaremos o teorema de Dvoretzky-Rogers.

3.1 Operadores p-somantes

Definição 3.1. *Um operador $S : X \longrightarrow Y$ é absolutamente p-somante (ou, simplesmente, p-somante) se $(Sx_n) \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_n) \in \ell_p^w(X)$.*

Denotaremos por $\Pi_p(X, Y)$ o espaço dos operadores p-somantes de X em Y.

Se $X = c_0$, no exemplo 2.5 mostramos que $\ell_p(c_0) \subsetneqq \ell_p^w(c_0)$ portanto o operador identidade $id : X \longrightarrow X$ não é p-somante. Observe que dimensão de X é infinita. Na verdade, provaremos mais tarde que o operador identidade é p-somante se, e somente se a dimensão de X for finita.

Proposição 3.1. *Todo operador p-somante de X em Y é contínuo.*

Demonstração. Com efeito, seja $S : X \longrightarrow Y$ um operador p-somante e suponhamos, por absurdo, que S não é contínuo, isto é, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$, $||x_n|| \leq 1$ tal que $||Sx_n|| > 2^n$.
Mas $\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \in \ell_p(X)$ pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|\frac{x_n}{2^n}\right|\right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

e como $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$ temos $\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \in \ell_p^w(X)$.
Por outro lado $\left(S\left(\frac{x_n}{2^n}\right)\right) = \left(\frac{Sx_n}{2^n}\right) \notin \ell_p(Y)$, pois do contrário $\frac{Sx_n}{2^n} \to 0$, quando $n \to \infty$ donde existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left|\frac{Sx_n}{2^n}\right|\right| < 1$ para todo $n \geq n_0$, o que contraria a construção de (x_n).
Então S não é p-somante, o que contraria a hipótese. □

Lema 3.1. *Para toda $S \in \Pi_p(X, Y)$ a aplicação*

$$\Sigma_S : \ell_p^w(X) \longrightarrow \ell_p(Y)$$

$$(x_n) \longmapsto (Sx_n)$$

é linear e contínua.

Demonstração. Seja $S \in \Pi_p(X,Y)$ qualquer. A aplicação Σ_S está bem definida pois S é p-somante. É fácil verificar que Σ_S é linear. Assim, basta mostrar a continuidade de Σ_S. Seja $(z^k)_k \subset \ell_p^w(X)$ uma seqüência convergente em $\ell_p^w(X)$ tal que $(\Sigma_S z^k)_k$ converge em $\ell_p(Y)$. Sejam $z = \lim\limits_{k\to\infty} z^k \in \ell_p^w(X)$ e $y = \lim\limits_{k\to\infty} \Sigma_S z^k \in \ell_p(Y)$. Mostraremos que $y = \Sigma_S z$ donde, pelo teorema do gráfico fechado (teorema 1.7), Σ_S é contínua. Como $z, z^k \in \ell_p^w(X)$ para todo $k \in I\!N$ então $z = (z_n)$ e $z^k = (z_n^k)_n$ para todo $k \in I\!N$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in I\!N$ tal que se $k \geq k_0$ temos $||z^k - z||_p^w < \epsilon$. Dado $\varphi \in B_{X^*}$, para todo $n \in I\!N$ temos

$$|\varphi(z_n^k - z_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(z_n^k - z_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e tomando o supremo quando $\varphi \in B_{X^*}$ temos

$$\sup_{\varphi \in B_{x^*}} |\varphi(z_n^k - z_n)| \leq ||z^k - z||_p^w.$$

Assim, para qualquer $n \in I\!N$ fixado, pelo corolário 1.3, obtemos

$$||z_n^k - z_n|| \leq ||z^k - z||_p^w < \epsilon$$

para todo $k \geq k_0$. Isto é, fixado $n \in I\!N$ temos $\lim\limits_{k\to\infty} z_n^k = z_n$ em X, e como S é contínua, pois é p-somante, $\lim\limits_{k\to\infty} Sz_n^k = Sz_n$ em Y para todo $n \in I\!N$. Agora, como $y \in \ell_p(Y)$, temos $y = (y_n)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 \in I\!N$ tal que qualquer que seja $k \geq k_1$ temos que $||\Sigma_S z^k - y||_p = ||(Sz_n^k)_n - (y_n)_n||_p < \epsilon$. Mas $||\cdot||_p^w \leq ||\cdot||_p$ em $\ell_p(Y)$, donde para todo $k \geq k_1$ temos $||(Sz_n^k)_n - (y_n)_n||_p^w < \epsilon$. Usando o mesmo argumento usado para mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} z_n^k = z_n$ em X, obtemos que $\lim\limits_{k\to\infty} Sz_n^k = y_n$ em Y para todo $n \in I\!N$. Da unicidade do limite temos $y_n = Sz_n$ para todo $n \in I\!N$ e portanto $y = (y_n) = (Sz_n) = \Sigma_S z$. □

Proposição 3.2. *Um operador $S : X \longrightarrow Y$ é p-somante se, e somente se existe $\rho \geq 0$ tal que para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (*)$$

Neste caso, $||\Sigma_S||$ é o menor $\rho \geq 0$ que satisfaz $(*)$.

Demonstração. Pelo lema 3.1, Σ_S é linear e contínua, e portanto $||(Sx_n)||_p \leq ||\Sigma_S||\, ||(x_n)||_p^w$ se $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. Conseqüentemente, dado qualquer subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$, definindo $x = (\xi_n)$ onde

$$\xi_n = \begin{cases} x_n, & n = 1, \ldots, k \\ 0, & n > k, \end{cases}$$

temos que $(\xi_n) \in \ell_p^w(X)$ e, além disso

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\Sigma_S|| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

donde satisfaz $(*)$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $\rho \geq 0$ tal que para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de X vale a desigualdade $(*)$. Seja $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. Temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_k \left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_k \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_k \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donde segue que $||(Sx_i)||_p \leq \rho ||(x_i)||_p^w < \infty$, pois $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. Então pela definição 3.1 temos que S é p-somante.

Por (1), $||\Sigma_S|| \in \{\rho \geq 0; \rho \text{ satisfaz } (*)\}$, logo $||\Sigma_S|| \geq \inf\{\rho \geq 0; \rho \text{ satisfaz } (*)\}$. Por outro lado, se ρ satisfaz $(*)$, temos $||\Sigma_S(x_i)||_p \leq \rho ||(x_i)||_p^w$ para todo $(x_n) \in \ell_p^w(X)$, donde $||\Sigma_S|| \leq \rho$ e, portanto $||\Sigma_S|| \leq \inf\{\rho \geq 0; \rho \text{ satisfaz } (*)\}$.

Segue que $||\Sigma_S|| = \inf\{\rho \geq 0; \rho \text{ satisfaz } (*)\}$. □

Iremos denotar o número $||\Sigma_S||$ por $\Pi_p(S)$. Assim a desigualdade $(*)$ pode ser escrita do seguinte modo:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ é um subconjunto finito de X.

Observação 3.1. *$||S|| \leq \Pi_p(S)$.*

Com efeito, para cada $x \in X$, tomamos o subconjunto unitário $\{x\} \subset X$. Pela proposição acima em conjunto com o corolário 1.3, temos

$$||Sx|| \leq \Pi_p(S)||x||.$$

Portanto $||S|| \leq \Pi_p(S)$.

Exemplo 3.1. Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, μ uma medida de Borel regular sobre K e $1 \leq p < \infty$. Para cada $\varphi \in L^p(\mu)$ podemos definir um "operador multiplicação" $M_\varphi : C(K) \longrightarrow L^p(\mu)$ definido por $M_\varphi(f) = f\varphi$ tal que M_φ é um operador p-somante e $\Pi_p(M_\varphi) = ||\varphi||_p$. Com efeito:

É claro que M_φ é linear. Definimos para cada $w \in K$ a aplicação $\delta_w : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\delta_w(f) = f(w)$. Então δ_w está bem definida. Além disso é claro que é linear e, como $w \in K$, temos $|\delta_w(f)| = |f(w)| \leq \sup\limits_{x\in K}|f(x)| = ||f||_K$. Isto implica na continuidade de δ_w. Assim, temos que $\delta_w \in C(K)^*$ para todo $w \in K$. Seja $D = \{\delta_w : w \in K\} \subset C(K)^*$ e $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$. Observe que $||f||_K = \sup\limits_{w\in K} |\delta_w(f)| = \sup\limits_{\psi\in D} |\psi(f)|$ e, pela observação 2.5 , temos

$$||(f_i)_{i=1}^m||_p^w = \sup_{\psi\in D}\left(\sum_{i=1}^m |\psi(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |\delta_w(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m ||M_\varphi f_i||_p^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^m \int_K |f_i\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_K |\varphi|^p \left(\sup_{w\in K}\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right) d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||(f_i)_{i=1}^m||_p^w \, ||\varphi||_p = ||\varphi||_p \sup_{\psi\in B_{C(K)^*}} \left(\sum_{i=1}^m |\psi(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pela proposição anterior, temos que M_φ é p-somante e $\Pi_p(M_\varphi) \leq ||\varphi||_p$. Por outro lado, pela observação 3.1 $||M_\varphi|| \leq \Pi_p(M_\varphi)$ e segue daí que $\Pi_p(M_\varphi) \geq ||M_\varphi 1||_p = ||\varphi||_p$. Portanto, M_φ é p-somante e $\Pi_p(M_\varphi) = ||\varphi||_p$.

Exemplo 3.2. Sejam K e μ nas condições do exemplo anterior. Seja $1 \leq p < \infty$. O operador inclusão $J_p : C(K) \longrightarrow L^p(\mu)$ é p-somante. Com efeito, tomando $\varphi \equiv 1$ no exemplo 3.1, temos que $\varphi \in L^p(\mu)$ e $M_1 = J_p$. Além disso temos $\Pi_p(J_p) = (\mu(K))^{\frac{1}{p}}$.

Proposição 3.3. *Para todo $1 \leq p < \infty$ temos:*

a) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \Pi_p(Y, Z)$ então $ST \in \Pi_p(X, Z)$ onde $ST = S \circ T$.*

b) *Se $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $S \in \Pi_p(X, Y)$ então $RS \in \Pi_p(X, Z)$ onde $RS = R \circ S$.*

Demonstração. **a)** Se $T \equiv 0$, então a afirmativa se verifica trivialmente. Suponhamos que $T \neq 0$. Seja $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ um subconjunto finito. Então $\{Tx_1, \ldots, Tx_k\} \subset Y$ é um subconjunto finito de Y e pela proposição 3.2, como S é p-somante, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||ST(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |\varphi(Tx_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas pela definição 1.9, $\varphi(Tx_n) = T^*(\varphi)(x_n)$, donde

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||ST(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |T^*(\varphi)(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \rho||T^*|| \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} \left| \frac{T^*}{||T^*||}(\varphi)(x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $\frac{T^*(\varphi)}{||T^*||} \in X^*$ e $\left|\left| \frac{T^*(\varphi)}{||T^*||} \right|\right| \leq 1$ se $\varphi \in B_{Y^*}$, temos que $\frac{T^*(\varphi)}{||T^*||} \in B_{X^*}$ se $\varphi \in B_{Y^*}$. Daí,

$$\sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} \left| \frac{T^*}{||T^*||}(\varphi)(x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |\psi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, portanto

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||ST(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho_1 \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |\psi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $\rho_1 = \rho||T^*||$. Donde segue pela proposição 3.2 que $ST \in \Pi_p(X, Z)$.

b) Seja $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ um subconjunto finito. Logo $\{Sx_1, \ldots, Sx_k\} \subset Y$ é finito. Como $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$ temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||RS(x_n)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||R|| \left(\sum_{n=1}^{k} ||Sx_n||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como S é p-somante, pela proposição 3.2, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||Sx_n||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde segue que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} ||RS(x_n)||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||R||\rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{k} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, pela proposição 3.2 temos que $RS \in \Pi_p(X, Z)$. □

Proposição 3.4. *Para todo $1 \leq p < \infty$ temos:*

a) $(\Pi_p(X, Y), \Pi_p(\cdot))$ *é um espaço de Banach.*

b) *Se $S \in \Pi_p(E, F)$, $R \in \mathcal{L}(F, Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X, E)$ então $RST \in \Pi_p(X, Y)$. Além disso, $\Pi_p(RST) \leq ||R||\, \Pi_p(S)\, ||T||$.*

Demonstração. **a)** É fácil verificar que $\Pi_p(\cdot)$ é uma norma em $\Pi_p(X, Y)$. Vejamos que $(\Pi_p(X, Y), \Pi_p(\cdot))$ é completo. Com efeito, seja $(S_n) \subset \Pi_p(X, Y)$ uma seqüência de Cauchy, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que se $n, m \geq n_0$ então

$$\Pi_p(S_n - S_m) < \epsilon. \qquad (1)$$

Como $||S_n - S_m|| \leq \Pi_p(S_n - S_m)$ se $n, m \in I\!N$, temos que (S_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$, que é completo, pois Y é um espaço de Banach e, portanto, existe $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $||S_n - S|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $S_n - S_m$ é p-somante para todo $n, m \in I\!N$, dado qualquer $\{x_1, ..., x_k\} \subset X$ finito temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||S_n x_i - S_m x_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S_n - S_m) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, para todos $n, m \geq n_0$, usando (1) obtemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||S_n x_i - S_m x_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas $||S_n - S|| \to 0$, donde $S_n(x) \to S(x)$ para todo $x \in X$ quando $n \to \infty$, logo, para $1 \leq i \leq k$ temos que $S_n(x_i) \to S(x_i)$ quando $n \to \infty$. Mantendo $m \geq n_0$ fixo e fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, tem-se

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i - S_m x_i||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e pela proposição 3.2 temos $S_m - S \in \Pi_p(X,Y)$ e $\Pi_p(S_m - S) \leq \epsilon$ para todo $m \geq n_0$. Segue daí que $S \in \Pi_p(X,Y)$ e $\lim\limits_{m \to \infty} S_m = S$ em $\Pi_p(X,Y)$. Portanto provamos **(a)**.

(b) Como conseqüência direta da proposição 3.3 temos que $RST \in \Pi_p(X,Y)$. Portanto nos resta verificar que $\Pi_p(RST) \leq ||R||\, \Pi_p(S)\, ||T||$. Se $T \equiv 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Suponhamos então $T \neq 0$. Seja $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ finito. Temos que $R \in \mathcal{L}(F,Y)$, donde

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||RST(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||R|| \left(\sum_{i=1}^{k} ||ST(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $S \in \Pi_p(E,F)$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||ST(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S) \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(Tx_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas $\varphi(Tx_i) = T^*(\varphi)(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e daí, como $||T^*|| = ||T||$, obtemos como na demonstração da proposição 3.3, a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||ST(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S)||T|| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||RST(x_i)||^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||R||\, \Pi_p(S)||T|| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, portanto, pela definição de $\Pi_p(RST)$, temos $\Pi_p(RST) \leq ||R||\, \Pi_p(S)||T||$. $\square$

Proposição 3.5. *Se $1 \leq p < q < \infty$, então $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$ e $\Pi_q(\cdot) \leq \Pi_p(\cdot)$ em $\Pi_p(X,Y)$.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Observe que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ se, e só se $\frac{pq}{r} + p = q$ se, e só se $\frac{1}{r/p} + \frac{1}{q/p} = 1$. Sejam $S \in \Pi_p(X,Y)$ e $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ um subconjunto finito. Definimos $\lambda_i = ||Sx_i||^{\frac{q}{r}}$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^q\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^{\frac{pq}{r}+p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p ||Sx_i||^{\frac{pq}{r}}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^p \lambda_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{k} ||S(\lambda_i x_i)||^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Como S é p-somante,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||S(\lambda_i x_i)||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

Tomando $\varphi \in B_{X^*}$ e usando a desigualdade de Hölder (proposição 1.1) para os expoentes $\frac{r}{p}, \frac{q}{p}$ temos que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^p |\varphi(x_i)|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^r\right)^{\frac{p}{r}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Assim,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e tomando o supremo quando $\varphi \in B_{X^*}$ nesta desigualdade, obtemos

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De (1) temos então,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Pi_p(S) \left(\sum_{i=1}^{k} ||Sx_i||^q\right)^{\frac{1}{r}} \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

donde
$$\left(\sum_{i=1}^{k}||Sx_i||^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \Pi_p(S)\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
e pela proposição 3.2 isto nos diz que $S \in \Pi_q(X,Y)$ e $\Pi_q(S) \leq \Pi_p(S)$. Como S foi tomado arbitrariamente em $\Pi_p(X,Y)$, temos que $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$ e $\Pi_q(S) \leq \Pi_p(S)$ para todo $S \in \Pi_p(X,Y)$. □

Observação 3.2. *A proposição acima nos diz também que a inclusão*

$$id : (\Pi_p(X,Y), \Pi_p(\cdot)) \longrightarrow (\Pi_q(X,Y), \Pi_q(\cdot))$$

é contínua.

Exemplo 3.3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço medida tal que $\mu(X) = 1$ (ou seja, um espaço medida de probabilidade). Dado $1 \leq p < \infty$, cada $\varphi \in L^p(\mu)$ induz um "operador multiplicação"

$$M_\varphi : L^\infty(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$$

$$f \longmapsto f\varphi$$

tal que M_φ é p-somante e $\Pi_p(M_\varphi) = ||\varphi||_p$. Com efeito:
Sejam $f_1, \ldots, f_m \in L^\infty(\mu)$ e tomamos p^* tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ se $p > 1$ (ou $p^* = \infty$ se $p = 1$). Definimos $u : \ell_{p^*}^m \longrightarrow L^\infty(\mu)$ tal que $u(x) = u_x = \sum_{i=1}^m x_i f_i$ para todo $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^m$, onde $\ell_{p^*}^m$ está definido no exemplo 1.3. Vemos facilmente que u é linear. Sejam $B_{p^*} = B_{\ell_{p^*}^m} = B_{\left(\ell_p^m\right)^*}$ e $E = L^\infty(\mu)$. Para toda $T \in B_{E^*}$, temos $(Tf_i)_{i=1}^m \in \ell_p^m$ e, neste caso, usando o corolário 1.3, temos

$$||(Tf_i)_{i=1}^m||_p = \sup_{\widetilde{x}\in B_{p^*}}|\widetilde{x}((Tf_i)_{i=1}^m)| = \sup_{(x_i)_{i=1}^m\in B_{p^*}}\left|\sum_{i=1}^m x_i Tf_i\right| = \sup_{x\in B_{p^*}}|T(u(x))|.$$

Daí, tomando o supremo quando $T \in B_{E^*}$,

$$\sup_{T\in B_{E^*}}||(Tf_i)_{i=1}^m||_p = \sup_{T\in B_{E^*}}\sup_{x\in B_{p^*}}|T(u(x))| = \sup_{x\in B_{p^*}}\sup_{T\in B_{E^*}}|T(u(x))| = \sup_{x\in B_{p^*}}||u(x)||_\infty.$$

Por outro lado,

$$\sup_{T \in B_{E^*}} ||(Tf_i)_{i=1}^m||_p = \sup_{T \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^m |T(f_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = ||(f_i)_{i=1}^m||_p^w.$$

Logo

$$||u|| = \sup_{x \in B_{p^*}} ||u(x)||_\infty = ||(f_i)_{i=1}^m||_p^w. \quad (*)$$

Fixemos $x = (x_i)_{i=1}^m \in B_{p^*}$ e seja (c_n) uma seqüência de números reais tal que $c_n \geq ||u(x)||_\infty$ e $c_n \to ||u(x)||_\infty$. Considere $N_n(x) = \{\nu \in X; u_x(\nu) > c_n\}$ para todo $n \in I\!\!N$. É fácil verificar que $N_n(x) \in \mathcal{A}$ e $\mu(N_n(x)) = 0$ para todo $n \in I\!\!N$. Seja $N_x = \bigcup_{n=1}^\infty N_n(x)$. Temos $N_x \in \mathcal{A}$ e $\mu(N_x) = 0$. Além disso, para todo $\nu \in X \setminus N_x$ temos $|u_x(\nu)| \leq ||u_x||_\infty$, pois do contrário, existiria $n_0 \in I\!\!N$ tal que $||u_x||_\infty \leq c_{n_0} < |u_x(\nu)|$, donde teríamos $\nu \in N_{n_0}(x) \subset N_x$, o que não pode ocorrer. Como $\ell_{p^*}^m$ é um espaço separável, pois é homeomorfo a $I\!\!K^m$, podemos considerar um conjunto $D \subset B_{p^*}$ que seja enumerável e tal que $\overline{D} = B_{p^*}$. Seja $N = \bigcup_{x \in D} N_x$. Temos que $N \in \mathcal{A}$ e $\mu(N) = 0$. Além disso vale $|u_x(\nu)| \leq ||u_x||_\infty$ para todo $\nu \in X \setminus N$ e $x \in D\,(**)$. Assim, por $\overline{D} = B_{p^*}$, $(**)$ e $(*)$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\nu \in X \setminus N} \left(\sum_{i=1}^m |f_i(\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\nu \in X \setminus N} ||(f_i(\nu))_{i=1}^m||_p = \sup_{\nu \in X \setminus N} \sup_{x \in B_{p^*}} |x((f_i(\nu))_{i=1}^m)| \\
&= \sup_{\nu \in X \setminus N} \sup_{x \in B_{p^*}} |u_x(\nu)| = \sup_{\nu \in X \setminus N} \sup_{x \in D} |u_x(\nu)| \\
&= \sup_{x \in D} \sup_{\nu \in X \setminus N} |u_x(\nu)| \leq \sup_{x \in D} ||u_x||_\infty = \sup_{x \in B_{p^*}} ||u_x||_\infty = ||(f_i)_{i=1}^m||_p^w.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m ||M_\varphi(f_i)||_p^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^m \int_X |f_i \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{X \setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_{X \setminus N} |\varphi|^p \left(\sup_{\nu \in X \setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(\nu)|^p \right) d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{\nu \in X \setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{X \setminus N} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{\nu \in X \setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(\nu)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ||\varphi||_p \leq ||\varphi||_p ||(f_i)_{i=1}^m||_p^w.
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que para $f_1, \ldots, f_m \in L^\infty(\mu)$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{m} ||M_\varphi(f_i)||_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\varphi||_p \sup_{T \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |Tf_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, M_φ é p-somante e $\Pi_p(M_\varphi) \leq ||\varphi||_p$. Mas, por outro lado $\Pi_p(M_\varphi) \geq ||M_\varphi||$ donde segue que $\Pi_p(M_\varphi) = ||\varphi||_p$.

Exemplo 3.4. Nas condições do exemplo anterior, o operador inclusão $I_p : L^\infty(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$ é p-somante. Com efeito, tomando $\varphi = 1$ no exemplo 3.3, temos que $\varphi \in L^p(\mu)$ e $M_1 = I_p$. Além disso, temos $\Pi_p(I_p) = 1$.

Teorema 3.1. (Teorema da Dominação de Pietsch) *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Temos que um operador* $S : X \longrightarrow Y$ *é p-somante se, e somente se existem uma medida de probabilidade* μ *sobre* B_{X^*} *e uma constante* $\rho \geq 0$ *tais que para todo* $x \in X$*, temos*

$$||Sx|| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (*)$$

Neste caso, $\Pi_p(S)$ *é o menor* $\rho \geq 0$ *que satisfaz* $(*)$.

Demonstração. Seja $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ um subconjunto finito qualquer e suponhamos que existam $\rho \geq 0$ e μ medida de probabilidade sobre B_{X^*} que satisfaz $(*)$. Logo, para todo $i = 1, \ldots, m$ temos que

$$||Sx_i||^p \leq \rho^p \int_{B_{X^*}} |a(x_i)|^p d\mu(a).$$

Portanto, fazendo o somatório $i = 1, \ldots, m$ temos que

$$\sum_{i=1}^{m} ||Sx_i||^p \leq \rho^p \int_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^{m} |a(x_i)|^p d\mu(a) \leq \rho^p \sup_{a \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{m} |a(x_i)|^p.$$

Daí,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} ||Sx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{a \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |a(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e isto vale para todo subconjunto finito de X, donde, pela proposição 3.2, $S \in \Pi_p(X, Y)$ e $\Pi_p(S) \leq \rho$ para todo $\rho \geq 0$ que satisfaz $(*)$. Agora, suponhamos que $S \in \Pi_p(X, Y)$ e mostraremos que existem $\rho \geq 0$ e μ medida de probabilidade sobre B_{X^*} que satisfaz $(*)$. Seja $M \subset X$ tal que M é finito e definamos $f_M : B_{X^*} \longrightarrow I\!R$ da seguinte maneira

$$f_M(a) = \Pi_p(S)^p \sum_{x \in M} |a(x)|^p - \sum_{x \in M} ||Sx||^p.$$

Consideremos B_{X^*} com a topologia fraca estrela, isto é, $B_{X^*} = (B_{X^*}, w^*)$. Para todo $x \in X$, temos que a aplicação $T(a) = a(x)$ para todo $a \in B_{X^*}$ é w^*-contínua, pois $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para a em (B_{X^*}, w^*) se, e só se $(a_\alpha(x))_{\alpha \in I}$ converge para $a(x)$ em $I\!K$ para todo $x \in X$. Logo $f_M \in C(B_{X^*})$ para todo $M \subset X$ finito. Como S é p-somante e, pelo teorema 1.13, B_{X^*} é w^*-compacta, temos que

$$\sup_{a \in B_{X^*}} f_M(a) = \Pi_p(S)^p \sup_{a \in B_{X^*}} \sum_{x \in M} |a(x)|^p - \sum_{x \in M} ||Sx||^p \geq 0.$$

Observe que $B = \{f_M : M \subset X \text{ finito}\}$ é um subconjunto convexo de $C(B_{X^*}, I\!R)$. De fato, dados $f_{M_1}, f_{M_2} \in B$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ temos que $f_M = \lambda f_{M_1} + (1-\lambda) f_{M_2} \in B$ onde $M = \{\lambda^{\frac{1}{p}} x; x \in M_1\} \cup \{(1-\lambda)^{\frac{1}{p}} y; y \in M_2\}$.

Seja $A = \{f \in C(B_{X^*}, I\!R); \sup_{a \in B_{X^*}} f(a) < 0\}$. Temos que $A \neq \varnothing$ é tal que $A \cap B = \varnothing$. Vejamos que A é aberto. Lembremos que estamos considerando $C(B_{X^*}, I\!R)$ como sendo um espaço normado onde $||f|| = \sup_{a \in B_{X^*}} |f(a)|$. Fixado $f_0 \in A$, seja $\lambda_0 = -\sup_{a \in B_{X^*}} f_0(a) > 0$. Então, dada $f \in C(B_{X^*}, I\!R)$ tal que $||f - f_0|| < \frac{\lambda_0}{2}$ temos para toda $a \in B_{X^*}$

$$f(a) \leq |f(a) - f_0(a)| + f_0(a) \leq \frac{\lambda_0}{2} - \lambda_0 = -\frac{\lambda_0}{2}$$

donde $\sup_{a \in B_{X^*}} f(a) \leq -\frac{\lambda_0}{2} < 0$, isto é $f \in A$, donde A é aberto.

Além disso, A é convexo, pois se $f_1, f_2 \in A$ e $\lambda \in [0,1]$ temos para $a \in B_{X^*}$ arbitrário, que

$$\lambda f_1(a) + (1-\lambda) f_2(a) \leq \lambda \sup_{b \in B_{X^*}} f_1(b) + (1-\lambda) \sup_{b \in B_{X^*}} f_2(b) < 0$$

donde

$$\sup_{a \in B_{X^*}} [\lambda f_1(a) + (1-\lambda) f_2(a)] < 0$$

e daí, $\lambda f_1(a) + (1-\lambda)f_2(a) \in A$.

Pelo teorema 1.4, existe $\varphi : C(B_{X^*}, I\!R) \longrightarrow I\!R$ linear e contínua e $\alpha \in I\!R$ tais que

$$\varphi(f) < \alpha \leq \varphi(f_M) \text{ se } (f, f_M) \in A \times B.$$

Além disso, φ é positiva, isto é, $\varphi(f) > 0$ se $f \in C(B_{X^*}, I\!R)$ é tal que $f > 0$. Com efeito, como $0 \in B$, temos que $\alpha \leq 0$. Temos também que para $k \in I\!N$ a função constante $g_k(a) = -\frac{1}{k}$ para todo $a \in B_{X^*}$ pertence a A. Suponhamos que $\alpha < 0$. É claro que $g_k(a) = -\frac{1}{k} = \frac{1}{k}g_1(a)$ se $a \in B_{X^*}$, donde

$$\frac{1}{k}\varphi(g_1) = \varphi(g_k) < \alpha < 0 \text{ se } k \in I\!N,$$

e daí, $\varphi(g_1) \neq 0$ e $\varphi(g_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Logo, existe um $k_0 \in I\!N$ tal que $\varphi(g_{k_0}) > \alpha$ o que é um absurdo, pois $g_{k_0} \in A$. Segue daí que $\alpha = 0$. Então, se $f \in C(B_{X^*}, I\!R)$ é tal que $f > 0$, temos que $-f \in A$, pois, $-f(a) < 0$ se $a \in B_{X^*}$ e como B_{X^*} é w^*-compacta, existe $a_0 \in B_{X^*}$ tal que $-f(a_0) = \sup\limits_{a \in B_{X^*}} (-f(a))$. Daí, $\varphi(f) = -\varphi(-f) > -\alpha = 0$, onde $f > 0$ é tomado arbitrariamente em $C(B_{X^*}, I\!R)$, ou seja, φ é positiva.

Como B_{X^*} é w^*-compacta, pelo teorema da representação de Riesz, teorema 1.14, existe uma única medida de Borel regular μ sobre B_{X^*} tal que se $f \in C(B_{X^*}, I\!R)$ temos que

$$\varphi(f) = \int_{B_{X^*}} f d\mu$$

Observe que $\mu(B_{X^*}) = \varphi(1) < \infty$. Claro que se $\varphi \neq 0$ temos $||\varphi|| \neq 0$, logo trocando φ por $\varphi_0 = \frac{\varphi}{||\varphi||}$ e α por $\alpha_0 = \frac{\alpha}{||\varphi||}$, temos que μ é uma medida de Borel regular sobre B_{X^*} tal que

$$\mu(B_{X^*}) = ||\mu|| = ||\varphi_0|| = 1$$

isto é, μ é uma medida de probabilidade. Finalmente, vejamos que μ satisfaz $(*)$. Para $x \in X$ temos

$$f_{\{x\}}(a) = \Pi_p(S)^P |a(x)|^p - ||Sx||^p \in B \subset C(B_{X^*}, I\!R).$$

Portanto

$$0 \leq \varphi(f_{\{x\}}) = \int_{B_{X^*}} f_{\{x\}} d\mu = \Pi_p(S)^p \int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu - ||Sx||^p.$$

Daí concluimos que

$$||Sx|| \leq \Pi_p(S) \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

e o menor $\rho \geq 0$ que satisfaz $(*)$ do enunciado do teorema é menor ou igual a $\Pi_p(S)$. Então, $\Pi_p(S)$ é o menor $\rho \geq 0$ que satisfaz $(*)$. $\square$

Definição 3.2. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita completamente contínua se leva seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes na norma.*

Denotaremos por $\mathcal{V}(X, Y)$ o espaço das aplicações $T : X \longrightarrow Y$ que são lineares e completamente contínuas.

Observação 3.3. *Observe que $\mathcal{V}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Basta lembrar que a topologia fraca é menos fina do que a topologia da norma e $T : X \longrightarrow Y$ é contínua se $T(x_n) \to T(x)$ sempre que $x_n \to x$.*

Proposição 3.6. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então $\Pi_p(X, Y) \subset \mathcal{V}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $S \in \Pi_p(X, Y)$. Pelo teorema da dominação de Pietsch, teorema 3.1, existem $\rho \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre B_{X^*} tais que para todo $x \in X$ temos

$$||Sx|| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu(a) \right)^{\frac{1}{p}}. \ (*)$$

Seja $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \stackrel{w}{\to} 0$. Mostraremos que $||Sx_n|| \to 0$, quando $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\widetilde{x}_n : B_{X^*} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n)$. Lembramos que estamos considerando B_{X^*} munida da topologia fraca-estrela. Como dado $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_{X^*}$ tal que $\varphi_\alpha \stackrel{w^*}{\to} \varphi \in B_{X^*}$ é claro que $\widetilde{x}_n(\varphi_\alpha) \to \widetilde{x}_n(\varphi)$, temos que $\widetilde{x}_n \in C(B_{X^*})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, fixado $\varphi \in X^*$, como $x_n \stackrel{w}{\to} 0$, temos $\widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n) \to \varphi(0) = 0$ quando $n \to \infty$, logo $(\widetilde{x}_n)$ converge pontualmente a zero em $C(B_{X^*})$. Por outro lado, como $x_n \stackrel{w}{\to} 0$, então $\{\varphi(x_n); n \in \mathbb{N}\}$ é limitado para toda $\varphi \in X^*$ e, pelo teorema 1.6, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado na norma. Assim, existe $M > 0$ tal que dada $\varphi \in B_{X^*}$, temos

$$0 \leq |\varphi(x_n)|^p \leq ||\varphi||^p ||x_n||^p \leq ||x_n||^p \leq \sup_n ||x_n||^p = M$$

e como

$$\int_{B_{X^*}} M d\mu = M\mu(B_{X^*}) = M,$$

temos que $M \in L^1(\mu)$. Então $(|\widetilde{x}_n|^p) \subset C(B_{X^*})$ é uma seqüência de funções mensuráveis em B_{X^*} tal que $|\widetilde{x}_n|^p \xrightarrow{w^*} 0$ e existe $M \in L^1(\mu)$ tal que $|\widetilde{x}_n^p(\varphi)| \leq M$ para toda $\varphi \in B_{X^*}$ e para todo $n \in I\!N$. Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (teorema 1.18)

$$\lim_n \int_{B_{X^*}} |\widetilde{x}_n(\varphi)|^p d\mu = 0.$$

Daí, por $(*)$ temos que $\lim\limits_n ||Sx_n|| = 0$ e, portanto que $S \in \mathcal{V}(X,Y)$. □

Iremos agora provar o teorema de fatoração de Pietsch, que nos diz que podemos fatorar um operador p-somante através de um espaço de funções contínuas e de um espaço $L^p(\mu)$ onde μ é uma medida de probabilidade. Inicialmente vamos estabelecer algumas notações. Se S é um conjunto qualquer, podemos definir $\ell_\infty(S) = \{f : S \longrightarrow I\!K;\ \sup\limits_{x\in S}|f(x)| < \infty\}$. É claro que $\ell_\infty(S)$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Além disso, é fácil ver que $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in S}|f(x)|$ define uma norma em $\ell_\infty(S)$. Quando $S = B_{X^*}$, denotaremos $\ell_\infty(S)$ por X^∞. Dado qualquer $x \in X$, continuaremos denotando por $\widetilde{x}$ a restrição a B_{X^*} da aplicação canônica $\widetilde{x} : X^* \longrightarrow I\!K$. Podemos considerar a seguinte aplicação $J_X : X \longrightarrow X^\infty$ definida por $J_X(x) = \widetilde{x}$ para todo $x \in X$, isto é, $J_X(x) = (\varphi(x))_{\varphi\in B_{X^*}}$ para todo $x \in X$. Pelo teorema de Hahn-Banach, corolário 1.3, a aplicação linear J_X é uma isometria. No que segue, J_p denota a inclusão de $C(K)$ em $L^p(\mu)$ (ver exemplo 3.2).

Proposição 3.7. (Propriedade da Extensão) *Seja F um subespaço de um espaço normado E e seja S um conjunto qualquer. Então, toda aplicação linear e contínua $T : F \longrightarrow \ell_\infty(S)$ tem uma extensão linear e contínua $\widetilde{T} : E \longrightarrow \ell_\infty(S)$ tal que $||T|| = ||\widetilde{T}||$.*

Demonstração. Dada $f \in \ell_\infty(S)$ podemos representá-la por $f = ((f(s))_{s\in S}$ e temos $||f||_\infty$ finito. Seja uma aplicação linear e contínua $T : F \longrightarrow \ell_\infty(S)$ onde $T(y) = f_y$ para $y \in F$, isto é, $T(y) = (f_y(s))_{s\in S}$. Fixemos $s_0 \in S$ e seja $\Pi_{s_0} : \ell_\infty(S) \longrightarrow I\!\!K$ a projeção definida por $\Pi_{s_0}((f(s))_{s\in S}) = f(s_0)$. É claro que Π_{s_0} é linear e contínua com $||\Pi_{s_0}|| \leq 1$. Seja $H_{s_0} : F \longrightarrow I\!\!K$ tal que $H_{s_0}(y) = (\Pi_{s_0} \circ T)(y) = f_y(s_0)$ para todo $y \in F$. Tem-se que H_{s_0} é linear e contínua, e pelo teorema de Hahn-Banach (teorema 1.3), existe $\widehat{H}_{s_0} \in E^*$ extensão de H_{s_0} tal que $||\widehat{H}_{s_0}|| = ||H_{s_0}||$. Observe que isto vale para todo $s_0 \in S$ arbitrário, logo para todo $s \in S$ existe $\widehat{H}_s \in E^*$ extensão de H_s tal que $||\widehat{H}_s|| = ||H_s||$. Consideremos $\widetilde{T} : E \longrightarrow \ell_\infty(S)$ onde $\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_x$ é tal que $\widetilde{T}_x : S \longrightarrow I\!\!K$ é definida por $\widetilde{T}_x(s) = \widehat{H}_s(x)$, isto é, $\widetilde{T}_x = (\widehat{H}_s(x))_{s\in S}$, e vejamos que $\widetilde{T}$ é uma extensão de T. Temos que $\widetilde{T}$ está bem definida. De fato, fixemos $x \in E$ e seja $s \in S$, temos $|\widetilde{T}_x(s)| = |\widehat{H}_s(x)| \leq ||\widehat{H}_s||\,||x|| = ||H_s||\,||x|| \leq ||\Pi_s||\,||T||\,||x|| \leq ||T||\,||x|| < \infty$, donde tomando o supremo quando $s \in S$ obtém-se que $||\widetilde{T}_x||_\infty < \infty$ e $||\widetilde{T}_x||_\infty \leq ||T||\,||x||$ $(*)$. Portanto, $\widetilde{T}$ está bem definida e como vale para todo $x \in E$ fixado, temos por $(*)$ que $\widetilde{T}$ é contínua. É fácil ver que $\widetilde{T}$ é linear, donde por $(*)$ temos $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$. Por outro lado, $\widetilde{T}|_F = T$ e é claro que $||T|| \leq ||\widetilde{T}||$, donde $||\widetilde{T}|| = ||T||$. □

Teorema 3.2. (Teorema da Fatoração de Pietsch) *Um operador $S : X \longrightarrow Y$ é p-somante se, e somente se existe um espaço compacto K, uma medida de Borel regular μ em K e operadores $A \in \mathcal{L}(X, C(K))$ e $B \in \mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty)$ tais que $B \circ J_p \circ A = J_Y \circ S$. Neste caso, podemos escolher μ sendo uma medida de probabilidade, A uma isometria e B tal que $||B|| = \Pi_p(S)$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "A"'] & Y \arrow[r, "J_Y"] & Y^\infty \\ C(K) \arrow[rr, "J_p"'] & & L^p(\mu) \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponhamos que existam um espaço compacto K, uma medida de Borel regular μ em K e operadores $A \in \mathcal{L}(X, C(K))$ e $B \in \mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty)$ tais que $B \circ J_p \circ A = J_Y \circ S$. Já vimos, pelo exemplo 3.2, que $J_p \in \Pi_p(C(K), L^p(\mu))$ e, portanto, $J_Y \circ S = B \circ J_p \circ A$ é um operador p-somante de X em Y^∞. Pelo teorema de dominação de Pietsch, teorema 3.1, existem $\rho \geq 0$ e uma medida de Borel regular μ_0 sobre B_{X^*} satisfazendo $\mu_0(B_{X^*}) = 1$ tais que

$$||J_Y \circ S(x)|| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu_0(a) \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } x \in X.$$

Mas $||J_Y \circ S(x)|| = ||S(x)||$ e daí,

$$||S(x)|| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu_0(a) \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } x \in X,$$

onde $\rho \geq 0$ e μ_0 é uma medida de probabilidade, e novamente pelo teorema de dominação de Pietsch temos $S \in \Pi_p(X, Y)$.

Suponhamos agora que $S \in \Pi_p(X, Y)$. Então pelo teorema de dominação de Pietsch existe uma medida de Borel regular μ com $\mu(B_{X^*}) = 1$ tal que

$$||S(x)|| \leq \Pi_p(S) \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu(a) \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } x \in X.$$

Consideremos a aplicação $A : X \longrightarrow C(B_{X^*})$ definida por $A(x) = \widetilde{x}$. Consideramos B_{X^*} com a topologia w^*. Já vimos na demonstração da proposição 3.6 que $\widetilde{x} \in C(B_{X^*})$, de modo que A está bem definida. Além disso é claro que A é linear e pelo corolário 1.3, se $x \in X$, então temos que $||Ax|| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)| = ||x||$. Donde segue que $A \in \mathcal{L}(X, C(K))$ onde $K = B_{X^*}$ é w^*-compacto pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (teorema 1.13) e A é uma isometria. Considere o conjunto $A(X) = X^{\infty} \subset C(K)$ e a inclusão $J_p : C(K) \longrightarrow L^p(\mu)$ (ver exemplo 3.2). Temos que $J_p(Ax) = \widetilde{x} \in L^p(\mu)$ para todo $x \in X$. Assim $J_p(A(X))$ é um subespaço de $L^p(\mu)$. Seja, agora, $B_0 : J_p(A(X)) \longrightarrow Y$ definida por $B_0(J_pA(x)) = Sx$ para todo $x \in X$. Então B_0 está bem definida, pois se $J_pA(x_1) = J_pA(x_2)$, então $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ para toda φ em B_{X^*} e, pelo corolário 1.2, $x_1 = x_2$ donde $Sx_1 = Sx_2$. Vejamos que $B_0 \in \mathcal{L}(J_p(A(X)), Y)$ e $||B_0|| \leq \Pi_p(S)$. A linearidade de B_0 é clara. Além disso, para todo $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} ||B_0(J_pA(x))|| &= ||Sx|| \leq \Pi_p(S) \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\mu(a) \right)^{\frac{1}{p}} = \Pi_p(S) \left(\int_{B_{X^*}} |J_p(\widetilde{x})(a)|^p d\mu(a) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Pi_p(S) ||J_pA(x)||_p \end{aligned}$$

e portanto, B_0 é contínua com $||B_0|| \leq \Pi_p(S)$. Consideremos $\overline{B_0} : \overline{J_p(A(X))} \longrightarrow Y$ a extensão de B_0 ao fecho de $J_p(A(X))$ em $L^p(\mu)$. Observamos que $A(X) \subset C(K)$ e que

$\overline{J_p(A(X))} \subset L^p(\mu)$ são ambos espaços de Banach. Seja $\hat{J}_p : A(X) \longrightarrow \overline{J_p(A(X))}$ definida de maneira natural, isto é, $\hat{J}_p(A(x)) = J_p(\widetilde{x})$ para todo $x \in X$. Sabemos do exemplo 3.2 que $J_p \in \Pi_p(C(K), L^p(\mu))$ e $\Pi_p(J_p) = 1$. Daí, é fáci verificar que $\widehat{J_p} \in \Pi_p(A(X), \overline{J_p(A(X))})$ e $\Pi_p(\hat{J}_p) = 1$. Por um abuso de notação, consideramos $\overline{B_0} \in \mathcal{L}(\overline{J_p(A(X))}, Y)$ e $A \in \mathcal{L}(X, A(X))$. Temos que para todo $x \in X$, $\overline{B_0} \circ \widehat{J_p} \circ A(x) = B_0 \circ J_p \circ A(x) = Sx$ e, pela proposição 3.4, temos

$$\Pi_p(S) = \Pi_p(\overline{B_0} \circ \hat{J}_p \circ A) \leq ||\overline{B_0}||\, \Pi_p(\hat{J}_p)\, ||A|| = ||\overline{B_0}||.$$

Daí e de $||\overline{B_0}|| = ||B_0|| \leq \Pi_p(S)$, segue que $||\overline{B_0}|| = \Pi_p(S)$. Como Y^∞ tem a propriedade da extensão (proposição 3.7), existe $B : L^p(\mu) \longrightarrow Y^\infty$ que estende $J_Y \circ \overline{B_0}$ tal que $B \in \mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty)$ e $||B|| = ||J_Y \circ \overline{B_0}||$. Portanto, temos que $J_Y \circ S = J_Y \circ \overline{B_0} \circ J_p \circ A = B \circ J_p \circ A$ e, como J_Y é um isometria, $||B|| = ||J_Y \circ \overline{B_0}|| = ||B_0|| = \Pi_p(S)$. $\square$

3.2 O Teorema de Dvoretzky-Rogers

Definição 3.3. *Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é dito compacto se $T(B_X)$ é relativamente compacto em Y e é dito fracamente compacto se $T(B_X)$ é relativamente compacto em (Y, w), isto é, $\overline{T(B_X)}$ é compacto em Y, $\overline{T(B_X)}^w$ é compacto em (Y, w), respectivamente.*

Denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y)$ e $\mathcal{W}(X, Y)$ como sendo o conjunto dos operadores lineares $T : X \longrightarrow Y$ compactos e fracamente compactos, respectivamente.

Lembremos que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se, e somente se $\overline{T(B_X)}$ é limitado, pois $||T|| < \infty$ se, e somente se existe $M > 0$ tal que $\overline{T(B_X)} \subset \{y \in Y; ||y|| \leq M\}$.

Vejamos inicialmente que $T \in \mathcal{W}(X, Y)$ se, e só se $\overline{T(B)}^w$ é compacto em (Y, w), para todo $B \subset X$ limitado. De fato, se $B \subset X$ é limitado, então $B \subset \lambda B_X$ para algum $\lambda > 0$ e usando a linearidade de T temos $\overline{T(B)}^w \subset \overline{\lambda T(B_X)}^w = \lambda \overline{T(B_X)}^w$ que é compacto em

(Y, w) se $T \in \mathcal{W}(X, Y)$. Reciprocamente, como $B_X \subset X$ é limitado, temos que $T(B_X)$ é relativamente compacto em (Y, w), donde $T \in \mathcal{W}(X, Y)$.

O mesmo resultado é válido para $\mathcal{K}(X, Y)$, isto é $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ se, e só se $\overline{T(B)}$ é compacto para todo $B \subset X$ limitado. Basta considerar a topologia da norma ao invés da topologia fraca.

No capítulo 1, denotamos a topologia fraca de um espaço normado por w. A fim de simplificarmos notações, iremos usar sempre esta notação para espaços normados diferentes. Se tivermos X e Y espaços normados, então (X, w) e (Y, w) representam os espaços X e Y com as respectivas topologias fracas.

Proposição 3.8. a) $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{W}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

b) *Se $R \in \mathcal{L}(Y, F)$ e $T \in \mathcal{L}(E, X)$, então*

i) *$S \in \mathcal{W}(X, Y)$ implica em $R \circ S \circ T \in \mathcal{W}(E, F)$.*

ii) *$S \in \mathcal{K}(X, Y)$ implica em $R \circ S \circ T \in \mathcal{K}(E, F)$.*

Demonstração. **a)** Como a topologia fraca é menos fina do que a topologia da norma, temos que $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{W}(X, Y)$. Para mostrar a outra inclusão lembramos que, por definição, se $T \in \mathcal{W}(X, Y)$ temos que $\overline{T(B_X)}^w$ é compacto em (Y, w) e, portanto, limitado. Conseqüentemente $T(B_X)$ é limitado em (Y, w) e pelo teorema 1.6 é limitado. Assim $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
b) Sejam, agora, $S \in \mathcal{W}(X, Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y, F)$ e $T \in \mathcal{L}(E, X)$ e seja $B \subset X$ limitado. Provaremos que $\overline{R \circ S \circ T(B)}^w$ é compacto em (F, w). Como $T \in \mathcal{L}(E, X)$, $T(B) \subset X$ é limitado. Mas $S \in \mathcal{W}(X, Y)$, donde $\overline{S(T(B))}^w$ é compacto em (Y, w). Sendo $R : Y \longrightarrow F$ contínua, temos que $R : (Y, w) \longrightarrow (F, w)$ é contínua e, portanto, $R(\overline{S(T(B))}^w)$ é compacto em (F, w), donde é fechado em (F, w). Mas como $R(S(T(B))) \subset R(\overline{S(T(B))}^w)$, tomando o fecho em (F, w) temos $\overline{R(S(T(B)))}^w \subset R(\overline{S(T(B))}^w)$ que é um subconjunto fechado de um compacto e, portanto é $\overline{R(S(T(B)))}^w$ é compacto em (F, w). Analogamente, se $S \in \mathcal{K}(X, Y)$, então

$R \circ S \circ T \in \mathcal{K}(E, F)$.

$\square$

Proposição 3.9. $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{V}(X, Y)$.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ e seja $(b_n) \subset X$ tal que $b_n \xrightarrow{w} 0$. Devemos mostrar que $Tb_n \to 0$. Suponhamos, por absurdo, que (Tb_n) não seja convergente para zero. Nesse caso existem $\epsilon > 0$ e uma subseqüência (Tb_{n_k}) tal que $||Tb_{n_k}|| \geq \epsilon$ para todo $k \in I\!N$. Como (b_n) é fracamente convergente, é limitada, e portanto a subseqüência (b_{n_k}) também é limitada. Mas T é compacto, logo (Tb_{n_k}) admite subseqüência convergente, digamos $Tb_{n_{k_j}} \to y \in Y$. Portanto $Tb_{n_{k_j}} \xrightarrow{w} y$. De $b_n \xrightarrow{w} 0$ segue que $b_{n_{k_j}} \xrightarrow{w} 0$, e da continuidade de T segue que $Tb_{n_{k_j}} \xrightarrow{w} 0$. Da unicidade do limite segue que $y = 0$. Assim $Tb_{n_{k_j}} \to 0$ e $||Tb_{n_{k_j}}|| \geq \epsilon > 0$ para todo $k \in I\!N$, uma contradição. Portanto $Tb_n \to 0$. $\square$

Proposição 3.10. *Se* $1 \leq p < \infty$ *então* $\Pi_p(X, Y) \subset \mathcal{W}(X, Y)$.

Demonstração. Seja $S \in \Pi_p(X, Y)$. Na demonstração do teorema de fatoração de Pietsch, teorema 3.2, mostramos que a aplicação $A : X \longrightarrow C(B_{X^*})$ definida por $A(x)(\varphi) = \widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $\varphi \in B_{X^*}$ é uma isometria linear. Logo, $A \in \mathcal{L}(X, C(B_{X^*}))$ e $||A|| = 1$. Além disso, pelo exemplo 3.2, sabemos que $J_p \in \Pi_p(C(B_{X^*}), L^p(\mu))$. Seja $B_0 : J_p(A(X)) \longrightarrow Y$ definida como na demonstração do teorema 3.2, e seja $\overline{B_0}$ a extensão de B_0 ao fecho de $J_p(A(X))$ em $L^p(\mu)$.

<u>Caso 1</u>: $1 < p < \infty$

Como $L^p(\mu)$ é reflexivo, temos pela proposição 1.6 que $Y_0 = \overline{J_P(A(X))}$ é reflexivo, donde a bola B_{Y_0} é compacta em (Y_0, w), pelo teorema 1.12. Mas como $\overline{B_0}$ é contínua, temos que $\overline{B_0} : (Y_0, w) \longrightarrow (Y, w)$ é contínua e, portanto, $\overline{B_0}(B_{Y_0})$ é compacto em (Y, w), donde $\overline{B_0} \in \mathcal{W}(Y_0, Y)$. Portanto, pela proposição 3.8, como $\overline{B_0} \in \mathcal{W}(Y_0, Y)$ e $J_p \circ A \in \mathcal{L}(X, Y_0)$ obtemos que $S = \overline{B_0} \circ J_p \circ A \in \mathcal{W}(X, Y)$. Então $\Pi_p(X, Y) \subset \mathcal{W}(X, Y)$, se $1 < p < \infty$.

<u>Caso 2</u>: $p = 1$

Como $\Pi_1(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$, para todo $q > 1$, temos que $\Pi_1(X,Y) \subset \Pi_2(X,Y) \subset \mathcal{W}(X,Y)$, pelo caso 1.

$\square$

Vejamos agora um exemplo de que não há um resultado análogo da proposição acima para $\mathcal{K}(X,Y)$ em lugar de $\mathcal{W}(X,Y)$.

Exemplo 3.5. Consideremos $L^p(\mu)$ onde μ é a medida de Lebesgue em $[0,2\pi]$. Seja J_p como no exemplo 3.2. Temos que $J_p \in \Pi_p(C[0,2\pi], L^p[0,2\pi])$, e portanto, pela proposição 3.10, $J_p \in \mathcal{W}(X,Y)$ onde $X = C[0,2\pi]$ e $Y = L^p[0,2\pi]$. Vejamos que $J_p \notin \mathcal{K}(X,Y)$. Se, por absurdo, $J_p \in \mathcal{K}(X,Y)$ teríamos $\overline{J_p(B_X)}$ compacto em Y. Por outro lado, seja a seqüência de funções, $f_n : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = e^{int}$, para todo $t \in [0,2\pi]$. Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C[0,2\pi]$ e $||f_n||_{[0,2\pi]} = 1$, donde $(f_n) \subset B_X$. Se $\overline{J_p(B_X)}$ fosse compacto, então (f_n) teria uma subseqüência convergente e, portanto, de Cauchy. Entretanto,

$$||f_n - f_m||_p^p = \int_0^{2\pi} |e^{int} - e^{imt}|dt \geq \int_V (\sqrt{2})^p dt$$

onde $V = \{t \in [0,2\pi]; \cos(kt) < 0\}$. Daí

$$||f_n - f_{n+k}||_p \geq \sqrt{2}\sqrt[p]{\pi}$$

para todo n e k inteiros positivos. Logo nenhuma subseqüência de $(f_n) \subset L^p[0,2\pi]$ é de Cauchy. Então $J_p \notin \mathcal{K}(X,Y)$.

Proposição 3.11. $\mathcal{V}(Y,Z) \circ \mathcal{W}(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Z)$.

Demonstração. Sejam $S \in \mathcal{V}(Y,Z)$ e $T \in \mathcal{W}(X,Y)$. Para mostrar que $S \circ T \in \mathcal{K}(X,Z)$ vamos mostrar que $\overline{S(T(B))}$ é compacto em Z, sempre que $B \subset X$ é limitado e convexo. Da topologia, sabemos que basta mostrar que toda seqüência em $S(T(B))$ tem uma subseqüência convergente em $\overline{S(T(B))}$. Sejam $B \subset X$ limitado e convexo, (z_n) uma seqüência em $S(T(B))$ e (x_n) uma seqüência em B tal que $S(T(x_n)) = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $T \in \mathcal{W}(X,Y)$, temos que $\overline{T(B)}^w$ é compacto em (Y, w) e, como $(T(x_n)) \subset \overline{T(B)}^w$, existe uma subseqüência $(T(x_{n_k}))$ que converge para um $y \in \overline{T(B)}^w$, ou seja, $T(x_{n_k}) \xrightarrow{w} y$. Mas $S \in \mathcal{V}(Y, Z)$, logo $S(T(x_{n_k})) \to S(y) \in S(\overline{T(B)}^w)$. Além disso, como B é convexo e T é linear, temos que $T(B)$ é convexo, e portanto, os fechos em relação à norma e à topologia fraca coincidem, isto é, $\overline{T(B)}^w = \overline{T(B)}$. Logo $S(y) \in S(\overline{T(B)}) \subset \overline{S(T(B))}$ pois S é contínua. Isto é, existe uma subseqüência (z_{n_k}) de (z_n) tal que $z_{n_k} = S(T(x_{n_k})) \to S(y) \in \overline{S(T(B))}$. Mostramos então que $\overline{S \circ T(B)}$ é compacto, logo $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Z)$. $\square$

Observação 3.4. *É possível mostrar que se E e G são espaços de Banach então existe um espaço de Banach F tal que para todo $A \in \mathcal{K}(E, G)$ existem $S \in \mathcal{V}(F, G)$ e $T \in \mathcal{W}(E, F)$ tal que $A = S \circ T$, isto é, $\mathcal{K}(E, G) \subset \mathcal{V}(F, G) \circ \mathcal{W}(E, F)$ (ver [8], teorema 17.1.4, página 369).*

Corolário 3.1. a) $\Pi_p(Y, Z) \circ \mathcal{W}(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Z)$.

b) $\Pi_p(Y, Z) \circ \Pi_p(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Z)$.

Demonstração. **a)** Segue das proposições 3.6 e 3.11.
b) Segue de **(a)** e da proposição 3.10. $\square$

Observação 3.5. *Vimos que $J_p \in \Pi_p(C[0, 2\pi], L^p[0, 2\pi])$ e $J_p \notin \mathcal{K}(C[0, 2\pi], L^p[0, 2\pi])$. Se $1 < p < \infty$, então $L^p[0, 2\pi]$ é reflexivo e conseqüentemente a bola unitária fechada de $L^p[0, 2\pi]$ é compacta pela topologia fraca (teorema 1.12) donde $id \in \mathcal{W}(L^p[0, 2\pi], L^p[0, 2\pi])$ onde id é a função identidade. Como $J_p = id \circ J_p$ temos que em geral não é verdade que $\mathcal{W}(Y, Z) \circ \Pi_p(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Z)$.*

Teorema 3.3. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ se, e somente se X tem dimensão finita.*

Demonstração. Se a dimensão de X é finita, $X = X_w$ e, como $\ell_p(X_w) = \ell_p^w(X)$, temos $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$. Reciprocamente, se $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$, então $id \in \Pi_p(X, X)$ e conseqüentemente $id^2 = id \circ id \in \Pi_p(X, X) \circ \Pi_p(X, X) \subset \mathcal{K}(X, X)$. Como $id^2 = id$ temos $id \in \mathcal{K}(X, X)$.

Logo $B_X = \overline{id(B_X)}$ é compacta, e pelo teorema de Riesz (teorema 1.8) temos que a dimensão de X é finita. $\square$

Corolário 3.2. *Seja X um espaço de Banach. Então o operador identidade $id : X \longrightarrow X$ é p-somante se, e somente se X tem dimensão finita.*

Demonstração. De fato, id é p-somante se, e somente se $(x_n) = id(x_n) \in \ell_p(X)$ sempre que $(x_n) \in \ell_p^w(X)$. Então, $id \in \Pi_p(X, X)$ se, e somente se $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ e o corolário segue do teorema acima. $\square$

Do corolário acima em conjunto com o teorema de Bessaga-Pelczyński, resulta o seguinte teorema de Dvoretzky-Rogers.

Teorema 3.4. (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Toda série incondicionalmente convergente em um espaço de Banach X é absolutamente convergente se, e somente se a dimensão de X é finita.*

Demonstração. De fato, seja X um espaço de Banach tal que convergência incondicional implica na convergência absoluta. Logo, X não pode conter uma cópia de c_0 visto que em c_0 existe uma série que converge incondicionalmente mas não absolutamente (ver exemplo 2.2). Segue do teorema de Bessaga-Pelczyński que toda seqüência fracamente 1-somável é incondicionalmente somável e, portanto toda seqüência fracamente 1-somável tem série absolutamente convergente. Mas isto é o mesmo que dizer que o operador identidade é 1-somante. Logo pelo corolário acima, X tem dimensão finita. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] G. Botelho, Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers, Matemática Universitária no. 30, 2001 pp. 103-111.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] D. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, **92**, 1984.

[5] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, 1950, 192-197.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant e V. Zizler, Functional Analysis and Infinte-Dimensional Geometry, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] J. Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1966.

[8] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[9] M. Kadets and V. Kadets, Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence, Birkhäuser-Verlag, Berlim, 1997.

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlim, 1977.

[11] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[12] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[13] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.