EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO DE SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DE ONDA COM DISSIPAÇÃO LINEAR LOCALIZADA

por

ROGÉRIO LUIZ QUINTINO DE OLIVEIRA JÚNIOR

Orientadora: Angela Cássia Biazutti

IM-UFRJ

RIO DE JANEIRO

2005

Existência, Unicidade e Decaimento de Soluções de uma Equação de Onda com Dissipação Linear Localizada

por

Rogério Luiz Quintino de Oliveira Júnior

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Área de concentração : Matemática

Aprovada por:

Angela Cássia Biazutti
IM-UFRJ (Presidente)

Luís Adauto da Justa Medeiros
IM-UFRJ

Luís Pedro San Gil Jutuca
UNI-RIO

Helvécio Rubens Crippa
IM-UFRJ

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço, principalmente, à minha orientadora Ângela, pelo seu carinho, sua paciência e dedicação. Agradeço, também, à minha mãe pelo incentivo, à CAPES pelo apoio financeiro, aos funcionários da biblioteca do IM-UFRJ e a todos os colegas e professores de mestrado do IM-UFRJ que muito contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal. Finalmente, gostaria de agradecer a Marcelo e Valéria Cavalcanti pela ajuda na confecção das figuras utilizadas.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e o decaimento polinomial de soluções fortes para a equação de ondas com uma dissipação linear localizada

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \ , & x \in \Omega \ , \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0 \ , & x \in \Gamma \ , \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \ , & x \in \Omega \ , \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira bem regular Γ e $a(x)$ uma função de $C^0(\ \overline{\Omega}\ )$, não-negativa e que satisfaz uma hipótese adicional.

Abstract

In this work, we study the existence, uniqueness and polinomial decay of strong solutions for the wave equation with a linear localized dissipation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \, , & x \in \Omega \, , \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0 \, , & x \in \Gamma \, , \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \, , \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \, , & x \in \Omega \, , \end{cases}$$

where Ω is an open bounded subset of $\mathbb{R}^N$ with a smooth boundary Γ and $a(x)$ is a non-negative function of $C^0(\,\overline{\Omega}\,)$ that satisfies an aditional hypothesis.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma estimativa precisa do decaimento da energia do seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0\ , & x \in \Omega\ ,\ \ t > 0 \\
u(x,t) = 0\ , & x \in \Gamma\ ,\ \ t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x)\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\ , & x \in \Omega\ ,
\end{cases}
$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira bem regular Γ. Ao longo do trabalho, faremos uso das seguintes notações. Denotamos por ν o vetor normal unitário apontando para o exterior de Ω. Fixado $x^0 \in \mathbb{R}^N$ e definindo o vetor $m(x) = x - x^0$, temos

$$R = \sup\{|m(x)|\ ,\ x \in \Omega\},\ \Gamma_+ = \{x \in \Gamma\ ;\ m(x).\nu(x) > 0\} \text{ e } \Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+,$$

onde o produto interno acima é o usual de $\mathbb{R}^N$. Denotamos por ω a interseção de Ω com uma vizinhança de Γ_+. Abaixo, mostramos um exemplo de tal ω.

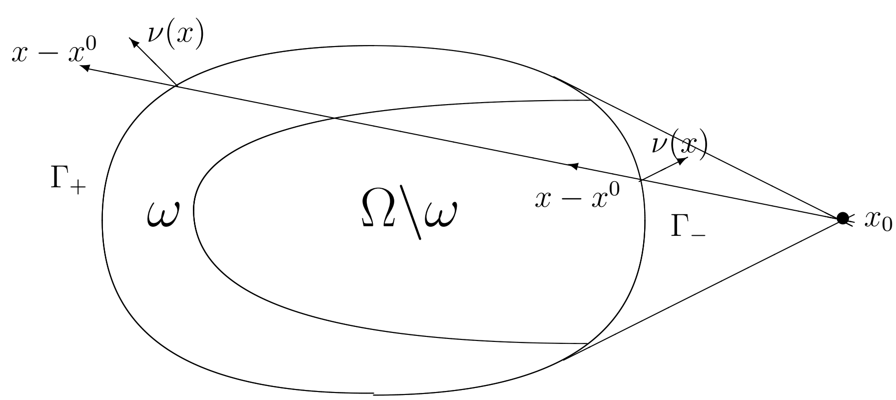

Figura 1

Consideraremos $a = a(x)$ uma função de $C^0(\overline{\Omega})$, não-negativa e que satisfaz $\int_\omega \frac{dx}{a^p} < \infty$, para algum p positivo. Neste caso, dizemos que o termo $a(x)\frac{\partial u}{\partial t}$ no problema (P) é uma dissipação local degenerada. Denotamos por $|a^{-1}|_p$ a quantidade $\int_\omega \frac{dx}{a^p}$.

O resultado de decaimento da energia do problema (P) pode ser obtido por aproximação de semigrupos, análise microlocal ou desigualdades diferenciais (veja Zuazua [29]). Aqui, apresentamos uma aproximação alternativa baseada em algumas desigualdades integrais devidas a Haraux [10]; a vantagem é que obteremos uma prova direta sem usar a teoria de aproximação de semigrupos ou um resultado de continuação única. O método essencialmente recai na técnica dos multiplicadores (veja Lions [14], Komornick [13]). Além disso, para nos livrarmos de termos de ordem menor, introduzimos um problema elíptico cuja solução é usada como multiplicador. Essa idéia foi usada por Conrad e Rao [7] no estudo da estabilização de uma equação da onda com condição de fronteira não-linear.

Seguindo o artigo de Tébou [28], provaremos que a energia associada ao problema (P) decai polinomialmente com o tempo. Neste artigo, ele também apresenta um resultado de decaimento exponencial no caso em que $a(x)$ satisfaz outras hipóteses. A idéia, para ambos os casos, recai na técnica dos multiplicadores já citada.

Em suas dissertações de mestrado, Carvalho [5] e Pereira [25] estudaram precisamente o caso de decaimento exponencial da energia, baseadas no artigo de Tébou [27] e no de Assila [1], respectivamente. Carvalho [5] estudou uma dissipação localizada da forma $a(x)g\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, onde $a(x)$ satisfaz hipóteses diferentes das nossas, e Pereira [25], uma dissipação da forma $g\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Outros resultados de decaimento da energia associada a problemas relacionados ao estudado nesta dissertação podem ser encontrados em Cavalcanti [6].

O nosso trabalho é dividido em três partes. Na primeira, estabelecemos algumas notações e resultados básicos. Também provamos alguns resultados auxiliares que serão utilizados nas seções posteriores. A existência e a unicidade de soluções para o problema (P) são estudadas na segunda parte. A unicidade é feita pelo Método da Energia, e a existência é estudada de duas formas diferentes: uma pelo método de Faedo-Galerkin e outra utilizando resultados da teoria de Semigrupos. Finalmente, dedicamos a terceira parte ao estudo do decaimento da energia, que, neste caso, provamos ser polinomial. Para isto, faremos uso da técnica dos multiplicadores e introduziremos a solução de um problema elíptico para majorarmos termos de ordem menor.

Capítulo 1

Preliminares

Destinamos este capítulo à fixação da terminologia e apresentamos resultados que utilizaremos nos capítulos seguintes, demonstrando aqueles que não são facilmente encontrados na literatura.

1.1 Espaços Funcionais

Considere Ω um aberto conexo e limitado de $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é bem regular. Se $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ u \ \text{ mensurável } \ ,\ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \ < \infty\}$$

com a norma definida por

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \ ,$$

e denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ u \ \text{ mensurável } \ ,\ \ \underset{x \in \Omega}{supess}\ |u(x)| < \infty\}$$

com a norma

$$|u|_\infty = \ \underset{x \in \Omega}{supess}\ |u(x)|,$$

onde as integrais são de Lebesgue.

No caso em que $p = 2$, temos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ com o produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Tomando $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, definimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ e por D^α representamos o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \ .$$

Quando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, definimos $D^0 = I$.

Representamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções testes em Ω, formado por todas as funções infinitamente diferenciáveis em Ω e com suporte compacto em Ω ($C_0^\infty(\Omega)$), munido da seguinte noção de convergência: $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para φ quando

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $supp(\varphi_n - \varphi) \subset K$, onde K é um compacto fixo de Ω, e

(ii) para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, a sequência $\{D^\alpha(\varphi_n - \varphi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em Ω.

Representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω, ou seja, o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares e contínuas (no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$) que vão de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathbb{R}$.

Para todo $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Consideraremos a norma em $W^{m,p}(\Omega)$ definida por

$$||u||_{m.p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \ .$$

Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado com $L^2(\Omega)$. Temos que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((u, v))_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx \ .$$

Por $H_0^m(\Omega)$ representamos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$. Definimos, para todo $s > 0$, o espaço

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

munido da norma

$$||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_\Omega (1 + |\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 \, d\xi \ ,$$

onde $\hat{u}$ representa a transformada de Fourier de u.

Verifica-se que este espaço coincide com o espaço $H^m(\mathbb{R}^N)$ quando s é um número inteiro m. No caso em que Ω é um aberto de classe C^m, define-se, para cada $s < m$, os espaços fracionários

$$H^s(\Omega) = \left\{ v|_\Omega \ ; \ v \in H^s(\mathbb{R}^N) \right\}$$

munidos da norma

$$||u||_{H^s(\Omega)} = \inf \left\{ ||v||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \ ; \ v = u \text{ em } \Omega \right\}.$$

Os espaços acima são espaços de Hilbert e

$$H^s(\Omega) = \left[H^m(\Omega), H^0(\Omega) \right]_\theta$$

para cada $s = (1-\theta)m$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Dados X um espaço de Banach, $T > 0$ um número real e $1 \leq p < \infty$, representamos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$ tais que u é mensurável e $||u(t)||_X \in L^p(0,T)$, equipado com a norma

$$||u(t)||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p \ dt \right)^{1/p}.$$

Temos que $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X for reflexivo, e indicamos por $L^{p'}(0,T;X')$ seu dual topológico, sendo X' o dual de X e p' o conjugado de p. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \ dt \ .$$

Quando $p = \infty$, temos o espaço de Banach $L^\infty(0,T;X)$, formado pelas funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é, aquelas tais que

$$\underset{t \in (0,T)}{supess} \ ||u(t)||_X < \infty$$

munido da norma

$$||u(t)||_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t \in (0,T)}{supess} \ ||u(t)||_X.$$

Indicamos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$, com valores em X, isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Se u é um vetor de $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, então associamos a u a distribuição T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)\, ds\ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Temos que T_u é univocamente definida por u. Logo, identificando u com T_u, podemos dizer que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Dada uma distribuição vetorial $u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, definimos a derivada (no sentido das distribuições) de ordem m de u como sendo a distribuição $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = u^{(m)}$ definida por

$$\left\langle u^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \int_0^T u(t) \frac{\partial^m \varphi(t)}{\partial t^m}\, dt\ , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

1.2 Resultados Básicos

Teorema 1.1 (Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-adjuntos em Espaços de Hilbert)
Sejam H um espaço de Hilbert real e $A \in \mathcal{L}(H)$ tais que $\dim H = +\infty$ *e A seja compacto e auto-adjunto. Então*

(i) $0 \in \sigma(A)$ *;*

(ii) $\sigma(A) \setminus \{0\} = VP(A) \setminus \{0\}$ *;*

(iii) $\sigma(A)\setminus\{0\} = VP(A)\setminus\{0\}$ *é finito ou no máximo enumerável. Se* $\sigma(A)\setminus\{0\} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *então* $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *e* $\lambda_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *;*

(iv) $\lambda_1 = \max\{|m|, |M|\}$, *onde* $m = \inf\limits_{||u||=1\ ,\ u\in H}\{(Au,u)\}$ *e* $M = \max\limits_{||u||=1\ ,\ u\in H}\{(Au,u)\}$ *;*

(v) *os vetores próprios correspondentes aos* λ_n'*s*, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, *formam uma seqüência ortonormal em H ;*

(vi) *para cada $v \in H$, temos que*

$$Av = \sum_{n=1}^{\infty} (Av, w_n) w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (v, w_n) w_n\ ;$$

(vi) *para cada $u \in H$, temos* $u = u_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u, w_n)w_n$, *onde* $u_0 \in \ker(A)$.

Corolário 1.1 *Sejam H espaço de Hilbert separável real com $dimH = +\infty$, e $B : D(B) \subsetneq H \to H$, B linear, auto-adjunto, $(Bu,u) \geq 0$, $\forall u \in D(B)$, B bijetivo, $\overline{D(B)} = H$, B operador não-limitado de H. Suponha que $D(B)$ está imerso compactamente em H. Suponha* *que $D(B)$ é um espaço de Banach com a norma do gráfico $\|u\|_{D(B)} = (\|u\|_H^2 + \|Bu\|_H^2)^{1/2}$. Então:*

(i) $\|u\|_1 = \|Bu\|_H$ *é também uma norma em $D(B)$ equivalente à norma do gráfico;*

(ii) $B^{-1} : H \to H$ *satisfaz as hipóteses do Teorema Espectral;*

(iii) *Existe seqüência $\{w_n\}_n \subset D(B)$ no máximo enumerável e seqüência $\{\mu_n\}_n \subset \mathbb{R}$, $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ...$ com $\mu_n \to \infty$ tal que $Bw_n = \mu_n w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;*

(iv) *os w_n's formam uma base Hilbertiana para H;*

(v) *$D(B)$ é um espaço de Hilbert com relação aos produtos internos induzidos pelas normas $\| \,.\, \|_{D(B)}$ e $\| \,.\, \|_1$;*

(vi) $(z_n)_n = \left(\dfrac{w_n}{\mu_n}\right)_n$ *é base Hilbertiana para $(D(B), \ \| \,.\, \|_1)$. Em particular, para todo $v \in D(B)$, tem-se $v = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(v, z_n)z_n$.*

Proposição 1.1 *O operador $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ satizfaz as hipóteses do corolário do teorema espectral.*

As demonstrações dos resultados anteriores podem ser encontradas em Milla [22].

Definição 1.1 *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^{N+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^N$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory se*

(a) *$f(x,t)$ é mensurável em t, para cada x fixo ;*

(b) *$f(x,t)$ é contínua em x, para cada t fixo ;*

(b) *para cada compacto U em D, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq m_U(t) \ , \quad \forall (t,x) \in U.$$

Teorema 1.2 (Carathéodory)

Seja $f : D \to \mathbb{R}^N$ uma função que satisfaça as condições de Carathéodory apresentadas na definição 1.1. Então, existe uma solução $x(t)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, onde $\beta > 0$.

Demonstração: Ver Medeiros-Rivera [21].

Teorema 1.3 (Prolongamento de Soluções)

Sejam $D = [0,T] \times B$, com $0 < T < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ |x| \leq b \ , \ b > 0\}$, e f satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \ , \quad |x_0| \leq b \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ esteja definida, se tenha $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Demonstração: Ver Medeiros-Rivera [21].

Lema 1.1 (Desigualdade de Gronwall)

Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T)$, $\beta \in L^1(0,T)$, com $\beta(t) > 0$ e $\varphi(t) \geq 0$, e $K \geq 0$ uma constante. Se $\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\, ds$, $\forall t \in [0,T]$, então, temos que

$$\varphi(t) \leq K e^{\int_0^t \beta(s)\, ds} \ , \quad \forall t \in (0,T).$$

Demonstração: Ver Carroll [4].

Consideremos os autovetores $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e os respectivos autovalores $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ do operador $-\Delta$ com domínio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e valores em $L^2(\Omega)$. Como conseqüência da proposição (1.1), temos que $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\left\{\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ formam bases Hilbertianas de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente.

Seja V_m o supespaço de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, ..., w_m$. A projeção de $L^2(\Omega)$ sobre V_m é o operador

$$P_m : L^2(\Omega) \longrightarrow V_m \subset L^2(\Omega).$$

Temos o seguinte resultado

Proposição 1.2 *Sendo P_m o operador projeção,*

(i) $|P_m u|^2 = \sum_{j=1}^m |(u,w_j)|^2 \leq |u|^2 \ , \quad \forall u \in L^2(\Omega)$ *;*

(ii) $|P_m w_k| = 1 \ , \quad \forall \ k = 1, 2, ..., m$ *;*

(iii) *P_m é auto-adjunto.*

Demonstração: Ver Brezis [2].

Lema 1.2 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E'. Então, existe uma subseqüência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \ \text{ em } \ E'.$$

Demonstração: Ver Brezis [2].

Proposição 1.3 *Se $u \in L^\infty(\Omega)$, com Ω subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, então $u \in L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.*

Demonstração: Ver Brezis [2].

Proposição 1.4 *Temos que $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, onde $Q = [0,T] \times \Omega$.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [3]

Teorema 1.4 (Teorema de Rellich-Kondrachov)
Seja Ω um subconjunto aberto limitado de classe C^1 do $\mathbb{R}^N$. Então

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \ \text{ com imersão compacta.}$$

Demonstração: Ver Brezis [2].

Corolário 1.2 *Seja Ω como no teorema anterior. Então*

$$H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \ \text{ com imersão compacta, } \forall m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Ver Brezis [2].

Lema 1.3 *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $V \hookrightarrow H$. Se $u \in L^1(0,T;V)$ e $u' \in L^1(0,T;H)$, onde $T > 0$, então $u \in C^0([0,T];H)$.*

Demonstração: Ver Temam [26].

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental do Cálculo Generalizado)
Sejam $(a,b) \subset \mathbb{R}$ limitado, $u \in L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $u' \in L^p(a,b)$. Então

$$\int_a^x u'(t)\, dt = u(x) - u(a)\ , \quad \forall x \in (a,b).$$

Demonstração: Ver Kesavan [11] e Medeiros-Mello [17].

Lema 1.4 *Se* $u \in L^1(0,T;X)$*, onde* X *é um espaço de Banach real, e* $\int_0^T u(t)\theta(t)\,dt = 0$*,* $\forall \theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$*, então* $u(t) = 0$ *q.s. em* $(0,T)$*.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [3].

Lema 1.5 (Temam)

Sejam V *e* H *espaços de Hilbert, com produtos internos e normas dados, repectivamente, por* $||\ .\ ||$, $((\ .\ ))$ *e* $|\ .\ |$, $(\ .\ )$*, com* $V \hookrightarrow H$ *imersão contínua e densa. Seja* $A \in \mathcal{L}(V,V')$ *isomorfismo,* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$*,* A *auto-adjunto,* $\langle Au, v\rangle = a(u,v)$*,* $\forall u, v \in V$*, sendo* a *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Sejam* $T > 0$ *e* w *uma função vetorial tal que* $w \in L^2(0,T;V)$*,* $w' \in L^2(0,T;H)$ *e* $w'' + Aw \in L^2(0,T;H)$*. Então,*

(i) $(w''(t) + Aw(t), w'(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left\{|w'(t)|^2 + ||w(t)||^2\right\}$*, em* $\mathcal{D}'(0,T)$ *;*

(ii) $w \in C^0([0,T];V)$*,* $w' \in C^0([0,T];H)$*.*

Demonstração: Ver Temam [26].

Corolário 1.3 *Considere* V*,* H *e* A *como no lema anterior,* A *também satisfazendo* $|Au|_H = |u|_{\mathcal{D}(A)}$*,* $\forall u \in \mathcal{D}(A)$*, e* u *uma função vetorial tal que* $u \in L^\infty(0,T;\mathcal{D}(A))$*,* $u' \in L^\infty(0,T;V)$*,* $u'' \in L^\infty(0,T;H)$*,* $u'' + Au = g \in C^0([0,T];H)$ *e* $g' \in L^2(0,T;H)$*. Então, temos que*

$$u \in C^0([0,T];\mathcal{D}(A))\ ,\ u' \in C^0([0,T];V) \text{ e } u'' \in C^0([0,T];H).$$

Demonstração: Tome $w = u'$. Então $w \in L^\infty(0,T;V)$ e $w' \in L^\infty(0,T;H)$, o que implica, pois $[0,T]$ é finito, que $\omega \in L^2(0,T;V)$ e $w' \in L^2(0,T;H)$. Além disso, temos que

$$w'' + Aw = u''' + Au' = \frac{d}{dt}[u'' + Au] = \frac{d}{dt}g \in L^2(0,T;H).$$

Temos, então, do lema de Temam, que $u' \in C^0([0,T];V)$ e $u'' \in C^0([0,T];H)$.
Como $g \in C^0([0,T];H)$, $u'' \in C^0([0,T];H)$ e $u'' + Au = g$, temos que $Au \in C^0([0,T];H)$, o que implica que $|Au|_H \in C([0,T])$, donde $|u|_{\mathcal{D}(A)} \in C([0,T])$, pois $|Au|_H = |u|_{\mathcal{D}(A)}$. Logo, $u \in C^0([0,T];\mathcal{D}(A))$. ■

Teorema 1.6 (Teorema de Gauss) *Se* $u = (u_i) \in (H^1(\Omega))^N$*, temos que*

$$\int_\Omega \text{div } u\, dx = \int_\Gamma u.\nu\, d\Gamma$$

Demonstração: Ver Kesavan [11].

Teorema 1.7 (Identidade de Green)

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx = -\int_\Omega (\Delta u) v \, dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma$$

Demonstração: Ver Kesavan [11].

Por abuso de notação, escrevemos v no lugar de $\gamma_0 v$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ no lugar de $\gamma_1 u$ nos teoremas (1.6) e (1.7), ao integrarmos em Γ.

Teorema 1.8 (Derivação do produto)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e, para $1 \leq i \leq N$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Demonstração: Ver Brezis [2].

Teorema 1.9 (Imersão de Sobolev)

Se Ω for aberto, limitado e bem regular do $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq \overline{p} < \infty$, temos que

(i) $W^{m,\overline{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, *se* $\dfrac{1}{\overline{p}} - \dfrac{m}{N} < 0$;

(ii) $W^{m,\overline{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \geq 1$, *se* $\dfrac{1}{\overline{p}} - \dfrac{m}{N} = 0$;

(iii) $W^{m,\overline{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q$ *tal que* $1 \leq q \leq \dfrac{N\overline{p}}{N - m\overline{p}}$, *se* $\dfrac{1}{\overline{p}} - \dfrac{m}{N} > 0$.

Demonstração: Ver Brezis [2].

Teorema 1.10 (Agmon-Douglis-Nirenberg)

Suponha que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para toda $f \in L^p(\Omega)$, existe $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ única solução da equação

$$-\Delta u + u = f \quad em \quad \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ (m inteiro ≥ 1), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad ||u||_{W^{m+2,p}} \leq C||f||_{W^{m,p}} .$$

Demonstração: Ver Brezis [2].

Teorema 1.11 (Teorema do Traço)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira Γ de classe C^{m+1}. Então existe uma aplicação traço $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$ de $H^m(\Omega)$ em $(L^2(\Omega))^m$ tal que

(i) *Se $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(v) = v|_\Gamma$, $\gamma_1(v) = \left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma$, ... , $\gamma_{m-1}(v) = \left.\dfrac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}}(v)\right|_\Gamma$, onde ν é o normal unitário exterior à fronteira Γ ;*

(ii) *A imagem de γ é o espaço $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$;*

(iii) *O núcleo de γ é $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Kesavan [11].

Teorema 1.12 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função lipschitz-contínua tal que $F(0) = 0$, e seja $p \in [1, \infty]$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla F(u) = F'(u)\nabla u$ q.s. em Ω. Mais ainda, se $p < \infty$, então a aplicação $u \mapsto F(u)$ é contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [3].

Lema 1.6 (Gagliardo-Nirenberg)

Sejam $1 \le q \le s \le \infty$, $1 \le r \le s$, $0 \le k < m < \infty$, (k e m inteiros não-negativos) e $\delta \in [0, 1]$. Seja $v \in W^{m,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. Suponha que

$$k - \frac{N}{s} \le \delta \left(m - \frac{N}{q} \right) - \frac{N(1-\delta)}{r} .$$

Então $v \in W^{k,s}(\Omega)$ e existe uma constante C tal que

$$||v||_{W^{k,s}(\Omega)} \le C ||v||^{\delta}_{W^{m,q}(\Omega)} |v|_r^{1-\delta} .$$

Demonstração: Ver Nirenberg [23].

Lema 1.7 *Seja $\phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ uma função localmente absolutamente contínua e não-crescente tal que existem constantes não-negativas β e A com*

$$\int_S^\infty \phi(t)^{\beta+1}\, dt \le A\, \phi(S) , \quad \forall S \ge 0 .$$

Então, temos que

$$\phi(t) \le \begin{cases} \phi(0) e^{1 - \frac{t}{A}} , \quad \forall t \ge 0 \quad \text{se } \beta = 0 , \\ \left(A \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}} , \quad \forall t > 0 \quad \text{se } \beta > 0 . \end{cases}$$

Demonstração: Ver Komornick [13].

Lema 1.8 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira bem regular. Então, existe uma função $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ tal que*

$$h = \nu \quad em \quad \Gamma_+ \quad , \quad h.\nu \geq 0 \quad em \quad \Gamma \quad , \quad h = 0 \quad em \quad \Omega \setminus \widehat{\omega} \ ,$$

onde, considerando x_0 um ponto fixo de $\mathbb{R}^N$, $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma \ ; \ (x - x_0).\nu(x) > 0\}$, $\Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$, ω a interseção de Ω com uma vizinhança de Γ_+ e $\widehat{\omega}$ é uma outra interseção de Ω com uma vizinhança de Γ_+, $\widehat{\omega}$ estando estritamente contido em ω (Veja figura 2).

Demonstração: Ver Lions [14].

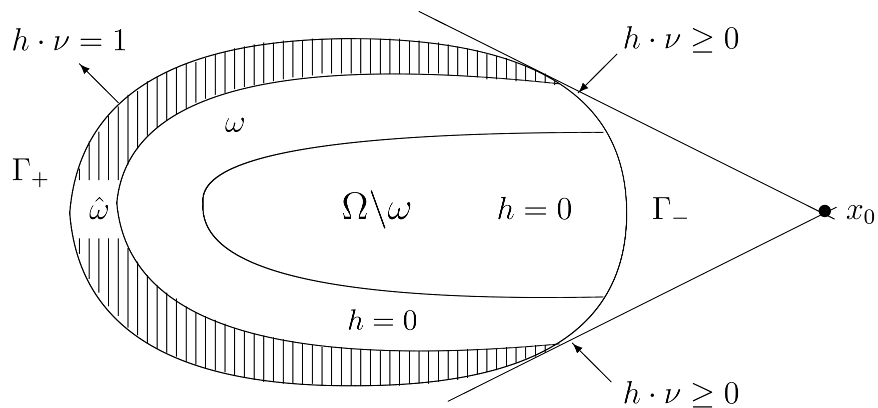

Figura 2

Lema 1.9 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira bem regular. Então, existe uma função $\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que*

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad , \quad \eta = 1 \quad em \quad \widehat{\omega} \quad , \quad \eta = 0 \quad em \quad \Omega \setminus \omega \ .$$

Demonstração: Ver Lions [14].

Proposição 1.5 *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^2. Se $y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então temos que*

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) \nu = \nabla y \quad em \quad \Gamma \ ,$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a Ω, e , por abuso de notação, $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$ e ∇y representam $\gamma_1 y$ e $\gamma_0(\nabla y)$, respectivamente.

Demonstração:

<u>1^o caso</u>: Considere $y \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $y|_\Gamma = 0$.

Nesse caso, temos o seguinte resultado: $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = \nu.\nabla y$.

Se, para todo $(x_1, x_2, ..., x_N) \in \Gamma$ temos que $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$, $i = 1, 2, ..., N$, então $\nabla y = \overrightarrow{0}$, o que implica que $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0$, donde $\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\right) \nu = \nabla y$.

Suponha, agora, que exista um $(x_1, x_2, ..., x_N)$ tal que $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_N) \neq 0$, para algum i entre 1 e N. Então, pelo Teorema da Função Implícita, $x_i = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N)$ e

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{-\frac{\partial y}{\partial x_j}}{\frac{\partial y}{\partial x_i}} \quad , \quad \forall\, 1 \leq j \leq N \quad , \quad j \neq i \; .$$

Como $y(x_1, ..., x_N) = 0$ determina uma superfície S em $\mathbb{R}^N$, pelo mesmo teorema, podemos parametrizar esta superfície S por

$$\sigma(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) = \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ \vdots \\ x_i = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \\ \vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

Uma base para o plano tangente a S no ponto $(x_1, x_2, ..., x_N)$ é formada pelos vetores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_{x_1}} &= (1, 0, ..., 0, f_{x_1}, 0, ..., 0) \\ \overrightarrow{\sigma_{x_2}} &= (0, 1, ..., 0, f_{x_2}, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\sigma_{x_{i-1}}} &= (0, 0, ..., 1, f_{x_{i-1}}, 0, ..., 0) \\ \overrightarrow{\sigma_{x_{i+1}}} &= (0, 0, ..., 0, f_{x_{i+1}}, 1, ..., 0) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\sigma_{x_N}} &= (0, 0, ..., 0, f_{x_N}, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

Como $\nabla y = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial y}{\partial x_i}, ..., \dfrac{\partial y}{\partial x_N}\right)$, temos, para todo $1 \leq j \leq N$, $j \neq i$, que

$$\nabla y \;.\; \overrightarrow{\sigma_{x_j}} = \frac{\partial y}{\partial x_j}.1 + \frac{\partial y}{\partial x_i}.f_{x_j} = 0 \; .$$

Logo, ∇y é paralelo a ν, isto é, $\nabla y = k\nu$, k uma constante, e, como $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = \nu.\nabla y$, temos que $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = k\nu \, . \, \nu$, o que implica que $k = \dfrac{\partial y}{\partial \nu}$, donde $\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu}\right)\nu = \nabla y$.

<u>2^o caso</u>: Considere $y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Temos que existe seqüência $\{y_k\}_k$ em $C^\infty(\overline{\Omega})$, com $y_k|_\Gamma = 0$, tal que $y_k \to y$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Como o traço é uma função contínua, temos que

$$\gamma_0 y_k \to \gamma_0 y \quad \text{em} \quad H^{3/2}(\Gamma) \qquad \text{e} \qquad \gamma_1 y_k \to \gamma_1 y \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \; .$$

Também, temos que $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ em $H^1(\Omega)$, o que implica que

$$\gamma_0\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) \to \gamma_0\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma).$$

Observando que $\gamma_0 y_k = y_k$ em Γ, $\gamma_1 y_k = \dfrac{\partial y_k}{\partial \nu}$ em Γ e $\gamma_0\left(\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$ em Γ, concluímos que

$$y_k \to \gamma_0 y \quad \text{em} \quad H^{3/2}(\Gamma) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \to \gamma_0\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \;\; , \quad \forall\, i = 1, 2, ..., N \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial \nu} \to \gamma_1 y \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Omega) \; . \tag{1.3}$$

Como $H^{3/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$, as convergências acima também ocorrem em $L^2(\Gamma)$.

Sendo o traço uma função linear, temos de (1.2) que

$$\nabla y_k|_\Gamma \longrightarrow \left(\gamma_0\frac{\partial y_k}{\partial x_1}, ..., \gamma_0\frac{\partial y_k}{\partial x_N}\right) = \gamma_0[\nabla y] \quad \text{em} \quad [L^2(\Gamma)]^N \; . \tag{1.4}$$

Como a fronteira Γ é de classe C^2, temos que $\nu \in [L^\infty(\Gamma)]^N$. Logo,

$$\left|\left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu}\right)\nu - (\gamma_1 y)\nu\right|^2_{[L^2(\Gamma)]^N} = \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu}\,\nu_i - (\gamma_1 y)\nu_i\right)^2 d\Gamma \; = \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu} - \gamma_1 y\right)^2 \nu_i^2 \, d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu} - \gamma_1 y\right)^2 |\,\nu|^2 \, d\Gamma \leq |\nu|^2_\infty \int_\Gamma \left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu} - \gamma_1 y\right)^2 d\Gamma \; = \; |\nu|^2_\infty \left|\frac{\partial y_k}{\partial \nu} - \gamma_1 y\right|^2_{L^2(\Gamma)} \; ,$$

donde

$$\left|\left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu}\right)\nu - (\gamma_1 y)\nu\right|_{[L^2(\Gamma)]^N} \leq |\nu|_\infty \left|\frac{\partial y_k}{\partial \nu} - \gamma_1 y\right|_{L^2(\Gamma)} \; .$$

De (1.3), vemos que

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial \nu}\right)\nu \to (\gamma_1 y)\nu \quad \text{em} \quad [L^2(\Gamma)]^N \tag{1.5}$$

Como $\nabla y_k|_\Gamma = \left(\dfrac{\partial y_k}{\partial \nu}\right)\nu$ pelo primeiro caso já demonstrado, segue-se de (1.4) e (1.5), utilizando a unicidade do limite, que

$$\gamma_0[\nabla y] = (\gamma_1 y)\nu \ , \quad \text{isto é,} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\nu = \nabla y \ , \text{ em } \Gamma \ . \qquad \blacksquare$$

Uma outra demonstração para este resultado , utilizando o Teorema de Gauss, pode ser encontrada em [20].

1.3 Resultados da teoria de Semigrupos

Nesta seção, X sempre representará um espaço de Banach e $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de operadores lineares limitados de X.

Proposição 1.6 *Seja S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Então, se $x \in \mathcal{D}(A)$, temos que $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall t \geq 0$, e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \ .$$

Demonstração: Ver Pazy [24].

Definição 1.2 *Sejam S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Definamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n por:*

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x \ ; \ x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \ \text{ e } \ A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\}$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x) \ , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^n) \ .$$

Definição 1.3 *Seja A um operador linear fechado do espaço de Banach X. Definindo, para cada $x \in \mathcal{D}(A^k)$, $|x|_k = \sum_{j=0}^{k} ||A^j x||_X$, temos que $| \ . \ |_k$ é uma norma em $\mathcal{D}(A^k)$, dita norma do gráfico, munido da qual $\mathcal{D}(A^k)$ é um espaço de Banach, que será representado por $[\mathcal{D}(A^k)]$.*

Proposição 1.7 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0, então, para todo $x \in \mathcal{D}(A^n)$,*

$$S(t)x \in C^{n-k}\Big([0,\infty) \ ; \ [\mathcal{D}(A^k)]\Big) \quad , \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Demonstração: Ver Gomes [9].

Definição 1.4 *Vamos escrever $A \in G(M, w)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0, S, que satisfaz a condição $||S(t)||_X \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$.*

Teorema 1.13 (Lumer-Phillips)
$A \in G(1, 0)$ se e somente se A é m-dissipativo e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Demonstração: Ver Gomes [9].

Teorema 1.14 *Se $A \in G(1, 0)$, B é um operador linear dissipativo com $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ e existem constantes a e b tais que $0 \leq a < 1$, $b > 0$ e*

$$||Bx||_X \leq a||Ax||_X + b||x||_X \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \ ,$$

então $A + B \in G(1, 0)$.

Demonstração: Ver Gomes [9].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções Fortes

Neste capítulo, estudamos a existência de soluções fortes do problema (P) de duas formas distintas: uma pelo método de Faedo-Galerkin e outra utilizando resultados da teoria de semigrupos. A unicidade é obtida utilizando o Método da Energia. Os passos da demonstração de existência foram apresentados na forma mais geral possível de modo que a prova possa ser facilmente estendida para o problema com dissipação não linear $a(x)g(u')$.

2.1 Existência de Soluções utilizando o método de Faedo-Galerkin

Teorema 2.1 *Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $a = a(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $a(x) \geq 0$ em Ω, Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular. Então existe uma função $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $T > 0$, tal que*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)); \tag{2.1}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)); \tag{2.2}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)); \tag{2.3}$$

$$u'' - \Delta u + au' = 0 \quad q.s. \ em\ Q = \Omega \times [0,T]; \tag{2.4}$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1. \tag{2.5}$$

Demonstração

(i) Problema Aproximado

Consideremos $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Denotaremos por $W = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$. Temos que V é um espaço de Hilbert com o produto interno $((u,v))_V = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$, $\forall u, v \in V$. Além disso, para $u \in V$ e $v \in W$ temos que $((u,v))_W = (-\Delta u, v)_H$. Denotaremos, por $((\ .\ ,\ .\ ))$ e $||\ .\ ||$ e por $(\ .\ ,\ .\ )$ e $|\ .\ |$ o produto interno e a norma em W e H, respectivamente. Identificaremos H ao seu dual H', obtendo, então, o seguinte esquema: $V \subset W \subset H \subset W'$, onde $W' = H^{-1}(\Omega)$.

Os autovetores do operador $-\Delta$ (isto é, as funções $w_j \in V$, j=1,2,..., tais que $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$) formam uma base ortogonal de W e ortonormal de H. Também formam uma base ortogonal de V, pois

$$((w_i, w_j))_V = (\Delta w_i, \Delta w_j) = (-\Delta w_i, -\Delta w_j) = (\lambda_i w_i, \lambda_j w_j) = \lambda_i \lambda_j (w_i, w_j) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j; \\ \lambda_i \lambda_j, \text{ se } i = j. \end{cases}$$

Logo, $\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_n$ e $\left(\dfrac{w_j}{\lambda_j}\right)_n$ formam bases Hilbertianas para W e V, respectivamente.

Tomemos $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores w_j. O problema aproximado consiste em determinar $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \ \in V_m$ tal que

$$\begin{cases} (u_m''(t), v) + ((u_m(t), v)) + (a(x) u_m'(t), v) = 0, \ \forall v \ \in \ V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em } V \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{forte em } W \end{cases} \tag{2.6}$$

Substituindo $u_m(t)$ e tomando $v = w_r$, $1 \leq r \leq m$, em (2.6), temos:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(t) w_j\ ,\ w_r\right) + \left(\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\ ,\ w_r\right)\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} a(x) g_{jm}'(t) w_j\ ,\ w_r\right) = 0, \quad 1 \leq r \leq m$$

Como $(w_j)_j$ é ortonormal em H e $((u,v)) = (-\Delta u, v)$, $\forall u \in V$ e $v \in W$, temos

$$g_{rm}''(t) + \left(-\Delta\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right)\ ,\ w_r\right) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t)(a(x) w_j\ ,\ w_r) = 0\ \ ,$$

o que implica

$$g''_{rm}(t) + \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)(-\Delta w_j)\ , w_r\right) + \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)(a(x)w_j\ ,\ w_r) = 0\ \ ,$$

donde

$$g''_{rm}(t) + \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\lambda_j w_j\ , w_r\right) + \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)(a(x)w_j\ ,\ w_r) = 0\ \ ,$$

e, portanto,

$$g''_{rm}(t) + \sum_{j=1}^{m}(a(x)w_j\ ,\ w_r)g'_{jm}(t) + \lambda_r g_{rm}(t) = 0. \tag{2.7}$$

Das condições iniciais em (2.6) e do Teorema Espectral, temos que

$$\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)w_j = u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(u_0, \frac{w_j}{\lambda_j}\right)\right)_V \frac{w_j}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{m}(u_0, w_j)w_j$$

e

$$\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0)w_j = u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(u_1, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)\right)_W \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} = \sum_{j=1}^{m}(u_1, w_j)w_j$$

Logo, podemos tomar

$$g_{jm}(0) = (u_0, w_j)\ , \quad 1 \leq j \leq m \tag{2.8}$$

e

$$g'_{jm}(0) = (u_1, w_j)\ , \quad 1 \leq j \leq m \tag{2.9}$$

Definindo $q_{rm}(t) = g'_{rm}(t)$, obtemos de (2.7) o sistema

$$\begin{cases} g'_{rm}(t) = q_{rm}(t) \\ q'_{rm}(t) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(a(x)w_j\ ,\ w_r)q_{jm}(t) - \lambda_r g_{rm}(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

com $1 \leq r \leq m$.

O sistema (2.10) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \\ -g_{1m}(t)\lambda_1 \\ \vdots \\ -g_{mm}(t)\lambda_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_{1m}(t)(aw_1, w_1) - \ \ldots\ - q_{mm}(t)(aw_m, w_1) \\ \vdots \\ -q_{1m}(t)(aw_1, w_m) - \ \ldots\ - q_{mm}(t)(aw_m, w_m) \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que

$$\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & \cdots & 0 & (-aw_1, w_1) & \cdots & (-aw_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda_m & (-aw_1, w_m) & \cdots & (-aw_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Definindo

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} \ \text{e} \ A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & \cdots & 0 & (-aw_1, w_1) & \cdots & (-aw_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda_m & (-aw_1, w_m) & \cdots & (-aw_m, w_m) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

segue-se de (2.11) que

$$Y'_m(t) = AY_m(t). \tag{2.13}$$

Agora, de (2.8) e (2.9), obtemos

$$Y_m(0) = \begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \\ q_{1m}(0) \\ \vdots \\ q_{mm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0, w_1) \\ \vdots \\ (u_0, w_m) \\ (u_1, w_1) \\ \vdots \\ (u_1, w_m) \end{bmatrix} = Y_{0m} \tag{2.14}$$

Então, de (2.13) e de (2.14), temos o sistema equivalente

$$\begin{cases} Y'_m(t) = AY_m(t) \\ Y_m(0) = Y_{0m} \end{cases}$$

Se tomarmos $H_m(t, Y_m(t)) = AY_m(t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$, então podemos escrever o sistema acima como

$$\begin{cases} Y'_m(t) = H_m(t, Y_m(t)) \\ Y_m(0) = Y_{0m} \end{cases} \tag{2.15}$$

Considere $D = [-T, T] \times B_b$, onde $B_b = \{x \in \mathbb{R}^{2m} \ ; \ Y_{0m} \in B_b \text{ e } |x| \leq b, \ b > 0\}$. Então

• H_m é contínua em relação a Y_m, para cada t fixo:

De fato, fixado t, tome $\epsilon > 0$ qualquer. Seja $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|A\|}$ (note que $\|A\| < \infty$). Então, se Y_m^1, Y_m^2 $\in B_b$ e $|Y_m^1 - Y_m^2| < \delta$, temos que

$|H_m(t, Y_m^1(t)) - H_m(t, Y_m^2(t))| = |AY_m^1(t) - AY_m^2(t)| \leq \|A\||Y_m^1 - Y_m^2| < \|A\|\delta = \epsilon$;

• H_m é contínua em relação a t, para cada Y_m fixo:

Fixado $Y_m(t)$, temos que H_m não depende de t, isto é, H_m é uma constante e, portanto, contínua;

• $|H_m(t, Y_m(t))| \leq \|A\||Y_m(t)| \leq \|A\|b < \infty$, se $Y_m(t) \in B_b$.

Portanto, das considerações acima, segue-se pelo Teorema de Caratheodory que existe uma solução $Y_m(t)$ em $(-t_m, t_m)$, $t_m < T$, de (2.15). Restringindo esta solução a t positivo, vemos que existem, para todo m, funções $g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t)$ que satisfazem (2.7), $t \in [0, t_m)$, donde, para todo m, existe $u_m(t)$, $t \in [0, t_m)$, $t_m < T$, solução do problema aproximado (2.6). Podemos notar que, dada a regularidade de H_m, a existência da solução $Y_m(t)$ também pode ser obtida aplicando-se o Teorema de Peano; inclusive a solução pode ser determinada explicitamente, porque o problema é linear.

(ii) Estimativas a Priori

• **Primeira estimativa** (Permitirá prolongar a solução aproximada $u_m(t) \in V_m$, definida para todo $t \in [0, t_m)$, $t_m < T$, a todo intervalo $[0, T]$.)

Tomando $v = 2u'_m(t) \in V_m$ em (2.6), temos, $\forall t \in [0, t_m)$,

$$2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2((u_m(t), u'_m(t))) + 2(a(x)u'_m(t), u'_m(t)) = 0 \tag{2.16}$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||^2\right\} + 2\int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2\, dx = 0.$$

Como, por hipótese, $a(x)$ é uma função limitada e não-negativa, vemos que

$$\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||^2\right\} \leq 0. \tag{2.17}$$

Integrando-se a inequação acima de 0 a t, com $t \in [0, t_m)$, obtemos

$$|u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||^2 \leq |u_{1m}|^2 + ||u_{0m}||^2 \tag{2.18}$$

Por outro lado, do problema aproximado (2.6), temos que $u_{0m} \longrightarrow u_0$ forte em W e $u_{1m} \longrightarrow u_1$ forte em H. Logo, existem constantes c_1 e c_2, independentes de m, t, e T, tais que $|u_{1m}|^2 \leq c_1$ e $||u_{0m}||^2 \leq c_2$. Segue-se, então, de (2.18), que

$$|u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||^2 \leq c_1 + c_2 = k_1\ ,\ \ \forall t \in [0, t_m)\ ,$$

logo,

$$|u'_m(t)|^2 \leq k_1 \quad \text{e} \quad ||u_m(t)||^2 \leq k_1\ ,\ \ \forall t \in [0, t_m). \tag{2.19}$$

Substituindo a expressão de $u_m(t)$ em (2.19) e comparando com (2.12), temos que

$$|Y_m(t)| \leq \bar{k_1}\ ,\ \ \forall t \in [0, t_m),$$

o que implica, pelo Teorema de Prolongamento de Soluções, que $Y_m(t)$ pode ser prolongada a todo $[0, T]$, $T > 0$. Logo, $u_m(t)$ pode ser prolongada a todo $[0, T]$.

Retornando a (2.16), (2.17) e (2.18), mas agora com $t \in [0, T]$, temos que (2.19) é válida para todo t entre 0 e T e para todo m. Portanto,

$$(u_m)_m \ \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W) \tag{2.20}$$

e

$$(u'_m)_m \ \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H). \tag{2.21}$$

• **Segunda estimativa** (limitação para $(u''_m)_m$)

Como $Y_m(t)$ é a solução de (2.15), segue-se que $Y_m(t) \in C^1([0,T])$. Além disso, dado que a EDO é

$$\begin{cases} Y'_m = AY_m \\ Y_m(0) = Y_{0m} \end{cases} ,$$

a solução Y_m pode se explicitada da forma $Y_m(t) = Y_{0m}e^{At}$. Como $Y_m(t) \in C^1([0,T])$ e $Y'_m = AY_m$, temos que $Y'_m \in C^1([0,T])$, o que implica que Y''_m existe e pertence a $C^0([0,T])$. Logo, vemos que g''_{im} e $g'''_{im} \in C^0([0,T])$. Portanto, concluímos que $u_m(t) \in C^3([0,T])$. Podemos, então, derivar a equação aproximada (2.6) diretamente em relação a t e obter

$$(u'''_m(t), v) + ((u'_m(t), v)) + (a(x)u''_m(t), v) = 0, \ \forall v \ \in \ V_m.$$

Substituindo $v = u''_m(t)$ na equação anterior, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2 + \int_\Omega a(x)|u''_m(t)|^2 \, dx = 0.$$

Integrando a última igualdade de 0 a t, $t \in [0,T]$, obtemos

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 - |u''_m(0)|^2 - ||u'_m(0)||^2 + 2\int_0^t \int_\Omega a(x)|u''_m(s)|^2 \, dxds = 0 ,$$

o que implica que

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 \le |u''_m(0)|^2 + ||u'_m(0)||^2 + 2\int_0^t \int_\Omega |a(x)|.|u''_m(s)|^2 \, dxds ,$$

donde, considerando $\max_{x\in\Omega} |a(x)| = |a(x)|_{max}$

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 \le |u''_m(0)|^2 + ||u_{1m}||^2 + 2|a(x)|_{max}\int_0^t |u''_m(s)|^2 \, ds \tag{2.22}$$

Por outro lado, se considerarmos $t = 0$ e tomarmos $v = u''_m(0)$ na equação aproximada (2.6), obteremos

$$(u''_m(0), u''_m(0)) + ((u_m(0), u''_m(0) \ )) + (a(x)u'_m(0), u''_m(0)) = 0,$$

o que implica

$$|u''_m(0)|^2 = -(-\Delta u_m(0), u''_m(0)) - (a(x)u'_m(0), u''_m(0)),$$

donde

$$|u''_m(0)|^2 \leq |(\Delta u_m(0), u''_m(0)) - (a(x)u'_m(0), u''_m(0))| \leq |(\Delta u_m(0), u''_m(0))| + |(a(x)u'_m(0), u''_m(0))| \leq$$

$$\leq |\Delta u_m(0)|.|u''_m(0)| + |a(x)u'_m(0)|.|u''_m(0)| \leq |u''_m(0)|(|\Delta u_m(0)| + |a(x)|_{max}|u'_m(0)|).$$

Portanto,

$$|u''_m(0)| \leq |\Delta u_{0m}| + |a(x)|_{max}|u_{1m}| = ||u_{0m}||_V + |a(x)|_{max}|u_{1m}|. \tag{2.23}$$

Das convergências de $(u_{0m})_m$ e $(u_{1m})_m$ em (2.6), temos que existem constantes c_3 e c_4, independentes de t e m, tais que

$$|u''_m(0)| \leq c_3 + c_4|a(x)|_{max} \tag{2.24}$$

Logo, de (2.22) e (2.24), com $k_2 = c_3 + c_4|a(x)|_{max} + c_4$, temos que

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 \leq k_2 + 2|a(x)|_{max} \int_0^t |u''_m(s)|^2 \, ds \tag{2.25}$$

e

$$|u''_m(t)|^2 \leq k_2 + \int_0^t 2|a(x)|_{max}|u''_m(s)|^2 \, ds \tag{2.26}$$

Pela desigualdade de Gronwall, segue-se, de (2.26), que

$$|u''_m(t)|^2 \leq k_2 \exp\left(\int_0^t 2|a(x)|_{max} ds\right) = k_2 e^{2t|a(x)|_{max}} \ , \ \ \forall t \in [0,T] \ ,$$

donde

$$|u''_m(t)|^2 \leq k_2 e^{2T|a(x)|_{max}} \ . \tag{2.27}$$

Logo, de (2.25) e (2.27), temos

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 \leq k_2 + 2|a(x)|_{max} k_2 e^{2T|a(x)|_{max}}.t \ , \ \ \forall t \in [0,T] \leq$$

$$\leq k_2 + 2|a(x)|_{max} T k_2 e^{2T|a(x)|_{max}} = k_4 \ ,$$

o que implica que

$$|u''_m(t)|^2 + ||u'_m(t)||^2 \leq k_4 \ , \tag{2.28}$$

onde k_4 é independente de m e t. Concluímos, então, que

$$(u'_m(t))_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;W) \tag{2.29}$$

e

$$(u''_m(t))_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H) \tag{2.30}$$

• **Terceira estimativa** (limitação para $(\Delta u_m)_m$)

Da equação aproximada (2.6), temos

$$(u''_m(t), w_j) + (-\Delta u_m(t), w_j) + (a(x)u'_m(t), w_j)\ , \quad \forall j = 1, 2, ..., m \tag{2.31}$$

Seja

$$h_m(t) = u''_m(t) - \Delta u_m(t) + a(x)u'_m(t).$$

Como a base $(w_j)_j$ é formada pelos autovetores de $-\Delta$, tem-se que $-\Delta u_m(t) \in V_m$, o que implica que $-\Delta u_m(t) \in H$. Além disso, como $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, temos que $a(x)u'_m(t) \in H$. Concluímos, então, que $h_m(t) \in H$.

Consideremos o operador projeção

$$\begin{array}{rccl} P_m : & H & \longrightarrow & V_m \\ & v & \longmapsto & P_m v = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (v, w_i) w_i \end{array}$$

Como o operador P_m é auto-adjunto, obtém-se

$$(P_m h_m(t), w_j) = (h_m(t), P_m w_j) = \left(h_m(t), \sum_{i=1}^{m} (w_j, w_i) w_i \right) = (h_m(t), w_j).$$

Como, por (2.31), temos que $(h_m(t), w_j) = 0$, $\forall j = 1, 2, ..., m$, concluímos que

$$(P_m h_m(t), w_j) = 0\ , \quad \forall j = 1, 2, ..., m$$

o que implica que $(P_m h_m(t), v) = 0$ em V_m, donde $P_m h_m(t) \equiv 0$ em V_m. Assim,

$$P_m u''_m(t) - P_m \Delta u_m(t) + P_m(a(x)u'_m(t)) = 0.$$

Como $u''_m(t)$ e $\Delta u_m(t)$ pertencem a V_m, $P_m \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $||P_m|| \leq 1$, temos que

$$u''_m(t) - \Delta u_m(t) + P_m(a(x)u'_m(t)) = 0\ ,$$

donde

$$|\Delta u_m(t)| \leq |u''_m(t)| + |P_m(a(x)u'_m(t))| \leq |u''_m(t)| + ||P_m||.|a(x)u'_m(t)| \leq$$

$$\leq |u''_m(t)| + |a(x)u'_m(t)| \leq |u''_m(t)| + |a(x)|_{max}|u'_m(t)|.$$

De (2.21) e (2.30), temos que $(u'_m)_m$ e $(u''_m)_m$ são limitadas em $L^\infty(0,T;H)$; logo, existe constante k_5, independente de m e t, $t \in [0,T]$, tal que

$$|\Delta u_m(t)| \leq k_5.$$

Logo, observando que $|\Delta u_m(t)| = ||u_m||_V$, temos que

$$(\Delta u_m)_m \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;H) \tag{2.32}$$

$$(u_m)_m \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;V) \tag{2.33}$$

(iii) Passagem ao limite

De (2.29) e (2.33), temos que existe subseqüência de $(u_m)_m$, denotada da mesma forma, tal que

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;W) \tag{2.34}$$

e

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V)\ , \tag{2.35}$$

pois $L^1(0,T;W')$ e $L^1(0,T;V')$ são separáveis e $[L^1(0,T;W')]' = L^\infty(0,T;W)$ e $[L^1(0,T;V')]' = L^\infty(0,T;V)$, pois V e W são reflexivos e separáveis.

Provaremos que $\bar{u} = u'$:

Como $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$, temos de (2.35) que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H).$$

Como $(0,T)$ é limitado, temos que $L^\infty(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$. Desde que $L^2(0,T;H) \equiv L^2(Q)$ é reflexivo, obtemos

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(Q),$$

onde $Q = [0,T] \times \Omega$.

Como a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica na convergência no sentido das distribuições, temos que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Logo, sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$, segue-se que

$$u'_m \to u' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{2.36}$$

Por outro lado, de (2.34), obtemos, já que $L^\infty(0,T;W) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \equiv L^2(Q)$, pois $(0,T)$ é limitado e $W \hookrightarrow H$,

$$u'_m \rightharpoonup \bar{u} \ \text{ em } \ L^2(Q)$$

pois $L^2(Q)$ é reflexivo. Portanto, de modo análogo ao caso anterior, temos que

$$u'_m \to \bar{u} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{2.37}$$

De (2.36) e (2.37), temos, pela unicidade do limite fraco, que $\bar{u} = u'$ em $L^2(Q)$. Portanto,

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;W). \tag{2.38}$$

Agora, de (2.30), existe $\bar{y} \in L^\infty(0,T;H)$ e subseqüência de $(u''_m)_m$, ainda denotada da mesma forma, tais que

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{y} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H).$$

Da mesma forma, concluímos que $\bar{y} = u''$ e , portanto, que

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H). \tag{2.39}$$

Por último, como $u_m \to u$ em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que $\Delta u_m \to \Delta u$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Mas, de (2.32), como $L^\infty(0,T;H) = (L^1(0,T;H'))'$, isto é, dual de um espaço de Banach separável, existe subseqüência de $(\Delta u_m)_m$, ainda denotada da mesma forma, e $z \in L^\infty(0,T;H)$ tais que

$$\Delta u_m \overset{*}{\rightharpoonup} z \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H).$$

Concluímos de maneira análoga que $z = \Delta u$ e que

$$\Delta u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H). \tag{2.40}$$

De (2.35), (2.38) e (2.39), temos que a função u satisfaz as condições (2.1), (2.2) e (2.3) do Teorema 2.1. Verificaremos agora que ela satisfaz (2.4):
Como $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T;W)$ e $L^\infty(0,T;W) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$, o qual é Banach reflexivo, temos que

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H).$$

Logo,

$$\int_0^T (f(t), u'_m(t))\ dt \to \int_0^T (f(t), u'(t))\ dt\ ,\ \ \forall f \in L^2(0,T;H).$$

Em particular, se $f = a(x)w$, com $a \in C^0(\overline{\Omega})$ e $w \in L^2(0,T;H)$, temos que

$$\int_0^T (a(x)w, u'_m)\ dt \to \int_0^T (a(x)w, u')\ dt\ ,\ \ \forall w \in L^2(0,T;H)\ ,$$

o que implica

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)wu'_m\ dxdt\ \to\ \int_0^T \int_\Omega a(x)wu'\ dxdt\ ,\ \ \forall w \in L^2(0,T;H)\ ,$$

donde

$$\int_0^T (a(x)u'_m, w)\ dt \to \int_0^T (a(x)u', w)\ dt\ ,\ \ \forall w \in L^2(0,T;H). \tag{2.41}$$

Sejam $\theta(t) \in L^2(0,T)$ e $v \in H$. Então, $w = v\theta(t) \in L^2(0,T;H)$. Logo, de (2.41) temos que

$$\int_0^T (a(x)u'_m, v)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (a(x)u', v)\theta(t)\ dt\ ,\ \ \forall v \in L^2(\Omega),\ \theta \in L^2(0,T). \tag{2.42}$$

Analogamente, obtemos de (2.39) que

$$\int_0^T (u''_m, v)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (u'', v)\theta(t)\ dt\ ,\ \ \forall v \in L^2(\Omega),\ \theta \in L^2(0,T). \tag{2.43}$$

e, de (2.40) que

$$\int_0^T (-\Delta u_m, v)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (-\Delta u, v)\theta(t)\ dt\ ,\ \ \forall v \in L^2(\Omega),\ \theta \in L^2(0,T). \tag{2.44}$$

Multiplicando a equação aproximada (2.6) por $\theta(t) \in L^2(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos (como $((u,v)) = (-\Delta u, v)$, se $u \in V$ e $v \in W$)

$$\int_0^T (u''_m, v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (-\Delta u_m, v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)u'_m, v)\theta(t)\ dt = 0\ ,\ \ \forall v \in V_{m_0},\ \theta \in L^2(0,T), \tag{2.45}$$

onde $m_0 < m$ fixo e arbitrário.

Tomando o limite em (2.45) quando $m \to \infty$, mantendo V_{m_0} fixo e arbitrário e utilizando (2.42), (2.43) e (2.44), temos que

$$\int_0^T (u'', v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (-\Delta u, v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)u', v)\theta(t)\ dt = 0\ ,\ \ \forall v \in V_{m_0},\ \theta \in L^2(0,T), \tag{2.46}$$

Como $[w_1, w_2, ...]$ é denso em H e (2.46) é valida para toda $v \in V_{m_0}$ com $m_0 < \infty$ arbitrário, segue-se que (2.46) é válida para todo $v \in H$. Além disso, o conjunto $\{v\theta \; ; \; \theta \in L^2(0,T), v \in L^2(\Omega)\}$ é denso em $L^2(Q)$. Logo, concluímos que

$$\int_0^T (u'', v) \, dt + \int_0^T (-\Delta u, v) \, dt + \int_0^T (a(x)u', v) \, dt = 0 \; , \;\; \forall v \in L^2(Q) \; .$$

Portanto,

$$(u'' - \Delta u + a(x)u', v) = 0 \; , \quad \forall v \in L^2(Q) \; ,$$

de onde concluímos que

$$u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \quad \text{em} \quad L^2(Q) \; ,$$

o que prova que u satisfaz (2.4).

(iv) Verificação dos Dados Iniciais

Primeiramente, note que faz sentido calcularmos $u(0)$ e $u'(0)$. De fato, como $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;W)$ e $u'' \in L^\infty(0,T;H)$ e $[0,T]$ é limitado, temos que $u \in L^1(0,T;V)$, $u' \in L^1(0,T;W)$ e $u'' \in L^1(0,T;H)$; além disso, sendo as imersões $V \hookrightarrow W \hookrightarrow H$ contínuas, temos, pelo lema 1.3, que $u \in C^0([0,T];W)$ e $u' \in C^0([0,T];H)$.

• Verifiquemos que $u(0) = u_0$.
De (2.35) e como $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H)$, temos que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H),$$

donde, identificando H ao seu dual, temos

$$\int_0^T (u_m(t), w(t)) \, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t)) \, dt \; , \;\; \forall w \in L^1(0,T;H). \tag{2.47}$$

Analogamente, de (2.38), temos que

$$\int_0^T (u'_m(t), w(t)) \, dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), w(t)) \, dt \; , \;\; \forall w \in L^1(0,T;H). \tag{2.48}$$

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e seja $v \in H$. Então, θ e $\theta' \in C^0([0,T])$, o que implica θ e $\theta' \in L^2(0,T)$, donde $\bar{w}(t) = v\theta'(t) \in L^1(0,T;H)$ e $w(t) = v\theta(t) \in L^1(0,T;H)$.

Substituindo w em (2.48) e $\bar{w}$ em (2.47), obtemos

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)\, dt$$

e

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)\, dt\ .$$

Somando as duas expressões à esquerda, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_m(t), v)\theta(t)\}dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\{(u(t), v)\theta(t)\}dt. \tag{2.49}$$

Notemos que, como $u \in C([0,T], H)$ e $v \in H$, temos que $(u(t), v) \in C^0([0,T])$ e como $\theta(t) \in C^0([0,T])$, temos também que $(u(t), v)\theta(t) \in C^0([0,T])$. Além disso,

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)\theta(t) = (u'(t), v)\theta(t) + (u(t), v)\theta'(t) \quad \in L^1(0,T).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Generalizado,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u(t), v)\theta(t)\}dt = (u(T), v)\theta(T) - (u(0), v)\theta(0). \tag{2.50}$$

Analogamente,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_m(t), v)\theta(t)\}dt = (u_m(T), v)\theta(T) - (u_m(0), v)\theta(0). \tag{2.51}$$

Segue-se, então, de (2.49), utilizando (2.50) e (2.51), que

$$(u_m(T), v)\theta(T) - (u_m(0), v)\theta(0) \longrightarrow (u(T), v)\theta(T) - (u(0), v)\theta(0).$$

Mas, como $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, esta última convergência implica que

$$(u_m(0), v) \longrightarrow (u(0), v)\ , \quad \forall v \in H,$$

donde,

$$u_{0m} \rightharpoonup u(0) \quad \text{em} \quad H.$$

Por outro lado, do problema aproximado (2.6), sabemos que $u_{0m} \to u_0$ forte em W, o que implica que $u_{0m} \to u_0$ forte em H, donde $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ fraco em H. Segue-se da unicidade do limite fraco que

$$u(0) = u_0 \quad \text{em} \quad H.$$

• Verifiquemos que $u'(0) = u_1$.

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e seja $v \in H$. Então, θ e $\theta' \in C^0([0,T])$, o que implica θ e $\theta' \in L^2(0,T)$, donde $w(t) = v\theta'(t) \in L^1(0,T;H)$. Logo, substituindo w em (2.48) temos

$$\int_0^T (u_m'(t), v)\theta'(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\, dt \tag{2.52}$$

Agora, de (2.43), temos, utilizando θ e v acima, que

$$\int_0^T (u_m''(t), v)\theta(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T (u''(t), v)\theta(t)\, dt \tag{2.53}$$

Somando-se (2.52) e (2.53), obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_m'(t), v)\theta(t)\}dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}\{(u'(t), v)\theta(t)\}dt. \tag{2.54}$$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, mostramos via Teorema Fundamental do Cálculo Generalizado que

$$u_m'(0) = u_{1m} \rightharpoonup u'(0) \quad \text{em} \quad H.$$

Por outro lado, do problema aproximado, $u_{1m} \to u_1$ forte em H, o que implica que $u_{1m} \rightharpoonup u'(0)$ fraco em H. Segue-se da unicidade do limite fraco que

$$u'(0) = u_1 \quad \text{em} \quad H.$$

Portanto, a solução u verifica os dados iniciais (2.5). ■

Corolário 2.1 *Sob as mesmas hipóteses do teorema 2.1, temos que a solução u satisfaz*

$$u \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];W) \cap C^2([0,T];H).$$

Demonstração

Como a imersão de W em H é contínua e densa, $-\Delta : V \subset H \to H$ satisfaz $-\Delta \in \mathcal{L}(W, W')$, $|-\Delta u| = ||u||_V$, $\forall u \in V$, e $< -\Delta u, v >_{W' \times W} = (-\Delta u, v)$, $\forall u \in V, v \in W$ e, além disso, $u'' - \Delta u = -a(x)u' \in C([0,T];H)$ e $\dfrac{d}{dt}[a(x)u'] = a(x)u'' \in L^2(0,T;H)$, temos, pelo corolário do lema de Temam, que

$$u \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];W) \cap C^2([0,T];H). \quad ■$$

2.2 Existência de Soluções utilizando resultados da teoria de Semigrupos

Primeiramente, provaremos o teorema de existência e unicidade de soluções para a equação de onda sem dissipação. Em seguida, como corolário deste teorema, provaremos a existência de solução para o nosso problema utilizando a teoria de perturbação de semigrupos.

Teorema 2.2 *Sejam $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, com Ω aberto de $\mathbb{R}^N$ limitado e com fronteira bem regular. Então, existe uma única função $u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T]; L^2(\Omega))$$

$$u'' - \Delta u = 0 \quad q.s. \text{ em } Q = \Omega \times (0, \infty); \tag{2.55}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ ,\ u'(x,0) = u_1(x). \quad \text{em } \Omega \tag{2.56}$$

Demonstração

Continuaremos com a seguinte notação: $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $W = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

(i) Redução de ordem

Seja $v = u'$. Então, de (2.55), temos que $v' = \Delta u$. Logo,

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Tomando $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ e $U_0 = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix}$, o problema inicial nos leva a

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Consideremos $X = W \times H$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, com

$$||U||_X^2 = ||u||_W^2 + |v|_H^2 \quad \text{e} \quad ||U||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^2 = ||Au||_H^2 + ||v||_W^2 \tag{2.58}$$

(ii) Caracterização de $\mathcal{D}(A)$

Temos que $\mathcal{D}(A) = \{U \in X\ ;\ AU \in X\}$, isto é,

$$\mathcal{D}(A) = \{U = (u,v)\ ;\ u \in W,\ v \in W \ \text{ e } \Delta u \in H\}.$$

Pelo teorema de Agmon-Douglis-Nuremberg, temos que $\{u \in W \ ; \ \Delta u \in H\} = V$. Logo, concluímos que

$$\mathcal{D}(A) = V \times W.$$

Além disso, note que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. De fato, Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W$ e $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = W$, temos que $\overline{V} = W$. Também temos que $\overline{W} = H$. Assim, concluímos que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \overline{V \times W} = \overline{V} \times \overline{W} = W \times H = X$.

<u>**(iii)** A é um operador dissipativo</u>

Notemos que

$$Re < AU, U >=< AU, U >= (AU, U)_X = \left(\begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_X =$$

$$((v, u)) + (\Delta u, v) = ((u, v)) - ((u, v)) = 0 \ , \quad \forall U \in \mathcal{D}(A) \ ,$$

pois X é um espaço de Hilbert real. Logo, temos que A é dissipativo.

<u>**(iv)** A é maximal</u>

Seja $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$. Vamos mostrar que existe $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(I - A)U = F$, isto é, que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, o que é o mesmo que mostrar que $\begin{cases} u - v = f \\ v - \Delta u = g \end{cases}$.
Fazendo $v = u - f$ no último sistema, temos que

$$u - \Delta u = f + g \tag{2.59}$$

Se $u \in V$ é solução de (2.59), então, fazendo o produto interno em H desta equação por $\varphi \in W$, temos que

$$(u, \varphi) + (-\Delta u, \varphi) = (f + g, \varphi) \ , \quad \forall \varphi \in W \ ,$$

o que implica

$$(u, \varphi) + ((u, \varphi)) = (f + g, \varphi) \ , \quad \forall \varphi \in W \ ,$$

isto é,

$$\int_\Omega u\varphi \, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega (f + g)\varphi \, dx. \tag{2.60}$$

Mostraremos que (2.60) tem uma única solução. Sejam $a : W \times W \to \mathbb{R}$ e $T : W \to \mathbb{R}$ definidas por

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega u\varphi \, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx$$

e

$$< T, \varphi >= \int_\Omega (f+g)\varphi \, dx.$$

• a é contínua.

De fato, pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos que

$$|a(u,\varphi)| \leq \int_\Omega |u||\varphi| \, dx + \int_\Omega |\nabla u||\nabla \varphi| \, dx \leq |u||\varphi| + |\nabla u||\nabla \varphi| \leq$$

$$\leq c_p|\nabla u||\nabla \varphi| + |\nabla u||\nabla \varphi| = (c_p+1)|\nabla u||\nabla \varphi| = (c_p+1)||u|| \, ||\varphi|| \, ,$$

para todo $u \in W, \varphi \in W$.

• a é coerciva.

$$a(u,u) = \int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = ||u||^2 \, , \quad \forall u \in W.$$

• T é contínua.

Novamente, pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos

$$| < T, \varphi > | \leq \int_\Omega |f+g| \, |\varphi| \, dx \leq |f+g| \, |\varphi| \leq$$

$$\leq c_p |f+g||\nabla \varphi| = c_p |f+g| \, ||\varphi||.$$

Claramente, T é linear e a é bilinear. Então, pelo lema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in W$ tal que

$$a(u,\varphi) =< T, \varphi > \, , \quad \forall \varphi \in W \, ,$$

de onde obtemos (2.60). Em particular, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (2.60), vemos que

$$< u, \varphi > + < \nabla u, \nabla \varphi >=< f+g, \varphi > \, , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \, ,$$

o que implica, derivando no sentido das distribuições, que

$$< u, \varphi > - < \Delta u, \varphi >=< f+g, \varphi > \, , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \, ,$$

e portanto,

$$u - \Delta u = f + g \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Como $f + g \in H$ e $u \in W$, temos pela equação acima que $\Delta u \in H$, o que implica, pelo teorema de Agmon-Douglis-Nuremberg, que $u \in V$. Logo, $v = u - f$ pertence a W. Então existe uma única $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$ que satisfaz (2.59), ou seja, que satisfaz $(I - A)U = F$. portanto, A é maximal.

Como $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é m-dissipativo e densamente definido, temos pelo teorema de Lumer-Phillips que A é gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 tal que $||S(t)||_X \leq 1$, $\forall t \geq 0$.
Agora, seja $U(t) = S(t)U_0$. Então, $U(0) = S(0)U_0 = U_0$ e

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{d}{dt}S(t)U_0 = AS(t)U_0 = AU.$$

Logo, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ satisfaz (2.57), e portanto, u satisfaz (2.55) q.s. em Q e satisfaz (2.56). Além disso, pela proposição 1.7, temos que

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0([0, \infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, \infty); X)$$

o que implica que

$$u \in C([0, \infty); V) \cap C^1([0, \infty); W) \cap C^2([0, \infty); H). \qquad \blacksquare$$

Corolário 2.2 *Nas mesmas condições do teorema 2.2, e considerando $a = a(x) \in C(\overline{\Omega})$ uma função não-negativa, então existe $u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in C([0, \infty); V) \cap C^1([0, \infty); W) \cap C^2([0, \infty); H) \tag{2.61}$$

$$u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \quad \textit{q.s. em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.62}$$

$$u(0) = u_0 \; ; \; u'(0) = u_1 \quad \textit{em} \quad \Omega \tag{2.63}$$

Demonstração

Fazendo $v = u'$, temos de (2.62) que

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a(x) \end{pmatrix}$ e $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, temos que a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{dU}{dt} = AU + BU. \tag{2.64}$$

Pela demonstração do teorema 2.2, temos que $A \in G(1,0)$. Considere $B : X \to X$, onde $X = W \times H$. Então,

- B é dissipativo.

Como X é um espaço de Hilbert real, temos, para todo $U \in X$,

$$Re < BU, U >= (BU, U)_X = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -a(x)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_X = (-a(x)v, v) = \int_\Omega -a(x)v^2\, dx \leq 0 \,,$$

pois $a(x) \geq 0$ em Ω.

Denotemos por $|a(x)|_{max} = \max_{x \in \Omega} |a(x)|$. Então

- $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, com $||BU||_X \leq |a(x)|_{max} ||U||_X$, $\forall U \in X$.

De fato, por (2.58)

$$||BU||_X^2 = |-a(x)v|^2 \leq |a(x)|_{max}^2 |v|^2 \leq |a(x)|_{max}^2 (||u||^2 + |v|^2) = |a(x)|_{max}^2 ||U||_X^2 \,.$$

- $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$.

Logo, pelo teorema 1.14, temos que $A + B \in G(1,0)$. Procedendo da mesma forma como na demonstração do teorema 2.2, temos que $U(t) = S(t)U_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ satisfaz (2.64) , onde S é o semigrupo cujo gerador infinitesimal é $A+B$ e $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ e que u satisfaz (2.61), (2.62) e (2.63). $\blacksquare$

Corolário 2.3 *Temos que a solução u encontrada no corolário anterior satisfaz*

$$|\Delta u(t)|^2 + ||u'(t)||^2 \leq |\Delta u_0|^2 + ||u_1||^2 \ , \quad q.s. \ em \ (0,\infty).$$

Demonstração

Como o semigrupo $A+B \in G(1,0)$ pela demonstração do corolário anterior, temos que $||S(t)||_X \leq 1$, $\forall t \geq 0$. Logo

$$||U(t)||_{\mathcal{D}(A)} = ||S(t)U_0||_{\mathcal{D}(A)} \leq ||S(t)||_X ||U_0||_{\mathcal{D}(A)} \leq ||U_0||_{\mathcal{D}(A)} \ .$$

Temos, então, de (2.58),

$$|\Delta u(t)|^2 + ||u'(t)||^2 \leq |\Delta u_0|^2 + ||u_1||^2. \quad \blacksquare$$

2.3 Unicidade de Soluções

Provaremos, agora, que a solução encontrada no corolário 2.2 é única utilizando o Método da Energia.

Teorema 2.3 *Temos que a solução u encontrada no corolário 2.2 é única.*

Demonstração

Sejam u e v duas soluções dentro das condições do Corolário 2.2. Se tomarmos $w = u - v$, então w satisfará

$$w \in C([0,\infty);V) \cap C^1([0,\infty);W) \cap C^2([0,\infty);H) \tag{2.65}$$

$$w'' - \Delta w + aw' = 0 \quad \text{q.s. em} \ \ \Omega \times (0,\infty); \tag{2.66}$$

$$w(0) = 0 = w'(0). \tag{2.67}$$

Multiplicando a equação (2.66) por $w'(t)$ e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega w''(t)w'(t)\,dx - \int_\Omega \Delta w(t)w'(t)\,dx + \int_\Omega a(x)(w'(t))^2\,dx = 0,$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + ||w(t)||^2\} = -\int_\Omega a(x)(w'(t))^2\,dx.$$

Integrando-se a igualdade acima de 0 a t, com $t \in [0,\infty)$, temos que

$$\frac{1}{2}\{|w'(t)|^2 + ||w(t)||^2 - |w'(0)|^2 - ||w(0)||^2\} = -\int_0^t\int_\Omega a(x)(w'(x,t))^2\,dxdt$$

Como $a(x) \in C(\overline{\Omega})$ e é não-negativa, temos que o lado direito da igualdade acima é menor que zero. Além disso, considerando (2.67), concluímos que

$$|w'(t)|^2 + ||w(t)||^2 \leq 0, \quad \forall t \in [0,\infty),$$

o que implica que $||w(t)|| = 0$, $\forall t \in [0,\infty)$, donde $u(t) \equiv v(t)$ em V, $\forall t \in [0,\infty)$.

Portanto, a solução do corolário 2.2 é única. $\blacksquare$

Capítulo 3

Decaimento das Soluções Fortes

Este capítulo será dedicado ao estudo do decaimento da energia associada ao problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \ , & \text{q.s em } \ \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 \ , & \text{em } \ \Gamma \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 & \text{em } \ \Omega \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$ limitado e com fronteira bem regular e $a(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ uma função não-negativa tal que existe $p > 0$ que satisfaz $\displaystyle\int_\omega \frac{1}{a^p}\, dx < \infty$, onde ω é a interseção de Ω com uma vizinhança de Γ_+ (Veja figura 1 da página 1).

Do corolário 2.2 e do teorema 2.3, temos que (3.1) possui uma única solução u satisfazendo

$$u \in C^0\left([0,\infty); V\right) \cap C^1\left([0,\infty); W\right) \cap C^2\left([0,\infty); H\right) \ , \tag{3.2}$$

onde $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $W = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

A energia associada ao problema (3.1) é

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ |u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \right\} \, dx \quad , \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Podemos observar, devido a (3.2), que $E(t) \in C^1([0,\infty])$.

Multiplicando a equação em (3.1) por u' e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega u''(x,t)u'(x,t)\, dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)\, u'(x,t)\, dx + \int_\Omega a(x)u'(x,t)^2\, dx = 0 \ ,$$

donde

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \right] \, dx \right\} = -\int_\Omega a(x)|u'(x,t)|^2\, dx \ .$$

Logo, vemos que E é uma função não-crescente com o tempo e

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x)|u'(x,t)|^2\, dx\ . \tag{3.4}$$

Provaremos que E decresce polinomialmente com o tempo. Para isso, provaremos, primeiramente, alguns resultados.

3.1 Resultados Auxiliares

De agora em diante, denotaremos por S e T dois números reais tais que $0 \le S < T < \infty$ e escreveremos E ao invés de $E(t)$. Além disso, u sempre denotará a solução forte de (3.1) e c denotará constantes positivas diferentes que não dependem dos dados iniciais.

Lema 3.1 *Sejam $\mu \ge 0$, $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Então, temos as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u'\{2q.\nabla u + \alpha u\}dx\ E^\mu\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[}(div(q)-\alpha)\left\{|u'|^2 - |\nabla u|^2\right\}E^\mu\ dxdt - \\
&-\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}\ dxdt + 2\int_{\Omega\times]S,T[}E^\mu\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\ dxdt + \\
&+\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}E^\mu\ dxdt = \int_{\Gamma\times]S,T[}E^\mu(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\ d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u'\xi u\ dx\ E^\mu\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[}\xi\left\{|u'|^2-|\nabla u|^2\right\}E^\mu\ dxdt - \\
&-\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'u\xi\ dxdt + \int_{\Omega\times]S,T[}u\nabla u.\nabla\xi\ E^\mu\ dxdt + \\
&\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\xi u E^\mu\ dxdt = 0\ .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Demonstração: Multiplicando a equação $u'' - \Delta u + a(x)u' = 0$ por $\{2q.\nabla u + \alpha u\}E^\mu$ e integrando em $\Omega\times]S,T[$, temos

$$-\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}E^\mu\ dxdt =$$

$$= \int_\Omega\int_S^T u''\{2q.\nabla u+\alpha u\}E^\mu\ dtdx - \int_S^T\int_\Omega \Delta u\{2q.\nabla u+\alpha u\}E^\mu\ dxdt\ .$$

Integrando por partes o primeiro termo do segundo membro desta última equação, vemos que

$$
\begin{gathered}
-\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}E^{\mu}\,dxdt = \\
\int_{\Omega} u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}dx\ E^{\mu}\Big]_S^T - \int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega} q.\nabla(u')^2\,dxdt - \int_S^T\int_{\Omega}\alpha E^{\mu}(u')^2\,dxdt- \\
-\mu\int_S^T\int_{\Omega}E^{\mu-1}E'u'\{2q.\nabla u+\alpha u\}\,dxdt - \int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}\Delta u\{2q.\nabla u\}\,dxdt - \int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}\Delta u\{\alpha u\}\,dxdt\,.
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Observemos que, pela Identidade de Green e pela proposição 1.5,

$$
\begin{gathered}
-\int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}\Delta u\{2q.\nabla u\}\,dxdt = \int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}\nabla u\nabla\{2q.\nabla u\}\,dx - \int_{\Gamma}\{2q.\nabla u\}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma\right)dt = \\
= \int_S^T E^{\mu}\left\{\int_{\Omega}2\sum_{i=1}^N\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\,dx - \int_{\Gamma}\left(2q.\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\nu\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\,d\Gamma\right\}dt = \\
= \int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}2\left(\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + q_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)dxdt - 2\int_S^T\int_{\Gamma}E^{\mu}(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = \\
= \int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}2\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\,q_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)dxdt - 2\int_S^T\int_{\Gamma}E^{\mu}(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt = \\
= 2\int_S^T\int_{\Omega}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dxdt + \int_S^T\int_{\Omega}E^{\mu}\sum_{j=1}^N q_j\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt- \\
-2\int_S^T\int_{\Gamma}E^{\mu}(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\ \ ,
\end{gathered}
$$

ou seja,

$$
\begin{gathered}
-\int_S^T E^{\mu}\int_{\Omega}\Delta u\{2q.\nabla u\}\,dxdt = \\
= 2\int_S^T\int_{\Omega}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dxdt + \int_S^T\int_{\Omega}E^{\mu}\sum_{j=1}^N q_j\frac{\partial}{\partial x_j}|\nabla u|^2dxdt- \\
-2\int_S^T\int_{\Gamma}E^{\mu}(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt\ \ .
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Agora, se $\overrightarrow{F}=\left(q_1|\nabla u|^2,...,q_N|\nabla u|^2\right)$, pelo teorema 1.12, temos que $\overrightarrow{F}\in\left(H^1(\Omega)\right)^N$, para cada t fixo. Logo,

$$
\text{div }\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^N\left\{\frac{\partial q_i}{\partial x_i}|\nabla u|^2 + q_i\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2\right\} = |\nabla u|^2\text{div}(q) + \sum_{i=1}^N q_i\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2\ \ ,
$$

o que implica, pelo Teorema de Gauss,

$$\int_S^T\int_\Omega E^\mu \sum_{j=1}^N q_j\frac{\partial}{\partial x_j}|\nabla u|^2dxdt = -\int_S^T\int_\Omega E^\mu \mathrm{div}(q)|\nabla u|^2dxdt + \int_S^T\int_\Omega E^\mu \mathrm{div}\ \overrightarrow{F}\ dxdt =$$

$$= -\int_S^T\int_\Omega E^\mu \mathrm{div}(q)|\nabla u|^2dxdt + \int_S^T\int_\Gamma E^\mu|\nabla u|^2(q.\nu)\ d\Gamma dt\ \ ,$$

donde, pela proposição 1.5,

$$\int_S^T\int_\Omega E^\mu \sum_{j=1}^N q_j\frac{\partial}{\partial x_j}|\nabla u|^2dxdt = -\int_S^T\int_\Omega E^\mu \mathrm{div}(q)|\nabla u|^2dxdt + \int_S^T\int_\Gamma E^\mu(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt\ . \tag{3.9}$$

Portanto, de (3.8) e (3.9), vemos que

$$\begin{aligned}-\int_S^T E^\mu\int_\Omega \Delta u\{2q.\nabla u\}\ dxdt &= 2\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\ dxdt- \\ &- \int_{\Omega\times]S,T[}E^\mu \mathrm{div}(q)|\nabla u|^2\ dxdt - \int_{\Gamma\times]S,T[}E^\mu(q.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt\ .\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora, pela Identidade de Green,

$$\int_S^T E^\mu\int_\Omega \Delta u\{\alpha u\}\ dxdt = \int_{\Omega\times]S,T[}E^\mu\alpha|\nabla u|^2\ dxdt\ . \tag{3.11}$$

Por último, se tomarmos $\overrightarrow{F} = \Big(q_1(u')^2,...,q_N(u')^2\Big)$, novamente pelo teorema 1.12, temos que $\overrightarrow{F}\in\Big(H^1(\Omega)\Big)^N$, para cada t fixo. Então

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^N\frac{\partial q_i}{\partial x_i}(u')^2 + \sum_{i=1}^N q_i\frac{\partial}{\partial x_i}(u')^2 = \mathrm{div}(q)(u')^2 + q.\nabla(u')^2\ \ ,$$

o que implica, pelo Teorema de Gauss,

$$\begin{aligned}-\int_S^T E^\mu\int_\Omega q.\nabla(u')^2\ dxdt &= \int_S^T E^\mu\left\{\int_\Omega \mathrm{div}(q)(u')^2dx - \int_\Omega \mathrm{div}\ \overrightarrow{F}\ dx\right\}dt = \\ &= \int_{\Omega\times]S,T[}E^\mu \mathrm{div}(q)(u')^2\ dxdt\ \ ,\end{aligned} \tag{3.12}$$

pois $u'\in W$, para cada t fixo.

Juntando (3.7), (3.10), (3.11) e (3.12), temos a igualdade (3.5). Provemos, então, (3.6). Multiplicando a equação $u''-\Delta u + a(x)u' = 0$ por $\xi u E^\mu$ e integrando em $\Omega\times]S,T[$, temos que

$$\int_\Omega\int_S^T u''\xi uE^\mu\ dtdx - \int_S^T\int_\Omega \Delta u\xi uE^\mu\ dxdt + \int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\xi uE^\mu\ dxdt = 0\ .$$

Integrando por partes o primeiro termo da última igualdade e utilizando a Identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u'\xi u \; dx \; E^\mu \Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} u'\xi u' E^\mu \; dxdt - \int_{\Omega\times]S,T[} u'\xi u \mu E^{\mu-1}E' \; dxdt + \\ &+ \int_S^T \int_\Omega \nabla u . \nabla \left(\xi u E^\mu\right) \; dxdt + \int_{\Omega\times]S,T[} a(x) u'\xi u E^\mu \; dxdt = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{3.13}$$

pois $u \in W$, para cada t fixo.

Observando que

$$\begin{aligned}&\int_S^T \int_\Omega \nabla u . \nabla \left(\xi u E^\mu\right) \; dxdt = \int_S^T E^\mu \int_\Omega \nabla u . (u \nabla \xi + \xi \nabla u) \; dxdt = \\ &\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu u \nabla u . \nabla \xi \; dxdt + \int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu \xi |\nabla u|^2 \; dxdt \quad ,\end{aligned}$$

obtemos de (3.13) a segunda igualdade do lema. ∎

Corolário 3.1 *Considerando $q = m(x) = x - x_0$ e $\alpha = N-1$ em (3.5), onde x_0 é um ponto fixo de $\mathbb{R}^N$, temos que*

$$\begin{aligned}2\int_S^T E^{\mu+1} \; dt \;\; = \;\; & - \int_\Omega u' \left\{2m(x).\nabla u + (N-1)u\right\} \; dx \; E^\mu \Big]_S^T + \\ & + \mu \int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1} E' u' \{2m(x).\nabla u + (N-1)u\} \; dxdt - \\ & - \int_{\Omega\times]S,T[} a(x) u' \{2m(x) \nabla u + (N-1)u\} \; E^\mu \; dxdt + \\ & + \int_{\Gamma\times]S,T[} E^\mu (m(x).\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \; d\Gamma dt \; .\end{aligned} \tag{3.14}$$

Demonstração: Como div $(q) = N$, temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\times]S,T[} (\text{div } (q) - \alpha) \left\{|u'|^2 - |\nabla u|^2\right\} \; E^\mu \; dxdt = \\ &= \int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu \left\{|u'|^2 - |\nabla u|^2\right\} \; dxdt = \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega \left\{|u'|^2 + |\nabla u|^2\right\} \; dx - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \right) dt = \\ &= 2\int_S^T E^{\mu+1} \; dt - 2\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu |\nabla u|^2 \; dxdt \; .\end{aligned} \tag{3.15}$$

Também, temos que

$$\begin{aligned}&2\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \; dxdt = 2\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \; dxdt = \\ &= 2\int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu |\nabla u|^2 \; dxdt \; .\end{aligned} \tag{3.16}$$

Temos, então, de (3.5), (3.15) e (3.16) a tese do corolário. ∎

Corolário 3.2 *Seja h a função do lema 1.8. Considerando $q = h$ e $\alpha = 0$ em (3.5) e multiplicando a igualdade obtida por $R = \sup\{|m(x)|\ ,\ x \in \Omega\}$, onde $m(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos que*

$$\begin{aligned} R\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt \ \leq\ & c_0\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}\left\{|u'|^2+|\nabla u|^2\right\}E^{\mu}\,dxdt+ \\ & +2R\int_{\Omega}u'h.\nabla u\,dxdt\,E^{\mu}\Big]_S^T- \\ & -2\mu R\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'h.\nabla u\,dxdt+ \\ & +2R\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'h.\nabla u\,E^{\mu}\,dxdt\ , \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde c_0 é uma constante que só depende de ω.

Demonstração: Substituindo q e α como acima em (3.5) e multiplicando a equação obtida por R, temos que

$$\begin{aligned} R\int_{\Gamma\times]S,T[}E^{\mu}(h.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \ =\ R\int_{\Omega}u'\{2h.\nabla u\}\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T+ \\ +R\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}\mathrm{div}\,(h)\left\{|u'|^2-|\nabla u|^2\right\}\,E^{\mu}\,dxdt - R\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'\{2h.\nabla u\}\,dxdt+ \\ +2R\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\,dxdt + R\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\{2h.\nabla u\}E^{\mu}\,dxdt\ , \end{aligned} \tag{3.18}$$

já que $\mathrm{div}\,(h) = 0$ em $\Omega\setminus\widehat{\omega}$.

Como $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$, temos que $\mathrm{div}\,(h) \in L^{\infty}(\Omega)$. Logo, existe constante $c_1 \geq 0$ tal que $\mathrm{div}\,(h) \leq c_1$. Temos, então, de (3.18) que (pois $h = \nu$ em Γ_+ e $h.\nu \geq 0$ em Γ)

$$\begin{aligned} R\int_{\Gamma_+\times]S,T[}E^{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \ =\ R\int_{\Gamma_+\times]S,T[}E^{\mu}(h.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq \\ \leq R\int_{\Gamma\times]S,T[}E^{\mu}(h.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt \leq Rc_1\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}\left\{|u'|^2+|\nabla u|^2\right\}\,E^{\mu}\,dxdt+ \\ +2R\int_{\Omega}u'h.\nabla u\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T - 2R\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'h.\nabla u\,dxdt+ \\ +2R\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\,dxdt + 2R\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'h.\nabla uE^{\mu}\,dxdt\ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Observe que, como $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ e $h = 0$ em $\Omega\setminus\widehat{\omega}$, existe constante $c_2 \geq 0$ tal que

$$2R\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\,dxdt\leq$$

$$\leq 2Rc_2\int_S^T E^{\mu}\int_{\widehat{\omega}}\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\,dx\,dt\leq$$

$$\leq 2Rc_2\int_S^T E^{\mu}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\widehat{\omega}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\,dx\right)^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\widehat{\omega}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\,dx\right)^{1/2}=$$

$$=2Rc_2\int_S^T E^{\mu}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\widehat{\omega}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\,dx\right)dt\;=\;2Rc_2\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}E^{\mu}|\nabla u|^2\,dxdt\;\;\text{, donde}$$

$$2R\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\,dxdt\leq 2Rc_2\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}E^{\mu}\left\{|u'|^2+|\nabla u|^2\right\}\,dxdt\;. \tag{3.20}$$

Tomando $c_0 = 2\,max\{Rc_1, 2Rc_2\}$ e juntando (3.19) e (3.20), obtemos (3.17). ■

Corolário 3.3 *Seja η a função do lema 1.9. Considerando $\xi = \eta^2$ em (3.6), temos que*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\,dxdt \;=\; & -\int_{\Omega}u'\eta^2u\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T+\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|u'|^2E^{\mu}\,dxdt+\\ & +\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'u\,\eta^2\,dxdt-2\int_{\Omega\times]S,T[}\eta u\nabla u.\nabla\eta\,E^{\mu}\,dxdt-\\ & -\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\eta^2uE^{\mu}\,dxdt\;.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Demonstração: Aplicando (3.6) com $\xi = \eta^2$ temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}u'\eta^2u\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T-\int_{\Omega\times]S,T[}\left\{\eta^2|u'|^2E^{\mu}-\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\right\}\,dxdt-\\ &-\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'u\,\eta^2\,dxdt+\int_{\Omega\times]S,T[}u\nabla u.\nabla\eta^2E^{\mu}\,dxdt+\\ &+\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\eta^2uE^{\mu}\,dxdt\;=\;0\;\;,\end{aligned}$$

o que implica (3.21). ■

Lema 3.2 *Sendo $m(x) = x - x_0$, $R = \sup\{|m(x)|\;,\;x\in\Omega\}$ e $\mu\geq 0$, onde x_0 é um ponto fixo de $\mathbb{R}^N$, temos que*

$$\left|\int_{\Omega}u'\{2m.\nabla u+(N-1)u\}\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T\right|\leq 4RE(0)^{\mu}E(S) \tag{3.22}$$

e

$$\left|\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'\{2m.\nabla u+(N-1)u\}\,dxdt\right|\leq 2\mu RE(0)^{\mu}E(S)\;. \tag{3.23}$$

Demonstração: Vamos provar inicialmente que

$$\int_\Omega (2m.\nabla u + (N-1)u)^2 \, dx \leq \int_\Omega (2m.\nabla u)^2 \, dx \, . \tag{3.24}$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (2m.\nabla u + (N-1)u)^2 \, dx - \int_\Omega (2m.\nabla u)^2 \, dx = \\ &= \int_\Omega \left\{ (2m.\nabla u)^2 + 4m.\nabla u (N-1)u + (N-1)^2 u^2 \right\} \, dx - \int_\Omega (2m.\nabla u)^2 \, dx = \\ &= 4(N-1) \int_\Omega (m.\nabla u) u \, dx + (N^2 - 2N + 1) \int_\Omega u^2 \, dx \, . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Mas

$$(m.\nabla u)u = \left((x_1 - x_0^1) \frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + (x_N - x_0^N) \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) u$$

e, para todo $1 \leq i \leq N$, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(x_i - x_0^i) u^2 \right] - \frac{1}{2} u^2 = (x_i - x_0^i) u \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad ,$$

onde $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^N)$.

Portanto,

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \left((x_1 - x_0^1) u^2, ..., (x_N - x_0^N) u^2 \right) - \frac{N}{2} u^2 = (m.\nabla u) u \quad ,$$

o que implica, pelo Teorema de Gauss e pelo teorema 1.12, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (m.\nabla u) u \, dx &= \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \left((x_1 - x_0^1) u^2, ..., (x_N - x_0^N) u^2 \right) \, dx - \frac{N}{2} \int_\Omega u^2 \, dx \; = \\ &= \; \frac{1}{2} \int_\Gamma \left((x_1 - x_0^1) u^2, ..., (x_N - x_0^N) u^2 \right) . \nu \, d\Gamma - \frac{N}{2} \int_\Omega u^2 \, dx \; = \\ &= \; \frac{1}{2} \int_\Gamma u^2 (m.\nu) \, d\Gamma - \frac{N}{2} \int_\Omega u^2 \, dx \quad , \end{aligned}$$

donde

$$4(N-1) \int_\Omega (m.\nabla u) u \, dx = -2(N-1) N \int_\Omega u^2 \, dx \quad , \tag{3.26}$$

pois $u^2 \in W$.

Juntando (3.25) e (3.26), obtemos (3.24), pois $1 - N^2 \leq 0$.

Utilizando (3.24), temos que

$$\left| \int_\Omega u' (2m.\nabla u + (N-1)u) \, dx \right| \leq |u'|_{L^2} |2m.\nabla u + (N-1)u|_{L^2} \leq$$

$$\leq |u'|_{L^2}|2m.\nabla u|_{L^2} \leq 2R|u'|_{L^2}|\nabla u|_{L^2} \leq R\left(|u'|_{L^2}| + \nabla u|_{L^2}\right) = 2RE \ \ ,$$

ou seja,

$$\left|\int_\Omega u'(2m.\nabla u + (N-1)u)\ dx\right| \leq 2RE\ . \tag{3.27}$$

Portanto,

$$\left|\int_\Omega u'\{2m.\nabla u + (N-1)u\}\ dx\ E^\mu\Big]_S^T\right| = \left|\int_\Omega u'\{2m.\nabla u + (N-1)u\}\ dx\Big]_S^T\right| \ \Big|\ E^\mu]_S^T\Big| \leq$$

$$\leq (2RE(T) + 2RE(S))\,|E^\mu(T) - E^\mu(S)| \leq 4RE(S)E(0)^\mu \ \ ,$$

o que prova (3.22).

Finalmente, temos, de (3.27), que

$$\left|\mu\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'\{2m.\nabla u + (N-1)u\}\ dxdt\right| \leq \mu\int_S^T E^{\mu-1}|E'|2RE\ dt = 2\mu R\int_S^T E^\mu|E'|\ dt \leq$$

$$\leq 2\mu RE(0)^\mu\int_S^T |E'|\ dt \leq 2\mu RE(0)^\mu E(S) \ \ ,$$

o que prova prova (3.23). ■

Lema 3.3 *Seja u solução do problema (3.1). Para cada $t \geq 0$, existe uma única $z(t) \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta z = \chi(\omega)u \quad \ em \quad \Omega \\ z = 0 \quad \ em \quad \Gamma\ . \end{cases} \tag{3.28}$$

Além disso, $z \in C^0\left([0,\infty)\ ;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$, z' existe, pertence a $C^0\left([0,\infty)\ ;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta z' = \chi(\omega)u' \quad \ em \quad \Omega \\ z' = 0 \quad \ em \quad \Gamma\ . \end{cases} \tag{3.29}$$

Também, temos que

$$\int_\Omega \nabla z.\nabla u\ dx = \int_\omega |u|^2\ dx \ \ , \tag{3.30}$$

$$\int_\Omega |\nabla z|^2\ dx \leq c\int_\omega |u|^2\ dx \tag{3.31}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla z'|^2\ dx \leq c\int_\omega |u'|^2\ dx\ . \tag{3.32}$$

Demonstração: Seja $t \geq 0$ fixo. Como $u(t) \in H$ e $\chi(\omega) \in L^\infty\Omega$, temos que $\chi(\omega)u(t) \in H$.

Então, pelo Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg existe uma única $z(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solução de

$$-\Delta z = \chi(\omega)u \quad \text{em} \quad \Omega \, . \tag{3.33}$$

Como isso é válido para todo $t \geq 0$, tomando $z(t)$ e $z(t+h)$ respectivas soluções de (3.33) em t e $t+h$, $h > 0$, temos que

$$| -\Delta z(t+h) + \Delta z(t)|_H = | \, \chi(\omega)[u(t+h) - u(t)] \, |_H \;\; ,$$

o que implica que

$$||z(t+h) - z(t)||_V = | \, \chi(\omega)[u(t+h) - u(t)] \, |_H \;\; ,$$

donde

$$||z(t+h) - z(t)||_V \leq |u(t+h) - u(t)|_H \longrightarrow 0 \;\text{ quando } h \to 0^+ \;\; ,$$

pois $u \in C^0([0,\infty) \, ; \, H)$.
Analogamente, $||z(t-h) - z(t)||_V \longrightarrow 0 \quad$ quando $h \to 0^+$. Portanto, temos que $z \in C^0([0,\infty) \, ; \, V)$ e satisfaz (3.28).
Logo, temos que $z' \in \mathcal{D}'(0,\infty \, ; \, V)$ e $\Delta z' \in \mathcal{D}'(0,\infty \, ; \, H)$.
Derivando a equação em (3.28) no sentido das distribuições, temos que

$$-\Delta z' = \chi(\omega)u' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,\infty \, ; \, H) \, .$$

Como $u' \in C^0([0,\infty) \, ; \, W)$, temos que $-\Delta z' \in L^\infty((0,\infty) \, ; \, H)$. Por outro lado,

$$\underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; ||z'(t)||_W = \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; \sup_{\varphi \in W' \, , \, ||\varphi||_{W'} \leq 1} | \, \langle \varphi, z'(t) \rangle_{W' \times W} \, | \, .$$

Como $-\Delta \in \mathcal{L}(W, W')$ e é isomorfismo, temos que existe $v \in W$ tal que $\varphi = -\Delta v$. Então, como $-\Delta$ também é auto-adjunto,

$$\underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; ||z'(t)||_W = \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; \sup_{v \in W \, , \, ||v||_W \leq 1} | \, \langle -\Delta v, z'(t) \rangle_{W' \times W} \, | =$$

$$= \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; \sup_{v \in W \, , \, ||v||_W \leq 1} | \, (v, -\Delta z'(t))_H \, | \leq \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; | -\Delta z'(t)|_H \sup_{v \in W \, , \, ||v||_W \leq 1} |v|_H \leq$$

$$\leq c \; \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; | -\Delta z'(t)|_H \sup_{v \in W \, , \, ||v||_W \leq 1} ||v||_W \leq c \; \underset{0 \leq t < \infty}{supess} \; | -\Delta z'(t)|_H < \infty \;\; ,$$

pois $-\Delta z' \in L^\infty((0,\infty) \, ; \, H)$.

Portanto $z' \in L^\infty((0,\infty)\ ;\ W)$, o que implica que $z'(t) \in W$ q.s. em $(0,\infty)$ e $-\Delta z'(t) = \chi(\omega)u'(t) \in H$. Novamente pelo Teorema de Agmon-Douglis-Niremberg, temos que $z'(t) \in V$.

Analogamente ao que fizemos anteriormente, provamos que $z' \in C^0([0,\infty)\ ;\ V)$ e satisfaz (3.29).

Agora, pela Identidade de Green,

$$\int_\Omega \nabla z.\nabla u\ dx = \int_\Omega -u\Delta z\ dx = \int_\Omega \chi(\omega)u^2\ dx = \int_\omega |u|^2\ dx\ \ ,$$

o que prova (3.30).

Tembém pela Identidade de Green, e observando que $\lambda_1|u|^2_{L^2(\omega)} \leq ||u||^2_{H_0^1(\omega)}$ para todo $u \in H_0^1(\omega)$, vemos que

$$\int_\Omega |\nabla z|^2\ dx = \int_\Omega -z\Delta z\ dx = \int_\Omega \chi(\omega)uz\ dx = \int_\omega uz\ dx \leq \left(\int_\omega u^2\ dx\right)^{1/2}\left(\int_\omega z^2\ dx\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_\omega u^2\ dx\right)^{1/2}\left(\int_\omega |\nabla z|^2\ dx\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_\omega u^2\ dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla z|^2\ dx\right)^{1/2}\ \ ,$$

donde

$$\left(\int_\Omega |\nabla z|^2\ dx\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_\omega u^2\ dx\right)^{1/2}\ \ ,$$

o que prova (3.31) com $c = \dfrac{1}{\lambda_1}$.

A prova de (3.32) é análoga. ■

Corolário 3.4 *Sejam z a função do lema 3.3 e $\mu \geq 0$. Então,*

$$\begin{aligned} \int_{\omega\times]S,T[} |u|^2 E^\mu\ dxdt\ &=\ -\int_\Omega u'z\ dx\ E^\mu\Big]_S^T + \int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu u'z'\ dxdt + \\ &\quad +\mu\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'z\ dxdt - \int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'zE^\mu\ dxdt\ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Demonstração: Multiplicando a equação $u'' - \Delta u + a(x)u' = 0$ por zE^μ e integrando em $\Omega\times]S,T[$, temos que

$$\int_\Omega\int_S^T u''zE^\mu\ dtdx - \int_S^T E^\mu \int_\Omega z\ \Delta u\ dxdt + \int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'zE^\mu\ dxdt = 0\ .$$

Integrando por partes o primeiro termo e usando a Identidade de Green no segundo, temos

$$\int_\Omega \left\{ u'zE^\mu]_S^T - \int_S^T u'z'E^\mu\ dt - \int_S^T u'z\mu E^{\mu-1}E'\ dt\right\}\ dx + \int_S^T E^\mu\left(\int_\Omega \nabla u.\nabla z\ dx\right)\ dt +$$
$$+\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'zE^\mu\ dxdt = 0\ \ ,$$

o que implica que

$$\int_\Omega u'z\ dx\ E^\mu\Big]_S^T - \int_{\Omega\times]S,T[} E^\mu u'z'\ dxdt - \mu\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'z\ dxdt + \int_{\omega\times]S,T[} |u|^2 E^\mu\ dxdt +$$

$$+\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'zE^\mu\ dxdt = 0\ \ ,$$

donde (3.34). ■

De agora em diante, consideraremos $\omega_1 = \{x \in \omega\ ;\ a(x) \leq 1\}$ e $\omega_2 = \{x \in \omega\ ;\ a(x) > 1\}$.

Lema 3.4 *Seja* $F_1 = \left(|\Delta u_0|_H^2 + ||u_1||_W^2\right)^{1/2}$*, onde* u_0 *e* u_1 *são as condições iniciais do problema (3.1). Suponha que* $a \in C^0(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $|a^{-1}|_p^p = \displaystyle\int_\omega \frac{dx}{a^p} < \infty$ *para algum* $p > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} 0 < p < \infty & se \quad N = 1, 2 \\ p \geq N - 2 & se \quad N \geq 3\ . \end{cases}$$

Então, para $N = 1$,

$$\int_\omega |u'|^2\ dx\ \leq\ |E'| + c|a^{-1}|^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{1}{p+1}} E^{\frac{1}{2(p+1)}} |E'|^{\frac{p}{p+1}} \tag{3.35}$$

e para $N \geq 2$, *temos*

$$\int_\omega |u'|^2\ dx\ \leq\ |E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{N}{p+1}} E^{\frac{p-(N-2)}{2(p+1)}} |E'|^{\frac{p}{2p+2}}\ \ . \tag{3.36}$$

Demonstração: Como ω é a interseção de uma vizinhança de Γ_+ com Ω, temos que, para todo $N \geq 1$,

$$\int_{\omega_2} |u'|^2\ dx \leq \int_{\omega_2} a(x)|u'|^2\ dx \leq \int_\Omega a(x)|u'|^2\ dx\ \ ,$$

o que implica que

$$\int_{\omega_2} |u'|^2\ dx \leq |E'|\ . \tag{3.37}$$

<u>**1^o caso:** $N = 1$</u>

Utilizando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Imersão de Sobolev, temos que

$$\int_{\omega_1} |u'|^2\ dx = \int_{\omega_1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} a^{\frac{p}{p+1}} |u'|^2\ dx \leq \left(\int_{\omega_1} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right]^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\omega_1} \left[a^{\frac{p}{p+1}}|u'|^2\right]^{\frac{p+1}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} =$$

$$= \left(\int_{\omega_1} \frac{dx}{a^p}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\omega_1} a|u'|^{2+\frac{2}{p}}\ dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \leq \left[\left(\int_\omega \frac{dx}{a^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\omega_1} a|u'|^{2+\frac{2}{p}}\ dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \leq$$

$$\leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\omega_1} a|u'|^2 |u'|^{\frac{2}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \left(|u'|_\infty^{2/p} \int_\Omega a|u'|^2 \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} = |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \, |u'|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \, |E'|^{\frac{p}{p+1}} \; ,$$

ou seja,

$$\int_{\omega_1} |u'|^2 \, dx \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \, |u'|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \, |E'|^{\frac{p}{p+1}} \; , \tag{3.38}$$

onde $|u'|_{L^\infty(\Omega)} = |u'|_\infty$.

Tomando $q = r = 2$, $s = \infty$, $k = 0$, $\delta = \dfrac{1}{2}$ e $m = 1$ no lema de Gagliardo-Niremberg, temos que, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$, existe constante positiva c tal que

$$|\varphi|_\infty \leq c||\varphi||_{H^1(\Omega)}^{1/2} |\varphi|_H^{1/2} \, . \tag{3.39}$$

Por outro lado, pelo corolário 2.3, temos que

$$||u'||_W \leq F_1 \quad , \quad \text{onde } F_1 = \left(|\Delta u_0|_H^2 + ||u_1||_W^2 \right)^{1/2} \, . \tag{3.40}$$

Como as normas em $H^1(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$ são equivalentes para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos, de (3.40), que existe c_5 tal que

$$||u'||_{H^1(\Omega)} \leq c_5 F_1 \, . \tag{3.41}$$

De (3.39) temos que

$$|u'|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \leq c^{\frac{2}{p+1}} ||u'||_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}} |u'|_H^{\frac{1}{p+1}} = c_6 \left[\left(\int_\Omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{p+1}} ||u'||_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}} \; ,$$

o que implica que, utilizando (3.41),

$$|u'|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \leq c_7 E^{\frac{1}{2(p+1)}} F_1^{\frac{1}{p+1}} \, . \tag{3.42}$$

Portanto, temos de (3.38) e (3.42) que

$$\int_{\omega_1} |u'|^2 \, dx \leq c_7 |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} E^{\frac{1}{2(p+1)}} |E'|^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{1}{p+1}} \, . \tag{3.43}$$

Finalmente, juntando (3.37) e (3.43), obtemos (3.35).

2^o caso: $N \geq 2$

Voltando ao primeiro caso, vemos que

$$\int_{\omega_1} |u'|^2 \, dx \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\omega_1} a|u'|^{2+\frac{2}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \, . \tag{3.44}$$

Por outro lado, notemos que $u' \in L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)$. De fato, se $N = 2$, como $u' \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, utilizando o teorema de Imersão de Sobolev com $m = 1$, $\overline{p} = 2$ e $q = 2 + \dfrac{4}{p}$, temos que

$u' \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)$. Agora, se $N > 2$, por hipótese temos que $p \geq N-2$. Utilizando novamente o teorema de Imersão, mas com $q = \dfrac{N\overline{p}}{N - m\overline{p}}$, temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)$.

Portanto, temos da definição de ω_1 e da desigualdade de Hölder que

$$\left(\int_{\omega_1} a|u'|^{2+\frac{2}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}} = \left(\int_{\omega_1} a|u'||u'|^{\frac{p+2}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \leq$$

$$\leq \left[\left(\int_{\omega_1}\left(|u'|^{\frac{p+2}{p}}\right)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\omega_1} a^2|u'|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{p}{p+1}} =$$

$$= \left[\left(\int_{\omega_1}|u'|^{\frac{2p+4}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{2p+4}}\right]^{\frac{p+2}{p+1}}\left(\int_{\omega_1} a^2|u'|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2p+2}} \leq$$

$$\leq \left[\left(\int_{\omega_1}|u'|^{\frac{2p+4}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{2p+4}}\right]^{\frac{p+2}{p+1}}\left(\int_{\omega_1} a|u'|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2p+2}} \leq$$

$$\leq \left[\left(\int_{\Omega}|u'|^{\frac{2p+4}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{2p+4}}\right]^{\frac{p+2}{p+1}}\left(\int_{\Omega} a|u'|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2p+2}} \quad ,$$

o que implica que

$$\left(\int_{\omega_1} a|u'|^{2+\frac{2}{p}}\,dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \leq ||u'||^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)}|E'|^{\frac{p}{2p+2}} \,. \tag{3.45}$$

Juntando (3.44) e (3.45) temos que

$$\int_{\omega_1}|u'|^2\,dx \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}||u'||^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)}|E'|^{\frac{p}{2p+2}} \,. \tag{3.46}$$

Agora, tomando $q = r = 2$, $s = \dfrac{2p+4}{p}$, $k = 0$, $m = 1$ e $\delta = \dfrac{N}{p+2}$ no lema de Gagliardo-Niremberg, e utilizando a hipótese sobre p, temos que, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$ existe constante positiva c tal que

$$||\varphi||_{L^{\frac{2p+4}{p}}(\Omega)} \leq c||\varphi||^{\frac{N}{p+2}}_{H^1(\Omega)}|\varphi|_H^{\frac{p+2-N}{p+2}} \,.$$

Logo, de (3.46) temos que

$$\int_{\omega_1}|u'|^2\,dx \leq c_8|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}||u'||^{\frac{N}{p+1}}_{H^1(\Omega)}|u'|_H^{\frac{p+2-N}{p+1}}|E'|^{\frac{p}{2p+2}} \,. \tag{3.47}$$

Juntando (3.41) e (3.47), temos que

$$\int_{\omega_1}|u'|^2\,dx \leq c_9|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}F_1^{\frac{N}{p+1}}\left(\int_\Omega|u'|^2\,dx\right)^{\frac{p+2-N}{2p+2}}|E'|^{\frac{p}{2p+2}} \quad ,$$

donde

$$\int_{\omega_1}|u'|^2\,dx \leq c_{10}|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}F_1^{\frac{N}{p+1}}E^{\frac{p+2-N}{2p+2}}|E'|^{\frac{p}{2p+2}} \,. \tag{3.48}$$

Portanto, de (3.37) e (3.48) obtemos (3.36), o que conclui a demonstração. ∎

3.2 Teorema de Decaimento

Finalmente, provaremos que a solução forte do problema (3.1) decai polinomialmente com o tempo. A demonstração é longa e será dividida em vários passos.

Teorema 3.1 (Decaimento)
Suponha que $a \in C^0(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $|a^{-1}|_p^p = \int_\omega \frac{dx}{a^p} < \infty$ *para algum* $p > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} 0 < p < \infty & se \quad N = 1, 2 \\ p \geq N - 2 & se \quad N \geq 3\ . \end{cases}$$

Então, para $N = 1$,

$$E(t) \leq k_0 \left(|a^{-1}|_p \, F_1^{\frac{1}{p}} + E(0)^{\frac{1}{2p}} \right)^{2p} t^{-2p} \quad , \quad \forall t > 0 \ , \tag{3.49}$$

e, para $N \geq 2$, *temos que*

$$E(t) \leq k_1 \left(|a^{-1}|_p^2 \, F_1^{\frac{2N}{p}} + E(0)^{\frac{N}{p}} \right)^{\frac{p}{N}} t^{-\frac{p}{N}} \quad , \quad \forall t > 0 \ , \tag{3.50}$$

onde k_0 *e* k_1 *são constantes positivas independentes dos dados iniciais do problema (3.1).*

Demonstração:

Passo 1.

Considere $m(x) = x - x_0$, onde x_0 é um ponto fixo de $\mathbb{R}^N$. Utilizando as desigualdades de Hölder, de Poincaré e de Young, temos que

$$\left| \int_{\Omega \times]S,T[} a u' \{2m(x).\nabla u + (N-1)u\} E^\mu \, dxdt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\Omega \times]S,T[} a u' 2m(x).\nabla u \, E^\mu \, dxdt \right| + \left| \int_{\Omega \times]S,T[} a u'(N-1)u \, E^\mu \, dxdt \right| \leq$$

$$\leq 2 \int_{\Omega \times]S,T[} a|u'||m(x)||\nabla u| \, E^\mu \, dxdt + (N-1) \int_{\Omega \times]S,T[} a|u'||u| \, E^\mu \, dxdt \leq$$

$$\leq c_{11} \int_S^T E^\mu \left[\int_\Omega a^{1/2}|u'|a^{1/2}|\nabla u| \, dx \right] dt + (N-1) \int_S^T E^\mu \left[\int_\Omega a^{1/2}|u'|a^{1/2}|u| \, dx \right] dt \leq$$

$$\leq c_{11} \int_S^T E^\mu \left[\left(\int_\Omega a|u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega a|\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt +$$

$$+(N-1) \int_S^T E^\mu \left[\left(\int_\Omega a|u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega a|u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt \leq$$

$$\le c_{12}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12} dt \;+\; c_{13}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac12} dt \le$$

$$\le c_{12}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12} dt \;+\; c_{14}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12} dt \;=$$

$$=\; c_{15}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12} dt \;\le\; c_{16}\int_S^T E^\mu\,|E'|^{\frac12}\,E^{\frac12}\,dt \;=$$

$$=\int_S^T \sqrt{2}\,E^{\frac{\mu+1}{2}}\,\frac{c_{16}}{\sqrt{2}}\,(E^\mu|E'|)^{\frac12}\,dt \;\le\; \frac12\int_S^T\left\{2E^{\mu+1}+\frac{c_{16}^2}{2}\,E^\mu\,|E'|\right\}dt \;\le$$

$$\le \int_S^T E^{\mu+1}dt + c_{17}\,E(0)^\mu\int_S^T |E'|\,dt \;=\; \int_S^T E^{\mu+1}dt + c_{17}\,E(0)^\mu\int_T^S E'\,dt \;\le$$

$$\le \int_S^T E^{\mu+1}dt + c_{17}\,E(0)^\mu E(S)\;\;,$$

ou seja,

$$\left|\int_{\Omega\times]S,T[} au'\{2m(x)\nabla u+(N-1)u\}E^\mu\,dxdt\right| \le \int_S^T E^{\mu+1}dt + c_{17}\,E(0)^\mu E(S)\,. \tag{3.51}$$

Logo, juntando (3.14), (3.22), (3.23) e (3.51), observando também que $m(x).\nu>0$ em Γ_+, temos que

$$2\int_S^T E^{\mu+1}dt \;\le\; 4RE(0)^\mu E(S)+2\mu RE(0)^\mu E(S)+\int_S^T E^{\mu+1}dt + c_{17}\,E(0)^\mu E(S)+$$

$$+\left|\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^\mu(m(x).\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\,d\Gamma dt\right| \le$$

$$\le c_{18}E(0)^\mu E(S)+\int_S^T E^{\mu+1}dt+\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^\mu(m(x).\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\,d\Gamma dt \le$$

$$\le c_{18}E(0)^\mu E(S)+\int_S^T E^{\mu+1}dt+R\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\,d\Gamma dt\;\;,$$

donde

$$\int_S^T E^{\mu+1}dt \;\le\; c_{18}E(0)^\mu E(S)+R\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\,d\Gamma dt\,. \tag{3.52}$$

Passo 2.

Sejam $h\in\left(W^{1,\infty}(\Omega)\right)^N$ a função do lema 1.8 e $R=\sup\limits_{x\in\Omega}|m(x)|$. Então, utilizando a desigualdade de Young, temos que

$$\left|2R\int_\Omega u'h(x).\nabla u\,dx\,E^\mu\right]_S^T\right| =$$

$$= 2R\left|E(T)^\mu \int_\Omega u'(x,T)h(x).\nabla u(x,T)\ dx - E(S)^\mu \int_\Omega u'(x,S)h(x).\nabla u(x,S)\ dx\ \right| \leq$$

$$\leq c_{19}E(T)^\mu \int_\Omega |u'(x,T)||\nabla u(x,T)|\ dx + c_{19}E(S)^\mu \int_\Omega |u'(x,S)||\nabla u(x,S)|\ dx\ \leq$$

$$\leq c_{20}E(T)^\mu \int_\Omega |u'(x,T)|^2 + |\nabla u(x,T)|^2\ dx + c_{20}E(S)^\mu \int_\Omega |u'(x,S)|^2 + |\nabla u(x,S)|^2\ dx\ =$$

$$= c_{21}E(T)^{\mu+1} + c_{21}E(S)^{\mu+1} \leq c_{22}E(0)^\mu E(S)\ \ ,$$

ou seja

$$\left|2R\int_\Omega u'h(x).\nabla u\ dx\ E^\mu\Big]_S^T\right| \leq c_{22}E(0)^\mu E(S)\ \ , \tag{3.53}$$

e também, temos que

$$\left|-2\mu R\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'h(x).\nabla u\ dxdt\right| \leq 2\mu R\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}|E'|\ |u'|\ |h(x)|\ |\nabla u|\ dxdt \leq$$

$$\leq c_{23}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_\Omega |u'|\ |\nabla u|\ dx\right)\ dt \leq c_{23}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\ \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u'|^2 + |\nabla u|^2\ dx\right)\ dt\ =$$

$$= c_{23}\int_S^T E^\mu|E'|\ dt \leq c_{23}E(0)^\mu\int_T^S E'\ dt \leq c_{23}E(0)^\mu E(S)\ \ ,$$

isto é

$$\left|-2\mu R\int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'h(x).\nabla u\ dxdt\right| \leq c_{23}E(0)^\mu E(S)\ . \tag{3.54}$$

Por outro lado, utilizando as desigualdades de Hölder e de Young, vemos que

$$\left|2R\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'h(x).\nabla u\ E^\mu\ dxdt\right| \leq 2R\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)|u'|\ |h(x)|\ |\nabla u|\ E^\mu\ dxdt \leq$$

$$\leq c_{24}\int_S^T E^\mu\left(\int_\Omega a^{\frac{1}{2}}|u'|a^{\frac{1}{2}}|\nabla u|\ dx\right)\ dt \leq c_{24}\int_S^T E^\mu\left(\int_\Omega a|u'|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega a|\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq c_{25}\int_S^T E^\mu|E'|^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \leq c_{26}\int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}}|E'|^{\frac{1}{2}}\ dt = \int_S^T E^{\frac{\mu+1}{2}}c_{26}E^{\frac{\mu}{2}}|E'|^{\frac{1}{2}}dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_S^T \left\{E^{\mu+1} + c_{27}E^\mu|E'|\right\}\ dt \leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{28}E(0)^\mu\int_T^S E'\ dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{28}E(0)^\mu E(S)\ \ ,$$

ou seja,

$$\left|2R\int_{\Omega\times]S,T[} a(x)u'h(x).\nabla u\ E^\mu\ dxdt\right| \leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{28}E(0)^\mu E(S)\ . \tag{3.55}$$

Combinando, então, (3.17), (3.53), (3.54) e (3.55) temos que

$$R\int_{\Gamma_+\times]S,T[} E^\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \leq c_0 \int_{\widehat{\omega}\times]S,T[} \left\{|u'|^2 + |\nabla u|^2\right\} E^\mu \, dxdt + \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{29}E(0)^\mu E(S) \ . \tag{3.56}$$

Finalmente, de (3.52) e (3.56) temos que

$$\int_S^T E^{\mu+1} \, dt \leq c_{30}E(0)^\mu E(S) + c_{31}\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[} \left\{|u'|^2 + |\nabla u|^2\right\} E^\mu \, dxdt \ \ , \tag{3.57}$$

onde c_{31} é uma constante positiva. (Esta observação será necessária mais adiante.)

Passo 3.

Consideremos a função $\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ do lema 1.9. Utilizando as desigualdades de Young e de Poincaré, temos que

$$\left| - \int_\Omega u'(x,t)\eta(x)^2 u(x,t) \, dx \ E^\mu \right]_S^T \Bigg| =$$

$$= \left| E(S)^\mu \int_\Omega u'(x,S)\eta(x)^2 u(x,S) \, dx - E(T)^\mu \int_\Omega u'(x,T)\eta(x)^2 u(x,T) \, dx \right| \leq$$

$$\leq E(S)^\mu \int_\Omega |u'(x,S)| \, |u(x,S)| \, dx + E(T)^\mu \int_\Omega |u'(x,T)| \, |u(x,T)| \, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}E(S)^\mu \int_\Omega |u'(x,S)|^2 + |u(x,S)|^2 \, dx + \frac{1}{2}E(T)^\mu \int_\Omega |u'(x,T)|^2 + |u(x,T)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \frac{c_{32}}{2}E(S)^\mu \int_\Omega |u'(x,S)|^2 + |\nabla u(x,S)|^2 \, dx + \frac{c_{33}}{2}E(T)^\mu \int_\Omega |u'(x,T)|^2 + |\nabla u(x,T)|^2 \, dx \ =$$

$$= \ c_{32}E(S)^\mu E(S) + c_{33}E(T)^\mu E(T) \leq c_{34}E(S)^\mu E(S) \leq c_{34}E(0)^\mu E(S) \ \ ,$$

isto é,

$$\left| - \int_\Omega u'(x,t)\eta(x)^2 u(x,t) \, dx \ E^\mu \right]_S^T \Bigg| \leq c_{34}E(0)^\mu E(S) \ \ , \tag{3.58}$$

e também, temos que

$$\left| \mu \int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'u \ \eta^2 \, dxdt \right| \leq \mu \int_S^T E^{\mu-1}|E'| \left(\int_\Omega |u'| \, |u| \, dx\right) \, dt \leq$$

$$\leq \mu \int_S^T E^{\mu-1}|E'| \, \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u'|^2 + |u|^2 \, dx\right) \, dt \leq c_{35}\int_S^T E^{\mu-1}|E'| \, \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u'|^2 + |\nabla u|^2 \, dx\right) \, dt \ =$$

$$= \ c_{35}\int_S^T E^\mu |E'| \, dt \leq c_{35}E(0)^\mu \int_T^S E' \, dt \leq c_{35}E(0)^\mu E(S) \ \ ,$$

ou seja

$$\left|\mu \int_{\Omega\times]S,T[} E^{\mu-1}E'u'u\ \eta^2\ dxdt\right| \leq c_{35}E(0)^{\mu}E(S)\ . \tag{3.59}$$

Também pela desigualdade de Young, vemos que

$$\left|2\int_{\Omega\times]S,T[} \eta\ u\nabla u.\nabla\eta\ E^{\mu}\ dxdt\right| \leq \int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}|\eta|\ |\nabla u|\ 2\ |u|\ |\nabla\eta|\ dx\right)\ dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}\left\{|\eta^2||\nabla u|^2+4|u|^2|\nabla\eta|^2\right\}\ dx\right)\ dt\ =$$

$$=\ \frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\ dxdt + 2\int_{\Omega\times]S,T[}|u|^2|\nabla\eta|^2E^{\mu}\ dxdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\ dxdt + c_{36}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^{\mu}\ dxdt\ \ ,$$

isto é,

$$\left|2\int_{\Omega\times]S,T[}\eta\ u\nabla u.\nabla\eta\ E^{\mu}\ dxdt\right| \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\ dxdt\ +\ c_{36}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^{\mu}\ dxdt\ . \tag{3.60}$$

Por último, notemos que, pelas desigualdades de Hölder, Poincaré e de Young, temos

$$\left|2c_{31}\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\eta^2u\ E^{\mu}\ dxdt\right| \leq c_{37}\int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}a(x)|u'|\ |u|\ dx\right)\ dt\ =$$

$$=\ c_{37}\int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}a^{\frac{1}{2}}|u'|a^{\frac{1}{2}}|u|\ dx\right)\ dt \leq c_{37}\int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}a|u'|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}a|u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}dt \leq$$

$$\leq c_{38}\int_S^T E^{\mu}|E'|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}dt \leq c_{39}\int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}}|E'|^{\frac{1}{2}}\ dt\ =\ \int_S^T E^{\frac{\mu+1}{2}}c_{39}|E'|^{\frac{1}{2}}E^{\frac{\mu}{2}}\ dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{40}\int_T^S E^{\mu}\ E'\ dt \leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{40}E(0)^{\mu}E(S)\ \ ,$$

isto é,

$$\left|2c_{31}\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'\eta^2u\ E^{\mu}\ dxdt\right| \leq \frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + c_{40}E(0)^{\mu}E(S)\ . \tag{3.61}$$

Temos, então, de (3.21), (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61), observando também que $c_{31} > 0$, que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\ dxdt \quad &\leq c_{41}E(0)^{\mu}E(S) + \frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^{\mu}\ dxdt + \\ &+c_{36}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^{\mu}\ dxdt\ +\ \frac{1}{4c_{31}}\int_S^T E^{\mu+1}\ dt + \\ &+\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|u'|^2E^{\mu}\ dxdt\ \ ,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^\mu\,dxdt \quad \leq c_{41}E(0)^\mu E(S)+c_{36}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^\mu\,dxdt\,+$$
$$+\;\frac{1}{4c_{31}}\int_S^T E^{\mu+1}\,dt\;+\;\int_{\omega\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt\;\;,$$

donde, multiplicando por $2c_{31}$,

$$\begin{aligned} c_{31}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^\mu\,dxdt \quad &\leq c_{42}E(0)^\mu E(S)+c_{43}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^\mu\,dxdt\,+\\ &+\;\frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\,dt\;+\;c_{44}\int_{\omega\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt\;. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Finalmente, combinando (3.57) e (3.62) temos que

$$\int_S^T E^{\mu+1}\,dt \leq c_{30}E(0)^\mu E(S)+c_{31}\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt+c_{31}\int_{\widehat{\omega}\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^\mu\,dxdt\leq$$
$$\leq c_{30}E(0)^\mu E(S)+c_{31}\int_{\omega\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt+c_{31}\int_{\Omega\times]S,T[}\eta^2|\nabla u|^2E^\mu\,dxdt\leq$$
$$\leq c_{45}E(0)^\mu E(S)+c_{46}\int_{\omega\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt+c_{43}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^\mu\,dxdt+\frac{1}{2}\int_S^T E^{\mu+1}\,dt\;\;,$$

donde

$$\int_S^T E^{\mu+1}\,dt\leq c_{47}E(0)^\mu E(S)+c_{48}\int_{\omega\times]S,T[}|u|^2E^\mu\,dxdt+c_{49}\int_{\omega\times]S,T[}|u'|^2E^\mu\,dxdt\;\;, \tag{3.63}$$

o que conclui o passo 3.

<u>Passo 4.</u>

Seja z a função do lema 3.3. Notemos que, pelas desigualdades de Hölder, Poincaré e de Young e pelo lema 3.3 (desigualdade (3.31)), temos

$$\left|-\int_\Omega u'z\,dx\,E^\mu\Big]_S^T\right|=\left|E(S)^\mu\int_\Omega u'(x,S)z(x,S)\,dx-E(T)^\mu\int_\Omega u'(x,T)z(x,T)\,dx\right|\leq$$
$$\leq E(S)^\mu\int_\Omega|u'(x,S)|\,|z(x,S)|\,dx+E(T)^\mu\int_\Omega|u'(x,T)|\,|z(x,T)|\,dx\leq$$
$$\leq E(0)^\mu\left(\int_\Omega|u'(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|z(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac12}+E(0)^\mu\left(\int_\Omega|u'(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|z(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac12}\leq$$
$$\leq c_{50}E(0)^\mu\left(\int_\Omega|u'(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|\nabla z(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$

$$+c_{50}E(0)^{\mu}\left(\int_{\Omega}|u'(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla z(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq c_{51}E(0)^{\mu}\left(\int_{\Omega}|u'(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|u(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+c_{51}E(0)^{\mu}\left(\int_{\Omega}|u'(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|u(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq c_{52}E(0)^{\mu}\left(\int_{\Omega}|u'(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x,S)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+c_{52}E(0)^{\mu}\left(\int_{\Omega}|u'(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x,T)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq c_{52}E(0)^{\mu}\,\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|u'(x,S)|^2+|\nabla u(x,S)|^2\right\}\,dx+c_{52}E(0)^{\mu}\,\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|u'(x,T)|^2+|\nabla u(x,T)|^2\right\}\,dx\;=$$

$$=\;c_{52}E(0)^{\mu}E(S)+c_{52}E(0)^{\mu}E(T)\leq c_{53}E(0)^{\mu}E(S)\;\;,$$

ou seja

$$\left|-\int_{\Omega}u'z\,dx\,E^{\mu}\Big]_S^T\right|\leq c_{53}E(0)^{\mu}E(S)\;\;, \tag{3.64}$$

e, também, pelas mesmas desigualdades,

$$\left|\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'z\,dxdt\right|\leq\mu\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_{\Omega}|u'|\,|z|\,dx\right)\,dt\leq$$

$$\leq\mu\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_{\Omega}|u'|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\leq$$

$$\leq c_{54}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_{\Omega}|u'|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\leq$$

$$\leq c_{55}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_{\Omega}|u'|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\leq$$

$$\leq c_{56}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\left(\int_{\Omega}|u'|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\leq$$

$$\leq c_{56}\int_S^T E^{\mu-1}|E'|\,\frac{1}{2}\left(|u'|^2+|\nabla u|^2\,dx\right)\,dt=c_{56}\int_T^S E^{\mu}E'\,dt\leq c_{56}E(0)^{\mu}E(S)\;\;,$$

isto é

$$\left|\mu\int_{\Omega\times]S,T[}E^{\mu-1}E'u'z\,dxdt\right|\leq c_{56}E(0)^{\mu}E(S)\,. \tag{3.65}$$

Finalmente, observemos que, pelas mesmas desigualdades e pelo lema 3.3,

$$c_{48}\left|\int_{\Omega\times]S,T[}a(x)u'z\,E^{\mu}\,dxdt\right|\leq c_{48}\int_S^T E^{\mu}\left(\int_{\Omega}a(x)|u'|\,|z|\,dx\right)\,dt\;=$$

$$= c_{48} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega a^{\frac{1}{2}} |u'| a^{\frac{1}{2}} |z| \, dx \right) dt \leq c_{48} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega a |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega a |z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq c_{57} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega a |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq c_{58} \int_S^T E^\mu |E'|^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq c_{59} \int_S^T E^\mu |E'|^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq c_{60} \int_S^T E^{\mu + \frac{1}{2}} |E'|^{\frac{1}{2}} \, dt \; = \; \int_S^T \frac{1}{2} \, E^{\frac{\mu+1}{2}} \, 2 \, c_{60} \, |E'|^{\frac{1}{2}} E^{\frac{\mu}{2}} \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{61} \int_T^S E^\mu E' \, dt \leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{61} E(0)^\mu E(S) \;\; ,$$

ou seja,

$$c_{48} \left| \int_{\Omega \times]S,T[} a(x) u' z \; E^\mu \, dx dt \right| \leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{61} E(0)^\mu E(S) \;\; , \tag{3.66}$$

e, também, notemos que, utilizando novamente as desigualdades de Hölder e de Poincaré e o lema 3.3 (desigualdade (3.32)), encontramos

$$c_{48} \left| \int_{\Omega \times]S,T[} E^\mu u' z' \, dx dt \right| \leq c_{48} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega |u'| \, |z'| \, dx \right) dt \leq$$

$$\leq c_{48} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |z'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq c_{62} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla z'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq c_{63} \int_S^T E^\mu \left(\int_\Omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq c_{64} \int_S^T E^{\mu + \frac{1}{2}} \left(\int_\omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \; =$$

$$= \int_S^T \frac{1}{2} \, E^{\frac{\mu+1}{2}} \, 2 \, c_{64} \, E^{\frac{\mu}{2}} \left(\int_\omega |u'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{65} \int_{\omega \times]S,T[} E^\mu |u'|^2 \, dx dt \;\; ,$$

isto é,

$$c_{48} \left| \int_{\Omega \times]S,T[} E^\mu u' z' \, dx dt \right| \leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{65} \int_{\omega \times]S,T[} E^\mu |u'|^2 \, dx dt \; . \tag{3.67}$$

Logo, substituindo (3.64)-(3.67) em (3.34), vemos que

$$c_{48} \int_{\omega \times]S,T[} |u|^2 E^\mu \, dx dt \leq c_{66} E(0)^\mu E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{65} \int_{\omega \times]S,T[} E^\mu |u'|^2 \, dx dt \; . \tag{3.68}$$

Combinando, então, (3.63) e (3.68), temos

$$\int_S^T E^{\mu+1} \, dt \leq c_{67} E(0)^\mu E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} \, dt + c_{68} \int_{\omega \times]S,T[} E^\mu |u'|^2 \, dx dt \;\; ,$$

donde

$$\int_S^T E^{\mu+1} \, dt \leq c_{69} E(0)^\mu E(S) + c_{70} \int_{\omega \times]S,T[} E^\mu |u'|^2 \, dx dt \; . \tag{3.69}$$

Passo 5.

Neste último passo, provaremos a tese do teorema. As demonstrações de (3.49) e (3.50) são distintas, necessitando para isso, valores diferentes de μ.

<u>1^o caso ($N=1$):</u> Multiplicando (3.35) por $c_{70}E^{\frac{1}{2p}}$, integrando de S a T, e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
c_{70}\int_S^T E^{\frac{1}{2p}}\left(\int_\omega |u'|^2\,dxdt\right)\,dt &\le c_{70}\int_S^T E^{\frac{1}{2p}}\left(|E'|+c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}F_1^{\frac{1}{p+1}}E^{\frac{1}{2(p+1)}}|E'|^{\frac{p}{p+1}}\right)\,dt \le \\
&\le c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}\int_T^S E'\,dt + c_{71}\int_S^T E^{\frac{1}{2p}}|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}F_1^{\frac{1}{p+1}}E^{\frac{1}{2(p+1)}}|E'|^{\frac{p}{p+1}}\,dt \le \\
&\le c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \int_S^T E^{\frac{2p+1}{2p(p+1)}}\,c_{71}\,|E'|^{\frac{p}{p+1}}\,|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}\,F_1^{\frac{1}{p+1}}\,dt \le \\
&\le c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \int_S^T \frac{1}{p+1}\left(E^{\frac{2p+1}{2p(p+1)}}\right)^{p+1} + \frac{p}{p+1}\left(c_{71}\,|E'|^{\frac{p}{p+1}}\,|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}\,F_1^{\frac{1}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}\,dt = \\
&= c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \frac{1}{p+1}\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt + c_{72}|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}}\int_S^T |E'|\,dt \le \\
&\le c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \frac{1}{p+1}\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt + c_{72}|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}}E(S)\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
c_{70}\int_S^T E^{\frac{1}{2p}}\left(\int_\omega |u'|^2\,dxdt\right)\,dt \le c_{70}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \frac{1}{p+1}\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt + c_{72}|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}}E(S)\,. \tag{3.70}
$$

Logo, de (3.69) com $\mu=\dfrac{1}{2p}$ e de (3.70), temos que

$$
\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt \le c_{73}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + \frac{1}{p+1}\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt + c_{72}|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}}E(S)\ ,
$$

o que implica que

$$
\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt \le c_{74}E(0)^{\frac{1}{2p}}E(S) + c_{75}|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}}E(S)\ ,
$$

donde

$$
\int_S^T E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt \le c_{76}\left(|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}} + E(0)^{\frac{1}{2p}}\right)E(S)\,. \tag{3.71}
$$

Tomando o limite em (3.71) quando $T\to\infty$, temos que

$$
\int_S^\infty E^{1+\frac{1}{2p}}\,dt \le c_{76}\left(|a^{-1}|_p\,F_1^{\frac{1}{p}} + E(0)^{\frac{1}{2p}}\right)E(S)\ ,
$$

donde, pelo lema 1.7, como $\dfrac{1}{2p} > 0$ e $S \geq 0$ é arbitrário,

$$E(t) \leq \left[c_{76}\left(|a^{-1}|_p\ F_1^{\frac{1}{p}} + E(0)^{\frac{1}{2p}}\right)(1+2p)\right]^{2p} t^{-2p} \quad , \quad \forall\, t > 0 \quad ,$$

o que nos leva a (3.49).

<u>2^o caso ($N > 1$):</u> Multiplicando (3.36) por $c_{70}E^{\frac{N}{p}}$, integrando de S a T, e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$c_{70}\int_S^T E^{\frac{N}{p}}\left(\int_\omega |u'|^2\,dx\right)\,dt \leq c_{70}\int_S^T E^{\frac{N}{p}}\left(|E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}\ F_1^{\frac{N}{p+1}}\ E^{\frac{p-(N-2)}{2(p+1)}}\ |E'|^{\frac{p}{2p+2}}\right)\,dt \leq$$

$$\leq c_{70}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ \int_S^T E^{\frac{Np+2N+p^2+2p}{2p(p+1)}} c_{77}\ |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}\ F_1^{\frac{N}{p+1}}\ |E'|^{\frac{p}{2p+2}}\,dt \leq$$

$$\leq c_{70}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ \int_S^T \left\{\frac{p+2}{2(p+1)}\left(E^{\frac{(N+p)(p+2)}{2p(p+1)}}\right)^{\frac{2(p+1)}{p+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{p}{2(p+1)}\left(c_{77}\ |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}}\ F_1^{\frac{N}{p+1}}\ |E'|^{\frac{p}{2p+2}}\right)^{\frac{2(p+1)}{p}}\right\}dt \ =$$

$$= \ c_{70}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ \frac{p+2}{2(p+1)}\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \ + \ c_{78}|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}}\int_S^T |E'|\,dt \leq$$

$$\leq c_{70}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ \frac{p+2}{2(p+1)}\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \ + \ c_{78}|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}}E(S) \quad ,$$

ou seja

$$c_{70}\int_S^T E^{\frac{N}{p}}\left(\int_\omega |u'|^2\,dx\right)\,dt \leq c_{70}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) + \frac{p+2}{2(p+1)}\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt + c_{78}|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}}E(S)\ . \tag{3.72}$$

Portanto, de (3.69), com $\mu = \dfrac{N}{p}$, e de (3.72), temos

$$\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \leq c_{79}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ \frac{p+2}{2(p+1)}\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \ + \ c_{78}|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}}E(S) \quad ,$$

o que implica que

$$\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \leq c_{80}E(0)^{\frac{N}{p}}E(S) \ + \ c_{81}|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}}E(S) \quad ,$$

donde

$$\int_S^T E^{1+\frac{N}{p}}\,dt \leq c_{82}\left(|a^{-1}|_p^2\ F_1^{\frac{2N}{p}} + E(0)^{\frac{N}{p}}\right)E(S)\ . \tag{3.73}$$

Tomando o limite em (3.73) quando $T \to \infty$, temos que

$$\int_S^\infty E^{1+\frac{N}{p}}\, dt \leq c_{82} \left(|a^{-1}|_p^2\, F_1^{\frac{2N}{p}} + E(0)^{\frac{N}{p}} \right) E(S) \ \ ,$$

donde, pelo lema 1.7, como $\dfrac{N}{p} > 0$ e S é arbitrário,

$$E(t) \leq \left[c_{82} \left(|a^{-1}|_p^2\, F_1^{\frac{2N}{p}} + E(0)^{\frac{N}{p}} \right) \left(1 + \frac{N}{p} \right) \right]^{\frac{N}{p}} t^{-\frac{p}{N}} \quad , \ \ \forall\, t \geq 0 \ \ ,$$

o que nos leva a (3.50), finalizando, assim, a demonstração do teorema. ∎

Bibliografia

[1] Assila, M. A., *Decay estimates for the wave equation with a nonlinear nonmonotone weak damping*, Applicable Analysis, 69, 1998, 223-231.

[2] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] Brezis, H., Cazenave, T., *Nonlinear evolution equations*, Preprint, 1994.

[4] Carroll, R. W., *Abstract methods in partial differential equations*, New York: Harper and Row, 1969.

[5] Carvalho,R. A., *Existência, unicidade e estabilização de uma equação da onda com dissipação linear localizada*, dissertação de mestrado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

[6] Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. N. D., Soriano, J. A., *Global existence and assymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation*, Communications in Comtemporary Mathematics, 6(5), 2004, 705-731.

[7] Conrad, F., Rao, B., *Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptotic Anal., 7 , 1993, 159-177.

[8] Courant, R., John, F., *Introduction to calculus and analysis*, Vol. II, Interscience, New York, 1965.

[9] Gomes, A. M., *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

[10] Haraux, A., *Semi-Linear hyperbolic problems in bounded domains*, C.N.R.S., Paris, 1987.

[11] Kesavan, S., *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley and Sons, New Delhi, 1989.

[12] Komornick, V., *Controlabilité exacte en un temps minimal*, C.R. Acad. Paris, Série I, 304, 1987, 223-225.

[13] Komornick, V., *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, Masson & Jonh Wiley, Paris, 1994.

[14] Lions, J.-L., *Controlabilité exacte, pertubations et stabilisation de systèmes distribués*, Masson, Paris, 1988.

[15] Lions, J.-L., *Quelques Mèthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dinod-Paris, 2005 (nouvelle présentation).

[16] Lions, J.-L., Magenes, E., *Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, 1973.

[17] Medeiros, L.A., Mello, E.A., *A integral de Lebesgue*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

[18] Medeiros, L.A., Miranda, M. M., *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais*. Textos de métodos matemáticos n^0 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[19] Medeiros, L.A., Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

[20] Medeiros, L. A., *Exact Controllability for Wave Equations - H.U.M.*, minicurso nas Atas do 37^o SBA, maio de 1993.

[21] Medeiros, L. A. , Rivera, P. H., *Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais*, Textos de métodos matemáticos n^0 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[22] Miranda, Manuel Milla, *Análise espectral em espaços de Hilbert*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1990

[23] Nirenberg, L., *Topics in nonlinear functional analysis, Lectures notes*, Courant Institute, New York, 1974.

[24] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] Pereira, G. S., *Existência e unicidade de soluções e estimativas de decaimento da energia de uma equação da onda com dissipação não-linear limitada*, dissertação de mestrado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

[26] Temam, R., *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, 3rd rev. ed., North Holland, Amsterdam, 1979.

[27] Tébou, L. R. T., *Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping*, Journal of differential equations 145, 502-524, 1997.

[28] Tébou, L. R. T., *On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation*, Portugaliae Mathematica, Vol. 55, Fasc. 3, 1998.

[29] Zuazua, E., *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Commun. in P.D.E., 15, 1990, 205-235.