



# Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander

por

Fernando Celso Villar Marinho

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Matemática Pura.

Orientadora: Walcy Santos

Rio de Janeiro

Maio - 2005

## FICHA CATALOGRÁFICA

M338 Marinho, Fernando Celso Villar.

Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander/  
Fernando Celso Villar Marinho. - Rio de Janeiro: UFRJ/  
IM/2005.

viii, 127f.:il.;31 cm.

Orientadora:Walcy Santos

Dissertação:(Mestrado em Matemática) - UFRJ/IM/  
Programa de Pós-graduação em Matemática, 2005.

Referências Bibliográficas: f.122-125

1. Geometria Diferencial. 2. Topologia Algébrica.
  3. Formas e variedades. 4. Cohomologia de deRham.
  5. Homotopias. 6. Seqüência de Mayer-Vietoris
  7. Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander.
- I. Santos, Walcy. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em  
Matemática. III. Título.

# Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander

**Fernando Celso Villar Marinho**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Matemática Pura.

---

Prof<sup>a</sup>. Walcy Santos.  
Doutora IM-UFRJ - Orientadora.

---

Prof<sup>a</sup>. Nedir do Espírito Santo  
Doutora IM-UFRJ.

---

Prof. Hilário Alencar  
Doutor UFAL.

---

Prof<sup>a</sup>. Maria Fernanda Elbert Guimarães  
Doutora IM-UFRJ.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2005

*Dedico esta dissertação a minha filha  
Isabella, cujo sorriso tem um brilho  
capaz de alegrar a todos a sua volta.  
E a sua mãe Jackeline, minha linda, pelo  
carinho e atenção dedicados a nossa filha!*

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe Aracy Villar, que amo muito, pelo carinho dedicado a mim todos esses anos e por proporcionar as condições de estudo ao longo de minha vida. Agradeço a professora Walcy Santos por ter me orientado neste trabalho e proposto um tema tão rico no qual pude apreciar desde conceitos básicos aos mais avançados em matemática. Agradeço a professora Walcy também pelo excelente curso de Geometria Diferencial ministrado no mestrado e aproveito para agradecer a todos os professores que compartilharam seus conhecimentos comigo, em especial a professora Ângela Biazutti e aos professores Antonio Roberto e Cássio Neri pelos cursos de Análise Funcional, Topologia e Medida e Integração, que foram essenciais para um entendimento melhor do tema desta dissertação. Agradeço ao grande amigo, professor Filipe Iório pelas orientações dadas e pelas conversas altamente elucidativas.

## RESUMO

### TEOREMA DA SEPARAÇÃO DE JORDAN-BROUWER-ALEXANDER

Fernando Celso Villar Marinho

Orientadora: Waley Santos

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Matemática Pura.

Os objetivos desse trabalho são: demonstrar o Teorema da Curva de Jordan recuperando algumas das idéias originais, apresentar um pouco da história relativa as demonstrações desse teorema e obter uma generalização para esse resultado. A demonstração do Teorema de Jordan é baseada na apresentada por (TVERBERG, 1980, p.34) e a generalização desse resultado, devida a (ALEXANDER, 1922, p.333), foi apresentada neste trabalho usando invariância homotópica e seqüência de Mayer-Vietoris por (DOLD, 1993). Notas históricas permeiam o texto e a fundamentação teórica necessária é apresentada. Estuda-se Curvas Parametrizadas, Formas  $r$ -lineares ou Tensores, Formas Diferenciais, Variedades Diferenciáveis, Cohomologia de deRham, Homotopias, Seqüência de Mayer-Vietoris, Vizinhanças Tubulares e Aproximação por Funções Contínuas.

Palavras-chave: Curvas Parametrizadas, Formas  $r$ -lineares ou Tensores, Formas Diferenciais, Variedades Diferenciáveis, Cohomologia de deRham, Homotopias, Seqüência de Mayer-Vietoris, Vizinhanças Tubulares e Aproximação por Funções Contínuas.

Rio de Janeiro

Maio - 2005

## ABSTRACT

### JORDAN-BROUWER-ALEXANDER SEPARATION THEOREM

Fernando Celso Villar Marinho

Orientadora: Waley Santos

*Abstract* da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Matemática Pura.

The goals of that work are: to demonstrate the Theorem of Jordan's Curve recovering some of the original ideas, to present a little of the relative history the demonstrations of that theorem and to obtain a generalization for that result. The demonstration of Jordan's Theorem it is based in the presented for (TVERBERG, 1980, p.34) and the generalization of that result, owed the (ALEXANDER, 1922, p.333), it was presented in this work using homotopy axiom for de deRham Cohomology and sequence of Mayer-Vietoris for (DOLD, 1993). historical Notes permeate him/it text and the necessary theoretical fundament is presented. It is studied Parametrized Curves, Forms  $r$ -lineal or Tensores, Differential Forms, Manifold ,de Rham cohomology , Homotopy, Sequence of Mayer-Vietoris, Tubular Neighborhoods and Approach for Continuous Functions.

Key-words: Parametrized Curves, Forms  $r$ -lineal or Tensores, Differential Forms, Manifold ,de Rham cohomology , Homotopy, Sequence of Mayer-Vietoris, Tubular Neighborhoods and Approach for Continuous Functions.

Rio de Janeiro

Maio - 2005

# Sumário

<b>1</b>	<b>Curvas de Jordan</b>	<b>12</b>
1.1	Notas Históricas . . . . .	12
1.2	Conceitos Iniciais . . . . .	13
1.2.1	Curvas Planas . . . . .	13
1.2.2	Curvas Fechadas . . . . .	14
1.2.3	Pontos Múltiplos . . . . .	14
1.2.4	Curvas de Jordan . . . . .	15
1.2.5	Curvas de Peano-Hilbert . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Teorema da Curva de Jordan</b>	<b>18</b>
2.1	O Teorema de Jordan para Polígonos . . . . .	18
2.2	O Teorema de Jordan . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Formas e Variedades</b>	<b>39</b>
3.1	Dual Algébrico . . . . .	39
3.2	Formas . . . . .	42
3.2.1	Formas $r$ -Lineares . . . . .	42
3.2.2	O Espaço Vetorial das Formas $r$ -Lineares . . . . .	42
3.2.3	O Espaço Vetorial das Formas $r$ -Lineares Alternadas . . . . .	44
3.2.4	Aplicação Induzida . . . . .	51
3.3	Variedade Diferenciável . . . . .	53
3.3.1	Função Diferenciável em uma Variedade . . . . .	56
3.3.2	Curva Diferenciável em uma Variedade Diferenciável . . . . .	57
3.3.3	Vetor Tangente a uma Variedade Diferenciável . . . . .	57
3.3.4	Espaço Tangente de uma Variedade Diferenciável . . . . .	58
3.3.5	Diferencial . . . . .	61



3.3.6	Subvariedade . . . . .	63
3.4	Formas Diferenciais . . . . .	64
3.4.1	Formas Diferenciais . . . . .	64
3.4.2	Diferencial Exterior . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Cohomologia de deRham</b>	<b>70</b>
4.1	Introdução . . . . .	70
4.2	Cohomologia de deRham . . . . .	71
4.3	Complexo de deRham . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Homotopias</b>	<b>79</b>
5.1	Homotopias . . . . .	79
5.2	Invariância por Homotopias . . . . .	82
<b>6</b>	<b>A Seqüência de Mayer-Vietoris</b>	<b>94</b>
6.1	A Seqüência de Mayer-Vietoris . . . . .	94
6.2	Cálculo da Cohomologia com a Seqüência de Mayer-Vietoris . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Teorema da Separação de Alexander</b>	<b>102</b>
7.1	Vizinhanças Tubulares . . . . .	102
7.2	Aproximação por Funções Contínuas . . . . .	107
7.3	Teorema de Jordan-Brouwer-Alexander . . . . .	112

# Introdução

A partir de uma curva fechada simples é possível separar plano em duas regiões cuja fronteira comum é a curva dada. Esse resultado bastante intuitivo é dado no Teorema da Curva de Jordan.

O presente trabalho tem dois objetivos centrais. O primeiro é apresentar uma demonstração desse teorema que recupere algumas das idéias originais de Jordan. Apresentaremos uma demonstração baseada no artigo de Helge Tverberg (TVERBERG, 1980, p.34), na qual estão presentes muitos elementos da demonstração original de Jordan. Os conceitos de continuidade, compacidade e convergência, são necessários para o entendimento dessa demonstração.

O segundo objetivo é obter uma generalização para o resultado que Jordan apresentou para o plano. A primeira generalização foi dada em 1911 por Brouwer (1911, p.314) no artigo *Beweis des Jordanschen Satzes für den  $n$ -dimensionalen Raum* ele provou que se  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é conexa e compacta então  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$  é a reunião de dois abertos conexos disjuntos que têm  $S^n$  como fronteira comum. O Teorema da Curva de Jordan segue como corolário deste resultado. Por causa desta generalização e como uma homenagem, o Teorema de Brouwer fica conhecido como Teorema de Separação de Jordan-Brouwer.

O resultado que apresentaremos neste trabalho é ainda mais geral, e foi demonstrado por Alexander (1922, p.333) no artigo *A Proof and Extension of The Jordan-Brouwer Separation Theorem*. O Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander, como ficou conhecido, teve uma nova demonstração, muito elegante, usando invariância homotópica e seqüência de Mayer-Vietoris feita por (DOLD, 1993). Deste teorema obtém-se, como corolário, os teoremas de Jordan-Brouwer e, conseqüentemente, o clássico Teorema de Jordan.

Apresentaremos algumas notas históricas bem como conceitos relativos as curvas planas no segundo capítulo . Faremos comparações entre as definições retiradas do

texto *Cours d'Analyse* (JORDAN, 1959, p.92) e as definições atuais dadas no livro Geometria Diferencial das Curvas Planas (ALENCAR, H.; SANTOS, W, 2003, p.15). O Teorema de Jordan é demonstrado no terceiro capítulo. A partir do capítulo IV apresentaremos algumas definições e resultados para obtenção do arcabouço teórico necessário para a demonstração do Teorema de Jordan-Brouwer-Alexander que ocorrerá no capítulo VIII. Estudaremos Formas Diferenciais, Variedades Diferenciáveis, Cohomologia de DeRham, Homotopias, Seqüência de Mayer-Vietoris e Vizinhanças Tubulares. Esses conceitos são necessários para entender a demonstração de Dold para o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander.

# Capítulo 1

## Curvas de Jordan

### 1.1 Notas Históricas

A noção curva plana fechada simples, isto é, uma curva sem extremos e sem pontos auto-intersecção é de simples entendimento até mesmo para as crianças.

O fato de uma curva fechada simples  $\Gamma$ , separar o plano em duas regiões disjuntas que tem  $\Gamma$  como fronteira também parece óbvio, não precisando de demonstração. Assim também pensavam os matemáticos até meados do século XIX. Segundo Kline (1972, p.282), apenas em 1865 C. Neumann chamou atenção para a necessidade de demonstração desta propriedade de "separação do plano". Apenas vinte e dois anos depois, em 1887, Camille Jordan, na primeira edição do seu *Cours d'Analyse* (1959, p.92) a demonstrou pela primeira vez.

Inicialmente poderemos dar o seguinte enunciado para o famoso *Teorema da Curva de Jordan*:

*Se  $\Gamma$  é uma curva fechada e simples em  $\mathbb{R}^2$ , então  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem exatamente duas componentes conexas que têm  $\Gamma$  como fronteira comum.*

Apesar do Teorema da Curva de Jordan ser um dos teoremas mais conhecidos de topologia, há muitos, mesmo entre matemáticos profissionais, que nunca leram sua demonstração.

Em sua prova, Jordan aproxima a curva plana  $\Gamma$  por polígonos simples e supondo o teorema válido para curvas poligonais simples demonstra o caso geral.

A demonstração de Jordan foi considerada errada por muitos matemáticos, tais como Courant & Robbins (1941, p.245), Newman (1954, p.205) e Kline (1972, p.282), que atribuíram a Oswald Veblen a primeira demonstração correta do Teorema da Curva de Jordan. Isto se deve a alegações de Veblen (1905, p.89), corroboradas

por notas de rodapé nos artigos de Alexander (1922, p.333). Na realidade, porém, o único defeito explicitamente apontado por Veblen é que Jordan admitiu seu teorema como válido para polígonos. Além disso, a demonstração de Veblen no caso de um polígono era incorreta, segundo foi apontado por H.Hahn (1908, p.289) e reconhecido pelo próprio Veblen (1913, p.65).

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1910, p.169) fez uma elegante demonstração do Teorema de Jordan e pouco depois provou o caso geral (1911, p.314) conhecido como Teorema de Jordan-Brouwer: *Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma hipersuperfície (superfície de dimensão  $n - 1$ ) conexa e compacta, então  $\mathbb{R}^n \setminus M = A \cup B$  é a reunião de dois abertos conexos disjuntos  $A$  e  $B$  que têm  $M$  como fronteira comum.*

Alexander, a partir de uma análise bem sucedida dos argumentos de Brouwer, reformulou e simplificou a demonstração do Teorema de Jordan usando métodos de homologia (ALEXANDER, 1920, p. 180). Dois anos depois Alexander publicou *A Proof and Extension of The Jordan-Brouwer Separation Theorem* (1922, p.333), no qual demonstrou o chamado Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander. Os Teoremas de Jordan e Jordan-Brouwer tornaram-se então casos particulares desse resultado.

## 1.2 Conceitos Iniciais

Como ocorre na maioria dos textos matemáticos vamos iniciar com algumas definições. Entretanto, a título de curiosidade, faremos uma comparação entre alguns conceitos iniciais que foram retirados do texto original *Cours d'Analyse* (JORDAN, 1959, p.92, tradução nossa) e os apresentados no livro *Geometria Diferencial das Curvas Planas* (ALENCAR, H.; SANTOS, W, 2003, p.15). Sempre que isto ocorrer indicaremos a data referente ao conceito apresentado.

### 1.2.1 Curvas Planas

**Definição 1.1.**

[1887 ] Uma **curva** está definida como a trajetória dada pelas posições sucessivas de um ponto móvel e será representada, em um deslocamento plano, por um sistema de duas equações

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t),$$

onde  $f$  e  $\varphi$  são funções da variável independente  $t$ , que se pode considerar como representando o tempo. Se estas funções são contínuas, a curva será dita **contínua**.

[2003 ] Uma **curva contínua** no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t) &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)).\end{aligned}$$

A aplicação  $\alpha$  é contínua, se cada função coordenada  $x, y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

### 1.2.2 Curvas Fechadas

**Definição 1.2.**

[1887 ] Suponha que  $t$  varia de um valor inicial  $t_0$  até um valor final  $T$ . Se os valores finais de  $x$  e  $y$ , coincidem com os valores iniciais, a curva será **fechada**.

[2003 ] Se  $\alpha$  está definida num intervalo  $I = [a, b]$ , então os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são chamados de ponto inicial e final, respectivamente. Se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , então  $\alpha$  é uma curva **fechada**.

### 1.2.3 Pontos Múltiplos

**Definição 1.3.**

[1887 ] De um modo geral, se  $x$  e  $y$  representam o mesmo sistema de valores, para vários valores diferentes de  $t$ , a curva passará vários vezes por um mesmo ponto, que chamaremos **ponto múltiplo**.

[2003 ] Uma curva  $\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples*, se a aplicação  $\alpha$  for injetiva. Quando temos  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ , com  $t_1, t_2 \in I$  e  $t_1 \neq t_2$  dizemos que  $\alpha$  possui um **ponto múltiplo** em  $t_1$  e  $t_2$ .

## 1.2.4 Curvas de Jordan

### Definição 1.4.

[1887 ] Considere uma curva fechada  $\Gamma$  contínua e sem ponto múltiplo, descrita ao variar  $t$  de  $t_0$  à  $t_0 + \omega$ . Ela será caracterizada por duas equações

$$x = F(t) \quad y = \Phi(t),$$

onde as funções  $F$  e  $\Phi$  são definidas de  $t_0$  à  $t_0 + \omega$ , e satisfazem as relações

$$F(t_0 + \omega) = F(t_0), \quad \Phi(t_0 + \omega) = \Phi(t_0).$$

A cada valor de  $t$  compreendido no intervalo corresponde um ponto diferente da curva, salvo os dois valores extremos  $t_0$  e  $t_0 + \omega$ , que correspondem ao mesmo ponto. Sejam  $f(t)$  e  $\varphi(t)$  duas funções, respectivamente, idênticas à  $F(t)$  e à  $\Phi(t)$  no intervalo de  $t_0$  à  $t_0 + \omega$  e definidas para os outros valores de  $t$  por meio das relações

$$f(t + \omega) = f(t), \quad \varphi(t + \omega) = \varphi(t).$$

As novas funções serão contínuas e as equações

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

onde  $t$  varia de  $-\infty$  à  $+\infty$ , representarão ainda a mesma curva anterior, descrita uma infinidade de vezes, de tal sorte que a cada ponto  $x, y$  da curva correspondem a uma infinidade de argumentos  $t$  diferentes entre seus de múltiplos de  $\omega$ .

[2003 ] Uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *periódica*, se existe um número real  $l > 0$ , tal que

$$\alpha(t + l) = \alpha(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O menor valor  $l = l_0$  para o qual a equação acima se verifica é chamado de *período* de  $\alpha$ . É claro que  $\alpha$  fica completamente determinada por sua restrição a um intervalo da forma  $[t_0, t_0 + l_0]$ . Uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *fechada e simples*, se  $\alpha(t) \neq \alpha(s)$  para  $t \neq s$ ,  $t, s \in [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Quando  $\alpha$  é uma curva fechada e simples, ela é denominada ***curva de Jordan***.

### 1.2.5 Curvas de Peano-Hilbert

Quando iniciamos o estudo das curvas de Jordan, costumamos ter em mente exemplos de círculos, elipses, polígonos regulares e congêneres. Temos consciência de que são exemplos deveras triviais, mesmo para época da publicação de Jordan.

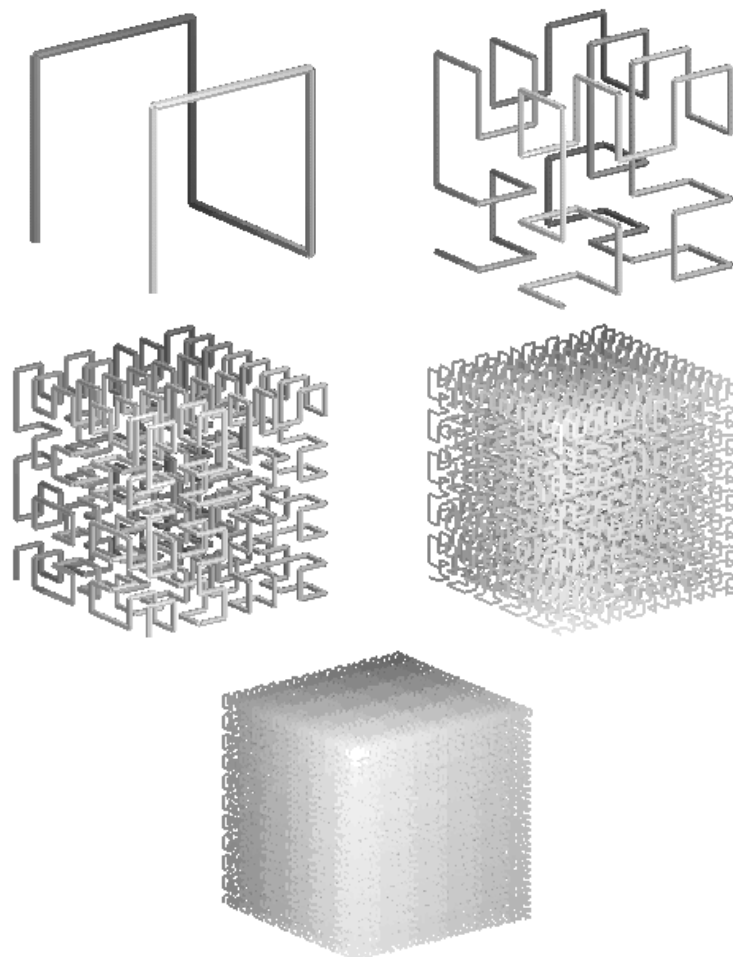


Figura 1.1: Curvas de Peano-Hilbert

No século XIX, Giuseppe Peano já estudava curvas cujos traços preenchem o espaço, *a posteriori* conhecidas como curvas de Peano. Outros pesquisadores, como David Hilbert, deram continuidade a pesquisa das curvas de preenchimento do espaço estendendo-as para espaços  $n$ -dimensionais. As curvas de Peano-Hilbert funcionam baseadas na partição do espaço, de forma contínua e única. Como cada partição é um subespaço similar ao original, a construção pode ser novamente aplicada a cada partição, gerando novas partições e assim sucessivamente.



O matemático E. Moore obteve uma construção similar, tomando-se inicialmente um quadrado, construiu uma curva, chamada **Curva de Moore**, cujo traço preenche  $[0, 1] \times [0, 1]$ , porém em cada etapa da construção, temos uma curva de Jordan. A figura a seguir mostra a quarta etapa da construção de Moore. (ALENCAR, H.; SANTOS, W, 2003, p.24)

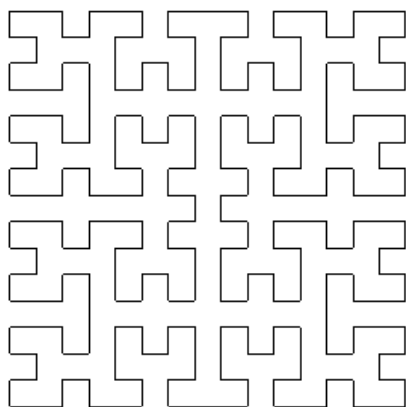


Figura 1.2: Quarta etapa da construção da curva de Moore.

A figura abaixo ilustra uma construção na qual, em cada etapa, temos uma curva de Jordan diferenciável.



Figura 1.3: Seqüência de curvas de Jordan diferenciáveis.

Observamos que as curvas de Jordan podem ter o traço muito diferente das nossas idéias iniciais e por isso poderemos cometer equívocos se não rompermos com estes pré-conceitos.

# Capítulo 2

## Teorema da Curva de Jordan

Neste capítulo vamos apresentar uma demonstração do Teorema de Jordan, baseada no artigo de Helge Tverberg (TVERBERG, 1980, p.34), na qual estão presentes muitos elementos da demonstração original de Jordan. A idéia principal da prova é aproximar a curva dada por polígonos, provar o teorema para estes e então passar ao limite. Esta é uma aproximação clássica.

No lema 2.1 provaremos o Teorema da Curva de Jordan para polígonos e no lema 2.2 vamos construir uma seqüência de polígonos de Jordan que convergirá a curva dada.

A função dos lemas 2.3 e 2.4 é quantificar certos aspectos do caso poligonal, para fazer o processo de limite funcionar. Curvas fechadas que não são de Jordan com “auto-intersecção” ou “percorridas uma vez em cada direção” também são limites de polígonos de Jordan . O objetivo dos lemas 2.3 e 2.4 é assegurar que o limite seja uma curva na qual estes dois casos não podem acontecer, ou seja, será realmente uma curva de Jordan.

### 2.1 O Teorema de Jordan para Polígonos

Nesta seção vamos considerar  $\Gamma$  uma curva de Jordan no plano, como sendo a imagem do círculo de unitário  $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ .

Vejamos que tal consideração não entra em confronto com a definição 1.4.

A curva de Jordan

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\cos t, \sin t) \\ \alpha(0) &= \alpha(2\pi)\end{aligned}$$

tem como traço o círculo unitário  $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$  descrito a partir do ponto  $(1, 0)$  no sentido anti-horário.

Seja  $\Gamma$  o traço de uma curva  $\zeta$  de Jordan no plano, isto é,

$$\begin{aligned}\zeta : [a, b] &\rightarrow \zeta([a, b]) = \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \\ t \neq s &\mapsto \zeta(t) \neq \zeta(s) \quad \forall t, s \in (a, b), \\ a \neq b &\mapsto \zeta(a) = \zeta(b).\end{aligned}$$

Usando, se necessário, uma bijeção contínua de  $[0, 2\pi]$  em  $[a, b]$  podemos, sem perda de generalidade, considerar

$$\begin{aligned}\zeta : [0, 2\pi] &\rightarrow \zeta([0, 2\pi]) = \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \\ t \neq s &\mapsto \zeta(t) \neq \zeta(s), \\ 0 \neq 2\pi &\mapsto \zeta(0) = \zeta(2\pi).\end{aligned}$$

A aplicação  $\gamma$ , definida<sup>1</sup> por

$$\begin{aligned}\gamma : S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \gamma(x, y) = \zeta \circ (\alpha|_{[0, 2\pi]})^{-1}(x, y),\end{aligned}$$

tem imagem  $\gamma(S^1) = \Gamma$

Além disso,  $\zeta(t) = \gamma(\cos t, \sin t) \quad \forall t \in [0, 2\pi)$  e  $\zeta(2\pi) = \zeta(0) = \gamma(\cos 0, \sin 0)$ .

Vamos substituir a definição 1.4 [2003] pela seguinte

**Definição 2.1.** Uma curva plana  $\Gamma$  é uma *curva de Jordan*, se existir uma aplicação contínua injetiva  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com imagem  $\gamma(S^1) = \Gamma$ .

---

<sup>1</sup>Nesta definição utilizamos  $(\alpha|_{[0, 2\pi]})^{-1}$  como sendo a inversa da função  $\alpha|_{[0, 2\pi]}$  que é uma bijeção de  $[0, 2\pi)$  em  $S^1$ .

Dentre as curvas de Jordan destacaremos os polígonos de Jordan.

**Definição 2.2.** Uma curva  $\Gamma$  de Jordan é um *polígono de Jordan* se  $\Gamma$  pode ser coberto por uma quantidade finita de arcos em cada um dos quais  $\gamma$  tem a forma:  $\gamma(cost, sent) = (\lambda t + \mu, \rho t + \sigma)$  com constantes  $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ .

**Lema 2.1. O Teorema de Jordan para polígonos**

Se  $\Gamma$  é um polígono de Jordan, então  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  é desconexo<sup>2</sup> e consiste em duas componentes, cuja fronteira comum é  $\Gamma$ .

**Demonstração.**

Sejam  $E_1, \dots, E_n$  os lados e  $v_1, \dots, v_n$  os vértices do polígono  $\Gamma$  com

$$E_i \cap E_{i+1} = v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (E_{n+1} = E_1, \quad v_{n+1} = v_1)$$

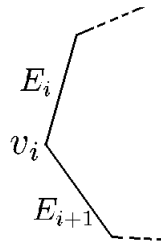


Figura 2.1: Ordenamento dos vértices e lados do polígono  $\Gamma$ .

Vamos dividir esta demonstração em três etapas:

- (i) Provar que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem no máximo duas componentes conexas.
- (ii) Provar que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem no mínimo duas componentes conexas.
- (iii) Provar que  $\Gamma$  é fronteira comum as duas componentes conexas.

---

<sup>2</sup>Usaremos a definição original na qual dois pontos estão no mesmo componente se, e só se, eles podem ser unidos por um caminho contínuo (imagem de  $[0, 1]$ ).

(i) Considere os conjuntos

$$N_i = \{ q \in \mathbb{R}^2 \mid d(q, E_i) < \delta \}, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde  $\delta = \inf\{d(E_i, E_j); 1 < |j - i| < n - 1\}$ . É fácil ver que

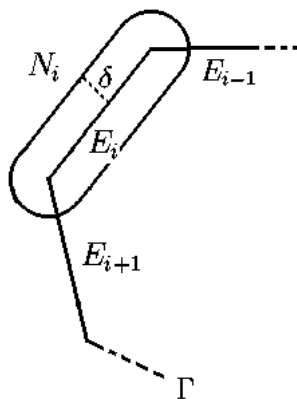


Figura 2.2:  $N_i \cap \Gamma \subset (E_{i-1} \cup E_i \cup E_{i+1})$ .

$$N_i \cap \Gamma \subset (E_{i-1} \cup E_i \cup E_{i+1}),$$

onde  $E_0 = E_n$ , e que  $N_i \setminus \Gamma$  consiste em duas componentes,  $N'_i$  e  $N''_i$ , tais que

$$N'_i \cap N'_{i+1} \neq \emptyset, \quad N''_i \cap N''_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto os conjuntos  $A = N'_1 \cup \dots \cup N'_n$  e  $B = N''_1 \cup \dots \cup N''_n$  são conjuntos conexos e para qualquer  $p$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  existe um segmento de reta, contido em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , conectando  $p$  a um deles. Logo  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem no máximo duas componentes conexas.

(ii) Para provarmos que há pelo menos duas componentes, consideraremos uma partição de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  em pontos pares e pontos ímpares e provaremos que não existe um caminho contínuo que conecta um ponto ímpar a um ponto par.

A partição é determinada como segue. Suponha o sistema de coordenada escolhido de tal modo que as abscissas dos vértices do polígono  $\Gamma$  sejam diferentes<sup>3</sup>, ou seja, se  $v_i = (x_i, y_i)$  e  $v_j = (x_j, y_j)$  são vértices distintos de  $\Gamma$  então  $x_i \neq x_j$ .

Para todo  $p = (x(p), y(p))$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , seja  $r_p$  a semi-reta com origem  $p$  e paralela a e com mesma orientação do eixo das ordenadas. Considere  $D_p = \Gamma \cap r_p$ . Note que,

<sup>3</sup>O que é equivalente a considerar que o eixo  $y$  não é paralelo a nenhum dos lados do polígono. Note que esta escolha é sempre possível, mesmo para uma seqüência de polígonos, pois o conjunto das posições de eixos ortonormais de origem fixa é não enumerável.

no máximo, existe um elemento de  $D_p$  que é um vértice de  $\Gamma$ , digamos  $v_i$ . Neste caso, diremos que  $v_i$  não é contável em relação a  $p$ , se  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  pertencem ao mesmo semi-plano determinado pela reta vertical que contém  $r_p$ . Caso contrário  $v_i$  será contável.

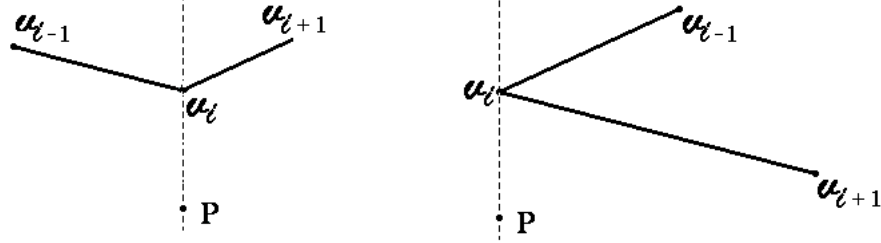


Figura 2.3:  $v_i$  contável (esquerda) e  $v_i$  não contável (direita).

Observe que:

Se  $(x_{i+1} - x_i)(x_{i-1} - x_i) > 0$ , então  $v_i$  não é contável.

Se  $(x_{i+1} - x_i)(x_{i-1} - x_i) < 0$ , então  $v_i$  é contável.

Defina a função<sup>4</sup>

$$m : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto m(p) = \text{Card}(D_p) - 1, \quad \text{se } D_p \text{ possui ponto não contável}$$

$$p \mapsto m(p) = \text{Card}(D_p), \quad \text{caso contrário.}$$

Assim  $m(p)$  é número de pontos nos quais a semi-reta  $r_p$  intersecta  $\Gamma$ , exceto possivelmente os vértices não contáveis.

Diremos que  $p$  é par ou ímpar se  $m(p)$  for par ou ímpar respectivamente. Diremos que  $p$  e  $q$  tem a mesma paridade se forem ambos pares ou ímpares.

Afirmção: Para todo  $p \in \mathbb{R}^2$  há um  $\varepsilon > 0$  tal que  $q$  tem a mesma paridade de  $p$  sempre que

$$q \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(p, \varepsilon) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, q) < \varepsilon\}. \quad (2.1)$$

Suponha provada a afirmação. Vamos verificar que, se  $\Pi = \pi([0, 1])$  é um caminho contínuo, dado por

$$\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

<sup>4</sup>onde  $\text{Card}(D_p)$  indica a cardinalidade do conjunto  $D_p$ .

então  $\pi(0)$  e  $\pi(1)$  têm a mesma paridade. Para fixar idéias, suponha que  $\pi(0)$  é ímpar.

Como  $\pi(t) \notin \Gamma$ . Vimos que, neste caso, existe um  $\varepsilon_t > 0$  tal que  $\pi(t)$  e  $q$  tem mesma paridade  $\forall q \in \mathcal{B}(\pi(t), \varepsilon_t)$ . Considere a cobertura aberta  $\mathcal{C} = \bigcup_{t \in [0,1]} \mathcal{B}(\pi(t), \varepsilon_t)$  de  $\Pi$ . Como  $\Pi$  é compacto, existe uma sub-cobertura finita  $\bar{\mathcal{C}} = \bigcup_{k=1}^{t_m} \mathcal{B}(\pi(t_k), \varepsilon_k)$  tal que  $\pi(0) \in \mathcal{B}(\pi(t_1), \varepsilon_1)$ ,  $\pi(1) \in \mathcal{B}(\pi(t_m), \varepsilon_m)$  e  $\mathcal{B}(\pi(t_i), \varepsilon_i) \cap \mathcal{B}(\pi(t_{i+1}), \varepsilon_{i+1}) \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i < m$  o que garante que todos têm a mesma paridade em particular  $\pi(1)$  também é ímpar. Logo os conjuntos dos pontos pares e dos pontos ímpares são conexos. Pelos ítems (i), (ii) podemos concluir que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  possui duas componentes conexas  $A$  e  $B$ .

Prova da afirmação: Com efeito, se  $x(p) \neq x_i$  para todo o  $i = 1, \dots, n$ , tome  $0 < \varepsilon < \inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  onde

$$0 < \varepsilon_1 < \inf \left\{ d(p, E_i), i \in 1, \dots, n \right\} \quad (2.2)$$

$$0 < \varepsilon_2 < \inf \left\{ d(x(p), x_i), i \in 1, \dots, n \right\} \quad (2.3)$$

e teremos  $m(q) = m(p) \quad \forall q \in \mathcal{B}$ .

Se  $x(p) = x_i$ , para algum  $i$ , então  $v_i \notin r_p$  ou  $v_i \in r_p$ , o que significa que  $v_i$  está abaixo ou acima de  $p$  respectivamente.

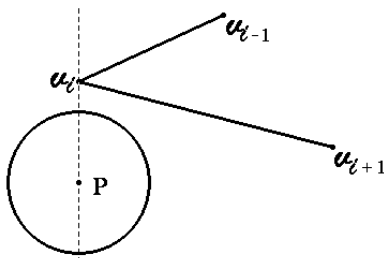


Figura 2.4:  $v_i$  não contável e  $v_i$  acima de  $p$ .

Se  $v_i$  está acima de  $p$  e  $v_i$  não for contável, então  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  estão no mesmo semi-plano determinado pela reta que contém  $r_p$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $x_i < x_{i-1}, x_{i+1}$ , (o que equivale a considerar  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  no semi-plano direito). Nesse caso, ao tomar  $0 < \varepsilon < \inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$  teremos  $m(q) = m(p)$  na metade esquerda da disco  $\mathcal{B}$ , isto é,  $\forall q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$  com  $x(q) \leq x_i$ .

Assim, se  $v_i$  está acima de  $p$ , com  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  ambos à esquerda (direita) de  $v_i$  teremos  $m(q) = m(p)$  no semi-disco direito (esquerdo) onde  $x(q) > x_i$  ( $x(q) < x_i$ ),

enquanto  $m(q) = m(p) + 2$  no resto do disco  $\mathcal{B}(p, \varepsilon)$ . De qualquer modo  $\forall q \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$ ,  $q$  tem a mesma paridade de  $p$ .

Se  $v_i$  está abaixo de  $p$  ou se  $v_i$  for contável podemos tomar  $0 < \varepsilon < \inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$  onde

$$0 < \varepsilon_3 < \inf \left\{ d(x(p), x_j), j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \right\} \quad (2.4)$$

teremos  $m(q) = m(p) \quad \forall q \in \mathcal{B}$ .

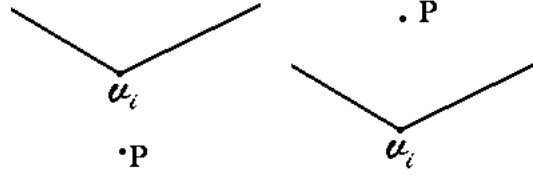


Figura 2.5:  $v_i$  contável e  $v_i$  abaixo de  $p$ .

(iii) Para provarmos  $\Gamma$  é fronteira comum às duas componentes conexas,  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , vamos utilizar a mesma notação utilizada para provar (ii). Seja  $\gamma \in \Gamma$ . Vamos mostrar que dado  $\varepsilon > 0$  existem pontos pares e pontos ímpares em  $\mathcal{B}(\gamma, \varepsilon)$ .

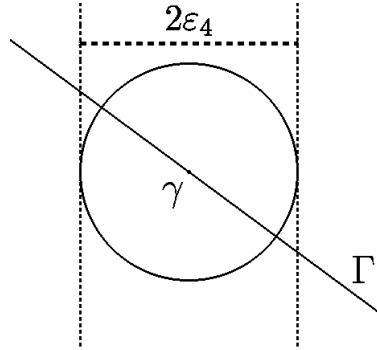


Figura 2.6:  $F = (x(\gamma) - \varepsilon_4, x(\gamma) + 2\varepsilon_4) \times \mathbb{R}$ .

Sejam  $x(\gamma), y(\gamma)$  a abscissa e a ordenada de  $\gamma$  respectivamente.

No caso em que  $\gamma$  não vértice de  $\Gamma$ , considere

$$\varepsilon_4 = \inf \{ |x(\gamma) - x(v_i)| \mid \forall v_i \text{ vértice de } \Gamma \} \quad (2.5)$$

como  $\gamma$  não é vértice e não há, pelo sistema de coordenadas escolhido no item (ii), lados paralelos ao eixo  $y$  então  $\varepsilon_4 > 0$ . Considere a faixa

$$F = (x(\gamma) - \varepsilon_4, x(\gamma) + \varepsilon_4) \times \mathbb{R},$$



temos que  $F$  intersecta apenas uma quantidade finita de lados de  $\Gamma$ . Sejam  $T_1, \dots, T_k$  tais interseções. Podemos supor que  $\gamma \in T_1$ .

Para  $\varepsilon_5 > 0$  com  $\varepsilon_5 < \inf \{ \varepsilon, \varepsilon_4, \inf \{ d(\gamma, T_j); 1 < j \leq k \} \}$  tem-se

$$m(q_1) = m(q_2) + 1 \quad (2.6)$$

onde

$$q_1 \in \{x(\gamma)\} \times (y(\gamma) - \varepsilon_5, y(\gamma)) \subset \mathcal{B}(\gamma, \varepsilon)$$

$$q_2 \in \{x(\gamma)\} \times (y(\gamma), y(\gamma) + \varepsilon_5) \subset \mathcal{B}(\gamma, \varepsilon).$$

Por (2.6),  $q_1, q_2 \in \mathcal{B}(\gamma, \varepsilon)$  tem paridades diferentes.

No caso em que  $\gamma$  é um vértice de  $\Gamma$ , basta observar que existe um  $\gamma' \in \mathcal{B}(\gamma, \varepsilon) \cap \Gamma$  o qual se aplica o caso anterior.

Como  $\varepsilon$  foi tomado arbitrário segue que  $\gamma$  é ponto de fronteira comum as duas componentes conexas,  $A$  e  $B$ , de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Como  $\gamma$  é um ponto qualquer de  $\Gamma$  concluímos que  $\Gamma \subset (\partial A \cap \partial B)$ . O conjunto  $\mathbb{R}^2$  pode ser escrito como a união disjunta  $\mathbb{R}^2 = A \sqcup \Gamma \sqcup B$  e como vimos na expressão 2.1 os conjuntos  $A$  e  $B$  são abertos então  $\Gamma = \partial A = \partial B$ .

■

**Corolário 2.1.** *Sejam  $\Gamma$  um polígono de Jordan e  $X$  uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Se  $S$  é uma corda<sup>5</sup> contida em  $X$  com exceção de seus pontos extremos, então  $X \setminus S$  consiste em duas componentes conexas.*

**Demonstração.** É fácil ver que  $\Gamma \setminus S = \Gamma' \cup \Gamma''$  e  $\Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$ . Basta aplicar o lema (2.1) para um dos polígonos de Jordan

$$\Gamma_1 = \Gamma' \cup S \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \Gamma'' \cup S.$$

■

**Lema 2.2.** *Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan. Dado um número real  $\varepsilon > 0$  qualquer existe um polígono de Jordan  $\Gamma'$  tal que*

$$|\gamma - \gamma'| < \varepsilon$$

---

<sup>5</sup>Dados dois pontos  $M$  e  $N$  de um polígono, o segmento de reta  $\overline{MN}$  é chamado uma corda deste polígono.

onde  $\gamma$  e  $\gamma'$  são parametrizações de  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  respectivamente.

Em outras palavras, toda curva de Jordan  $\Gamma$  pode ser aproximada arbitrariamente bem por um polígono  $\Gamma'$  de Jordan.

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$ , vamos construir  $\Gamma'$  tal que  $|\gamma - \gamma'| < \varepsilon$ , onde  $\gamma$  e  $\gamma'$  são parametrizações de  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  respectivamente.

Com efeito, primeiramente escolha  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$|p - q| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\gamma(p) - \gamma(q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.7)$$

e  $\varepsilon_2 > 0$  tal que

$$|\gamma(p) - \gamma(q)| < \varepsilon_2 \Rightarrow |p - q| < \inf\{\varepsilon_1, \sqrt{3}\}. \quad (2.8)$$

Isto sempre é possível pois toda bijeção contínua definida num compacto é um homeomorfismo sobre sua imagem (LIMA, 2000, p.45). Além disso,  $\gamma$  e  $\gamma^{-1}$  são uniformemente contínuas.

Para  $0 < \delta < \inf\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon_2\}$  temos que  $\Gamma$  intersecta só uma quantidade finita dos quadrados

$$Q_{k,l} = \left\{ (x, y) \mid \left| x - \frac{k\delta}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \quad \left| y - \frac{l\delta}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \right\}, \quad (k, l \text{ inteiros}).$$

Isto pode ser facilmente verificado se considerarmos uma cobertura aberta conveniente do compacto  $\Gamma$ .

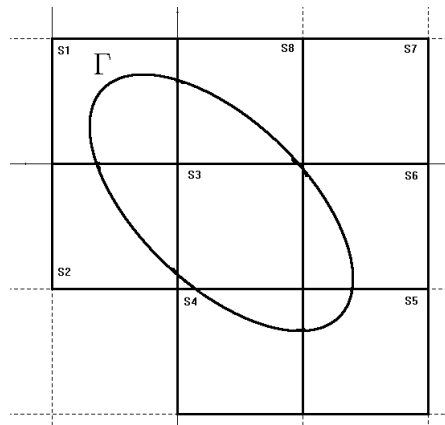


Figura 2.7: Sub-cobertura finita para  $\Gamma$ .

Sejam  $S_1, \dots, S_n$  tais intersecções. Como o diâmetro <sup>6</sup> de  $S_i$  é menor do que ou igual a  $\frac{\delta}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \delta < \varepsilon_2$ , temos por (2.8) que  $\gamma_1^{-1}(S_i)$  tem diâmetro menor que  $\sqrt{3}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Decorre da lei dos cossenos e pode ser observado na figura (2.6) que cada conjunto  $S_i$  está contido em um único arco  $A_i$  do círculo unitário com comprimento menor do que  $\frac{2\pi}{3}$ .

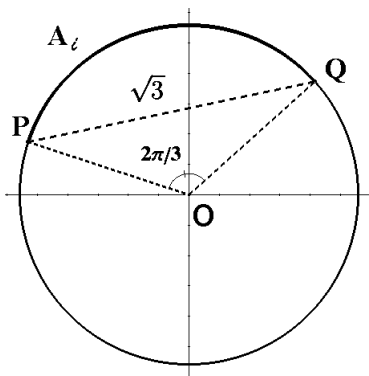


Figura 2.8: Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo POQ temos que  $A_i = P\hat{O}Q < \frac{2\pi}{3}$ .

Para construir  $\Gamma'$  primeiramente substitua  $\Gamma_0 = \Gamma$  por uma outra curva de Jordan  $\Gamma_1$ , pondo  $\gamma_1 = \gamma_0 (= \gamma)$  fora de  $A_1$  e  $\gamma_1(cost, sent) = (\lambda t + \mu, \rho t + \sigma)$  quando  $(cost, sent)$  é um ponto de  $A_1$ . Aqui  $\lambda, \mu, \rho$  e  $\sigma$  são escolhidos de forma que  $\gamma_1$  seja contínua. Note que para  $i \geq 2$ ,

$$\emptyset \subset \gamma_1^{-1}(S_i) \subset \gamma_0^{-1}(S_i),$$

podendo ocorrer  $\gamma_1^{-1}(S_i) = \emptyset$  para algum  $i \geq 2$ . Assim tem-se

$$0 \leq \text{diam}(\gamma_1^{-1}(S_i)) < \sqrt{3} \quad \forall i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

O próximo passo é retificar  $\gamma_1(A_2)$ , onde  $A_2$  é o menor arco que contém  $\gamma_1^{-1}(S_2)$ , usando um procedimento análogo ao anterior para obter  $\Gamma_2$  caso  $\gamma_1^{-1}(S_2) \neq \emptyset$ . Se  $\gamma_1^{-1}(S_2) = \emptyset$  ponha  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . E assim, sucessivamente, com uma quantidade finita de etapas, obtém-se um polígono de Jordan  $\Gamma_n$ .

Considere agora qualquer  $a$  para o qual  $\gamma_n(a) \neq \gamma(a)$ . Existe um  $i$  tal que

$$\gamma_n(a) = \gamma_i(a) \neq \gamma_{i-1}(a). \quad (2.9)$$

<sup>6</sup>Diâmetro de um conjunto limitado  $E$  está definido como  $\text{diam}(E) = \sup\{d(p, q) | \forall p, q \in E\}$ .

Por construção  $a$  pertence ao arco  $\gamma^{-1}(S_i)$  de extremos, digamos,  $b$  e  $c$  e com  $\text{diam}(S_i) < \delta$ . Além disso, na construção de  $\Gamma_i$ , tem-se  $\gamma_i(b) = \gamma(b)$  e  $\gamma_i(c) = \gamma(c)$ . Então

$$\begin{aligned}
|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &= |\gamma(a) - \gamma(b) + \gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \\
|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &\leq |\gamma(a) - \gamma(b)| + |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \\
|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &\leq |\gamma(a) - \gamma(b)| + \text{diam}(S_i) \\
|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &< |\gamma(a) - \gamma(b)| + \delta \\
|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &< |\gamma(a) - \gamma(b)| + \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Como

$$|\gamma(b) - \gamma(c)| \leq \delta < \varepsilon_2 \xrightarrow{2.8} |c - b| < \varepsilon_1$$

temos

$$|a - b| \leq |c - b| < \varepsilon_1 \xrightarrow{2.7} |\gamma(a) - \gamma(b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Substituindo em (\*) obtemos

$$|\gamma(a) - \gamma_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (2.10)$$

Logo,

$$\forall a \in S^1, \quad |\gamma(a) - \gamma_n(a)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\gamma - \gamma_n| < \varepsilon$$

Basta tomar então  $\Gamma' = \Gamma_n$ . ■

**Lema 2.3.** *Se  $\Gamma$  um polígono de Jordan, então existe um disco aberto contido na componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  cuja fronteira intersecta  $\Gamma$  em dois pontos<sup>7</sup>  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , com  $|a - b| \geq \sqrt{3}$ .*

**Demonstração.** Pelo lema 2.1 existe uma componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  a qual será denotada por  $X$ . Obviamente existem discos com centro em  $X$ , cuja fronteira

<sup>7</sup>Os pontos  $\gamma(a), \gamma(b)$  pertencem a  $\Gamma$  e portanto  $a, b \in S^1$

intersecta  $\Gamma$  em dois pontos. Pelo lema de Zorn<sup>8</sup>, obtemos um disco  $D$ , de raio  $R$  e com centro  $z \in X$ , cuja fronteira intersecta  $\Gamma$  em dois pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , com  $|a - b|$  maximal.

$$\vdash: |a - b| \geq \sqrt{3}$$

Suponha  $|a - b| < \sqrt{3}$ . Então  $a$  e  $b$  são pontos extremos de um arco  $A$  cujo comprimento maior do que  $\frac{4\pi}{3}$ .

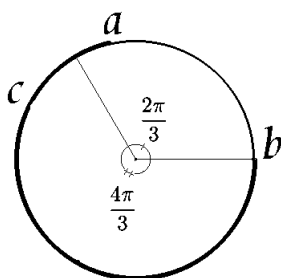


Figura 2.9: O arco  $A = \widehat{acb}$  tem comprimento superior a  $\frac{4\pi}{3}$ .

Note que a fronteira de  $D$  ( $\partial D$ ) não pode intersectar  $\gamma(A) \setminus \{\gamma(a), \gamma(b)\}$  pois

$$\forall c \in A \setminus \{a, b\} \text{ tem-se } |a - b| < \max\{|b - c|, |a - c|\}. \quad (2.11)$$

Vamos obter um outro disco  $D'$  com centro  $z' \in X$  que satisfaz a condição

$$\partial D' \cap \Gamma = \{\gamma(a'), \gamma(b')\} \quad \text{com} \quad |a' - b'| > |a - b| \quad (2.12)$$

e, portanto, chegar a uma contradição, visto que  $|a - b|$  é maximal, concluindo assim que

$$|a - b| \geq \sqrt{3}.$$

<sup>8</sup>Lema de Zorn - Definições relativas e enunciado: Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma relação binária  $\preceq$  em  $X$  é uma relação de ordem (parcial) em  $X$  e diz-se que  $X$  é um conjunto (parcialmente) ordenado (por  $\preceq$ ) se, para quaisquer  $x, y, z \in X$ , valem estas propriedades:

1.  $x \preceq x$ ;
2. se  $x \preceq y$  e  $y \preceq x$  então  $x = y$ ;
3. se  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$  então  $x \preceq z$ .

Um elemento  $x \in X$  é um limitante superior de um subconjunto  $Y \subset X$  se, para todo  $y \in Y$ , vale  $y \preceq x$ . Um subconjunto  $Y \subset X$  é uma cadeia ou está linearmente (ou totalmente) ordenado por  $\preceq$  se, para todos  $x, y \in Y$ , verifica-se que  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ . Um elemento  $x \in X$  é um elemento maximal de  $X$  se não existe  $y \in X$  distinto de  $x$  tal que  $x \preceq y$ . O Lema de Zorn enuncia-se: “Se toda cadeia de  $X$  tem um limitante superior (diz-se que  $X$  é indutivo ou indutivamente ordenado), então  $X$  tem um elemento maximal.”

Sejam  $\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_n)$  os vértices de  $\Gamma$  em  $\gamma(A)$ , indexados pela ordem obtida ao passar de  $\gamma(a)$  para  $\gamma(b)$ . Desta forma três situações podem ocorrer:

- (i)  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  não são vértices  $\Gamma$ ;
- (ii) Um deles é vértice e o outro não;
- (iii)  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são vértices  $\Gamma$ .

Em (i):

Se  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  não são vértices  $\Gamma$ , então  $v_1 \neq a$  e  $v_n \neq b$ . Neste caso  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  pertencem a lados do polígono  $\Gamma$ .

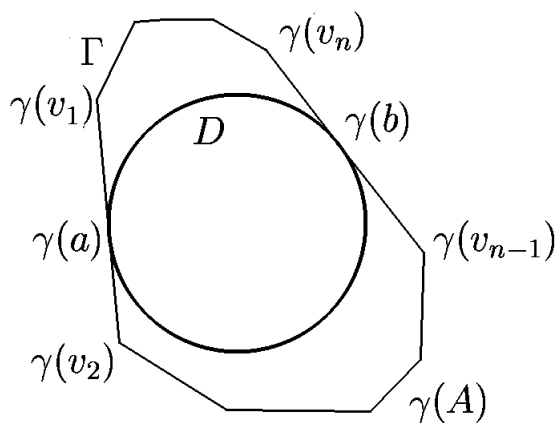


Figura 2.10: Exemplo do caso (i).

Considere o círculo que tangencia os segmentos  $\overline{\gamma(a)\gamma(v_1)}$  e  $\overline{\gamma(b)\gamma(v_n)}$  nos pontos  $\gamma(a')$  e  $\gamma(b')$ , suficientemente próximos a  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  respectivamente, de modo que

$$|a' - b'| > |a - b|$$

isso é possível porque  $\gamma$  é um homeomorfismo sobre sua imagem <sup>9</sup>. Como  $|a - b|$  é maximal chegamos a uma contradição.

Em (ii):

Se um deles é vértice e o outro não o é, podemos considerar, sem perda de generalidade,  $v_1 \neq a$  e  $v_n = b$ ; Considere o círculo que contém o vértice  $\gamma(b)$  e

<sup>9</sup>Visto na demonstração do lema 2.2

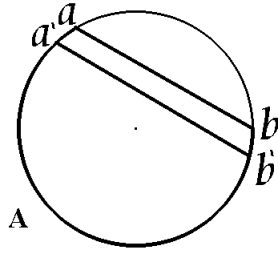


Figura 2.11: Vemos em  $S^1$  que  $|a' - b'| > |a - b|$ .

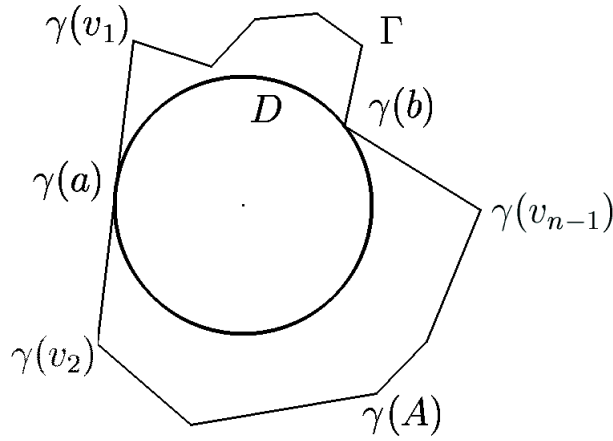


Figura 2.12: Exemplo do caso (ii).

tangencia  $\overline{\gamma(a)\gamma(v_1)}$  em um ponto  $\gamma(a')$ , suficientemente próximo a  $\gamma(a)$  de modo que

$$|a' - b| > |a - b|.$$

Analogamente obtemos uma contradição visto que  $|a - b|$  é maximal.

Em (iii):

Se  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são vértices  $\Gamma$ , então  $v_1 = a$  e  $v_n = b$ .

Se  $v_1 = a$  e  $v_n = b$ , considere as variações do círculo  $D$  que contém  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , com interior contido em  $X$  e cujo centro percorre o interior da região limitada<sup>10</sup> pelos raios de  $D$  que contém  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  respectivamente e por  $\gamma(A)$ .

Fazendo essa variação obteremos o círculo  $D'$  que eventualmente encontra  $\gamma(A)$  em pontos diferentes de  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ , o que daria uma contradição por 2.11 ou fica tangente a um dos segmentos  $\overline{\gamma(a)\gamma(v_2)}$  ou  $\overline{\gamma(b)\gamma(v_{n-1})}$  e a contradição seria obtida

<sup>10</sup>A região limitada existe pelo que vimos no lema 2.1.

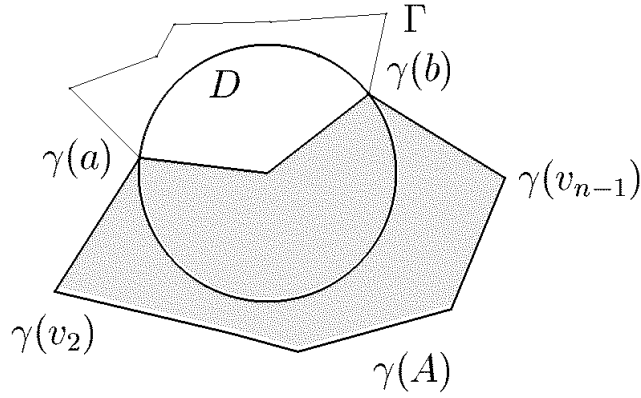


Figura 2.13: Exemplo do caso (iii).

de forma análoga ao item (ii).

Pelas contradições obtidas em (i), (ii), (iii) concluímos que

$$|a - b| \geq \sqrt{3}.$$

■

Na demonstração do próximo lema considere a seguinte notação: Dados dois pontos  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , vamos denotar o segmento de reta ligando esses pontos por  $[a, b]$ .

Considere um polígono de Jordan  $\Gamma$  e  $X$  uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

**Lema 2.4.** *Sejam  $p, q \in X$  com  $d(\Gamma, \{p, q\}) \geq \zeta$ . Suponha que para toda corda  $S$  de comprimento menor do que  $2\zeta$ ,  $p$  e  $q$  estão na mesma componente de  $X \setminus S$ . Então existe um caminho contínuo  $\Pi$  definido de  $p$  para  $q$  tal que  $d(\Pi, \Gamma) \geq \zeta$ .*

**Demonstração.** Sejam<sup>11</sup>  $u_p, u_q \in S^1$  tais que

$$|\gamma(u_p) - p| = \inf\{|\gamma(x) - p|, x \in S^1\} \quad (2.13)$$

e

$$|\gamma(u_q) - q| = \inf\{|\gamma(x) - q|, x \in S^1\} \quad (2.14)$$

ou seja,  $\gamma(u_p)$  e  $\gamma(u_q)$  são os pontos de  $\Gamma$  mais próximos de  $p$  e  $q$ , respectivamente.

<sup>11</sup>Como a função  $|\gamma(x) - p| : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida num compacto, existe  $u_p \in S^1$  que assume o valor mínimo para esta função.



Considere  $p' \in [p, \gamma(u_p)]$  e  $q' \in [q, \gamma(u_q)]$  tais que

$$d(p', \Gamma) = d(q', \Gamma) = \zeta. \quad (2.15)$$

Vamos obter um caminho contínuo  $\Pi'$  conectando  $p'$  a  $q'$  satisfazendo as condições do enunciado. O caminho contínuo  $\Pi$  definido de  $p$  para  $q$  tal que  $d(\Pi, \Gamma) \geq \zeta$  será dado por

$$\Pi = [p, p'] \cup \Pi' \cup [q', q] \quad (2.16)$$

concluindo assim a demonstração do lema (2.4).

Seja  $D$  um círculo de raio  $\zeta$  de centro  $c = p'$ . Note que  $D$  é tangente a  $\Gamma$  em  $\gamma(u_p)$ . O caminho contínuo  $\Pi'$  será dado pela curva cujo traço corresponda a trajetória do centro  $c$  de  $D$  obtida quando  $D$  “rolar” por  $\Gamma$  de sua posição inicial até que seu centro coincida com  $q'$ . As posições ocupadas por  $D$  estão contidas em  $X \cup \Gamma$ .

É possível que  $D$ , ao “rolar” por  $\Gamma$  não toque todos os pontos de  $\Gamma$  como podemos observar na figura abaixo

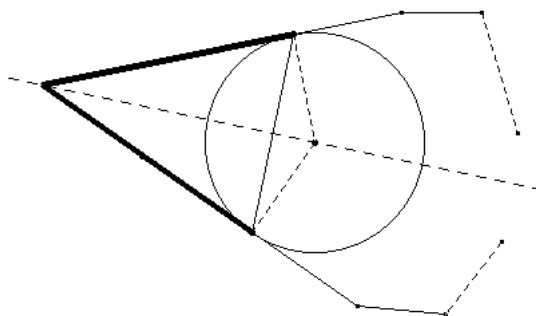


Figura 2.14: O círculo  $D$  pode não tocar todos os pontos de  $\Gamma$ .

Por isso é necessário conferir que  $D$  tangencia  $\Gamma$  em  $u_q$ . Vamos mostrar este fato por contradição.

Suponha que  $D$  não tangencia  $\Gamma$  em  $u_q$ , isto ocorre se, e somente se, para alguma posição de  $D$ ,  $\Gamma$  e  $D$  têm uma corda comum  $S = [\gamma(u_1)\gamma(u_2)]$  de comprimento menor do que  $2\zeta$ , de forma que  $X \setminus S$  consiste em duas componentes  $Y$  e  $Z$ . Mais ainda, caso  $c$  esteja na componente, digamos,  $Y$  então  $\gamma(u_q)$  estaria na fronteira da outra componente  $Z$ , em algum ponto de  $\Gamma$ , entre  $\gamma(u_1)$  e  $\gamma(u_2)$ . Por hipótese, como  $S$  tem comprimento menor do que  $2\zeta$  e  $d(c, \Gamma) = d(q', \Gamma) = \zeta$  concluímos que  $q'$  também está na componente  $Y$ .

Considere um círculo  $E$  de raio  $\zeta$  e centro  $q'$ . O segmento  $[q', \gamma(u_b)]$  é um raio de  $E$  que começa em  $Y$  e depois passa por  $Z$  até intersectar  $\Gamma$  em  $\gamma(u_b)$  consequentemente intersecta  $S$ .

Além disso  $\gamma(u_1), \gamma(u_2) \notin E$  pois do contrário  $d(q', \Gamma) < \zeta$ . Portanto  $E$  tem que intersectar  $S$  em dois pontos  $s_1$  e  $s_2$ , com

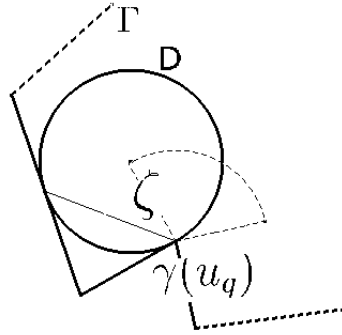
$$|q' - s_1| = |q' - s_2| = \zeta \quad (2.17)$$

Como  $q'$  e  $c$  estão do mesmo lado de  $S$ , na componente  $Y$ , o raio  $[q', \gamma(u_q)]$  deverá ter o extremo  $\gamma(u_q)$  sobre  $D$  ou com  $d(\gamma(u_q), c) < \zeta$  em qualquer dos casos teríamos uma contradição visto que  $d(c, \Gamma) = \zeta$ .

Mostramos que  $D$  tangencia  $\Gamma$  em  $u_q$  veremos agora que  $c$  também irá coincidir com  $q'$ .

Se  $\gamma(u_q)$  não é um vértice de  $\Gamma$ , então o segmento de reta  $[q', \gamma(u_q)]$  é perpendicular ao lado de  $\Gamma$  que contém  $\gamma(u_q)$  e como vimos há pouco  $D$  tangencia  $\Gamma$  em  $\gamma(u_q)$ , assim sendo  $c = q'$ .

Se  $\gamma(u_q)$  é um vértice de  $\Gamma$ , neste caso  $q'$  poderá estar em qualquer ponto do arco de circunferência de raio  $\zeta$  com centro  $\gamma(u_q)$  cujos extremos distam  $\zeta$  de  $\Gamma$ .



Neste caso seja  $\Pi'$  tem que ser complementado com o caminho descrito pela trajetória de  $c$  quando aplicamos sobre  $c$  uma rotação de centro  $\gamma(u_q)$  por um ângulo  $\widehat{c\gamma(u_q)q'}$ . Assim garantiremos que  $c$  irá coincidir com  $q'$ . Denotaremos por  $\Pi''$  o caminho obtido com essa complementação. Neste caso a expressão (2.16) pode ser substituída sem alteração conceitual por

$$\Pi = [p, p'] \cup \Pi'' \cup [q', q] \quad (2.18)$$

■

## 2.2 O Teorema de Jordan

**Teorema 2.1.** *Teorema de Jordan*

Se  $\Gamma$  uma curva de Jordan, então  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  consiste em duas componentes conexas, cuja fronteira comum é  $\Gamma$ .

**Demonstração.**

(i)  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem pelo menos duas componentes conexas.

Há uma componente ilimitada. Para provar a existência de uma componente limitada observe que como  $\Gamma$  é compacto então é limitado e portanto existe um círculo  $C_0$  ao redor de  $\Gamma$ .

Pelo lema (2.2), existe uma seqüência de polígonos de Jordan que converge a  $\Gamma$ . Seja  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tal seqüência.

Para cada  $\Gamma_n$  há um círculo  $C_n$  dado pelo lema (2.3), de centro  $z_n$  e contendo pontos  $\gamma_n(a_n)$  e  $\gamma_n(b_n)$ , com  $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$ . Passando a uma subsequência da original, se necessário, podemos supor que todos os  $\Gamma_n$  são limitados por  $C_0$  e que  $z_n \rightarrow z$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Seja  $\varepsilon = \inf \{ |\gamma(a) - \gamma(b)|, \forall a, b \in S^1 \text{ tais que } |a - b| \geq \sqrt{3} \}$ . Como  $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$  então  $|\gamma(a_n) - \gamma(b_n)| \geq \varepsilon$  e assim

$$|\gamma(a_n) - \gamma(b_n)| > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.19)$$

Logo o diâmetro de  $C_n$  é maior do que  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $\gamma(a_n)$ ,  $\gamma(b_n)$  são, pelo lema 2.3, os únicos pontos de  $C_n \cap \Gamma_n$  e o interior de  $(C_n)$  está contido na região limitada de  $\Gamma_n$ , obtemos que a distância entre  $z_n$  e  $\Gamma_n$  é no mínimo igual ao raio de  $C_n$ . Daí

$$d(z_n, \Gamma_n) > \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.20)$$

Como  $z_n \rightarrow z$ , existe um  $n_1$  tal que  $\forall n > n_1$  tem-se

$$d(z, z_n) < \frac{\varepsilon}{16}. \quad (2.21)$$

Assim, por (2.20) e (2.21), para  $n > n_1$ ,  $\mathcal{B}(z, \frac{\varepsilon}{16}) \subset \mathcal{B}(z_n, \frac{\varepsilon}{4})$  e, obtemos que a distância de  $z$  a  $\Gamma_n$  será maior do que  $\frac{\varepsilon}{8}$ .

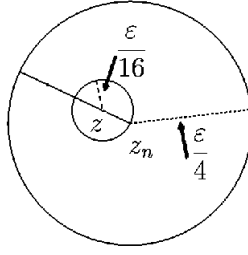


Figura 2.15:  $\mathcal{B}(z, \frac{\varepsilon}{16}) \subset \mathcal{B}(z_n, \frac{\varepsilon}{4})$

Como  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge a  $\Gamma$ , existe um  $n_2$  tal que  $\forall n > n_2$  tem-se

$$d(\Gamma_n, \Gamma) < \frac{\varepsilon}{16}. \quad (2.22)$$

Assim para todo  $n > N_1$ , onde  $N_1 = \max\{n_1, n_2\}$  temos que  $z$  e  $z_n$  estão na mesma componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$  e de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Suponha que  $z$  esteja na componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Então existe um caminho contínuo  $\Pi$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  que conecta  $z$  a um ponto fora de  $C_0$ . Seja  $\zeta = d(\Pi, \Gamma)$ , existe um  $n_3$  tal que  $\forall n > n_3$  então  $|\gamma_n - \gamma| < \frac{\zeta}{2}$  de forma que

$$d(\Pi, \Gamma_n) > \frac{\zeta}{2} \quad (2.23)$$

Seja  $N = \max\{n_3, N_1\}$ . Para todo  $n > N$ ,  $z$  e  $z_n$  estão na componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Isto contradiz a definição de  $z_n$ . Logo  $z$  está na componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  e, portanto, há em pelo menos duas componentes em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

(ii)  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem no máximo duas componentes conexas.

De fato, suponha  $p, q$  e  $r$  sejam pontos de três componentes distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Seja

$$\varepsilon = d(\Gamma, \{p, q, r\}). \quad (2.24)$$

Se  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  é uma seqüência de polígonos de Jordan que converge a  $\Gamma$ , então existe  $m_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > m_1$ ,

$$d(\Gamma_n, \{p, q, r\}) \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.25)$$

e, pelo lema 2.1, dois dos três pontos têm que estar na mesma componente  $X_n$  de

$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$ . Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $p$  e  $q$  estão em  $X_n$  para todo  $n$ .

Suponha que exista  $\zeta \in (0, \varepsilon)$  para o qual há uma subsequência  $(\Gamma_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ , tal que, para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ , exista um caminho contínuo  $\Pi_{n_k}$ , que conecta  $p$  a  $q$  com

$$d(\Gamma_{n_k}, \Pi_{n_k}) \geq \zeta.$$

A subsequência  $(\Gamma_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  também converge para  $\Gamma$  por isso existe um  $k_0$  tal que, para todo  $k > k_0$ ,

$$d(\Gamma, \Gamma_{n_k}) < \frac{\zeta}{2}. \quad (2.26)$$

Daí

$$d(\Gamma, \Pi_{n_k}) > \frac{\zeta}{2}, \quad (2.27)$$

consequentemente  $p$  e  $q$  estariam na mesma componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Contradição. Portanto não existe tal  $\zeta$ .

A não existência de  $\zeta$  produz, pela contra-positiva do lema 2.4, uma seqüência de cordas  $S_1, S_2, \dots$ , e uma seqüência crescente de índices  $n(1), n(2), \dots$ , tais que

- (1)  $p$  e  $q$  estão em componentes diferentes de  $X_{n(i)} \setminus S_i$ .
- (2) quando  $i \rightarrow \infty$ ,  $|\gamma_{n(i)}(a_i) - \gamma_{n(i)}(b_i)| \rightarrow 0$ , onde  $\gamma_{n(i)}(a_i)$  e  $\gamma_{n(i)}(b_i)$  são os pontos extremos de  $S_i$ .

Por (2) e pelo fato de  $\gamma$  ser um homeomorfismo quando  $i \rightarrow \infty$ ,

$$|a_i - b_i| \rightarrow 0.$$

Desta forma, sem perda de generalidade, para infinitos valores de  $i$ , o ponto  $p$  pertence a componente de  $X_{n(i)} \setminus S_i$  limitada por  $S_i$  e  $\gamma_{n(i)}(A_i)$ , onde  $A_i$  é o menor arco  $C$  com pontos extremos  $a_i$  e  $b_i$ .

Como  $|a_i - b_i| \rightarrow 0$  temos  $diam(\gamma_{n(i)}(A_i)) \rightarrow 0$ , de forma que existe  $i_0$  tal que o diâmetro da componente há pouco definida é menor do que  $\varepsilon$  para todo  $i > i_0$ . Em particular temos

$$|p - \gamma(a_i)| < \varepsilon,$$

o que é uma contradição por (2.24). Com essa contradição terminamos a prova de que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  tem no máximo duas componentes conexas.

Por (i) e (ii) podemos concluir que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  possui duas componentes conexas.

(iii)  $\Gamma$  é fronteira comum das duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  respectivamente as componentes limitada e ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Considere uma seqüência  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de polígonos de Jordan que converge a  $\Gamma$  e  $X_n$  e  $Y_n$ , respectivamente, as componentes limitada e ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$ .

Para cada  $\gamma \in \Gamma$  existe uma seqüência de pontos  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  na qual  $\gamma_n \in \Gamma_n$  e  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ .

Se existir  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_{K+1} = \gamma$ , então para todo  $n > K$  tem-se  $\gamma_n = \gamma$ . Portanto, para todo  $n > K$ ,  $\gamma$  é ponto de fronteira de  $X_n$  e  $Y_n$ , logo existem seqüências

$$(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}^*} \subset X \cap X_n \quad \text{e} \quad (y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}^*} \subset Y \cap Y_n$$

que convergem a  $\gamma_n = \gamma$ , donde  $\gamma$  é ponto de fronteira de  $X$  e  $Y$ .

Se  $\gamma_n \neq \gamma$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , então para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  podemos escolher pontos  $x_n \in X \cap X_n$  e  $y_n \in Y \cap Y_n$  tais que

$$|x_n - \gamma| < 2|\gamma - \gamma_n| \tag{2.28}$$

$$|y_n - \gamma| < 2|\gamma - \gamma_n| \tag{2.29}$$

Como  $|\gamma - \gamma_n| \rightarrow 0$ , temos por (2.28) e (2.29) que as seqüências  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergem a  $\gamma$ , donde  $\gamma$  é ponto de fronteira de  $X$  e  $Y$ .

■

# Capítulo 3

## Formas e Variedades

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos que serão utilizados para definir a cohomologia de deRham. Definiremos formas lineares, dual algébrico, variedades diferenciáveis, formas diferenciáveis em uma variedade. Sua leitura é necessária caso o leitor não esteja familiarizado com estes conceitos ou queira lembrá-los.

De agora em diante, salvo em menção em contrário, vamos considerar  $r$  e  $n$  números inteiros positivos.

### 3.1 Dual Algébrico

No cálculo consideramos funções reais definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são também conhecidas como aplicações do seu domínio em  $\mathbb{R}$ .

Quando temos aplicações entre espaços vetoriais normados elas são denominadas *operadores*. Há um interesse especial pelos operadores que “preservam” as duas operações algébricas do espaço vetorial, no sentido dado pela definição abaixo.

**Definição 3.1.** Sejam  $E, F$  dois espaços vetoriais normados sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que o operador

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto T(v) \end{aligned}$$

é um *operador linear*, se  $\forall v, u \in E$  e  $k \in \mathbb{K}$ :

(i)  $T(v + u) = T(v) + T(u)$

$$(ii) \quad T(kv) = kT(v).$$

Um *funcional* é um operador com domínio em um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{K}$ . Neste texto teremos sempre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Em particular, um funcional linear é um operador linear.

O conjunto dos funcionais lineares definidos em um espaço vetorial normado  $E$  definido sobre  $\mathbb{R}$  munido das operações de adição:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

e produto por escalar

$$(kf_1)(x) = kf_1(x), \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

forma um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , denotado por  $L(E, \mathbb{R})$ .

**Definição 3.2.** Seja  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ . O *dual algébrico* de  $E$ , denotado por  $E^*$ , é o espaço vetorial dos funcionais lineares de  $E$  em  $\mathbb{R}$ .

$$E^* = L(E, \mathbb{R}).$$

**Lema 3.1.** *Sejam  $E$  é um espaço vetorial normado de dimensão  $n$  sobre  $\mathbb{R}$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $E$ . Então o conjunto  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset E^*$ , dado por<sup>1</sup>*

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.1)$$

*é uma base para  $E^*$ , chamada base dual da base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para  $E$  e*

$$\dim E^* = \dim E.$$

**Demonstração.** Essa demonstração, baseada na apresentada em (KREYSZIG, 1978, p.114), será feita em duas etapas:

- (i)  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é um conjunto linearmente independente.
- (ii) Todo funcional linear  $f \in E^*$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos de  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

---

<sup>1</sup>O chamado delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ , é igual a 1 se  $i = j$  e igual a zero se  $i \neq j$ .



(i) Se

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(v) = 0, \quad \forall v \in E. \quad (3.2)$$

então, em particular, para  $v = e_i$  temos

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(e_i) = \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_{ik} = \beta_i = 0.$$

Daí,  $\beta_k = 0 \forall k$ . Logo o conjunto  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é linearmente independente.

(ii) Para todo  $v \in E$ , existe uma representação única para  $v$  dada por

$$v = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \quad \xi_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k.$$

Para todo funcional linear  $f \in E^*$  temos

$$f(v) = f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k,$$

onde  $f(e_k) = \alpha_k, \quad \forall k$ .

Assim, para todo  $v \in E$ ,

$$f(v) = \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k, \quad (3.3)$$

Por outro lado, por (3.1)

$$f_i(v) = f_i(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

Por (3.3) e (3.4) obtemos uma representação do funcional  $f$  como combinação linear dos funcionais  $f_1, \dots, f_n$

$$f(v) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(v), \quad (3.5)$$

de modo único pelos valores que  $f$  assume nos  $n$  vetores da base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . ■

## 3.2 Formas

### 3.2.1 Formas $r$ -Lineares

**Definição 3.3.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão  $n$ . Uma *forma  $r$ -linear* em  $E$  é uma função

$$f : E^r = E \times \dots \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

que é linear em cada uma de suas variáveis, isto é, para todo número inteiro positivo  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , tem-se:

$$(i) \quad f(v_1, \dots, \alpha \cdot v_i, \dots, v_r) = \alpha \cdot f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad f(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r)$$

$$\forall \quad v'_i, v_i \in E.$$

Quando  $r = 1$ , uma forma 1 – *linear*  $f$  também será chamada simplesmente *forma linear*.

### Tensor de Ordem $r$

Alguns autores utilizam o termo *tensor de ordem  $r$*  no sentido apresentado neste texto a formas  $r$ -lineares, vide (SPIVAK,2003, p.85).

### 3.2.2 O Espaço Vetorial das Formas $r$ -Lineares

Seja  $E$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . O espaço vetorial das formas  $r$ –lineares em  $E$  será denotado por

$$\mathcal{L}_r(E) = (E^r)^* = L(E^r, \mathbb{R}).$$

### Produto Tensorial

Dadas uma forma  $r$ -linear  $S$  e forma  $k$ -linear  $T$ , define-se o *produto tensorial* de  $S$  por  $T$  como sendo a forma  $(r + k)$ -linear  $S \oplus T$  dada por:

$$S \oplus T(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+k}) = S(v_1, \dots, v_r) \cdot T(v_{r+1}, \dots, v_{r+k}).$$

O produto tensorial não é comutativo. Entretanto, ele é associativo e distributivo com relação a adição (GUILLEMIN, V.; POLLACK, A., 1974, p. 154).

Dadas  $f_1, \dots, f_r \in E^* = \mathcal{L}_1(E)$ , o produto tensorial destas  $r$  formas lineares,  $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_r$  é a forma  $r$ -linear

$$f(v_1, \dots, v_r) = f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_r(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) \cdot \dots \cdot f_r(v_r)$$

onde  $v_k \in E, \forall k$ .

A operação  $\otimes$  permite expressar os espaços vetoriais  $\mathcal{L}_r(E)$  em termos de  $\mathcal{L}_1(E)$  (SPIVAK, 2003, p.85).

**Lema 3.2.** *Sejam  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $E$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  a base dual, isto é,  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ . Tem-se então que o conjunto de todos os produtos tensoriais de ordem  $r$*

$$f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_r}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$$

forma uma base para  $\mathcal{L}_r(E)$ .

**Demonstração.** Observando que

$$\begin{aligned} f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) &= \delta_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i_r j_r} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } j_1 = i_1, \dots, j_r = i_r \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}, \end{aligned}$$

verifica-se que dados  $r$  vetores  $v_1, \dots, v_r \in E$ , para os quais

$$v_i = \sum_{k=1}^n \xi_{ik} e_k, \quad \forall k, \quad \xi_{ik} \in \mathbb{R},$$

e  $f \in \mathcal{L}_r(E)$  tem-se

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_r) &= \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n \xi_{1k_1} \cdot \dots \cdot \xi_{rk_r} f(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_r}(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Portanto,  $f = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r}$  e, conseqüentemente os produtos tensoriais  $f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r}$  geram  $\mathcal{L}_r(E)$ .

Resta mostrar que o conjunto  $f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r}$ , com  $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$  é linearmente independente. Suponhamos agora a existência de números  $\xi_{i_1, \dots, i_r}$  tais que

$$\sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \xi_{i_1, \dots, i_r} \cdot f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r} = 0.$$

Se aplicarmos ambos os membros dessa expressão a  $(e_{k_1}, \dots, e_{k_r})$ , obteremos  $\xi_{k_1, \dots, k_r} = 0$  e, portanto,  $f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r}$  são linearmente independentes. ■

Com isso obtemos o seguinte resultado

**Corolário 3.1.** *Se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , então  $\mathcal{L}_r(E)$  tem dimensão  $n^r$*

**Demonstração.** Pelo lema 3.2 o conjunto de todos os produtos tensoriais de ordem  $r$ ,  $f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_r}$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ , gera  $\mathcal{L}_r(E)$ . Defina  $\Theta$  como o conjunto das seqüências com  $r$  elementos nas quais cada termo pertence a base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ .

Há uma bijeção óbvia que associa cada  $\theta = (j_1, \dots, j_r)$  ao produto tensorial  $f_{j_1} \oplus \dots \oplus f_{j_r}$ .

Como a cardinalidade de  $\Theta$  é igual a  $n^r$  então  $\mathcal{L}_r(E)$  tem dimensão  $n^r$ . ■

Em particular para  $r = 1$ , o dual algébrico de  $E$ ,  $E^* = \mathcal{L}_1(E) = L(E, \mathbb{R})$ , tem dimensão  $n$ .

### 3.2.3 O Espaço Vetorial das Formas $r$ -Lineares Alternadas

Considere ao longo desta seção  $E$  como um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . Um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}_r(E)$  muito importante é o espaço vetorial das formas  $r$ -lineares alternadas.

**Definição 3.4.** Uma forma  $r$ -linear  $f$  se chama *alternada*, se  $f(v_1, \dots, v_r) = 0$  sempre que existam  $i \neq j$  com  $v_i = v_j$

As formas  $r$ -lineares alternadas também são conhecidas como formas lineares alternadas de grau  $r$ .

O espaço vetorial das formas  $r$ -lineares alternadas em  $E$  será denotado por  $\Lambda^r(E)$ . Por definição, se  $r = 0$  então  $\Lambda^0(E) = \mathbb{R}$ .

Pela definição 3.4, se  $f$  é uma forma linear alternada então

$$f(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

Uma forma é alternada se, e somente se, é *anti-simétrica*, isto é, muda o sinal quando são trocados dois vetores no argumento. De fato,

$$\begin{aligned} f(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + f(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) &= -f(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \end{aligned}$$

O conceito de produto tensorial formas  $r$ -lineares foi utilizado para obter uma base para  $\mathcal{L}_r(E)$ . O conceito de produto exterior, cuja definição é dada a seguir, será utilizado para obtermos uma base para o espaço vetorial das formas  $r$ -lineares alternadas.

### Produto Exterior de Formas Lineares

**Definição 3.5.** O *produto exterior* de  $r$  formas lineares  $f_1, \dots, f_r$  denotado por  $f := f_1 \wedge \dots \wedge f_r$  é assim definido:

$$f(v_1, \dots, v_r) := \det[f_i(v_j)] = \det \begin{pmatrix} f_1(v_1) & \dots & f_1(v_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r(v_1) & \dots & f_r(v_r) \end{pmatrix}.$$

Decorre das propriedades de determinante que  $f_1 \wedge \dots \wedge f_r$  é de fato  $r$ -linear e alternada.

O lema abaixo, que pode ser visto em (LIMA, 2000, p.403), será utilizado para na construção de uma base para o espaço vetorial das formas  $r$ -lineares alternadas.

**Lema 3.3.** *Sejam*

$$f, g : E^r = E \times \dots \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

aplicações  $r$ -lineares alternadas e  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $E$ . Se, para toda seqüência crescente  $i_1 < \dots < i_r$  com  $r$  inteiros compreendidos entre 1 e  $n$ , tivermos

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}),$$

então  $f \equiv g$ .

**Demonstração.** Seja  $(j_1, \dots, j_r)$  uma lista qualquer de inteiros compreendidos entre 1 e  $n$ , com  $r$  elementos. Se houver repetição de elementos nesta lista então

$$f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0 = g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$$

pois  $f$  e  $g$  são alternadas. Vamos supor que não haja elementos repetidos na lista. Por meio de sucessivas transposições<sup>2</sup> podemos dispor os números  $j_1, \dots, j_r$  em ordem crescente  $i_1 < \dots < i_r$ . Se forem necessárias  $k$  transposições, a anti-simetria de  $f$  e  $g$ , assegura que

$$\begin{aligned} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) &= (-1)^k f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= (-1)^k g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \end{aligned}$$

Como  $f$  e  $g$  são  $r$ -lineares, estão bem determinadas pelos seus valores em  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ , logo  $f \equiv g$ . ■

Nos próximos lemas vamos utilizar as seguintes notações:

1. Para representar um lista  $I$ , com  $r$  elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  escritos em ordem crescente denotaremos

$$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$$

2. O conjunto das listas com  $r$  elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  escritos em ordem crescente será representado por

$$\Phi_n(r) = \left\{ I \mid I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

---

<sup>2</sup>Uma transposição corresponde a troca de posição entre dois elementos.

Se  $r > n$  então  $\Phi_n(r) = \emptyset$  pois só é possível formar seqüências com essa propriedade se  $r \leq n$  e neste caso a cardinalidade do conjunto  $\Phi_n(r)$  é igual ao número de subconjuntos de  $r$  elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  que é

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}.$$

3. Dados os vetores  $v_1, \dots, v_r \in E$  com  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ , para  $j = 1, \dots, r$  onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  constitui uma base para  $E$ , indicaremos a matriz na qual os vetores cujas  $r$  colunas são os vetores  $v_1, \dots, v_r$ , são descritos base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  por

$$a = (a_{ij})_{n \times r} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

**Lema 3.4.** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base para  $E$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é a base dual dada por (3.1),  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\} \in \Phi_r(n)$  e  $f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} \in \Lambda^r(E)$ , então

$$f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \begin{cases} 1 & \text{se } I = J \\ 0 & \text{se } I \neq J. \end{cases}$$

**Demonstração.**

Com efeito, seja  $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\} \in \Phi_r(n)$ . Temos

$$f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} = f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \det[f_{i_k}(e_{j_t})] = \det \begin{pmatrix} f_{i_1}(v_{j_1}) & \dots & f_{i_1}(v_{j_r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_r}(v_{j_1}) & \dots & f_{i_r}(v_{j_r}) \end{pmatrix}.$$

Se  $I \neq J$  então existe  $i_k \in I \setminus J$ , logo

$$f_{i_k}(e_{j_t}) = 0, \quad \forall t = 1, \dots, r.$$

Daí, como o determinante de uma matriz cuja  $t$ -ésima linha é nula é zero temos

$$f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0.$$

Por outro lado, se  $I = J$ , então

$$f_{i_k}(e_{j_t}) = \delta_{i_k j_t} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_k = j_t \\ 0 & \text{se } i_k \neq j_t. \end{cases}$$

Daí, como o determinante de uma matriz identidade é igual a 1, temos

$$f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = f_J(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 1.$$

■

**Lema 3.5.** *Seja  $B = \{f_1, \dots, f_n\}$  uma base para  $E^*$ . O conjunto*

$$\Upsilon = \left\{ f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} \mid I \in \Phi_n(r) \right\}$$

*constitui uma base para  $\Lambda^r(E)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $f \in \Lambda^r(E)$  e  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E$  uma base dual de  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , isto é,  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ .

Para cada  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$  façamos  $\alpha_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ , com  $e_{i_k} \in \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall k = 1, \dots, r$ .

A forma  $r$ -linear

$$g = \sum_{I \in \Upsilon} \alpha_I f_I$$

é tal que, para toda seqüência crescente  $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\} \in \Phi_n(r)$ ,

$$\begin{aligned} g(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) &= \sum_I \alpha_I f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \\ &= \alpha_J \\ &= f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}). \end{aligned}$$

Segue, pelo lema (3.3), que  $f = g$  e, portanto,

$$f = \sum_I \alpha_I f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

Com isto mostramos que o conjunto das formas  $r$ -lineares

$$\Upsilon = \left\{ f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r} \mid I \in \Phi_n(r) \right\}$$

gera  $\Lambda^r(E)$ .

Além disso, tais formas são linearmente independentes, pois, da combinação linear  $\sum_{I \in \Upsilon} \alpha_I f_I = 0$ , segue que, para todo  $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\} \in \Phi_n(r)$



$$\sum_{I \in \mathcal{Y}} \alpha_I f_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \alpha_J f_J(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \alpha_J = 0.$$

■

O resultado que acabamos de provar permite calcular dimensão de  $\Lambda^r(E)$ .

**Corolário 3.2.** *Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Se  $0 < r \leq n$  então a dimensão de  $\Lambda^r(E)$  é*

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}.$$

**Lema 3.6.** *Se  $r > n$  então  $\Lambda^r(E) = \{0\}$ .*

**Demonstração.** Como  $r > n$ , qualquer conjunto com  $r$  elementos  $V = \{v_1, \dots, v_r\} \subset E$  é linearmente dependente em  $E$ . Assim temos que um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais, por exemplo,

$$v_r = \sum_{k=1}^{r-1} a_k v_k, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1, \dots, r-1$$

então dada  $f \in \Lambda^r(E)$

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_r) &= f(v_1, \dots, \sum_{k=1}^{r-1} a_k v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} a_k f(v_1, \dots, v_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois  $f$  é alternada. Dado  $v \in E^r$ ,  $v = (v_1, \dots, v_r)$ , toda forma  $r$ -linear alternada  $f \in \Lambda^r(E)$  é tal que e tem-se  $f(v_1, \dots, v_r) = 0$ , segue que

$$\Lambda^r(E) = \{0\}.$$

■

Decorre do corolário 3.2 que no caso particular em que  $r = n$  teremos  $\dim \Lambda^r(E) = 1$ . Assim podemos concluir que, a menos de uma constante, existe somente uma forma alternada de grau  $n$  em um espaço vetorial de dimensão  $n$ .

**Lema 3.7.** *Seja  $\{f_1, \dots, f_n\}$  uma base para  $E^*$ . Se  $(v_1, \dots, v_r) \in E^r$ , então*

$$f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_r}(v_1, \dots, v_r) = f_I(v_1, \dots, v_r) = \det(a_I),$$

onde  $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \Phi_n(r)$  e  $a_I$  é a matriz na qual os vetores são descritos em uma base dual de  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

**Demonstração.** Sejam  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $E$ , base dual de  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

Se  $(v_1, \dots, v_r) \in E^r$ , então

$$(v_1, \dots, v_r) = \left( \sum_{k=1}^n a_{k1} e_k, \sum_{k=1}^n a_{k2} e_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{kr} e_k \right).$$

$$v_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, \quad a_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Assim, para cada  $i_t \in I$ ,

$$f_{i_t}(v_j) = f_{i_t} \left( \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{kj} f_{i_t}(e_k) = a_{i_t j}.$$

Usando o lema 3.4 vemos que

$$\begin{aligned} f_I(v_1, \dots, v_r) &= \det(f_{i_t}(v_j)) \\ &= \det(a_{i_t j}) \\ &= \det(a_I). \end{aligned}$$

■

De acordo com o lema 3.7, para cada  $I \in \Phi_n(r)$ ,  $a_I$  representa a matriz  $r \times r$  obtida escolhendo-se, na matriz  $a$  dada por (3.6), as  $r$  linhas cujos índices pertencem a  $I$ .

## Produto Exterior

Na definição 3.5 estabelecemos o produto exterior de formas 1-lineares. Faremos a seguir a definição do produto exterior de uma formas  $r$ -linear por uma forma

$s$ -linear. Se  $f$  e  $g$  são escritas como produto exterior de formas lineares,  $f = f_1 \wedge \dots \wedge f_r$  e  $g = g_1 \wedge \dots \wedge g_s$ , então é natural definir o produto exterior de  $f$  e  $g$  como

$$f \wedge g = f_1 \wedge \dots \wedge f_r \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_s.$$

Uma forma que se pode escrever como produto exterior de formas lineares (formas 1-linear) é chamada *decomponível*.

Toda forma  $r$  – linear alternada pode ser escrita como combinação linear de formas decomponíveis (LIMA, 2001, p.4).

**Definição 3.6.** O produto exterior de uma  $r$  – forma por uma  $s$  – forma é a única aplicação bilinear

$$\wedge : \Lambda^r(E) \times \Lambda^s(E) \rightarrow \Lambda^{r+s}(E)$$

que coincide nas formas decomponíveis com o produto exterior dado na definição 3.5. Ou seja, se  $(f, g) \in \Lambda^r(E) \times \Lambda^s(E)$  então

$$f \wedge g = f_1 \wedge \dots \wedge f_r \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_s.$$

Veja detalhes em (LIMA, 2000, p.410-411).

### Propriedades do produto exterior

Se  $f \in \Lambda^r(E)$ ,  $g \in \Lambda^s(E)$  e  $h \in \Lambda^t(E)$  então temos as seguintes propriedades:

1. Anti-comutatividade

$$f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f.$$

2. Associatividade

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h.$$

### 3.2.4 Aplicação Induzida

Sejam  $E, F$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $A : E \rightarrow F$  um operador linear.

A partir do operador linear  $A$  obtemos, para cada  $r$ , uma aplicação induzida definida por:

$$\begin{aligned} A^* : \Lambda^r(F) &\longrightarrow \Lambda^r(E) \\ f &\mapsto A^*(f) = A^*f, \quad A^*f(v_1, \dots, v_r) = f(Av_1, \dots, Av_r). \end{aligned}$$

Observe o esquema:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^r(E) & \xleftarrow{A^*} & \Lambda^r(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{A} & F \end{array}$$

A aplicação induzida  $A^*$  é um operador linear.

Com efeito, sejam  $f, g \in \Lambda^r(F)$  e  $k \in \mathbb{K}$ .

(i)

$$\begin{aligned} A^*(f + g)(v_1, \dots, v_r) &= (f + g)(A(v_1), \dots, A(v_r)) \\ &= f(A(v_1), \dots, A(v_r)) + g(A(v_1), \dots, A(v_r)) \\ &= A^*(f)(v_1, \dots, v_r) + A^*(g)(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} A^*(kf)(v_1, \dots, v_r) &= (kf)(A(v_1), \dots, A(v_r)) \\ &= kf(A(v_1), \dots, A(v_r)) \\ &= kA^*(f)(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

### 3.3 Variedade Diferenciável

O primeiro exemplo de variedade é uma superfície regular do  $\mathbb{R}^3$ .

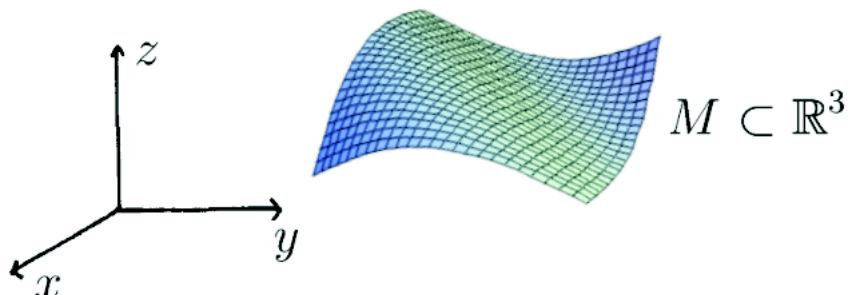


Figura 3.1: Superfície bidimensional em  $\mathbb{R}^3$

**Definição 3.7.** Dizemos que um subconjunto não vazio  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se  $\forall p \in M$  existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap M$ ,

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap M \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{tais que:}$$

- (i)  $X$  é diferenciável;
- (ii)  $X$  é homeomorfismo;
- (iii)  $\forall q \in U$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetiva.

A aplicação  $X$  é chamada uma parametrização de  $M$ .

A consequência mais importante da definição de superfície regular (3.7) é o fato de que a *mudança de parâmetros* é um difeomorfismo. Mais precisamente, se  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  e  $X_\beta : U_\beta \rightarrow M$  são duas parametrizações tais que  $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , então as aplicações

$$X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

são diferenciáveis. A demonstração deste resultado pode ser vista em (CARMO, 1976, p.70).

Como conseqüência deste resultado faz sentido falar em funções diferenciáveis e aplicar os métodos do cálculo diferenciável em superfícies. O maior defeito da definição acima é a sua dependência em relação ao  $\mathbb{R}^3$ . A idéia natural de superfície é de um conjunto que seja, em um certo sentido, bi-dimensional e ao qual se possa aplicar localmente o cálculo diferencial do  $\mathbb{R}^2$ . A presença desnecessária do  $\mathbb{R}^3$  é simplesmente uma imposição de nossa intuição física.

Embora a necessidade de uma idéia abstrata de superfície (sem envolver o espaço ambiente) fosse observada desde Gauss (Considerações sobre as superfícies curvas, 1825) foi necessário quase um século para que ela atingisse o aspecto que será aqui apresentado. Uma das razões desta demora é que, mesmo para as superfícies do  $\mathbb{R}^3$ , o papel fundamental da mudança de parâmetros não era bem compreendido. (CARMO, 1971, p.32)

As variedades diferenciáveis que definiremos a seguir generalizam, de certo modo, o conceito de superfícies regulares. A propriedade fundamental da mudança de parâmetros que é um teorema para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  será colocada como um axioma na definição de uma variedade diferenciável.

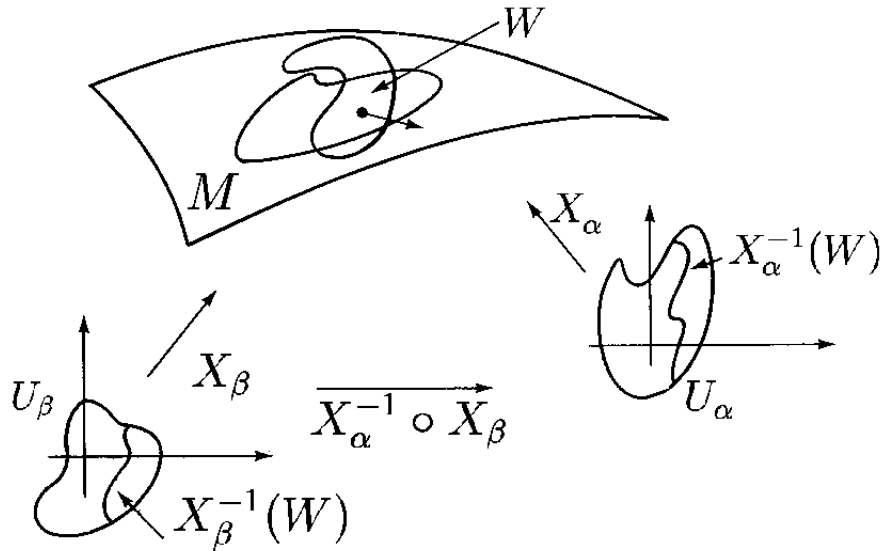
Na definição abaixo vamos considerar  $\alpha, \beta \in \Xi$  onde  $\Xi$  é um conjunto arbitrário de índices.

**Definição 3.8.** Uma *variedade diferenciável de dimensão  $n$*  é um conjunto  $M$  munido de uma família de aplicações injetivas  $X_\alpha: U_\alpha \rightarrow M$ , definidas em conjuntos abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  com valores em  $M$ , tais que

1.  $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
2. Para cada par  $\alpha, \beta$  com  $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$  temos:
  - $X_\alpha^{-1}(W)$  e  $X_\beta^{-1}(W)$  são conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ ,
  - $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$  e  $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$  são aplicações diferenciáveis (de classe  $C^\infty$ ).

Cada  $X_\alpha$  é chamada de *parametrização local* de  $M$ . A família  $X_\alpha$  é chamada de uma *estrutura diferenciável* em  $M$ .

Abertos em um espaço euclidiano ou superfícies infinitamente diferenciáveis em algum espaço euclidiano são exemplos que representam as variedades diferenciáveis de dimensão finita.



Se  $M$  e  $N$  são duas variedades diferenciáveis de dimensão  $n$ , então segue da definição que  $M \cup N$  e  $M \cap N$  de variedades diferenciáveis.

### Topologia Induzida em uma Variedade

Uma estrutura diferenciável em uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  induz uma topologia em  $M$  como veremos a seguir.

**Definição 3.9.** Um subconjunto  $A \subset M$  é um *aberto* de  $M$ , se  $X_\alpha^{-1}(A \cap X_\alpha(U_\alpha))$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ .

Decorre desta definição que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberta e que a intersecção finita de abertos é aberta. Assim obtemos uma *topologia induzida* para a variedade  $M$ . Observe que, com esta topologia, os conjuntos  $X_\alpha(U_\alpha)$  são abertos e as aplicações  $X_\alpha$  são contínuas.

A topologia induzida em uma variedade diferenciável pode ser bastante estranha. Em particular, pode acontecer que um (ou ambos) dos seguintes axiomas não seja satisfeito:

- (a) **Axioma de Hausdorff:** Dados dois pontos distintos de  $M$  existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

(b) **Axioma da base enumerável:**  $M$  pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que  $M$  tem uma *base enumerável*).

O axioma (a) é essencial a unicidade do limite de uma sucessão convergente e o axioma (b) é essencial à existência de uma partição da unidade instrumento quase indispensável ao estudo da topologia das variedades.

Consideraremos as variedades diferenciais neste texto satisfazendo os axiomas de Hausdorff e da base enumerável.

### 3.3.1 Função Diferenciável em uma Variedade

**Definição 3.10.** Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente e  $p \in M$ . Uma função  $f : M \rightarrow N$  é *diferenciável em  $p$* , se existem parametrizações  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  e  $Y_\beta : V_\beta \rightarrow N$  com  $p \in X_\alpha(U_\alpha) \subset M$  e  $f(p) \in Y_\beta(V_\beta) \subset N$ , tais que a aplicação

$$Y_\beta^{-1} \circ f \circ X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

em  $X_\alpha^{-1}(p)$  (figura 3.2).

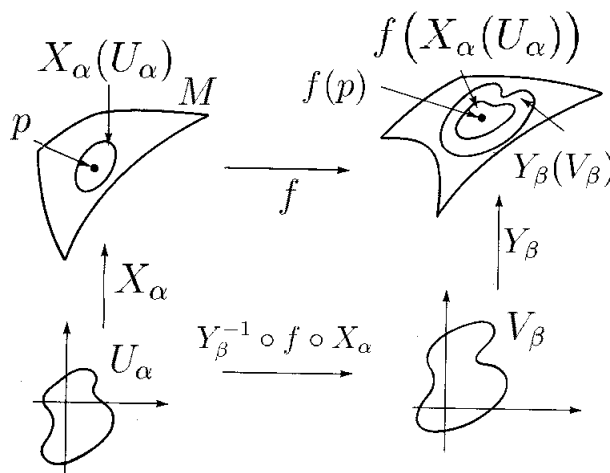


Figura 3.2: Função  $f : M \rightarrow N$  diferenciável em  $p$ .

A definição 3.10 independente das parametrizações. Com efeito, sejam  $X_{\hat{\alpha}}$  e  $Y_{\hat{\beta}}$  outras parametrizações

$$X_{\hat{\alpha}} : U_{\hat{\alpha}} \rightarrow M \quad \text{e} \quad Y_{\hat{\beta}} : V_{\hat{\beta}} \rightarrow N$$



com  $p \in X_\alpha(U_\alpha) \cap X_{\hat{\alpha}}(U_{\hat{\alpha}})$  e  $f(p) \in Y_\beta(Y_\beta) \cap Y_{\hat{\beta}}(Y_{\hat{\beta}})$ .

Então a função

$$Y_{\hat{\beta}}^{-1} \circ f \circ X_{\hat{\alpha}} = \underbrace{\left( Y_{\hat{\beta}}^{-1} \circ Y_\beta \right)}_I \circ \underbrace{\left( Y_\beta^{-1} f \circ X_\alpha \right)}_{II} \circ \underbrace{\left( X_\alpha^{-1} \circ X_{\hat{\alpha}} \right)}_{III}$$

é diferenciável por ser composta de funções diferenciáveis visto que (I) e (III) são diferenciáveis pela definição (3.8) e (II) o é pela definição (3.10).

A função (3.7) é chamada a *expressão* de  $f$  nas parametrizações  $X_\alpha$  e  $Y_\beta$ .

Dizemos que  $f$  é *diferenciável em*  $M$  se é diferenciável para todo  $p \in M$ . A função  $f \circ X_\alpha$  é chamada a expressão de  $f$  na parametrização  $X_\alpha$ .

### 3.3.2 Curva Diferenciável em uma Variedade Diferenciável

De agora em diante, indicaremos por  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto da reta  $\mathbb{R}$  tal que  $0 \in I$ .

**Definição 3.11.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . Uma curva  $c : I \rightarrow M$  é *diferenciável* em  $t \in I$  se, para alguma parametrização  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  com  $c(t) \in X_\alpha(U_\alpha)$ , tem-se que  $X_\alpha^{-1} \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $t$ .

A curva  $X_\alpha^{-1} \circ c$  é chamada a **expressão** de  $c$  na parametrização  $X_\alpha$ . A verificação de que esta definição é independente da parametrização é equivalente a realizada para a definição (3.10).

### 3.3.3 Vetor Tangente a uma Variedade Diferenciável

**Definição 3.12.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $c(0) = p$ . Considere o conjunto  $\mathcal{D}$  das funções de  $M$  em  $\mathbb{R}$  diferenciáveis em  $p$ . O **vetor tangente** à curva  $c$  no ponto  $p$  é o funcional:

$$\begin{aligned} c'(0) : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto c'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ c) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Assim, quando fazemos referência a *um vetor tangente* em  $p \in M$ , estamos considerando o vetor tangente a uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$ , com  $c(0) = p$ .

O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  será indicado por  $T_p M$ .

**Exemplo 3.1.** *Vamos mostrar que esta definição coincide com a definição de vetor tangente para superfícies regulares. Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e*

$$\begin{aligned} c : I &\longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

*uma curva diferenciável com  $c(0) = p$ . Então o vetor tangente a  $c$  em  $p$  é*

$$c'(0) = (x_1'(0), x_2'(0), x_3'(0)) = v \in \mathbb{R}^3.$$

*Agora considere a função diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $p$ . Podemos restringir  $f$  a curva  $c$  e escrever a derivada direcional segundo o vetor  $v \in \mathbb{R}^3$  como*

$$\left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} \right) = \left( \sum_{i=1}^n x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

*Portanto a derivada direcional, para cada vetor tangente  $v$ , é um funcional sobre o conjunto  $\mathcal{D}$  das funções de  $M$  em  $\mathbb{R}$  diferenciáveis em  $p$ . Esta é a propriedade que caracteriza o vetor tangente na definição (3.12).*

### 3.3.4 Espaço Tangente de uma Variedade Diferenciável

O próximo lema mostra que o conjunto dos vetores tangentes a variedade diferenciável  $M$  em  $p$ , munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  cuja dimensão coincide com a dimensão de  $M$ .

**Lema 3.8.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . O conjunto  $T_p M$  dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  é um espaço vetorial de dimensão  $m$ .*

**Demonstração.** Seja  $c'(0) \in T_p M$  um vetor tangente a uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$ , com  $c(0) = p$ . Considere uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$

com  $p = X(\vec{0})$ . Dada uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos escrever as expressões de  $f$  e  $c$  na parametrização  $X$  respectivamente

$$f \circ X(q) = f(x_1, \dots, x_m), \quad q = (x_1, \dots, x_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$$

e

$$X^{-1} \circ c(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)),$$

Assim, restringindo  $f$  a  $c(I) \cap X(U)$  temos que:

$$\begin{aligned} c'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ c) \right|_{t=0} = \left. \frac{df(x_1(t), \dots, x_m(t))}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Deste modo, o vetor tangente  $c'(0)$  pode ser expresso na parametrização  $X$  por

$$c'(0) = \left( \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right). \quad (3.8)$$

Onde, para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  é o vetor tangente em  $p$  à curva coordenada<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} x_i : U &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x_i(x) = X(\pi_i(x)) = X(0, \dots, x_i, \dots, 0) \end{aligned}$$

A expressão (3.8) do vetor tangente  $c'(0)$  na parametrização  $X$  mostra que este depende apenas das derivadas de  $c$  em um sistema de coordenadas. Seja  $T$  o espaço vetorial real gerado por

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_0 \right\}.$$

---

<sup>3</sup> $\pi_i$  é a projeção canônica na  $i$ -ésima coordenada.

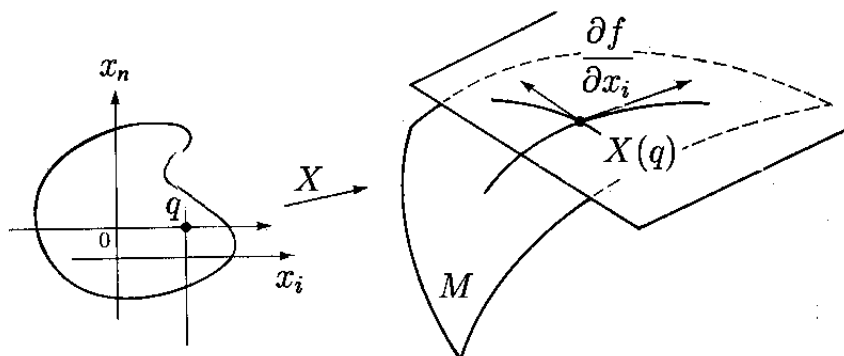


Figura 3.3: Curvas coordenadas  $x_i$ .

Vimos na expressão (3.8) que  $T_pM \subset T$ . Reciprocamente, se  $v \in T$ , então

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

Seja  $\tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva cuja expressão na parametrização  $X$  é

$$X^{-1} \circ \tilde{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) = (a_1 t, \dots, a_m t),$$

Então

$$\tilde{c}'(0) = \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 = v,$$

isto é,  $v \in T_pM$  e assim  $T \subset T_pM$ . Portanto o conjunto  $T_pM$ , munido das operações de soma de funções e multiplicação por escalar real, forma um espaço vetorial real. Além disso, a cada escolha de parametrização  $X : U \rightarrow M$  fica determinada uma *base associada* a parametrização  $X$  para o espaço vetorial  $T_pM$ :

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_0 \right\}.$$

Logo a dimensão de  $T_pM$  é  $m$ . ■

O espaço vetorial  $T_pM$  é chamado o *espaço tangente* de  $M$  em  $p$  ou ainda, *plano tangente* de  $M$  em  $p$ .

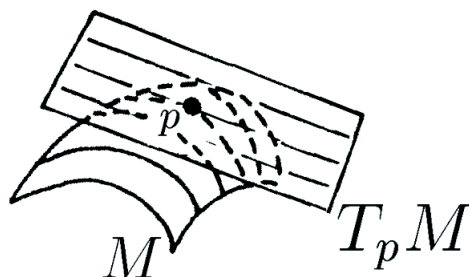


Figura 3.4: Plano tangente de uma superfície  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$

**Exemplo 3.2.** No exemplo ilustrativo das superfícies em  $\mathbb{R}^3$   $T_p M$  é o plano tangente para a superfície no ponto  $p$  visto como espaço vetorial com origem em  $p$ .

O plano tangente de  $M$  em  $p$  é o espaço vetorial dos vetores tangentes em  $p$  de todas as curvas em  $M$  que passam por  $p$ .

### 3.3.5 Diferencial

**Definição 3.13.** Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente e  $p \in M$ . A *diferencial* de uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  em  $p$  é o operador

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\longrightarrow T_{f(p)} N \\ v &\longmapsto df_p(v) = (f \circ c)'(0), \end{aligned}$$

onde  $v = c'(0)$  para alguma curva  $c : I \rightarrow M$  com  $c(0) = p$ .

**Lema 3.9.** A diferencial  $df_p$  é um operador linear e independe da curva  $c$ .

**Demonstração.** Sejam  $X : U \rightarrow M$  e  $Y : V \rightarrow N$  parametrizações com  $p \in U$  e  $f(p) \in N$ . A expressão de  $f$  nestas parametrizações é

$$Y^{-1} \circ f \circ X(q) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m))$$

onde  $q = (x_1, \dots, x_m) \in U$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in V$ .

Por outro lado, a expressão de  $c$  na parametrização  $X$  é dada por

$$(X^{-1} \circ c)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)).$$

Portanto

$$(Y^{-1} \circ f \circ c)(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_m(t)), \dots, y_n(x_1(t), \dots, x_m(t))). \quad (3.9)$$

Decorre daí que a expressão de  $(f \circ c)'(0)$  na base

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial y_n} \right)_0 \right\}$$

de  $T_{f(p)}N$ , associada a parametrização  $Y$  é dada por

$$(f \circ c)'(0) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_n}{\partial x_i} x'_i(0) \right). \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) mostra imediatamente que  $(f \circ c)'(0)$  não depende da escolha da curva  $c$  e pode ser escrita como:

$$(f \circ c)'(0) = df_p(v) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) & \cdots & \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \right) & \cdots & \left( \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(0) \\ \vdots \\ x'_m(0) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Portanto  $df_p$  é um operador linear de  $T_pM$  em  $T_{f(p)}N$  cuja matriz  $\left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{n \times m}$  nas bases associadas às parametrizações  $X$  e  $Y$  é dada em (3.11). ■

**Definição 3.14.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Uma função bijetiva  $f : M \rightarrow N$  é um *homeomorfismo* se  $f$  e sua inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  forem contínuas.

**Definição 3.15.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  um homeomorfismo. Dizemos que  $f$  é um *difeomorfismo* se  $f$  e sua inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  forem diferenciáveis. Dizemos neste caso que  $M$  e  $N$  são *difeomorfas*.

Uma função  $f$  é um *difeomorfismo local* em  $p \in M$  se existem vizinhanças  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $f(p)$  tais que  $f : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo.

### 3.3.6 Subvariedade

#### Imersões e Mergulhos

**Definição 3.16.** Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $p \in M$ . Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma *imersão*, se  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $f$  é um homeomorfismo sobre  $f(M) \subset N$ , onde  $f(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $f$  é um *mergulho*.

**Definição 3.17.** Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \subset N$  é um mergulho, diz-se que  $M$  é uma *subvariedade* de  $N$ .

**Exemplo 3.3.** A esfera  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  pode ser escrita como união de duas subvariedades  $U = S^m \setminus \{a\}$  e  $V = S^m \setminus \{b\}$ , onde  $a$  e  $b$  são dois pontos diferentes em  $S^m$ . A intersecção  $U \cap V$  é difeomorfa a  $S^{m-1} \times \mathbb{R}$ . (LIMA, 2001, p.22)

De fato, pela projeção estereográfica temos  $S^m \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^m$ . Logo,

$$S^m \setminus \{a, b\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad (3.12)$$

Se  $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , então  $r_x = \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_m)^2} > 0$ . Logo,  $x \in S_{r_x} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid (x_1)^2 + \dots + (x_m)^2 = r_x^2\}$ .

Podemos escrever  $\mathbb{R}^m$  menos a origem como a união disjunta de  $S_r$  com  $r \in (0, +\infty)$ , portanto  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}} S_r = S^{m-1} \times (0, +\infty)$  e assim

$$\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \cong S^{m-1} \times (0, +\infty) \quad (3.13)$$

Como a função logarítmica é um difeomorfismo e  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  temos

$$S^{m-1} \times (0, +\infty) \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Por (3.12), (3.13) e (3.14),

$$S^m \setminus \{a, b\} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}.$$

**Exemplo 3.4.** Se  $f : M \longrightarrow N$  é um difeomorfismo então, para todo  $p \in M$ ,  $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$  é um isomorfismo<sup>4</sup>. Em particular as dimensões de  $M$  e  $N$  são iguais.

## 3.4 Formas Diferenciais

### 3.4.1 Formas Diferenciais

Em geometria diferencial clássica, formas diferenciais eram quantidades simbólicas representadas por expressões do tipo

$$\begin{aligned} & \sum_i f_i dx_i \\ & \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j \\ & \sum_{i < j < k} f_{ijk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \end{aligned}$$

que eram integradas e diferenciadas.

Vamos definir formas diferenciais sobre variedades diferenciáveis.

**Definição 3.18.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma *forma diferencial de grau  $r$* , também chamada uma  *$r$ -forma*, em  $M$  é uma função  $\omega$  que associa cada ponto  $p \in M$  a uma forma  $r$ -linear alternada  $\omega_p$  do plano tangente a  $M$  em  $p$ ,  $\omega_p \in \Lambda^r(T_pM)$ .

$$\begin{aligned} \omega : M & \longrightarrow \Lambda^r(T_pM) \\ p & \longmapsto \omega(p) = \omega_p \end{aligned}$$

Uma 0-forma diferenciável (forma diferencial de grau 0) em  $M$  é por definição uma função real infinitamente diferenciável em  $M$ .

**Definição 3.19.** O espaço vetorial das  *$r$ -formas diferenciáveis em uma variedade  $M$*  será denotado por  $C^r(M)$ .

---

<sup>4</sup>(CARMO, 1988, p. 10).



Para estender esta notação definiremos  $C^0(M)$ , o conjunto das formas de grau 0, como o conjunto das funções reais infinitamente diferenciáveis de  $M$  (e não as funções contínuas!).

**Lema 3.10.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . O conjunto  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ , no qual para cada  $i = 1, \dots, n$  tem-se que  $dx_i$  é a derivada da função coordenada  $x_i$  no ponto  $p$ , constitui uma base  $T_p M^*$  (dual algébrico de  $T_p M$ ).*

Assim, dos lemas (3.5) e (3.10), decorre o seguinte resultado:

**Lema 3.11.** *O conjunto*

$$\Upsilon = \left\{ dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \mid I \in \Phi_n(r) \right\}$$

*constitui uma base para  $\Lambda^r(T_p M)$ .*

Pelo lema (3.11) podemos expressar a  $r$ -forma  $\omega_p$ , dada na definição (3.18) usando os  $dx'_j$ s

$$\omega_p = \sum_I a_I(p) dx_I. \quad (3.15)$$

Onde,  $\forall I \in \Phi_n(r)$ ,  $a_I \in C^0(M)$ , isto é, são funções reais infinitamente diferenciáveis em  $M$ .

**Definição 3.20.** Um *morfismo* de variedades diferenciáveis  $f : M \rightarrow N$  é uma função contínua tal que para cada par de sistemas de coordenadas  $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $y : V \subset N \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ , com  $f(U) \subset V$ , se tem que  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$  é  $C^\infty$  entre abertos de espaços euclidianos.

O conjunto dos morfismos de  $M$  em  $N$  é denotado por  $Hom(M, N)$ .

Dados um morfismo de variedades diferenciais  $f \in Hom(M, N)$  e uma  $r$ -forma  $\omega$  sobre uma variedade  $N$

$$\begin{aligned} \omega : N &\longrightarrow \Lambda^r(T_q N) \\ q &\longmapsto \omega(q) = \omega_q \end{aligned}$$

então  $f$  induz um  $r$ -forma em  $M$ ,  $f^* \omega : M \longrightarrow \Lambda^r(T_p M)$ , definida por

$$f^* \omega(p) = (f^* \omega)_p = \omega_{f(p)}(df_p) \quad (3.16)$$

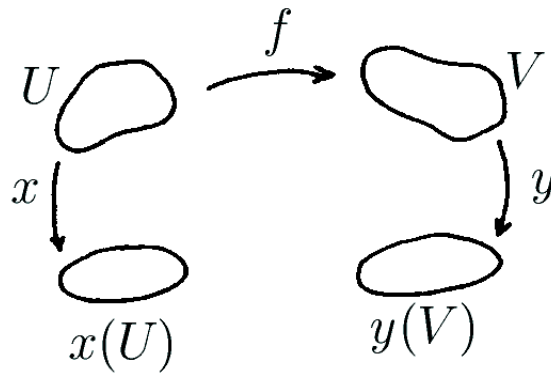


Figura 3.5:

onde  $df_p$  é a diferencial de  $f$  no ponto  $p$  que associa cada vetor tangente a uma curva diferenciável  $\mathcal{C} \in M$  no ponto  $p$  ao vetor tangente a curva diferenciável  $f(\mathcal{C}) \in N$  no ponto  $q = f(p) \in N$ . (Figura 3.6)

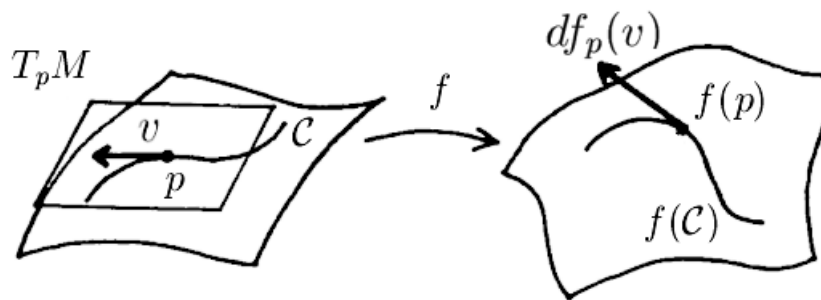


Figura 3.6:

Considere um sistema de coordenadas  $y$  com  $q = f(p) \in V$  dado por

$$y : V \subset N \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto y(x) = (y_1(v_1, \dots, v_n), \dots, y_n(v_1, \dots, v_n)).$$

Vamos escrever  $f^*\omega$  em termos das funções coordenadas  $y_i = y_i(v_1, \dots, v_n)$

Da expressão (3.16) temos

$$(f^*\omega)_p = \omega_{f(p)}(df_p).$$

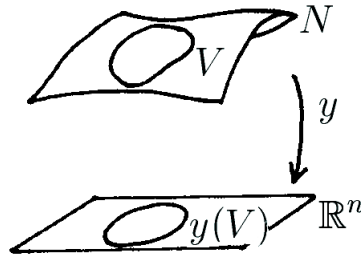


Figura 3.7: Função coordenada de  $N$ .

Por outro lado, pela expressão (3.11), temos

$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Usando a igualdade (3.15):

$$\omega_{f(p)} = \sum_I a_I(f(p)) dy_I. \quad (3.17)$$

Com  $dy_I = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r} \in \Lambda^r(T_{f(p)}N)$ ,  $I \in \Phi_n(r)$ .

Então podemos escrever  $(f^*\omega)$  em termos das funções coordenadas:

$$(f^*\omega)_p = \sum_j \left( \sum_I a_I(f(p)) \frac{\partial y_I}{\partial x_j}(p) \right) dx_j$$

onde

$$\frac{\partial y_I}{\partial x_j}(p) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}}(p) & \cdots & \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_m}}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{j_1}}(p) & \cdots & \frac{\partial y_{i_n}}{\partial x_{j_m}}(p) \end{pmatrix}.$$

Esta expressão não é tão elegante quanto a abstrata, mas permite calcular efetivamente as formas induzidas concretas.

**Lema 3.12.** *Seja  $\{f_1, \dots, f_n\}$  uma base para  $E^*$ . Se  $(v_1, \dots, v_r) \in E^r$  então*

$$f_I(v_1, \dots, v_r) = \det(a_I)$$

Onde  $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \Phi_n(r)$  corresponde a uma reordenação dos índices de  $(v_1, \dots, v_r)$  e  $a_I$  é a matriz na qual os vetores são descritos em uma base dual de  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

Agora veremos uma operação muito importante entre formas diferenciais que é a diferencial exterior.

### 3.4.2 Diferencial Exterior

Nesta seção vamos definir o operador  $d$  chamado a *diferencial exterior*, o qual leva formas diferenciais de grau  $r$  em formas diferenciais de grau  $(r + 1)$ .

**Definição 3.21.** Se  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  é uma  $r$ -forma, definimos a *diferencial exterior* de  $\omega$  como sendo a  $(r + 1)$ -forma:

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Assim a diferencial exterior  $d$  é um operador do espaço vetorial das  $r$ -formas diferenciáveis em  $M$  no espaço vetorial das  $(r + 1)$ -formas diferenciáveis em  $M$  :

$$\begin{aligned} d : C^r(M) &\longrightarrow C^{r+1}(M) \\ \omega = \sum_I a_I dx_I &\mapsto d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I. \end{aligned}$$

#### Propriedades da diferencial exterior

**Proposição 3.1.** *Propriedades da diferencial exterior.*

- (1)  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ , onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são  $r$ -formas;
- (2)  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$  onde  $\omega_1$  é uma  $r$ -forma e  $\omega_2$  é uma  $s$ -forma;
- (3)  $d(d(\omega)) = 0$

$$(4) \quad df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$(5) \quad d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

(6) Se  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  então

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} \wedge dx_I.$$

**Demonstração.** Vide (CARMO, M. P., 1971, p.17). ■

O item (4) da proposição 3.1 implica que para as funções coordenadas  $x_i$  o diferencial exterior  $d(x_i)$  coincide com  $dx_i$ .

Das propriedades segue que para cada forma diferencial  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  a diferencial exterior tem que ser dado por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} \wedge dx_I.$$

**Exemplo 3.5.** Seja  $\omega = adx + bdy$  uma 1-forma diferenciável em  $U \subset \mathbb{R}^2$ , com  $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ , funções diferenciáveis.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(adx) + d(bdy) \\ &= da \wedge dx + db \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy\right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Então para que  $d\omega = 0$  é necessário e suficiente que

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}. \tag{3.18}$$

# Capítulo 4

## Cohomologia de deRham

### 4.1 Introdução

A motivação principal da topologia algébrica é resumida pelo ilustre Professor Dr. Elon Lages Lima [19] na seguinte declaração: “*A álgebra é mais fácil que a topologia. Por exemplo podemos somar números, elementos de um anel, mas não objetos topológicos.*” Com a álgebra é possível fazer cálculos e portanto a estratégia é substituir o espaço topológico  $X$  por um objeto algébrico  $G(X)$  que contém informação sobre o espaço topológico, por exemplo um grupo

$$X \rightarrow G = G(X).$$

Cada função contínua entre espaços topológicos

$$f : X \rightarrow Y$$

corresponde assim a uma função de grupos

$$f^* : G(X) \rightarrow G(Y).$$

As propriedades geométricas do espaço  $X$ , respectivamente de  $f$  são traduzidas em propriedades algébricas do grupo  $G(X)$ , respectivamente de  $f^*$ . Se perde um pouco de informação ao fazer esta tradução, para facilitar o cálculo. Quanto mais sofisticada a topologia algébrica menos informação será perdida. Entretanto, o objeto algébrico será mais complicado. (LIMA, 2001, p.2, Tradução nossa).

Uma das “ferramentas” da topologia algébrica utilizada para realizar esta

“tradução” é a chamada cohomologia de deRham ou cohomologia das formas diferenciais.

A cohomologia de deRham<sup>1</sup> associa cada variedade diferenciável  $M$  aos seus grupos cohomológicos  $H^r(M)$  que podem ser até mesmo espaços vetoriais reais, porém ainda assim serão chamados grupos de cohomologia. A cohomologia de deRham está baseada em formas diferenciais sobre uma variedade.

## 4.2 Cohomologia de deRham

**Definição 4.1.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $\omega$  uma  $r$ -forma  $M$ . Dizemos que  $\omega$  é *fechada* se  $d\omega = 0$ .

**Exemplo 4.1.** Uma 1-forma  $\omega = adx + bdy$  em  $U \subset \mathbb{R}^2$  é fechada se, e somente se,

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

como vimos no exemplo 3.5.

**Exemplo 4.2.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $\omega$  uma  $r$ -forma  $M$ . Dizemos  $\omega$  é uma forma de grau máximo quando  $r = m$ . Toda forma  $\omega$  de grau máximo é fechada, pois  $d\omega$  tem grau  $(m + 1)$  e, pelo lema (3.6), toda forma  $d\omega_p \in \Lambda^{m+1}(T_pM)$  é nula. Logo  $d\omega = 0$ .

**Definição 4.2.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $\omega$  uma  $r$ -forma  $M$ . Dizemos que  $\omega$  é *exata*, se  $\omega = d\theta$  para alguma  $(r - 1)$ -forma  $\theta$  em  $M$ .

**Exemplo 4.3.** Formas exatas são todas fechadas, pois pelas propriedades da diferencial exterior (proposição 3.1 item [3]) temos

$$d^2 = 0.$$

**Exemplo 4.4.** Se  $\omega \in C^0(M)$ , então  $\omega$  é exata e, conseqüentemente, fechada.

---

<sup>1</sup>Georges de Rham (1903-1990) matemático suíço, conhecido por suas contribuições a topologia diferencial, estudou na Universidade de Lausanne em Paris onde fez o doutorado, se tornando conferencista em 1931 ocupando cargos até se aposentar em 1971.

Formas exatas são todas fechadas, pois  $d^2 = 0$ , mas nem toda forma fechada é exata. De fato, saber se uma forma fechada sobre  $M$  é exata é uma questão topológica de  $M$ . Este problema quando expresso em linguagem vetorial no cálculo pode ter a seguinte versão: Todos os campos gradientes possuem rotacional nulo. Entretanto, a recíproca depende de condições do domínio de definição. Representando por formas, temos que a 1-forma

$$\omega = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

possui rotacional zero mas não pode ser escrita como o gradiente de nenhuma função. Por isso é fechada, mas não é exata.

Para, de certo modo, medir a falha da implicação forma fechada implica em forma exata, definimos uma relação de equivalência no espaço vetorial das  $r$ -formas em  $M$ . Duas  $r$ -formas  $\omega$  e  $\omega'$  são *cohomólogas*,  $\omega \sim \omega'$ , se sua diferença é exata  $\omega - \omega' = d\theta$ .

**Definição 4.3.** O conjunto das classes de equivalências denotado por  $H^r(M)$  é o  $r$ -ésimo grupo de cohomologia de deRham de  $M$ .

O conjunto  $H^r(M)$ , que também é chamado de *grupo de cohomologia de grau  $r$  de  $M$* , é um espaço vetorial real. A adição de classes e multiplicação por escalar são dadas como segue:

(i) Se  $\omega_1 \sim \omega'_1$  e  $\omega_2 \sim \omega'_2$ , então  $(\omega_1 + \omega_2) \sim (\omega'_1 + \omega'_2)$ .

$\omega_1 \sim \omega'_1$  e  $\omega_2 \sim \omega'_2 \Rightarrow (\omega_1 - \omega'_1) = d\theta_1$  e  $(\omega_2 - \omega'_2) = d\theta_2$ . Somando essas igualdades teremos

$$(\omega_1 + \omega_2) - (\omega'_1 + \omega'_2) = d\theta_1 + d\theta_2 = d(\theta_1 + \theta_2)$$

Logo,  $(\omega_1 + \omega_2) \sim (\omega'_1 + \omega'_2)$ .

(ii) Se  $c \in \mathbb{R}$  então  $c\omega_1 \sim c\omega'_1$ .

$\omega_1 \sim \omega'_1$  e  $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (\omega_1 - \omega'_1) = d\theta_1 \Rightarrow c(\omega_1 - \omega'_1) = cd\theta_1 = d(c\theta_1)$ .

Logo  $c\omega_1 \sim c\omega'_1$ .

**Exemplo 4.5.** A classe de cohomologia 0 no espaço vetorial  $H^r(M)$  é a coleção das formas exatas e, reciprocamente, visto que se  $\omega = d\theta$  sempre tem-se  $\omega + d\theta \sim \omega$ , equivalentemente,  $\omega = d\theta \sim 0$ .



Vamos estabelecer agora algumas notações.

**Definição 4.4.** O *espaço das formas fechadas* é

$$Z^r(M) = \{\omega \in C^r(M) \mid d\omega = 0\}.$$

**Definição 4.5.** O espaço vetorial das formas diferenciais *exatas* de grau  $r$

$$B^r(M) = \{\omega \in C^r(M) \mid \omega = d\alpha, \alpha \in C^{r-1}(M)\} \quad r = 1, 2, \dots$$

Definimos ainda para  $r = 0$  que  $B^0(M) = \{0\}$ .

Pelo exemplo (4.3) temos

$$B^r(M) \subset Z^r(M),$$

ou seja, toda a forma exata é fechada. Um problema clássico é o seguinte quando

$$B^r(M) \subset Z^r(M),$$

isto é, para que variedades toda a forma fechada é também exata?

Uma pergunta mais geral seria, no caso que existam formas fechadas não exatas, quantas formas fechadas não exatas existem?

A topologia algébrica esboça pela homologia a seguinte pergunta: Quantas formas fechadas linearmente independente existem que não são exatas?

A definição 4.3 pode ser reescrita como:

**Definição 4.6.** O  $r$ -ésimo *grupo de cohomologia de deRham* de  $M$  (que além de grupo é um espaço vetorial) é definido como

$$H^r(M) := \frac{Z^r(M)}{B^r(M)},$$

isto é, o grupo quociente de  $Z^r(M)$  sobre  $B^r(M)$ .

A dimensão de  $H^r(M)$  é chamado o  $r$ -ésimo *número de Betti* de  $M$  e responde (quando é possível calcular) a última pergunta.

**Exemplo 4.6.**

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . Vamos determinar o grupo de cohomologia de deRham de grau zero de  $M$ . Sabemos que  $C^0(M)$  são as funções reais infinitamente diferenciáveis sobre  $M$ .  $Z^0(M)$  são as funções que cumprem  $df = 0$ , ou seja, são constantes em cada componente conexa de  $M$  (localmente constantes). Como  $B^0(M) = \{0\}$  teremos

$$H^0(M) = Z^0(M) \cong \mathbb{R}^K,$$

onde  $K$  é o número de componentes conexas de  $M$ .

#### Exemplo 4.7.

Agora vamos determinar os grupos de cohomologia de deRham de  $\mathbb{R}$ .

Pelo exemplo anterior, sabemos que  $H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ .

Vamos mostrar que

$$H^1(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Se  $\omega \in C^1(\mathbb{R})$ , então  $\omega = f(x)dx$  para alguma função diferenciável  $f$ . Definimos a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \int_0^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Então  $g'(x) = f(x)$  para todo o  $x$ , então  $g'(x)dx = f(x)dx$ . Considerando  $\theta = g$  como uma 0-forma se tem então que  $d\theta(x) = g'(x)dx = \omega(x)$ . Daí concluímos que toda 1-forma diferencial em  $\mathbb{R}$  é automaticamente exata,  $C^1(\mathbb{R}) = B^1(\mathbb{R})$ , e conseqüentemente fechada,  $C^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})$ . Daí  $H^1(\mathbb{R})$  só possui a classe de cohomologia das formas exatas, isto é,

$$H^1(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

#### Exemplo 4.8.

Considere a variedade diferenciável  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Como  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  possui apenas uma componente conexa, temos, pelo exemplo (4.6),

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

Para o grau 1 vamos provar que  $H^1(M) \cong \mathbb{R}$ .

Consideremos o funcional linear  $\phi : Z^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido do seguinte modo: Para cada  $\omega \in Z^1(M)$ ,  $\omega = adx + bdy$  definimos<sup>2</sup>

$$\phi(\omega) = \int_{S^1} \omega,$$

Como  $\phi$  é sobrejetiva (pois é não-nulo) só falta provar que o núcleo de  $\phi$  é exatamente  $B^1(M)$ , para concluir que  $\phi$  induz o isomorfismo para o qual, pelo teorema do homomorfismo,

$$H^1(\mathbb{R}) = \frac{Z^1(M)}{B^1(M)} \cong \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Vamos provar que o núcleo de  $\phi$  é  $B^1(M)$ , ou seja,  $\ker \phi = B^1(M)$ .

( $\ker \phi \subset B^1(M)$ ) :

Seja  $\omega \in \ker \phi$ . Então  $\omega \in C^1(M)$  com  $\phi(\omega) = \int_{S^1} \omega = 0$ . Logo

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad (4.2)$$

para cada curva fechada  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Isso significa que a integral em qualquer caminho  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  só depende dos pontos extremos de  $\alpha$ . Porque se  $\beta$  é outro caminho ligando os extremos de  $\alpha$  e com mesma orientação considere o caminho fechado  $\alpha + \beta^{-1}$ , onde  $\beta^{-1}$  é o caminho de orientação oposta a  $\beta$ . Por (4.2)

$$\int_{\alpha + \beta^{-1}} \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta^{-1}} \omega.$$

Escolhendo algum ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  e pondo  $f(x) = \int_C \omega$  onde  $C$  é um caminho que conecta  $x_0$  a um ponto qualquer  $x \in M$ , obtemos uma função diferenciável em  $M$ , com  $\omega = df$ . Então  $\omega$  é exata.

( $\ker \phi \supset B^1(U)$ ) :

Por outro lado, é óbvio que toda 1-forma diferencial exata (quer dizer,  $\omega \in B^1(U)$ ) está no núcleo de  $\phi$  porque  $\omega = df$  implica que  $f$  é uma função potencial<sup>3</sup> e portanto  $\int_C \omega = f(C_1) - f(C_0)$  onde  $C_0, C_1$  são os pontos extremos de  $C$ . Portanto a integral sobre  $\omega$  se anula nas curvas fechadas, em particular em  $S^1$ . Logo ( $\ker \phi \supset B^1(U)$ ) e por (4.1) temos

$$H^1(M) \cong \mathbb{R}$$

<sup>2</sup>Nesta definição,  $S^1$  é o a circunferência de centro na origem e raio 1.

<sup>3</sup>(PINTO,D;MORGADO, M.C.F.,1997, p.119) Teorema 6.2

### 4.3 Complexo de deRham

O complexo de deRham é um exemplo de *complexo diferencial*. Daremos agora algumas definições básicas e resultados de complexos diferenciais.

**Definição 4.7.** Uma soma direta de espaços vetoriais  $C = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} C^r$  indexada por inteiros é chamado um *complexo diferencial* se existem homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{d} C^{r-1} \xrightarrow{d} C^r \xrightarrow{d} C^{r+1} \xrightarrow{d} \dots$$

tais que  $d^2 = 0$ .

$d$  é o *operador diferencial* do complexo  $C$ .

**Definição 4.8.** A cohomologia do complexo  $C$  é soma direta de espaços vetoriais  $H(C) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H^r(C)$ , onde

$$H^r(C) = (\ker d \cap C^r) / (\operatorname{im} d \cap C^r).$$

**Definição 4.9.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre dois complexos diferenciais é uma *chain map* se comuta com os operadores diferenciais de  $X$  e  $Y$  :  $f d_X = d_Y f$ .

**Definição 4.10.** Uma seqüência de espaços vetoriais

$$\dots \rightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \rightarrow \dots$$

é *exata* se  $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$  isto é para todo  $i$  o núcleo de  $f_i$  é igual a imagem do seu antecessor.

**Definição 4.11.** Uma seqüência exata da forma

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

é chamada *seqüência exata curta*.

**Teorema 4.1.** *Dada uma seqüência exata curta de complexos diferenciais*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

em que  $f$  e  $g$  são chain maps, existe uma seqüência exata longa dos grupos de cohomologia

$$\begin{array}{ccccccc} H^{r+1}(X) & \longrightarrow & \dots & & & & \\ \uparrow & & & \longleftarrow \Delta & & & \uparrow \\ & & H^r(X) & \xrightarrow{f^*} & H^r(Y) & \xrightarrow{g^*} & H^r(Z) \\ \uparrow & & & & & & \uparrow \end{array}$$

**Demonstração.** (BOTT, R.; TU, L. W., 1982, p.17).

Nesta seqüência,  $f^*$  e  $g^*$  são as aplicações induzidas por  $f$  e  $g$ . Enquanto  $\Delta[z]$ ,  $z \in Z^r$ , é obtido como segue:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X^{r+1} & \xrightarrow{f} & Y^{r+1} & \xrightarrow{g} & Z^{r+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & X^r & \xrightarrow{f} & Y^r & \xrightarrow{g} & Z^r & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

O núcleo da aplicação  $Z^r \longrightarrow 0$  é igual ao seu domínio e como a seqüência é exata  $im\ g = Z^r$ . Logo  $g$  é sobrejetiva e, portanto, dado  $z \in Z^r$  existe um elemento  $y \in Y^r$  tal que  $g(y) = z$ . Como  $g$  é uma chain map

$$g(dy) = d(gy) = dz = 0,$$

então  $dy = f(x)$  para algum  $x \in X^{r+1}$ . Este  $x$  é fechado, visto que existe  $x_0 \in X^r$  tal que

$$x = dx_0 \quad \Rightarrow \quad dx = d(dx_0) = 0.$$

$\Delta[z]$  é definido como a classe de cohomologia  $[x]$  em  $H^{r+1}(X)$ .

$$\Delta[z] := [x].$$

A definição de  $\Delta$  independe das escolhas feitas. ■

**Definição 4.12.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . O *complexo de deRham* é a seqüência dos espaços vetoriais das  $r$ -formas.

$$C^0(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^{r-1}(M) \xrightarrow{d} C^r(M) \xrightarrow{d} C^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^m(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Neste complexo  $d \circ d = 0$ .

# Capítulo 5

## Homotopias

### 5.1 Homotopias

**Definição 5.1.** Sejam  $M, N$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g : M \rightarrow N$  dizem-se *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} H : M \times [0, 1] &\rightarrow N \\ (x, 0) &\mapsto H(x, 0) = f(x) \\ (x, 1) &\mapsto H(x, 1) = g(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in M$

Nesse caso, denotamos  $H : f \simeq g$  ou simplesmente  $f \simeq g$ .

**Definição 5.2.** A aplicação  $H$  definida acima é uma *homotopia* entre  $f$  e  $g$ .

Dada a homotopia  $H : f \simeq g$ , consideremos, para cada  $t \in [0, 1]$ , a aplicação contínua

$$\begin{aligned} H_t : X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto H_t(x) = H(x, t). \end{aligned}$$

Dar a homotopia  $H$  equivale a definir uma família  $(H_t)_{t \in [0, 1]}$ , de aplicações contínuas de  $M$  em  $N$ , na qual  $H_0 = f$  e  $H_1 = g$ .

Intuitivamente, o parâmetro  $t$  pode ser imaginado como sendo o tempo. A homotopia é então pensada como um processo de deformação contínua da aplicação

$f$ . Tal deformação ocorre durante uma unidade de tempo. No instante  $t = 0$  temos  $f$ , para  $t = 1$  temos  $g$ . Nos instantes intermediários,  $0 < t < 1$ , as aplicações  $H_t$  fornecem estágios intermediários da deformação.

**Proposição 5.1.** *Sejam  $M, N$  espaços topológicos. A relação de homotopia,  $f \simeq g$ , é uma equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $M$  em  $N$ .*

**Demonstração.** Vide (LIMA, 1977, p. 9.) ■

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas *classes de homotopia*: A classe de homotopia de uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  é indicada pelo símbolo  $[f]$ . O conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de  $M$  em  $N$  é representado pelo símbolo  $[M, N]$ .

**Proposição 5.2.** *Sejam  $f, f' : M \rightarrow N$  e  $g, g' : N \rightarrow W$  aplicações contínuas. Se  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$ , então  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ . Em palavras: a composição de aplicações preserva homotopias.*

**Demonstração.** Vide (LIMA, 1977, p. 9.) ■

Em consequência da proposição 5.2 podemos definir composição entre classes de homotopia. Dadas  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow W$ , definimos  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ . A classe  $[g \circ f]$  não depende dos representantes  $g, f$  das classes  $[g]$  e  $[f]$ , respectivamente.

**Definição 5.3.** Uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  chama-se uma *equivalência homotópica*, quando existe  $g : N \rightarrow M$  contínua tal que  $g \circ f \simeq Id_M$  e  $f \circ g \simeq Id_N$ .

Diz-se então que  $g$  é o *inverso homotópico* de  $f$  e que os espaços topológicos  $M, N$  têm o mesmo *tipo de homotopia*. Nesse caso, escrevemos  $M \equiv N$ .

**Exemplo 5.1.** *A esfera  $S^n$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .*

*De fato, considerando as aplicações contínuas*

$$i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \quad e \quad r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$$



dadas por  $i(x) = x$  (inclusão) e  $r(y) = \frac{y}{|y|}$  (projeção radial), vemos que  $r \circ i = id_{S^n}$  enquanto que

$$i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

é homotópica à aplicação identidade de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  mediante uma homotopia linear pois todo ponto  $y \neq 0$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  pode ser ligado a  $\frac{y}{|y|}$  por um segmento de reta que não contém o zero. Este mesmo argumento mostra que se  $B^{n+1}$  é a bola fechada de centro 0 e raio 1 em  $\mathbb{R}^{n+1}$  então  $B^{n+1} \setminus \{0\}$  tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera  $S^n$ .

**Exemplo 5.2.** Se  $p$  e  $q$  são os pólos norte e sul de  $S^n$  ( $p = (1, 0, \dots, 0)$  e  $q = (-1, 0, \dots, 0)$ ), então temos

$$S^n \setminus \{p, q\} \equiv (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad \Rightarrow \quad S^n \setminus \{p, q\} \equiv S^{n-1}.$$

Basta observar que a projeção estereográfica

$$\pi : S^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

nos dá um homeomorfismo entre  $S^n \setminus \{p, q\}$  e  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Segue então do exemplo (5.1) que  $S^n \setminus \{p, q\}$  tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera  $S^{n-1}$ .

**Exemplo 5.3.**  $S^{m-1} \times \mathbb{R}$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{m-1}$ . De fato, considerando as aplicações contínuas

$$\begin{aligned} i : S^{m-1} &\rightarrow S^{m-1} \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r : S^{m-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow S^{m-1} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

observamos que  $r \circ i = id_{S^{m-1}}$  e

$$\begin{aligned} i \circ r : S^{m-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow S^{m-1} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Apesar de  $i \circ r \neq id_{S^{m-1} \times \mathbb{R}}$ , podemos construir uma homotopia ligando  $i \circ r$  a  $id_{S^{m-1} \times \mathbb{R}}$ . Considere

$$\begin{aligned} H : (S^{m-1} \times \mathbb{R}) \times [0, 1] &\rightarrow S^{m-1} \times \mathbb{R} \\ ((x, y), t) &\mapsto H((x, y), t) = (x, ty) \end{aligned}$$

Portanto,  $i \circ r$  é homotópica à aplicação identidade de  $id_{S^{m-1} \times \mathbb{R}}$ , logo  $S^{m-1} \times \mathbb{R}$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{m-1}$ .

## 5.2 Invariância por Homotopias

**Definição 5.4.** Se  $f : M \rightarrow N$  é um morfismo de variedades diferenciáveis, temos para cada forma  $\omega$  em  $N$  a forma induzida  $f^*(\omega) = f^*\omega$  em  $M$ , chamada o *pull-back* da forma  $\omega$  para  $M$ .

Isto define um operador linear

$$f^* : C^r(N) \rightarrow C^r(M)$$

para cada  $r \in \mathbb{N}$ .

O pull-back é uma chain map, isto é, para toda a  $r$ -forma diferencial  $\omega$ ,  $f^*$  comuta com a diferencial exterior  $d$  :

$$df^*\omega = f^*d\omega.$$

**Exemplo 5.4.** Se  $\omega$  é uma forma fechada, então  $f^*(\omega)$  também o é. Com efeito,

$$d\omega = 0 \Rightarrow d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$$

**Exemplo 5.5.** Se  $\omega$  é uma forma exata então  $f^*(\omega)$  também é exata. Com efeito,

$$\omega = d\alpha \Rightarrow f^*\omega = f^*d\alpha = d(f^*\alpha).$$

Os exemplos (5.4) e (5.5) mostram que  $f^*$  leva formas fechadas em formas fechadas e formas exatas em formas exatas. Logo

$$f^*(Z^r(N)) \subset Z^r(M) \quad \text{e} \quad f^*(B^r(N)) \subset B^r(M).$$

Denotando também o operador linear induzido de  $H^r(N)$  em  $H^r(M)$  por  $f^*$  onde

$$f^*[\omega] := [f^*\omega]$$

chegamos que todo o morfismo de variedades diferenciáveis  $f : M \rightarrow N$  induz um operador linear  $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ .

Além disso tem-se também:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \tag{5.1}$$

$$(Id_M)^* = Id_{H^r(M)} \tag{5.2}$$

Por (5.1), (5.2) concluímos que  $H^r$  é um operador contra-variante<sup>1</sup> de variedades diferenciáveis a grupos abelianos (espaços vetoriais).

**Definição 5.5.** Duas variedades  $M, N$  são difeomorfas se existem dois morfismos  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow M$  com  $f \circ g = Id_N$  e  $g \circ f = Id_M$ .

Veremos no teorema 5.2 que é suficiente que duas variedades tenham o mesmo tipo de homotopia para que seus grupos cohomológicos sejam isomorfos. Em particular, duas variedades difeomorfas têm grupos cohomológicos isomorfos. Antes, porém, façamos uma nova

---

<sup>1</sup>Para maiores detalhes consulte Raul Bott & Loring W. Tu (1982, p.20).

**Definição 5.6.** Sejam  $M$  um espaço topológico e  $U$  um subespaço de  $M$ . Uma aplicação contínua  $r : M \rightarrow U$  chama-se uma *retração*, quando se tem  $r(y) = y$  para todo  $y \in U$ , ou seja, quando  $r|_U = id_U$ .

Uma retração  $r : M \rightarrow U$  é, portanto, uma extensão contínua a  $M$  da aplicação identidade  $U \rightarrow U$ . Toda retração é sobrejetiva.

Quando existe uma retração  $r : M \rightarrow U$  o subespaço  $U$  chama-se um *retrato* do espaço  $M$ .

O teorema a seguir será utilizado para demonstrar um resultado indispensável para a teoria cohomológica, o *teorema da invariância homotópica da cohomologia*, pois nos dá o instrumento básico para calcular a cohomologia em casos concretos (que não sejam exemplos triviais).

**Teorema 5.1.** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $H : U \times [0, 1] \rightarrow N$  é um homotopia (infinitamente) diferenciável entre as aplicações  $f, g : U \rightarrow N$ , então,*

$$f^* = g^* : H^r(N) \rightarrow H^r(U \times [0, 1])$$

para  $r = 0, 1, 2, \dots$

**Demonstração.**

Para o aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  considere o aberto  $U \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

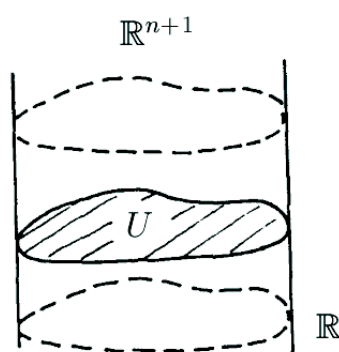


Figura 5.1:  $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Os elementos desse aberto podem ser escritos como

$$(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$$

e toda  $r$ -forma diferenciável  $\omega \in C^r(U \times \mathbb{R})$  pode ser escrita como

$$\omega = dt \wedge \alpha + \beta, \quad (5.3)$$

onde nem  $\alpha \in C^{r-1}(U \times \mathbb{R})$  nem  $\beta \in C^r(U \times \mathbb{R})$  contém a diferencial  $dt$ . Usando a notação que introduzimos previamente, escrevemos

$$\alpha = \alpha(x, t) = \sum_I a_I(x, t) dx_I$$

e

$$\beta = \beta(x, t) = \sum_J a_J(x, t) dx_J$$

com  $I \in \Phi_n(r-1)$  e  $J \in \Phi_n(r)$ .

Agora definimos, para cada  $r = 1, 2, \dots$ , um operador linear

$$K : C^r(U \times \mathbb{R}) \rightarrow C^{r-1}(U),$$

que associa a cada  $r$ -forma

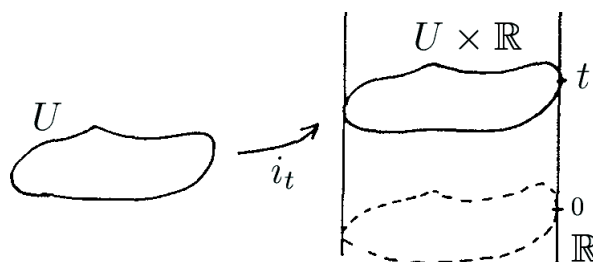
$$\omega = dt \wedge \alpha + \beta$$

a forma diferencial  $K\omega$  de grau  $(r-1)$  definida por:

$$(K\omega)(x) = \int_0^1 \alpha(x, t) dt = \sum_I \left( \int_0^1 a_I(x, t) dt \right) dx_I. \quad (5.4)$$

Esta função elimina a variável  $t$ .

Definimos também, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , a inclusão:



$$i_t : U \rightarrow U \times \mathbb{R}$$

$$x \mapsto i_t(x) = (x, t).$$

Vamos supor provado o

**Lema 5.1.** *Para cada  $\omega \in C^r(U \times \mathbb{R})$  tem-se*

$$Kd\omega + dK\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega,$$

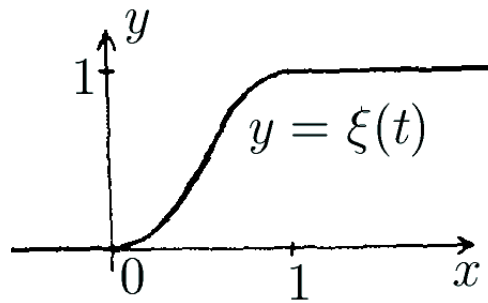
Usando uma função “suavizante”,

$$\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

dada por

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 1, \end{cases}$$

a qual é infinitamente diferenciável,



Função suavizante

vamos substituir  $H : U \times [0, 1] \rightarrow N$  por  $\bar{H} : U \times \mathbb{R} \rightarrow N$  pondo

$$\bar{H}(x, t) = H(x, \xi(t)).$$

Temos ainda que

$$\bar{H}(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \bar{H}(x, 1) = g(x) \quad (5.5)$$

Deste modo

$$\bar{H} \circ i_0 = f \quad \text{e} \quad \bar{H} \circ i_1 = g. \quad (5.6)$$

Considerando o operador linear induzido por  $\bar{H}^*$

$$\bar{H}^* : C^r(N) \rightarrow C^r(U \times \mathbb{R}).$$

Usando a propriedade (5.1) em (5.6) temos:

$$f^* = i_0^* \circ \bar{H}^* \quad \text{e} \quad g^* = i_1^* \circ \bar{H}^*. \quad (5.7)$$

Agora vamos definir o seguinte operador linear

$$L := K \circ \bar{H}^* : C^r(N) \rightarrow C^{r-1}(U).$$

$L$  é o que se chama *homotopia algébrica* entre  $f^*$  e  $g^*$  que satisfaz

$$Ld + dL = f^* - g^*. \quad (5.8)$$

De fato, para cada  $\omega \in C^r(N)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} L(d\omega) + d(L\omega) &= K \circ \bar{H}^*(d\omega) + d(K \circ \bar{H}^*\omega) \\ &= K(d\bar{H}^*\omega) + d(K \circ \bar{H}^*\omega) \\ &\stackrel{\text{lema 5.1}}{=} i_1^* \bar{H}^*\omega - i_0^* \bar{H}^*\omega \\ &\stackrel{5.7}{=} g^*\omega - f^*\omega, \end{aligned}$$

o que prova (5.8).

Assim a homotopia algébrica  $L$  entre  $f^*$  e  $g^*$  foi construída usando a homotopia dada  $H$  entre  $f$  e  $g$ .

Vamos verificar agora que  $f$  e  $g$  induzem a mesma função na cohomologia. Para  $\omega \in Z^r(N)$  tem-se

$$Ld\omega + dL\omega = d(L\omega),$$

pois  $Ld\omega = 0$ . Daí  $f^*(\omega) - g^*(\omega) = d(L\omega)$  é uma forma exata e, portanto, pelo exemplo (4.5), é da classe de cohomologia zero em  $H^r(U)$ . Logo

$$\begin{aligned} f^*(\omega) - g^*(\omega) &\sim 0 \\ f^*(\omega) &\sim g^*(\omega) \end{aligned}$$

isto é,  $f^*(\omega)$  e  $g^*(\omega)$  são cohomólogas.

Com isto concluímos a prova do teorema (5.1) (invariância homotópica para abertos em  $\mathbb{R}^n$ ). ■

Vamos fazer agora a demonstração do

**Lema (5.1)** *Para cada  $\omega \in C^r(U \times \mathbb{R})$  tem-se*

$$Kd\omega + dK\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

**Demonstração.** Vimos em (5.3) que toda  $r$ -forma diferenciável  $\omega \in C^r(U \times \mathbb{R})$  pode ser escrita como:

$$\omega = dt \wedge \alpha + \beta,$$

onde nem  $\alpha \in C^{r-1}(U \times \mathbb{R})$  nem  $\beta \in C^r(U \times \mathbb{R})$  contém o diferencial  $dt$ . Seja  $\omega = dt \wedge \alpha + \beta$ , com

$$\alpha = \alpha(x, t) = \sum_I a_I(x, t) dx_I \quad \text{e} \quad \beta = \beta(x, t) = \sum_J b_J(x, t) dx_J.$$

Então a diferencial exterior de  $\alpha$  e  $\beta$  são dadas por:

$$d\alpha = \sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I + dt \wedge \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial t} dx_I \quad (5.9)$$

$$d\beta = \sum_{J,k} \frac{\partial b_J}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_J + dt \wedge \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dx_J \quad (5.10)$$

Daí segue que:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(dt \wedge \alpha + \beta) = \\ &= d(dt) \wedge \alpha + (-1)^1 dt \wedge d\alpha + d\beta = \\ &= -dt \wedge d\alpha + d\beta = \\ &\stackrel{(5.8)(5.9)}{=} dt \wedge \left( -\sum_{I,j} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I + \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dx_J \right) + \eta, \end{aligned}$$

onde  $\eta = \sum_{J,k} \frac{\partial b_J}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_J$  é o termo que não contém  $dt$  e por isto é ignorado por  $K$ . Agora temos

$$K(d\omega) = \sum_J \left( \int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t} dt \right) dx_J - \sum_{I,j} \left( \int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dt \right) dx_j \wedge dx_I$$



e

$$\begin{aligned}
 d(K\omega) &\stackrel{5.1}{=} d\left(\sum_I \left(\int_0^1 a_I(x,t) dt\right) dx_I\right) = \\
 d(K\omega) &\stackrel{Prop.3.1(6)}{=} \sum_{I,j} \left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dt\right) dx_j \wedge dx_I.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 K(d\omega) + d(K\omega) &= \sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial t} dt\right) dx_J \\
 &= \sum_J (b_J(x,1) - b_J(x,0)) dx_J \\
 &= \sum_J (b_J(x,1)) dx_J - \sum_J (b_J(x,0)) dx_J \\
 &= \beta(x,1) - \beta(x,0) \\
 &= i_1^* \omega - i_0^* \omega.
 \end{aligned}$$

Concluimos a demonstração do lema 5.1. ■

Inicialmente provamos o teorema 5.1 para abertos  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ . Deste modo não foi necessário nos preocuparmos com sistemas de coordenadas. O caso geral será obtido usando a propriedade de variedades diferenciáveis serem retratos de uma vizinhança aberta.

**Teorema 5.2.** (*Invariância homotópica da cohomologia*) *Se  $H : M \times [0,1] \rightarrow N$  é uma homotopia (infinitamente) diferenciável entre as aplicações  $f, g : M \rightarrow N$ , então,*

$$f^* = g^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$$

para  $r = 0, 1, 2, \dots$

Agora vamos demonstrar o caso geral. Nós usamos o fato que para cada variedade diferenciável  $M$  imersa  $\mathbb{R}^m$  existe um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  que contém  $M$  de modo

que  $M$  é um retrato de  $U$ , isto é, existem morfismos de diferenciáveis de variedades  $j$  e  $p$  com o diagrama<sup>2</sup>  $M \xrightarrow{j} U \xrightarrow{p} M$

com

$$p \circ j = Id_M. \quad (5.11)$$

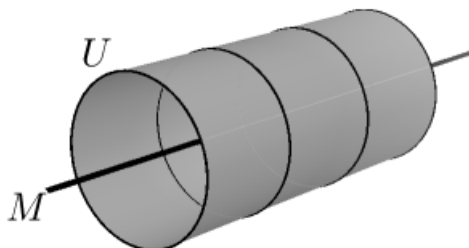


Figura 5.2:

Se agora  $f, g : M \rightarrow N$  são morfismos homotópicos,  $f \simeq g$ , então  $f \circ p = g \circ p$ , onde a última homotopia é obtida compondo a homotopia dada com  $p$ . O caso particular provado no teorema 5.1, para abertos em  $\mathbb{R}^m$ , nos dá

$$(f \circ p)^* = (g \circ p)^*. \quad (5.12)$$

Então

$$\begin{aligned} f^* &= (f \circ (p \circ j))^* \\ &\stackrel{5.1}{=} (p \circ j)^* \circ f^* \\ &\stackrel{5.1}{=} j^* \circ p^* \circ f^* \\ &\stackrel{5.1}{=} j^* \circ (f \circ p)^* \\ &\stackrel{5.12}{=} j^* \circ (g \circ p)^* \\ &\stackrel{5.1}{=} j^* \circ p^* \circ g^* \\ &\stackrel{5.1}{=} (p \circ j)^* \circ g^* \\ &\stackrel{5.11}{=} (Id_M)^* \circ g^* \\ &\stackrel{5.2}{=} g^*. \end{aligned}$$

Pelo teorema (5.2), conclui-se então que  $f^* \circ g^* = Id_{H^r(M)}$  e  $g^* \circ f^* = Id_{H^r(N)}$ , ou seja,  $f$  se chama equivalência homotópica e  $g$  é seu inverso homotópico. O que significa  $H^r(M)$  e  $H^r(N)$  são isomorfos.

<sup>2</sup>O resultado é mais geral:  $U$  é uma vizinhança tubular de  $M$  de modo que localmente  $U = M \times V$  onde  $V \subset \mathbb{R}^{m-n}$  é um aberto. Para nós é suficiente o resultado mencionado.

O teorema de invariância homotópica nos permite calcular a cohomologia de muitos exemplos, que serão enumerados em alguns corolários.

**Corolário 5.1.** *Se  $M$  é contrátil, ou seja, homotopicamente equivalente a um ponto, então  $H^r(M) = \{0\}$  para todo  $r > 0$ .*

**Exemplo 5.6.** *Este é o caso em que  $M$  é um conjunto convexo ou, mais geralmente, quando  $M$  é um conjunto estrelado, isto é, quando existe um ponto  $q \in M$  que pode ser conectado a qualquer ponto de  $M$  por um segmento de reta contido em  $M$ .*

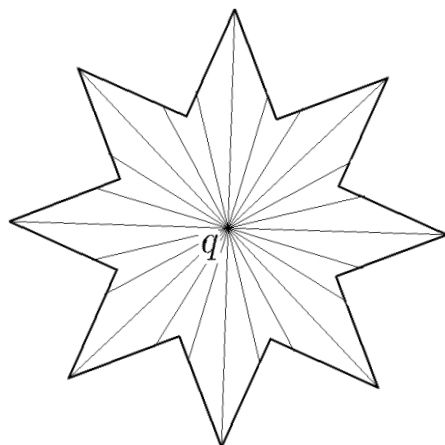


Figura 5.3: Conjunto Estrelado

As funções  $f : M \rightarrow \{p\}$  e  $g : \{p\} \rightarrow M$ , dadas por  $f(x) = p$  e  $g(p) = q$ , são equivalências homotópicas inversas uma da outra visto que

$$\begin{aligned} H : M \times [0, 1] &\rightarrow M \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = (1 - t)x + tq \end{aligned}$$

é uma homotopia que conecta  $g \circ f$  com a identidade de  $M$  e, obviamente,

$$f \circ g = Id_p.$$

Outra consequência direta deste corolário é o seguinte resultado clássico:

**Corolário 5.2.** (*Lema de Poincaré*) Toda forma fechada de grau maior do que zero em uma variedade é localmente exata.

Para provar isto é suficiente tomar um aberto convexo  $U$  na imagem de alguma parametrização local  $X$  e usar o fato de que  $H^r(U) = \{0\}$ .

**Corolário 5.3.** Para qualquer natural  $n > 0$  seja  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Então

$$H^r(M) \cong H^r(S^{n-1}).$$

Considere as funções  $f : M \rightarrow S^{n-1}$  e  $g : S^{n-1} \rightarrow M$  dadas por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  e  $g(y) = y$ .

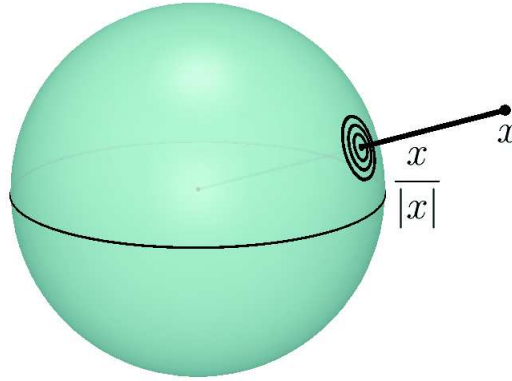


Figura 5.4:  $\mathbb{R}^n$  menos um ponto é homotópico a  $S^{n-1}$ .

Assim  $f \circ g = Id_{S^{n-1}}$  e

$$\begin{aligned} H : M \times [0, 1] &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

é uma homotopia que conecta  $g \circ f$  e  $Id_M$  e pelo teorema 5.2

$$H^r(M) \cong H^r(S^{n-1}).$$

**Exemplo 5.7.** Considere a variedade diferenciável  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Vamos provar que

$$H^2(M) = \{0\}.$$

**Demonstração.** Para  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  vimos no exemplo 4.8 que existe um funcional linear

$$\phi : Z^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

sobrejetivo com núcleo igual a  $B^1(M)$ . Este induz um isomorfismo

$$\bar{\phi} : H^1(M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

A homologia de grau 2 de  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  se anula,  $H^2(M) = \{0\}$ .

Com efeito, pelo corolário (5.3)

$$H^2(M) \cong H^2(S^1).$$

Como a cohomologia de  $S^1$  se anula em graus maiores do que 1 obtemos

$$H^2(M) = \{0\}.$$

■

# Capítulo 6

## A Seqüência de Mayer-Vietoris

Dr. Leopold Vietoris<sup>1</sup> (1891 - 2002), matemático austríaco, é conhecido por suas contribuições a vários ramos da matemática principalmente a topologia. Adquiriu notoriedade por continuar a pesquisar com idade avançada. Ele viveu por 110 anos e 309 dias e se tornou o homem mais velho a viver na Áustria. Vários conceitos matemáticos receberam o nome de Vietoris: *Topologia de Vietoris*, *Homologia de Vietoris*, *teorema da aplicação de Vietoris-Begle* e a *seqüência de Mayer-Vietoris*.

### 6.1 A Seqüência de Mayer-Vietoris

Em topologia algébrica a seqüência Mayer-Vietoris é uma seqüência exata usada para computar grupos de cohomologia .

A seguinte situação é dada: Se tem uma variedade diferenciável que é união de duas variedades e se quer calcular a cohomologia da união sabendo a cohomologia das partes. Obviamente se tem que levar em consideração a intersecção das duas variedades: para a união disjunta é simplesmente o produto cartesiano dos grupos cohomológicos.

Como motivação para a definição da seqüência de Mayer-Vietoris vamos analisar o caso das esferas.

O exemplo (3.3) mostra que a esfera  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  pode ser escrita como união de duas subvariedades contráteis  $U = S^m \setminus \{a\}$  e  $V = S^m \setminus \{b\}$ , onde  $a$  e  $b$  são dois pontos diferentes em  $S^m$ . Este mesmo exemplo mostra que a intersecção  $U \cap V$  é difeomorfa a  $S^{m-1} \times \mathbb{R}$  que por sua vez tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^{m-1}$ , como vimos no exemplo 5.3, assim será possível calcular a cohomologia de

---

<sup>1</sup>The American Mathematical Society, vol. 49, no. 10 (Novembro, 2002)

$S^m$  sabendo a cohomologia de  $S^{m-1}$ .

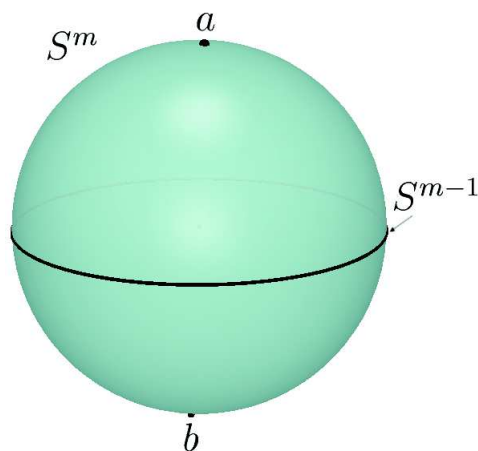


Figura 6.1: A esfera como união de dois abertos

**Lema 6.1.** *Seja  $M = U \cup V$ . A seqüência*

$$0 \rightarrow C^r(M) \xrightarrow{\alpha} C^r(U) \oplus C^r(V) \xrightarrow{\beta} C^r(U \cap V) \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

na qual a primeira função é dada por

$$\alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = (i_u^* \omega, i_v^* \omega), \quad (6.2)$$

onde  $i_u, i_v$  são as inclusões de  $U, V$  em  $M$ ,

e a segunda função é dada por

$$\beta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V} \quad (6.3)$$

é exata.

**Demonstração.** Para provar que a seqüência (6.1) é exata, o faremos em três partes:

1. Em  $C^r(M)$ : Da definição de  $\alpha$  obtemos que ela é injetiva e, portanto, o núcleo de  $\alpha$  é igual a  $\{0\}$ , que é a imagem do morfismo zero da esquerda.
2. Em  $C^r(U) \oplus C^r(V)$ : É direto que  $\beta \circ \alpha = 0$ , pois

$$\beta \circ \alpha(\omega) = \beta(\omega|_U, \omega|_V) = (\omega|_U)|_{U \cap V} - (\omega|_V)|_{U \cap V} = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0.$$

Logo  $\ker \beta \supset \operatorname{im} \alpha$ . Por outro lado, se  $\beta(\omega_1, \omega_2) = 0$ , então  $\omega_1|_{U \cap V} = \omega_2|_{U \cap V}$  e, conseqüentemente a forma  $\omega$  dada por

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) = \omega|_U, & \text{se } x \in U \\ \omega_2(x) = \omega|_V, & \text{se } x \in V \end{cases}$$

está bem definida e a sua imagem por  $\alpha$  é exatamente  $(\omega_1, \omega_2)$ , donde  $\ker \beta \subset \operatorname{im} \alpha$ . Assim mostramos que o núcleo de  $\beta$  é igual a imagem de  $\alpha$ .

3.  $C^r(U \cap V)$ : Provar que a seqüência é exata em  $C^r(U \cup V)$  é o mesmo que provar que  $\beta$  é sobrejetivo. Para demonstrar isto nós consideramos uma partição da unidade subordinada  $\{U, V\}$  como recobrimento aberto de  $M$ . Esta partição consiste em duas funções (infinitamente) diferenciáveis:

$$\phi_U, \phi_V : M \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que  $\phi_U(x) + \phi_V(x) = 1$  para todo o  $x$ . Além disso, o suporte<sup>2</sup> de  $\phi_V$  está contido em  $V$  e o suporte de  $\phi_U$  está contido em  $U$ .

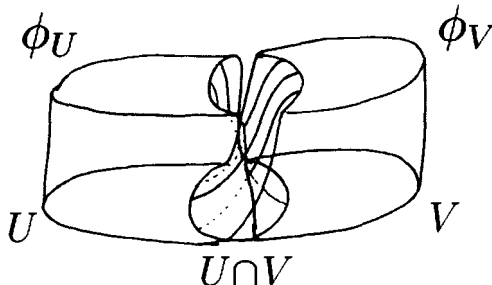


Figura 6.2:

Definimos, para cada  $\omega \in C^r(U \cap V)$ , duas formas  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em  $U$  e em  $V$ , respectivamente, do seguinte modo:

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \phi_U(x) \cdot \omega(x) & \text{se } x \in U \cap V \\ 0 & \text{se } x \in U \setminus (U \cap V) \end{cases},$$

$$\omega_2(x) = \begin{cases} -\phi_V(x) \cdot \omega(x) & \text{se } x \in U \cap V \\ 0 & \text{se } x \in V \setminus (U \cap V) \end{cases}.$$

<sup>2</sup>Se  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , então o suporte de  $\phi$  é definido como o fecho do conjunto  $\phi^{-1}(\mathbb{R} - 0)$  e denotado por  $\operatorname{supp} \phi$ . Assim, se  $x \notin \operatorname{supp} \phi$ , então existe uma vizinhança de  $x$  na qual  $\phi \equiv 0$ .



Agora  $\beta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V} = \phi_U \omega + \phi_V \omega = \omega$ . Portanto  $\beta$  é sobrejetivo e a seqüência é exata em  $C^r(U \cup V)$ .

Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  comutam com a diferencial exterior:  $\alpha d = d\alpha$  e  $\beta d = d\beta$ , ou seja, são chain maps.

Então a seqüência longa exata associada em homologia a seqüência curta exata (6.1), dada pelo teorema 4.1, é a **seqüência de Mayer-Vietoris**:

$$\dots \rightarrow H^r(M) \xrightarrow{\alpha} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{\beta} H^r(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^{r+1}(M) \rightarrow \dots$$

Aqui  $\Delta$  é definido como segue: Seja  $[\omega] \in H^r(U \cap V)$ , onde  $\omega \in C^r(U \cap V)$  é dada por  $\omega = \beta(\omega_1, \omega_2)$  com  $\omega_1, \omega_2$  obtidos conforme a etapa 3 acima. Assim

$$0 = d\omega = d\beta(\omega_1, \omega_2) = d\omega_1|_{U \cap V} - d\omega_2|_{U \cap V}.$$

Isto é,  $d\omega_1$  e  $d\omega_2$  coincidem em  $U \cap V$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{r+1}(M) & \xrightarrow{\alpha} & C^{r+1}(U) \oplus C^{r+1}(V) & \xrightarrow{\beta} & C^{r+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ 0 & \longrightarrow & C^r(M) & \xrightarrow{\alpha} & C^r(U) \oplus C^r(V) & \xrightarrow{\beta} & C^r(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Definimos uma forma  $\bar{\omega} \in C^{r+1}(M)$  dada por  $\bar{\omega}|_V = d\omega_2$ .

$$\bar{\omega}(x) = \begin{cases} \bar{\omega}_1(x) = d\omega_1|_U & \text{se } x \in U \\ \bar{\omega}_2(x) = d\omega_2|_V & \text{se } x \in V \end{cases}.$$

É claro que  $\bar{\omega}$  é fechada.

Por definição

$$\Delta([\omega]) := [\bar{\omega}].$$

Com esta definição obtemos a seqüência de Mayer-Vietoris como indica o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
[\bar{\omega}] \in H^{r+1}(M) & \longrightarrow & \dots & & & & \\
\uparrow & & & \longleftarrow \Delta & & & \uparrow \\
H^r(M) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^r(U) \oplus H^r(V) & \xrightarrow{\beta^*} & [\omega] \in H^r(U \cap V) & & \\
\uparrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & & 
\end{array}$$

■

## 6.2 Cálculo da Cohomologia com a Seqüência de Mayer-Vietoris

Vamos calcular  $H^r(S^m)$ .

Para  $S^1$  : No exemplo 5.1 vimos que  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tem o mesmo tipo de homotopia  $S^1$ . Vimos ainda no exemplo 4.8 que  $H^0(U) \cong \mathbb{R}$  e  $H^1(U) \cong \mathbb{R}$ . Portanto, pelo teorema de invariância homotópica (teorema 5.2),

$$H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$$

$$H^1(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

Para  $S^2$  : Como nós vimos anteriormente a esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  pode ser escrita como a união de duas subvariedades contráteis  $U = S^2 \setminus a$  e  $V = S^2 \setminus b$ , onde  $a$  e  $b$  são dois pólos opostos em  $S^2$ . A intersecção  $U \cap V$  é difeomorfa a  $S^1 \times \mathbb{R}$  (tomar o equador por exemplo e ver que os meridianos são difeomorfos a  $\mathbb{R}$  e têm portanto mesmo tipo de homotopia que  $S^1$  (contrair ao longo da cópia de  $\mathbb{R}$ ). Substituindo  $H^r(U \cap V)$  por  $H^r(S^1)$  temos na seqüência de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{\Delta} & H^0(S^2) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(U) \oplus H^0(V) & \xrightarrow{\beta} & H^0(S^1) \xrightarrow{\Delta} \\
& & \xrightarrow{\Delta} & H^1(S^2) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(U) \oplus H^1(V) & \xrightarrow{\beta} & H^1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \\
& & \xrightarrow{\Delta} & H^2(S^2) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(U) \oplus H^2(V) & \xrightarrow{\beta} & H^2(S^1) \xrightarrow{\Delta} 0.
\end{array}$$

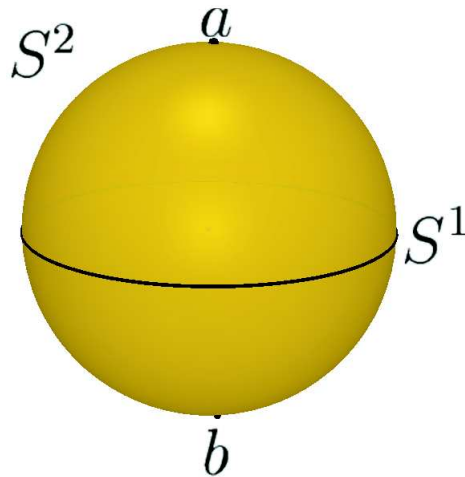


Figura 6.3: Mayer-Vietoris para  $S^2$

Como vimos no lema 3.6, toda  $r$ -forma linear se anula em um espaço de dimensão menor que  $r$  pois, neste caso,  $r$  vetores são sempre linearmente dependentes. O lema (3.8) mostra que a dimensão do espaço tangente para cada ponto de uma variedade tem a mesma dimensão da variedade, assim o espaço das  $r$ -formas diferenciáveis é trivial se  $r$  é maior que a dimensão da variedade diferenciável. A cohomologia também é nula.

É por isso que a seqüência é zero para grau maior do que ou igual 3. O último termo se anula pela mesma razão, já que  $S^1$  tem dimensão 1. Como  $U$  e  $V$  são contráteis, pelo corolário (5.1), eles têm cohomologia nula em dimensão 1 e 2, então  $H^1(U) \oplus H^1(V)$  e  $H^2(U) \oplus H^2(V)$  são zero. Nós alcançamos o sonho de qualquer topólogo algébrico: Dois termos que contém a outros dois em uma seqüência exata se anulam, então o morfismo entre o dois termos contidos é um isomorfismo, em nosso caso  $H^1(S^1) \cong H^2(S^2)$ .

Como todas as variedades consideradas são conexas, a cohomologia de grau zero é isomorfa a  $\mathbb{R}$ . Então o lado esquerdo da seqüência de Mayer-Vietoris se lê:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \dots ,$$

onde  $\mathbb{R}$  representa a espaço das funções constantes. Portanto o primeiro morfismo é dado por  $\alpha : x \mapsto (x, x)$ , já que é a restrição da função constante  $x$  em  $S^2$  aos subconjuntos  $U$  e  $V$ . Do mesmo modo o morfismo

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta} H^0(S^1)$$

está definido por  $\beta : (x, y) \mapsto x - y$  e então é sobrejetivo. Isto significa que a sua imagem é todo o  $H^0(S^1)$  e, como a seqüência é exata, isto implica que  $H^0(S^1)$  é o núcleo da aplicação

$$H^0(S^1) \xrightarrow{\Delta} H^1(S^2).$$

Por isso  $\Delta = 0$  têm como imagem o espaço trivial  $\{0\}$  que por sua vez é o núcleo da aplicação

$$H^1(S^2) \xrightarrow{\alpha} H^1(U) \oplus H^1(V).$$

Mas já tínhamos visto que esta aplicação é zero porque  $H^1(U) \oplus H^1(V)$  se anula. Então o núcleo de  $\alpha$  é todo o  $H^1(S^2)$  e, conseqüentemente, o espaço é trivial. Resumindo temos que:

$$H^r(S^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } r = 0, 2 \\ 0 & \text{se } r = 1 \end{cases}.$$

O mesmo argumento permite calcular a cohomologia de  $S^m$  para qualquer  $m$ .  $S^m$  é escrita como união de dois conjuntos contráteis  $U$  e  $V$  e a seqüência de Mayer-Vietoris é obtida para  $r > 0$

$$0 \rightarrow H^{r-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{\cong} H^r(S^m) \rightarrow 0.$$

Para dimensão zero, com o mesmo argumento se conclui que

$$H^r(S^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } r = 0, m \\ 0 & \text{se } r \notin \{0, m\} \end{cases}.$$

Um gerador para  $H^2(S^2)$  é qualquer forma diferencial  $\omega$  de grau dois em  $S^2$  com  $\int_{S^2} \omega \neq 0$ . Para isto se nota que qualquer forma de grau máximo é fechada. Se  $\omega = d\alpha$  então  $\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\alpha$ . Pelo teorema de Stokes<sup>3</sup> temos

---

<sup>3</sup>(Teorema de Stokes). Se  $\omega$  é uma  $(n-1)$  forma com suporte compacto sobre uma variedade orientada  $M$  de dimensão  $n$  e se  $\partial M$  com a orientação induzida por  $M$ , então  $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ . (BOTT, R.;TU, L. W., 1982, p.32-3).

$$\int_{S^2} d\alpha = \int_{\partial S^2} \alpha = \int_{\emptyset} \alpha = 0$$

pois  $S^2$  não tem bordo.

Analogamente qualquer forma de grau máximo  $n$  em uma variedade  $M$  com  $H^n(M) \cong \mathbb{R}$  é uma base de  $H^n(M)$  se  $\int_M \omega \neq 0$ .

# Capítulo 7

## Teorema da Separação de Alexander

O Teorema de Jordan diz que para toda curva homeomorfa a  $S^1$  no plano o complemento tem duas componentes tendo como fronteira comum a curva dada.

A demonstração de Jordan é muito complicada e alguns até acreditavam que tinha erros. Em 1910, L. E. J. Brouwer (1911, p. 314) prova o caso mais geral das esferas  $S^n$  do qual o Teorema da Curva de Jordan segue como corolário. Por causa desta generalização e como uma homenagem, o Teorema de Brouwer é conhecido como Teorema de Separação de Jordan-Brouwer.

O resultado que apresentamos neste capítulo é ainda mais geral, e foi demonstrado por J. W. Alexander, em 1922. O Teorema da Separação de Alexander, como ficou conhecido, foi provado em 1993 de forma muito elegante por A. Dold (1993, p.856) só usando invariância homotópica e seqüência de Mayer-Vietoris. Deste teorema obtém-se, como corolário, os teoremas de Jordan-Brouwer e, conseqüentemente, o clássico Teorema de Jordan.

### 7.1 Vizinhanças Tubulares

Agora vamos construir vizinhanças tubulares ao redor de variedades diferenciáveis. Antes recordaremos alguns fatos:

Dois vetores  $w, v \in \mathbb{R}^n$  são ortogonais (normais), se o produto interno<sup>1</sup> é nulo, ou seja,

$$\langle w, v \rangle = 0. \tag{7.1}$$

---

<sup>1</sup>O produto interno está definido (LIMA, 2000, p.3).

**Definição 7.1.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ .

Um vetor  $w \in \mathbb{R}^n$  é dito *normal* à  $M$  em  $p$  quando  $\langle w, v \rangle = 0$  para todo  $v \in T_p M$ .

**Definição 7.2.** O espaço vetorial de todos os vetores normais a  $M$  em um ponto  $p$  será denotado por  $T_p M^\perp$ .

**Definição 7.3.** A bola normal  $B^\perp(p, \epsilon)$  está definida como

$$B^\perp(p, \epsilon) = \{w \in T_p M^\perp, |w| < \epsilon\}$$

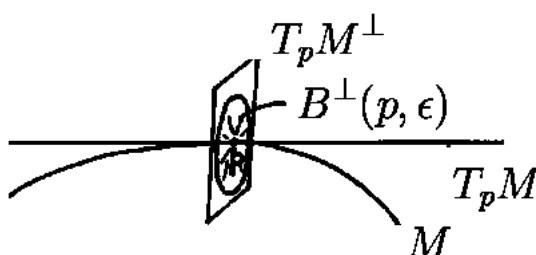


Figura 7.1: Bola normal a  $M$  em  $p$ .

Como  $M$  é variedade, para cada ponto  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e um homeomorfismo  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , onde  $U_0$  é um aberto em  $\mathbb{R}^m$  e  $\varphi$  é  $C^\infty$  é chamada uma parametrização local de  $M$ .

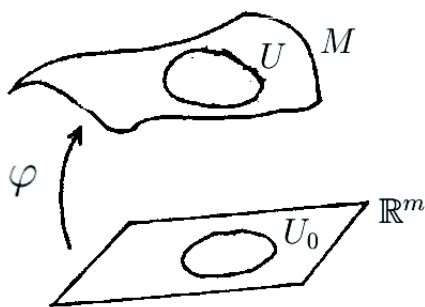


Figura 7.2: Parametrização local de  $M$ .

$d\varphi_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetiva para todo  $x \in U_0$ .

$$d\varphi_p(\mathbb{R}^m) = T_p M \tag{7.2}$$

Agora podemos enunciar o teorema da vizinhança tubular local:

**Teorema 7.1.** (*Vizinhança tubular local*) Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Para todo  $p \in M$  existe um aberto  $U \subset M$  que contém  $p$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $q \neq q' \in U$  as bolas normais de raio  $\epsilon$  são disjuntas, isto é,  $B^\perp(q, \epsilon) \cap B^\perp(q', \epsilon) = \emptyset$ . A vizinhança  $V_\epsilon(U) = \bigcup_{q \in U} B^\perp(q, \epsilon)$  se chama vizinhança tubular local de  $p$ .

**Demonstração.**

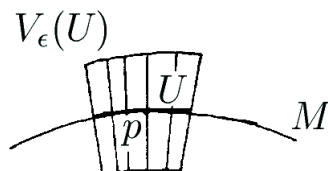


Figura 7.3: vizinhança tubular local

Para todo  $p \in M$  existem<sup>2</sup>  $U \ni p$  em  $M$  e campos (infinitamente) diferenciáveis

$$w_1, \dots, w_{n-m} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com  $w_1(p), \dots, w_{n-m}(p) \in T_p M^\perp$  e

$$\langle w_i(q), w_j(q) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \forall q \in U.$$

Seja agora  $Y : U_0 \rightarrow U$  um parametrização local com  $Y(p_0) = p$ . Definimos  $\mathbb{Y} : U_0 \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\mathbb{Y}(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-m}) = Y(x) + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i w_i(Y(x)).$$

Então  $\mathbb{Y}'(p_0, 0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, porque  $Y(p_0)$  é um isomorfismo sobre  $T_p M$ . Portanto

$$\frac{\partial \mathbb{Y}(p, 0)}{\partial x_i}, \quad \text{para } j = 1, \dots, m,$$

é um conjunto de vetores linearmente independente que gera  $T_p M$  e

$$\frac{\partial \mathbb{Y}(p, 0)}{\partial x_i} = w_{j-m}(p), \quad \text{para } m < j \leq n,$$

forma um conjunto linearmente independente de vetores em  $T_p M^\perp$ . Portanto

$$\left\{ \frac{\partial \mathbb{Y}(p, 0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbb{Y}(p, 0)}{\partial x_n} \right\}$$

<sup>2</sup>Este resultado está demonstrado em [20]



é um conjunto com  $n$  vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$  e, portanto, forma uma base para  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo teorema da aplicação inversa, existe uma vizinhança aberta de  $(p_0, 0)$  da forma

$$V(U'_0, \epsilon) = U'_0 \times B(0, \epsilon)$$

tal que

$$\mathbb{Y} : V(U'_0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é um difeomorfismo sobre um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Mudando o notação obtemos:

$$\mathbb{Y} : U_0 \times B(0, \epsilon) \longrightarrow V_\epsilon(U) = \bigcup_{q \in U} B^\perp(q, \epsilon),$$

onde  $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ ,  $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  e  $Y(U_0) = U$ .

Assim temos que  $B^\perp(q, \epsilon) \cap B^\perp(q', \epsilon) = \emptyset$  para  $q \neq q'$ , pois as pré-imagens por  $\mathbb{Y}$  são disjuntas. Para cada ponto  $z \in V_\epsilon(U)$  existe um único  $q \in U$  com  $z \in B^\perp(q, \epsilon)$ . Isto define uma projeção

$$\pi : V_\epsilon(U) \rightarrow U$$

que é  $C^\infty$  pois é a composição de três aplicações  $C^\infty$ :  $\mathbb{Y}$ ; a projeção  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{Y}^{-1}$ .

■

Provaremos teorema da vizinhança tubular global para o caso de  $M$  ser compacta.

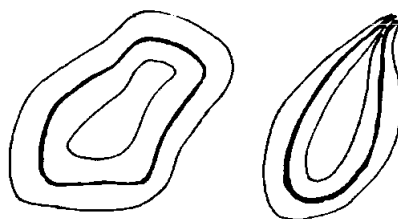


Figura 7.4: Vizinhança Tubular global

**Teorema 7.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável compacta. Então existe  $\epsilon > 0$  tal que, para  $q \neq p \in M$ , tem-se que*

$$B^\perp(q, \epsilon) \cap B^\perp(p, \epsilon) = \emptyset.$$

Além disso  $V_\epsilon(U) = \bigcup_{q \in U} B^\perp(q, \epsilon)$  é uma vizinhança aberta de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\pi : V_\epsilon(M) \rightarrow M$  é  $C^\infty$ .

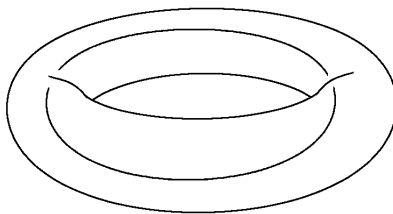


Figura 7.5: Vizinhança Tubular global

### Demonstração.

Vamos demonstrar este resultado por *reductio ad absurdum*:

Se não existir  $\epsilon$  tal como no enunciado, então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\exists x_n \in B^\perp(p_n, \frac{1}{n}) \cap B^\perp(q_n, \frac{1}{n})$$

com  $p_n \neq q_n \in M$ . Levando em consideração que  $M$  é compacto e passando a subsequências, se necessário, temos que existe  $p \in M$  com  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow p$ , pois

$$|p_n - q_n| < \frac{2}{n}.$$

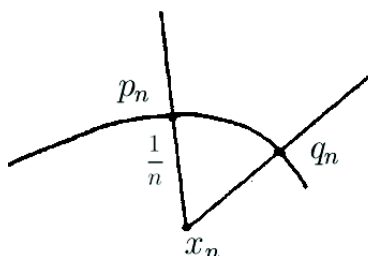


Figura 7.6:  $p_n$  e  $q_n$  convergiram ao mesmo  $p$ .

Então também  $x_n \rightarrow p$ , o que é uma contradição, pois existiria um  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in B^\perp(p, \frac{1}{N})$  para todo  $n > N$  e, pelo teorema da vizinhança tubular local (7.1), existe uma vizinhança tubular local  $V_\epsilon(U)$  de  $p$  de modo que as bolas normais de raio  $\epsilon$  não se intersectam.

Observe que, se  $z \in V_\epsilon$ , então  $\pi(z)$  é o ponto (único) de  $M$  mais próximo de  $z$ .

Apesar de não termos provado o teorema (7.2) para variedades diferenciais não compactas, observamos que, neste caso, o raio das bolas normais é uma função  $\epsilon(x) > 0$  para  $x \in M$ .

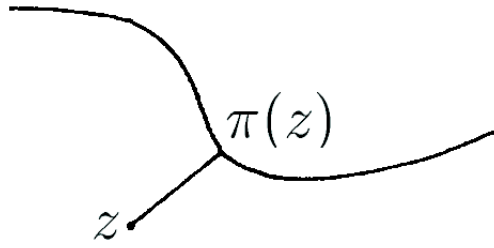


Figura 7.7:  $\pi(z)$  é o ponto de  $M$  mais próxima a  $z$ .

■

## 7.2 Aproximação por Funções Contínuas

Nesta seção vamos demonstrar o *teorema de aproximação* no qual aproximamos funções infinitamente diferenciáveis por funções contínuas.

*O Teorema de Aproximação*

Seja  $f : M \rightarrow N$ . Então  $f$  induz uma função  $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$  com  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ,  $Id_M^* = Id_{H^r(M)}$  e  $f \simeq g$  então  $f^* = g^*$ , onde  $\simeq$  indica que as funções são homotópicas.

Donde se deduz que uma equivalência homotópica  $f : M \rightarrow N$  induz um isomorfismo  $f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$ . Decorre do Teorema de Aproximação a *invariância da cohomologia por homeomorfismos* que será utilizada na demonstração do Teorema da Separação de Alexander. As proposições a seguir são utilizadas para obtê-lo.

**Proposição 7.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Para toda função real contínua positiva  $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  existe  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g \in C^\infty$ , tal que*

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon(x) \quad \forall x \in M.$$

**Demonstração.**

Seja  $M = \bigcup_{p \in M} V_p$ , onde  $V_p$  é uma vizinhança aberta de  $p$  de modo que para todo  $x \in V_p$  se cumpre

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon(x). \tag{7.3}$$

Tais vizinhanças podem ser obtidas pondo por exemplo

$$r(x) = |f(x) - f(p)| - \epsilon(x)$$

e vendo que  $r(p) < 0$  e que  $r$  é contínua.

Existe uma partição da unidade localmente finita estritamente subordinada a cobertura  $M = \bigcup_{p \in M} V_p$ . Isto significa que para cada  $p \in M$  há uma função  $C^\infty$  positiva  $\xi_p : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\text{supp}(\xi_p) \subset V_p$  e

$$\sum_{p \in M} \xi_p(x) = 1. \quad (7.4)$$

Além disso é localmente finita, o que significa<sup>3</sup> que para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  de modo que  $U$  intersecta somente uma quantidade finita de suportes de  $\xi_q$ . Assim podemos escrever

$$f(x) = \sum_{p \in M} \xi_p(x) f(p), \quad (7.5)$$

Seja  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$g(x) := \sum_{p \in M} \xi_p(x) f(p). \quad (7.6)$$

Como (7.6) é localmente uma soma finita de funções  $C^\infty$ , então  $g$  também é  $C^\infty$ . De (7.5) e (7.6) temos para cada  $x \in M$ :

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{p \in M} \xi_p(x) |f(x) - f(p)| < \sum_{p \in M} \xi_p(x) \epsilon(x) \stackrel{(7.4)}{=} \epsilon(x).$$

■

**Proposição 7.2.** *O resultado da proposição (7.1) é válido para  $f : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$ . Assim, se  $f : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$  é contínua temos que para toda função real contínua positiva  $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  existe  $g : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g \in C^\infty$ , tal que*

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon(x) \quad \forall x \in M.$$

<sup>3</sup>(Este fato também implica que só há uma quantidade enumerável de funções  $\xi_p$  não nulas, mas isso não vamos precisar.)

**Demonstração.** Seja  $V_\delta(N)$  uma vizinhança tubular de  $N$ .

Podemos supor que

$$\epsilon(x) < d(f(x), \mathbb{R}^n - V_\delta(N)) \quad (7.7)$$

Para todo o  $z \in \mathbb{R}^n$  com  $|z - f(x)| < \epsilon(x)$  temos que o segmento de reta ligando  $z$  a  $f(x)$ , denotado por  $[z, f(x)]$ ,

$$[z, f(x)] = (1 - t)z + tf(x), \quad t \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (7.8)$$

satisfaz

$$[z, f(x)] \subset V_\delta(N), \quad (7.9)$$

Seja  $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função  $C^\infty$  da proposição 7.1 com

$$|h(x) - f(x)| < \frac{\epsilon(x)}{2} \quad \forall x \in M. \quad (7.10)$$

Então a imagem de  $h$  está em  $V_\delta(N)$ . Seja  $g : M \rightarrow N$  definida por

$$g(x) = \pi(h(x)). \quad (7.11)$$

como  $g$  é obtida pela composição de funções  $C^\infty$  então  $g$  é  $C^\infty$ . Além disso satisfaz

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - h(x)| + |h(x) - f(x)|, \quad (7.12)$$

Como  $\pi(h(x))$  é o ponto mais próximo de  $h(x)$  temos:

$$|g(x) - h(x)| = |\pi(h(x)) - h(x)| \leq |h(x) - f(x)| \quad (7.13)$$

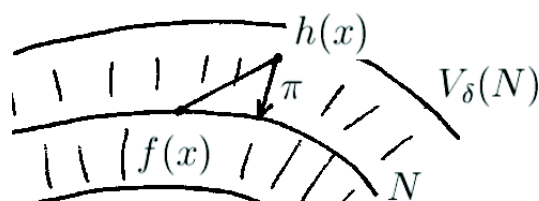


Figura 7.8: Aproximamos  $f$  com  $h$  e portanto com  $\pi \circ h$ .

logo, substituindo (7.13) em (7.12) e usando (7.10)

$$|g(x) - f(x)| < \frac{\epsilon(x)}{2} + \frac{\epsilon(x)}{2} = \epsilon(x). \quad (7.14)$$

■

## Morfismos em cohomologia induzidos por funções contínuas

**Proposição 7.3.** *Toda aplicação contínua  $f : M \longrightarrow N$  é homotópica a uma aplicação  $C^\infty$  de  $M$  para  $N$ .*

**Demonstração.** Seja  $g$  como na proposição 7.2. Então o segmento de reta  $[g(x), f(x)]$  está em  $V_\delta(N)$ ,  $\forall x \in M$ .

A homotopia  $H : M \times [0, 1] \longrightarrow N$  definida por

$$H(x, t) := \pi((1 - t)f(x) + tg(x))$$

conecta  $f$  a  $g$  . ■

**Proposição 7.4.** *Transitividade de homotopias  $C^\infty$ . Seja  $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} g$ , o que significa que existe uma homotopia  $C^\infty$  que conecta  $f$  e  $g$ . Além disso se  $g \stackrel{C^\infty}{\simeq} h$ , então  $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} h$ .*

**Demonstração.** De acordo com o enunciado existem

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow N \quad \text{e} \quad K : M \times [0, 1] \longrightarrow N$$

com

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & K(x, 0) &= g(x) \\ H(x, 1) &= g(x) & K(x, 1) &= h(x) \end{aligned}$$

Definimos

$$L = L_{(H,K)} : M \times [0, 1] \longrightarrow N$$

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (7.15)$$

$L$  é uma homotopia contínua que conecta  $f$  a  $h$  e é  $C^\infty$  para todo  $t$  exceto  $t = \frac{1}{2}$ .

Modificaremos  $H$  e  $K$  de modo que

$$H(x, t) = g(x) \quad \text{para } t \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad K(x, t) = g(x) \quad \text{para } t \leq \frac{1}{2}.$$

Para isto consideremos as funções auxiliares  $\xi$  e  $\eta$  com

$$\xi(x, t) = \begin{cases} \xi(t) = 1 & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \\ \xi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

e

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \eta(t) = 1 & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \eta(t) = 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

substituimos  $H$  por  $\bar{H}$  com  $\bar{H}(x, t) = H(x, \xi(t))$  e  $K$  por  $\bar{K}$  com  $\bar{K}(x, t) = K(x, \eta(t))$  então

$$L = L_{(\bar{H}, \bar{K})}$$

é uma homotopia  $C^\infty$  que conecta  $f$  a  $h$ . ■

**Proposição 7.5.** *Se  $f, g : M \rightarrow N$  são funções  $C^\infty$  e  $f \simeq g$ , então  $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} g$ . Ou seja, se duas funções  $C^\infty$  são homotópicas então são  $C^\infty$ -homotópicas.*

Existe  $\bar{H} : M \times [0, 1] \rightarrow N$  contínua com  $\bar{H}(x, 0) = f(x)$  e  $\bar{H}(x, 1) = g(x)$ . Estendemos constantemente a função a  $M \times \mathbb{R}$  e obtemos uma função  $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  com  $H(x, t) = f(x)$  para  $t \leq 0$  e  $H(x, t) = g(x)$  para  $t \geq 1$ . Seja  $V_\delta(N)$  uma vizinhança tubular de  $N$ . Tomemos  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com

$$0 < \epsilon < d(H(x, t), \mathbb{R}^n - V_\delta(N)) \quad (7.16)$$

para todo  $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ . Pela proposição 7.2, existe uma função  $C^\infty$

$K : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  com

$$|K(x, t) - H(x, t)| < \epsilon(x, t) \quad \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Então o segmento  $[H(x, t), K(x, t)] \subset V_\delta(N)$  para todo  $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ .

Definindo  $\bar{f}, \bar{g} : M \rightarrow N$  como

$$\bar{f} = K(x, 0) \quad \text{e} \quad \bar{g} = K(x, 1),$$

temos  $K|_{M \times [0, 1]}$  é uma homotopia  $C^\infty$  entre  $f$  e  $g$ . Além disso  $[f(x), \bar{f}(x)] \subset V_\delta(N) \quad \forall x$  assim que  $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} \bar{f}$  e também  $[g(x), \bar{g}(x)] \subset V_\delta(N)$  assim  $g \stackrel{C^\infty}{\simeq} \bar{g}$ . Pela

proposição (7.4) temos a transitividade de homotopias  $C^\infty$  donde se deduz que  $f \stackrel{C^\infty}{\simeq} g$ .

Agora faremos a demonstração do Teorema de Aproximação por funções contínuas.

**Teorema 7.3.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  contínua. Então  $f$  induz uma função*

$$f^* : H^r(N) \rightarrow H^r(M)$$

com  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ,  $Id_M^* = Id_{H^r(M)}$  e  $f \simeq g$  então  $f^* = g^*$ .

Pela proposição 7.3 existe alguma função  $g \in C^\infty$  que é homotópica a  $f$ . Definimos  $f^* := g^*$ . As propriedades do enunciado se demonstram facilmente usando as últimas proposições.

Este teorema nos dá uma ligação importante para realizarmos a prova do Teorema da Separação de Alexander, já que variedades homeomorfas são homotopicamente equivalentes e portanto têm grupos de cohomologia isomorfos.

## 7.3 Teorema de Jordan-Brouwer-Alexander

Para demonstrar o teorema nós faremos uso de dois lemas:

**Lema 7.1.** *Se  $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$  são subconjuntos fechados homeomorfos, então  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times F_2)$  e  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (F_1 \times \{0\})$  são homeomorfos.*

**Demonstração.** Como  $F_1, F_2$  são homeomorfos então existem homeomorfismos inversos

$$\mathbf{X} : F_1 \rightarrow F_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} : F_2 \rightarrow F_1, \tag{7.17}$$

Pelo teorema de Tietze<sup>4</sup> existem

$$\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

---

<sup>4</sup>Teorema de Tietze [21]: Sejam  $E$  um espaço normal e  $F$  um subconjunto fechado de  $E$ .

- (i) Qualquer aplicação contínua de  $F$  em  $[a, b]$  pode ser estendida a uma aplicação contínua de  $E$  em  $[a, b]$ ;
- (ii) Qualquer aplicação contínua de  $F$  em  $\mathbb{R}$  pode ser estendida a uma aplicação contínua de  $E$  em  $\mathbb{R}$ .



extensões contínuas de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ .

Definimos as aplicações  $h, k : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto h(x, y) = (x, y - \mathcal{Y}(x)) \\ &\text{e} \\ k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto k(x, y) = (x - \mathcal{X}(y), y). \end{aligned}$$

É fácil ver que  $h$  e  $k$  são homeomorfismos com inversos dados por

$$h^{-1}(x, y) = (x, y + \mathcal{Y}(x)) \quad \text{e} \quad k^{-1}(x, y) = (x + \mathcal{X}(y), y)$$

Então

$$k \circ h^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

É um homeomorfismo que transforma  $F_1 \times \{0\}$  em  $\{0\} \times F_2$ , pois para  $x \in F_1$  temos que  $h^{-1}(x, 0) = (x, \mathcal{Y}(x))$  já que  $\mathcal{Y}$  é uma extensão de  $Y$ . Daqui temos que

$$(k \circ h^{-1})(x, 0) = (x - \mathcal{X}(\mathcal{Y}(x)), \mathcal{Y}(x)) = (0, \mathcal{Y}(x)) \in \{0\} \times F_2. \quad (7.18)$$

Analogamente temos que  $(k \circ h^{-1})^{-1} = h \circ k^{-1}$  é um homeomorfismo que transforma  $\{0\} \times F_2$  em  $F_1 \times \{0\}$  pois para  $y \in F_2$  temos que  $k^{-1}(0, y) = (\mathcal{X}(y), y)$ . Logo

$$(h \circ k^{-1})(0, y) = (\mathcal{X}(y), y - \mathcal{Y}(\mathcal{X}(y))) = (\mathcal{X}(y), 0) \in F_1 \times \{0\}. \quad (7.19)$$

Pelos homeomorfismos dados em (7.18) e (7.19) concluímos que  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (\{0\} \times F_2)$  e  $\mathbb{R}^{2n} \setminus (F_1 \times \{0\})$  são homeomorfos. ■

**Lema 7.2.** *Para todo o  $F \subset \mathbb{R}^n$  fechado tem-se que*

$$\bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \cong \bar{H}^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F)$$

**Demonstração.** Considere

$$U = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid x \notin F \text{ ou } t > 0\}$$

e

$$V = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid x \notin F \text{ ou } t < 0\}.$$

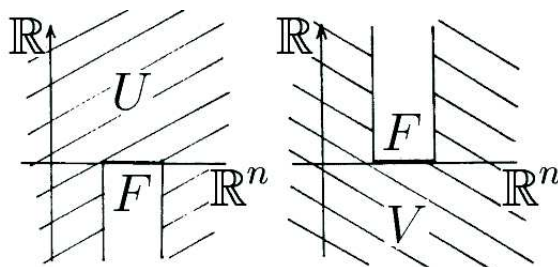


Figura 7.9:  $U$  e  $V$  são abertos contráteis em  $\mathbb{R}^{n+1}$

Tem-se que  $U$  e  $V$  são contráteis e

$$U \cup V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus F \tag{7.20}$$

e

$$U \cap V = (\mathbb{R}^n \setminus F) \times \mathbb{R}. \tag{7.21}$$

O conjunto dado em (7.21) tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^n \setminus F$ .

A seqüência de Mayer-Vietoris nos dá:

$$\bar{H}^r(U) \oplus \bar{H}^r(V) \rightarrow \bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \xrightarrow{\Delta} \bar{H}^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F) \rightarrow \bar{H}^{r+1}(U) \oplus \bar{H}^{r+1}(V).$$

Como  $\bar{H}^k(U)$  e  $\bar{H}^k(V)$  são zero para todo o  $k$ , então  $\Delta$  é um isomorfismo e portanto

$$\bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F) \cong \bar{H}^{r+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F). \tag{7.22}$$

■

Vamos demonstrar agora o teorema 7.4.

**Teorema 7.4.** (*Separação de Jordan-Brouwer-Alexander*)

Se  $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$  são subconjuntos fechados homeomorfos, então

$$\bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cong \bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F_2)$$

para  $r = 0, 1, 2, \dots$

**Demonstração.** Dos lemas (7.1) e (7.2), obtemos uma cadeia de isomorfismos

$$\bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cong \bar{H}^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_1) \cong \bar{H}^{r+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus F_2) \cong \bar{H}^r(\mathbb{R}^n \setminus F_2),$$

onde o primeiro isomorfismo é obtido aplicando  $n$  vezes o lema (7.1), o segundo isomorfismo é consequência do lema (7.2) e do teorema de aproximação (7.3). O último isomorfismo é consequência de se aplicar  $n$  vezes o lema (7.1). ■

**Exemplo 7.1.** Observe que  $F_1 \cong F_2$  não significa que  $\mathbb{R}^n \setminus F_1 \cong \mathbb{R}^n \setminus F_2$ . . Como mostra o seguinte contra-exemplo em  $\mathbb{R}^3$  considerando  $S^1$  e uma curva fechada com um laço como na figura 7.10.

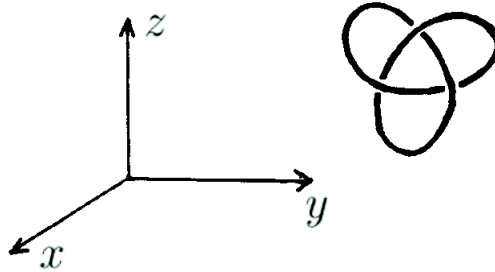


Figura 7.10: Um laço cujo complemento não é isomorfo a  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ .

**Exemplo 7.2.** Outro exemplo mais simples é o seguinte em  $\mathbb{R}^2$  :

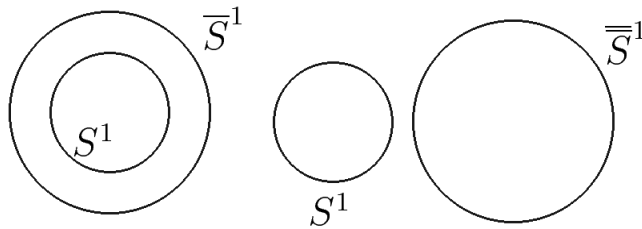


Figura 7.11: Outro exemplo com  $F_1 \cong F_2$  e  $\mathbb{R}^2 \setminus F_1 \not\cong \mathbb{R}^2 \setminus F_2$ .

Está claro que  $\mathbb{R}^2 \setminus F_1$  e  $\mathbb{R}^2 \setminus F_2$  não são homeomorfos, porque eles nem mesmo tem o mesmo tipo de homotopia, já que o tipo de homotopia de  $\mathbb{R}^2 \setminus F_1$  é o mesmo que o de um ponto unido disjuntamente com duas cópias de  $S^1$  e o tipo de homotopia de  $\mathbb{R}^2 \setminus F_2$  é de dois pontos isolados unidos disjuntamente como uma união em um ponto de duas cópias de  $S^1$ .



Figura 7.12: Tipos de homotopia distintos

**Exemplo 7.3.** Aplicando o Teorema da Separação de Alexander (7.4) a um conjunto  $D$  homeomorfo a bola fechada em  $\mathbb{R}^2$  podemos concluir que este conjunto não divide o plano.

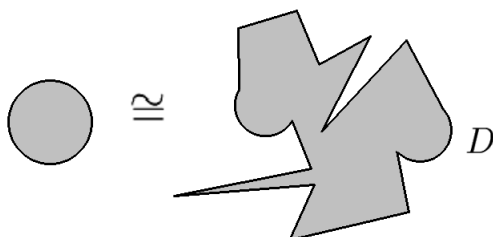


Figura 7.13:  $D$  não separa o plano.

O Teorema de Jordan-Brouwer será demonstrado em dois corolários:

**Corolário 7.1.** *(Teorema de Jordan-Brouwer 1ª parte) Para todo conjunto  $\mathcal{C}$  homeomorfo a  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  o complemento  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n)$  tem duas componentes conexas.*

**Demonstração.** Como  $F_1 = S^n$  e  $F_2 = \mathcal{C}$  são fechados e homeomorfos, pelo Teorema da Separação de Alexander (7.4),

$$\bar{H}^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{C}) \cong \bar{H}^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

pois o complemento de  $S^n$  tem duas componentes conexas. ■

Agora demonstraremos a segunda parte do Teorema de Jordan-Brouwer que contempla as fronteiras comuns.

**Corolário 7.2.** *(Teorema de Jordan-Brouwer 2ª parte) Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  for homeomorfo à esfera  $S^n$ , então  $\mathcal{C}$  é fronteira comum das duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$ .*

**Demonstração.** Sejam  $A$  e  $B$  as componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$  e seja  $x$  um ponto de  $\mathcal{C}$ . Veremos que em toda a vizinhança de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  existem pontos de  $A$  e  $B$ . Seja  $W$  uma vizinhança aberta de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $W \cap \mathcal{C}$  contém uma vizinhança  $V$  de  $x$  em  $\mathcal{C}$  homeomorfa a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Então  $\mathcal{C} \setminus V$  é homeomorfa a uma bola fechada de dimensão  $n - 1$ . Pelo teorema de Jordan-Brouwer-Alexander  $\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{C} \setminus V)$  é conexo, e por ser aberto, é conexo por caminhos. Sejam  $a \in A$  e  $b \in B$  dois pontos nas componentes conexas diferentes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$  e  $\Pi$  um caminho que os conecta em  $\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{C} \setminus V)$ , isto é,  $\Pi_0 = a$  e  $\Pi_1 = b$ .

O caminho tem que passar necessariamente por  $V$  e a intersecção não vazia  $V \cap \Pi = \mathcal{C} \cap \Pi$  é compacta porque é a intersecção de dois conjuntos compactos.

Consideremos

$$t_a = \inf\{t \mid \Pi_t \in V\} \quad (7.23)$$

$$t_b = \sup\{t \mid \Pi_t \in V\} \quad (7.24)$$

Então para  $t < t_a$  tem-se que  $\Pi_t \in A$  e para  $t > t_b$  tem-se que  $\Pi_t \in B$ .

Como a intersecção  $W \cap \Pi$  contém a intersecção  $V \cap \Pi$ , existe um intervalo aberto  $I = ]t_a - \varepsilon, t_a[$  tal que

$$\Pi(I) \subset W,$$

portanto  $W$  contém pontos de  $A$ .

Analogamente obtemos um intervalo  $J = ]t_b, t_b + \varepsilon[$  tal que

$$\Pi(J) \subset W,$$

assim  $W$  contém pontos de  $B$ .

Portanto fica estabelecido que qualquer ponto em  $\mathcal{C}$  é ao mesmo tempo fronteira de  $A$  e de  $B$ . Que as fronteiras de  $A$  e  $B$  estão contidas em  $\mathcal{C}$  é óbvio, pois  $\mathbb{R}^n$  é a união disjunta de  $\mathbb{R}^n = A \sqcup B \sqcup \mathcal{C}$ .

Logo  $\mathcal{C}$  é fronteira comum a  $A$  e  $B$ . ■

Como conseqüência da primeira parte do Teorema de Jordan-Brouwer, corolário (7.1), temos o seguinte teorema clássico da topologia, conhecido como o *Teorema de Invariância dos Abertos*.

**Corolário 7.3.** (*Teorema de Invariância dos Abertos*) *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um homeomorfismo do aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  sobre sua imagem  $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $f(U)$  também é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.** Primeiramente vejamos a seguinte situação:  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{B} = B \cup \partial B$  onde  $S = \partial B$  é a fronteira de  $B$  e portanto uma esfera. Seja  $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um homeomorfismo de  $\bar{B}$  em sua imagem  $f(\bar{B})$ . Temos que  $f(\bar{B}) = f(B) \sqcup f(S)$  é a união disjunta da imagem da bola aberta e da imagem da esfera.

Então podemos escrever  $\mathbb{R}^n$  como a união disjunta:

$$\mathbb{R}^n = f(B) \sqcup f(S) \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{B})),$$

isto é,

$$\mathbb{R}^n \setminus f(S) = f(B) \sqcup (\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{B})).$$

$f(B)$  é conexo porque é a imagem por uma aplicação contínua de um conexo, mas, pelo Teorema de Jordan Brouwer 1ª parte (corolário 7.1),

$$\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{B}) \tag{7.25}$$

também é conexo. Também pelo (corolário 7.1),

$$\mathbb{R}^n \setminus f(S) \tag{7.26}$$

é a união disjunta de duas componentes conexas. Tais componentes têm que ser abertas pois  $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$  é aberto visto que  $f(S)$  é fechado.

Das duas representações (7.25) e (7.26) de  $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$  deduz-se facilmente que  $f(B)$  tem que ser uma das duas componentes conexas e, portanto, é um conjunto aberto.

Tendo estabelecido este resultado parcial nós demonstramos a situação geral: Seja  $y \in f(U)$ . Então existe um  $x \in U$  com  $f(x) = y$ . Tomamos uma bola de centro  $x$  com  $\bar{B} \subset U$ . Pelo resultado parcial temos  $f(B) \subset f(U)$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$  que contém  $y$ .

■

Considerando  $n = 1$  nos corolários (7.1) e (7.2), obtemos o clássico Teorema de Jordan.

**Corolário 7.4.** (Teorema de Jordan) Para toda curva  $\mathcal{C}$  homeomorfa a  $S^1$  no plano, o complemento tem duas componentes conexas tendo  $\mathcal{C}$  como fronteira comum.

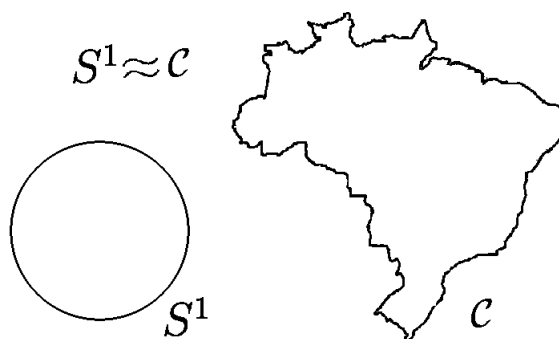


Figura 7.14:  $\mathcal{C}$  é curva de Jordan



# Conclusão

O Teorema da Curva de Jordan foi demonstrado neste trabalho a partir do artigo “*A Proof of Jordan Curve Theorem*” escrito por Helge Tverberg (TVERBERG, 1980, p.34). Tverberg se baseou nas idéias originais de Camille Jordan. *Uma curva fechada simples separa o plano em duas regiões cuja fronteira comum é a curva dada.* Com esse enunciado simples e bastante intuitivo o Teorema da Curva de Jordan encanta pela simplicidade e pela naturalidade que é aceito como verdade sem necessitar uma demonstração. Neumann, em 1865, chamou atenção para necessidade de demonstração dessa propriedade de separação do plano e desde então as referências históricas revelam as dificuldades encontradas na consecução dessa tarefa.

Jordan apresentou uma demonstração incompleta e por isso muitos matemáticos não consideraram correta sua demonstração. Veblen criticou a demonstração de Jordan e apresentou uma outra (VEBLEN, 1905, p.89). Sua demonstração estava errada, como ele mesmo reconheceu alguns anos depois (VEBLEN, 1913, p.65). Mesmo após Osvald Veblen ter reconhecido o próprio erro, Courant & Robbins (1941, p.245), Newman (1954, p.205) e Kline (1972, p.282), que atribuíram a ele a primeira demonstração correta do Teorema da Curva de Jordan. Brouwer demonstrou o Teorema da Curva de Jordan e fez uma generalização deste resultado para hipersuperfícies.

As idéias apresentadas por Brouwer permitiram a Alexander generalizar o resultado obtido por Brouwer no artigo “*A Proof And Extension of The Jordan-Brouwer Separation Theorem*” (ALEXANDER, 1922, p.333), no qual, em uma nota de rodapé, também considerou a demonstração de Veblen correta.

A generalização do Teorema da Curva de Jordan feita por Alexander foi apresentada neste trabalho com uma nova demonstração, muito elegante, usando invariância homotópica e seqüência de Mayer-Vietoris feita por (DOLD, 1993).

O Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander é demonstrado em cinco linhas, mas o conhecimento necessário para entendê-lo é muito vasto. A simplicidade do enunciado do Teorema da Curva de Jordan contrasta com a sofisticação das ferramentas matemáticas utilizadas por Dold. Buscamos, ao longo dos capítulos, estabelecer o arcabouço teórico necessário para esse fim. Um estudo que completaria esse trabalho poderia apresentar aplicações do Teorema da Curva de Jordan e do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer-Alexander. Seremos gratos por futuras contribuições a este trabalho, bem como pelos estudos que o complementarem.

# Índice

- Classes de homotopia, 80
- Complexo de deRham, 76, 78
- Complexo diferencial, 76
- Conjunto estrelado, 91
- Curva diferenciável, 57
- Curvas de Peano-Hilbert, 16
  
- Delta de Kronecker, 40
- Difeomorfismo, 62
- Diferencial exterior, 68
- Dual algébrico, 40
  
- Equivalência homotópica, 80
- Espaço tangente, 58, 60
- Estrutura diferenciável, 54
  
- Forma  $r$ -Linear, 42
- Forma anti-simétrica, 45
- Forma decomponível, 51
- Forma Linear, 42
- Formas  $r$ -lineares alternadas, 44
- Formas Diferenciais ou  $r$ -Formas, 64
- Função diferenciável, 56
- Funcional, 40
  
- Grupo de cohomologia de deRham, 72
  
- Homeomorfismo, 62
- Homotopia, 79
- Homotopia algébrica, 87
  
- Imersão, 63
  
- Lema de Zorn, 28
  
- Mergulho, 63
- Morfismo de variedades, 65
  
- Número de Betti, 73
  
- Operador, 39
- Operador contra-variante, 83
- Operador linear, 39
  
- Parametrização local, 54
- Plano tangente, 60
- Produto exterior de formas lineares, 45
- Produto Tensorial, 42
- Pull-back, 82
  
- Retração, 83
- Retrato, 84
  
- Seqüência de Mayer-Vietoris, 97
- Seqüência exata curta, 76
- Subvariedade, 63
- Superfície regular, 53
  
- Tensor de Ordem  $r$ , 42
- Topologia induzida, 55
- Variedade Diferenciável, 53
- Variedade diferenciável, 54

Vetor tangente, 57

Vizinhança tubular global, 105

vizinhança tubular local, 103

# Referências

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy: Geometria Diferencial das Curvas Planas. 24° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA. p. 14-15.2003.
- [2] ALEXANDER, J.W.: A proof of Jordan's Teorem about a simple closed curve, Annals of Math., 21, p. 180-184. 1920.
- [3] ALEXANDER, J.W.: A proof of extension of the Jordan-Brower separation theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 23, p. 333-349. 1922.
- [4] BOTT, Raul; TU, Loring W.: Differential Forms in Algebraic Topology. Springer-Verlag 1982.
- [5] BROUWER, Luitzen Egbertus Jan : Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, Math Annalen, vol. 69, p. 169-175. 1910.
- [6] BROUWER, Luitzen Egbertus Jan : Beweis des Jordanschen Satzes für  $n$ -dimensionalen Raum, Math Annalen, vol. 71, p. 314-319. 1911.
- [7] CARMO, Manfredo Perdigão do: Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall , Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [8] CARMO, Manfredo Perdigão do: Formas Diferenciais e Aplicações. 8° Col, Bras. de Matemática, IMPA, 1971.
- [9] CARMO, Manfredo Perdigão do: Geometria Riemanniana; Projeto Euclides, IMPA 1988.
- [10] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert: What is Mathematics? Oxford Univ. Press, London-N.York. p.245. 1941.

- [11] COUTINHO, Helisson Ricardo Rufo: O Teorema de Hodge. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2003.
- [12] DOLD, A.: A simple proof of the Jordan-Alexander complement theorem. [J] Am. Math. Mon. 100, No.9, p.856-857. 1993
- [13] GUILLEMIN, Victor; POLLACK, Alan. : Differential Topology. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [14] HAHN. H.: Über die Anordnungssätze der Geometrie, Monatshefte für Math. und Phys. vol.19. p. 289-303. 1908.
- [15] JORDAN, Camille: Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, 3ème édition, nouveau tirage, Gauthier-Villars. p. 92-98. Paris, 1959.
- [16] KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press. London-N.York. p.282. 1972.
- [17] KREYSZIG, Erwin: Introductory Functional Analysis With Applications, 1978.
- [18] LIMA, Elon Lages: Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento; 11o. Col. Bras. de Matemática, IMPA, 1977.
- [19] LIMA, Elon Lages: Introducción a la Cohomología de deRham; Monografías del IMCA n°18,IMCA 2001.
- [20] LIMA, Elon Lages: Curso de Análise Volume 2 ; Projeto Euclides ,IMPA 2000.
- [21] MUNKRES, James R.: Topology A First Course. Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. MIT. p.212.1975.
- [22] NEWMAN, M. H. A.: Elements of the Topology of Plane Sets of Points (2nd edition). Cambridge Univ. Press.p.205. 1954)
- [23] PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Candida Ferreira: Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis. . Série UFRJ-Vol1. Projeto Proeditar SR-1/UFRJ. UFRJ. 1997.

- [24] SPIVAK, Michael: O Cálculo em Variedades. Rio de Janeiro: C. Moderna, p. 85-110, 2003.(Coleção Clássicos da Matemática).Tradução de: Calculus on Manifolds.
- [25] TVERBERG, H.: A proof of the Jordan Curve Theorem. Bull. London Math Soc, 12. p. 34-38. 1980.
- [26] VEBLEN, O.:Theory of plane curves in non-metric Analysis Situs, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 6, p.89-98. 1905.
- [27] VEBLEN, O. :Decomposition of an n-sace by a polyedron, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 6, p.65-72. 1913.