

SINGULARIDADES COMUNS DE CAMPOS VETORIAIS
COMUTATIVOS EM VARIEDADES COMPACTAS
BIDIMENSIONAIS

Por
Evilson da Silva Vieira

Rio de Janeiro - RJ, 23 de fevereiro de 2005

Dissertação de Mestrado

SINGULARIDADES COMUNS DE CAMPOS VETORIAIS
COMUTATIVOS EM VARIEDADES COMPACTAS
BIDIMENSIONAIS

Por

Evilson da Silva Vieira

Orientador: **Bruno César Azevedo Scárdua**

Co-orientadora: **Nedir do Espirito-Santo**

Dissertação de Mestrado submetida ao programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Bruno César Azevedo Scárdua
IM-UFRJ

Leonardo Magalhães Macarini
IM-UFRJ

Nedir do Espirito-Santo
IM-UFRJ

Sérgio Mariano Licanic
IM-UFF

Rio de Janeiro - RJ, 23 de fevereiro de 2005

Aos meus pais:
Francisco das Chagas Vieira
℘
Maria Helena da Silva Vieira

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Bruno César Azevedo Scárdua, por seu inestimável apoio ao longo da minha formação acadêmica, culminado na elaboração deste trabalho.

À minha co-orientadora, Professora Nedir do Espírito-Santo, por seu auxílio e apoio durante toda a pesquisa e desenvolvimento desta dissertação.

Singularidades Comuns de Campos Vetoriais Comutativos em Variedades Compactas Bidimensionais

Evilson da Silva Vieira

Orientador: Prof. Bruno César Azevedo Scárdua

Neste trabalho mostramos que toda ação contínua do grupo aditivo \mathbb{R}^n em uma variedade compacta bidimensional com característica de Euler não-nula tem um ponto fixo. Como consequência, toda coleção de campos vetoriais dois-a-dois comutativos em uma variedade compacta bidimensional com característica de Euler não-nula tem uma singularidade comum.

Common Singularities of Commuting Vector Fields on Compacts 2-Manifolds

Evilson da Silva Vieira

Supervisor: Bruno César Azevedo Scárdua

In this work we show that every continuous action of the additive group \mathbb{R}^n on a compact 2-manifold with non-zero Euler Characteristic has a fixed point. As consequence, every set of pairwise commuting vector fields on a compact 2-manifold with non-zero Euler Characteristic has a common singularity.

Introdução

Este texto é baseado nos trabalhos de Elon Lages Lima [11], [12] e [13], onde o último é uma generalização dos dois primeiros.

Aqui estamos interessados em campos vetoriais sobre uma 2-variedade M compacta, com ou sem bordo. Dizemos que dois campos X e Y comutam se o colchete de Lie $[X, Y]$ se anula identicamente em M . Nosso resultado principal é que qualquer conjunto de campos vetoriais, dois-a-dois comutativos, em uma 2-variedade compacta com ou sem bordo e com característica de Euler não-nula tem uma singularidade comum.

Uma coleção finita de campos vetoriais comutativos em uma variedade M é equivalente a uma ação diferenciável de um grupo de Lie abeliano em M . Nestes termos, o resultado principal também pode ser visto da seguinte forma: toda ação contínua do grupo aditivo \mathbb{R}^n em uma 2-variedade compacta com ou sem bordo e com característica de Euler não-nula tem um ponto fixo.

Convém lembrar que existem grupos de Lie que podem agir sem ponto fixo em 2-variedades como estas. Por exemplo: o grupo das transformações afim da reta é um grupo de Lie e pode agir sem pontos fixos no disco unitário fechado e na esfera bidimensional S^2 . Mostramos os detalhes em um apêndice no final do texto.

Na 1^a. seção damos algumas preliminares, bem como algumas definições básicas relativas a ação de grupo e campos de vetores em uma n -variedade. Também enunciamos o Teorema Principal e algumas de suas conseqüências diretas.

Na 2^a. seção damos alguns lemas essenciais à prova do Teorema Principal. E, finalmente, na 3^a. seção, provamos o Teorema Principal, e, como corolário deste, obtemos uma extensão do resultado a uma classe específica das 3-variedades.

Preliminares

Denotaremos por “*n-variedade*” uma variedade n -dimensional, conexa, com ou sem bordo. O *bordo* de uma n -variedade compacta é uma coleção finita de $(n-1)$ -variedades compactas sem bordo, que são subvariedades de M com a topologia induzida. Consulte [4] (Cap.5) ou [5] (Cap.1) para melhores esclarecimentos.

O objeto principal de estudo neste trabalho são as 2-variedades compactas. O bordo de uma 2-variedade compacta é, portanto, uma coleção finita de curvas fechadas simples (sem auto interseções), as quais chamaremos círculos-bordo.

Durante todo o texto serão usados resultados de Topologia das 2-Variedades livremente, especialmente o Teorema da Classificação das 2-Variedades Compactas. Recomendando [6] para aclarar tais resultados.

Antes de enunciar o Teorema Principal deste trabalho relembremos algumas definições básicas.

Um *grupo topológico* é um espaço topológico G com estrutura de grupo, tal que as aplicações:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e

$$G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

são contínuas, onde “ \cdot ” é a operação definida em G .

Um *Grupo de Lie* é um grupo topológico G com estrutura diferenciável tal que as aplicações

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

e

$$G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

são diferenciáveis.

Exemplos de Grupos de Lie:

1) O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a estrutura de soma e a estrutura diferencial usual é um Grupo de Lie. No mais geral, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n para todo $n = 1, 2, \dots$ com a estrutura de soma e a estrutura diferencial usual é um Grupo de Lie.

2) O conjunto $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos, com a seguinte estrutura de grupo multiplicativo em S^1 : Se $\alpha, \beta \in S^1$, então $\alpha \cdot \beta$ é

o produto dos números complexos α e β . Veja que

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

e

$$\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 têm imagem em S^1 , portanto S^1 é um Grupo de Lie.

Uma *Álgebra de Lie* é um espaço vetorial L , com uma aplicação bilinear $[\ , \] : L \times L \rightarrow L$ satisfazendo:

a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade)

b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)

para todo $X, Y, Z \in L$.

Exemplos de Álgebras de Lie

1) O conjunto $G(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais é uma Álgebra de Lie relativamente à operação

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde AB indica o produto usual de matrizes.

2) Seja M uma variedade diferenciável e seja $\Psi(M)$ o espaço vetorial dos campos C^∞ tangentes a M .

Para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e para $X, Y \in \Psi(M)$ definimos

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Com esta operação $\Psi(M)$ é uma Álgebra de Lie.

Esta operação em $\Psi(M)$ é chamada *Colchete de Lie de campos vetoriais* e pode ser aplicada também a campos de classe C^1 . O colchete de Lie de dois campos de classe C^r é um campo de classe C^{r-1} . Para maiores informações sobre o Colchete de Lie de campos vetoriais veja [3], [16] e [2] (Pg.210).

Uma *ação* de um grupo topológico G em um espaço M é uma aplicação contínua $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tal que, para todo $g, h \in G$ e $x \in M$, $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ e $\varphi(e, x) = x$, onde $e \in G$ é o elemento neutro. Quando G é um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável temos também a noção de ação diferenciável.

Um *fluxo* é uma ação $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ do grupo aditivo dos números reais. Dar um fluxo diferenciável em uma n -variedade M é equivalente a dar um campo de vetores diferenciável sobre M com a seguinte condição adicional: se M tem bordo então o campo deve ser tangente ao bordo. Assumiremos esta condição sempre que nos referirmos a campos de vetores. Isso é necessário para garantir que as órbitas do campo estejam bem definidas em M .

Seja X um campo de vetores de classe C^1 em uma n -variedade e seja $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo correspondente. Dado $x \in M$, temos $X(x) = 0$ (x é uma singularidade de X) se, e somente se, $\xi(s, x) = x, \forall s \in \mathbb{R}$, isto é, x é um ponto fixo do fluxo ξ . Seja Y um outro campo de vetores de classe C^1 em M e η seu fluxo correspondente. Dizemos que X e Y comutam quando o colchete de Lie $[X, Y]$ é identicamente nulo. Esta condição significa que $\xi(s, \eta(t, x)) = \eta(t, \xi(s, x))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in M$, ou seja, a ordem da composição dos fluxos é irrelevante.

Se X e Y comutam então eles geram uma ação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ do grupo aditivo do plano \mathbb{R}^2 em M definido por $\varphi(r, x) = \xi(s, \eta(t, x)) = \eta(t, \xi(s, x))$, $x \in M$ e $r = (s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Um ponto $x \in M$ é ponto fixo de φ se, e somente se, é uma singularidade comum dos campos comutativos X e Y , isto é, $X(x) = Y(x) = 0$. Similarmente, uma coleção finita de campos de vetores X_1, \dots, X_n dois-a-dois comutativos em uma n -variedade M gera uma ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$.

O resultado principal deste trabalho é:

Teorema A. Toda ação (contínua) do grupo aditivo \mathbb{R}^n em uma 2-variedade compacta M , com $\chi(M) \neq 0$, tem um ponto fixo.

$\chi(M)$ denota a característica de Euler de M .

Como consequência deste, temos o seguinte resultado:

Teorema B. Dados X_1, \dots, X_n campos de vetores de classe C^1 , dois a dois comutativos, em uma 2-variedade compacta M , com $\chi(M) \neq 0$. Existe um ponto $x \in M$ tal que $X_1(x) = \dots = X_n(x) = 0$.

Este último resultado pode ser estendido a uma coleção $\{X_\alpha\}$ arbitrária de campos vetoriais de classe C^1 dois-a-dois comutativos em uma 2-variedade compacta M , com $\chi(M) \neq 0$. De fato, para todo subconjunto finito $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de índices α , seja $F(A)$ o conjunto de singularidades comuns dos campos $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n}$. Pelo Teorema B, cada $F(A)$ é um subconjunto fechado e não-vazio de M . Temos também que $F(A_1) \cap \dots \cap F(A_k) = F(A_1 \cup \dots \cup A_k) \neq \emptyset$, onde A_1, \dots, A_k são subconjuntos

finitos de índices α , então a família $\{F(A)\}$ tem a propriedade da interseção finita. Como M é compacta segue que $F = \bigcap_A F(A) \neq \emptyset$ e cada $x \in F$ é singularidade comum de todos os X_α .

Evidentemente, o mesmo método mostra a existência de um ponto fixo para qualquer ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ de um grupo topológico abeliano que seja gerado por subgrupos isomorfos aos espaços euclidianos \mathbb{R}^n .

Sejam M uma n -variedade e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação contínua de um grupo topológico G em M .

A *órbita* de um ponto $x \in M$ é o conjunto $\varphi(G \times \{x\}) = \{\varphi(g, x) \in M \mid g \in G\}$, que denotaremos $\mathcal{O}(x)$ ou “ φ -órbita de x ”, quando houver mais de uma ação envolvida no argumento. Da mesma maneira definiremos a órbita de um subconjunto $A \subset M$ por $\mathcal{O}(A) = \varphi(G \times A) = \{\varphi(g, x) \in M \mid g \in G, x \in A\}$.

Proposição 1. *Se $A \subset M$ é um aberto então o conjunto $\mathcal{O}(A)$ também é um aberto de M .*

Prova. Seja A um aberto qualquer de M e seja $q \in \mathcal{O}(A)$, logo $\mathcal{O}(q) \cap A \neq \emptyset$. Tome $p \in \mathcal{O}(q) \cap A$. Existe $g \in G$ tal que $q = \varphi(g, p)$. A função $f_g : A \rightarrow \mathcal{O}(A)$ dada por $f_g(x) = \varphi(g, x)$, é contínua, e sua inversa, que é dada por $f_g^{-1}(y) = \varphi(g^{-1}, y)$, também é contínua. Logo $f_g(A) \subset \mathcal{O}(A)$ é um aberto de M e $q \in f_g(A)$. Isso encerra a prova. ■

O *grupo de isotropia* de um ponto $x \in M$ é o conjunto $G_x = \{g \in G \mid \varphi(g, x) = x\}$. Esse conjunto é claramente fechado em G , e a função $g \mapsto \varphi(g, x)$ induz uma bijeção

do espaço quociente G/G_x na órbita de x . Quando φ é um fluxo, o grupo de isotropia de um ponto pode ser $\{0\}$, um subgrupo discreto $\{0, \pm t_0, \pm 2t_0, \dots; t_0 > 0\}$ ou a reta real inteira. No primeiro caso, a órbita de x é não-compacta, no segundo caso é uma curva fechada simples, neste caso dizemos que tem uma órbita periódica de período t_0 , e no terceiro caso x é um ponto fixo.

Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é *invariante* por φ , se $\mathcal{O}(A) = A$. Denotaremos “ A é φ -invariante”. Por exemplo, a órbita de um ponto $x \in M$, $\mathcal{O}(x)$, é um subconjunto φ -invariante de M , visto que $\mathcal{O}(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(x)$.

Proposição 2. *Se $A \subset M$ é um subconjunto φ -invariante então o seu interior $\overset{\circ}{A}$, seu fecho \bar{A} e sua fronteira ∂A também são φ -invariantes.*

Prova. Por definição o interior de um conjunto é o maior subconjunto aberto desse conjunto. Da proposição 1 concluímos que $\varphi(G \times \overset{\circ}{A})$ é um aberto de M . Como $\overset{\circ}{A} \subset \varphi(G \times \overset{\circ}{A}) \subset A$ concluímos que $\varphi(G \times \overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A}$, logo $\overset{\circ}{A}$ é φ -invariante.

Como A é φ -invariante, $M - A$ também é φ -invariante, e pela primeira parte desta proposição $M - \bar{A}$ também é φ -invariante, pois $\text{int}(M - A) = M - \bar{A}$. Logo \bar{A} é φ -invariante.

Como $\partial A = \bar{A} - A$, segue-se que ∂A também é φ -invariante. ■

Um *conjunto minimal* de uma ação φ é um subconjunto fechado, não-vazio, invariante por φ e que não contém nenhum subconjunto próprio com essas três propriedades. Por exemplo: cada ponto fixo de φ é um conjunto minimal de φ ; se φ é um fluxo então suas órbitas fechadas (se existirem) são também conjuntos minimais de φ .

Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo e x um ponto de M . O conjunto ω -limite de x é o conjunto de todos os pontos y que podem ser escritos como $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, x)$ com $t_n \rightarrow +\infty$. O conjunto α -limite de x é o conjunto de todos os pontos y que podem ser escritos como $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, x)$ com $t_n \rightarrow -\infty$. Os conjuntos α -limite e ω -limite de qualquer ponto de M são subconjuntos fechados e invariantes de M pelo fluxo ξ , e como M é compacta, eles também são compactos (e conexos).

A órbita de um ponto $x \in M$ sob um fluxo ξ é dita *recorrente* se ela não for compacta e estiver contida no conjunto ω -limite (consequentemente no α -limite) de x . A órbita de qualquer ponto pertencente a um conjunto minimal de um fluxo ou é o conjunto inteiro ou é recorrente, por exemplo: quando o conjunto minimal é uma órbita fechada ou a variedade inteira, respectivamente. Quando o grupo G é abeliano, todo ponto da mesma órbita tem o mesmo grupo de isotropia. Também, se μ é um conjunto minimal relativo à ação de um grupo abeliano G , todo ponto $x \in \mu$ tem o mesmo grupo de isotropia.

Alguns Lemas

Lema 1. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo topológico simplesmente conexo G em um espaço M . Seja $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento onde \widetilde{M} é um espaço de recobrimento de M . Existe uma única ação $\tilde{\varphi} : G \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ que levanta φ , fazendo o diagrama abaixo comutar:*

$$\begin{array}{ccc} G \times \widetilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \widetilde{M} \\ id \times p \downarrow & & \downarrow p \\ G \times M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

Prova. Denotemos pelo subscrito $\#$ o homomorfismo induzido no grupo fundamental. Ponhamos $f = \varphi \circ (id \times p)$. Logo $p_{\#} : \pi_1(\widetilde{M}) \rightarrow \pi_1(M)$ e $f_{\#} : \pi_1(G \times \widetilde{M}) \rightarrow \pi_1(M)$. como G é simplesmente conexo temos $\pi_1(G \times \widetilde{M}) = \pi_1(G) \times \pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(\widetilde{M})$, logo $f_{\#}(\pi_1(G \times \widetilde{M})) = p_{\#}(\pi_1(\widetilde{M}))$.

Tome $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ fixo. Pela teoria dos espaços de recobrimento (para tal recomendo ao leitor a referência [1]) existe uma única aplicação $\tilde{\varphi} : G \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ que faz o diagrama acima comutar, e tal que $\tilde{\varphi}(e, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, onde e é o elemento neutro de G . Agora vamos mostrar que $\tilde{\varphi}$ é uma ação.

Primeiro, $\tilde{\varphi}(e, \tilde{x}) = \tilde{x}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. De fato, usando Id_M para denotar a aplicação identidade em M e $Id_{\widetilde{M}}$ para denotar a aplicação identidade em \widetilde{M} , temos

que $Id_{\widetilde{M}} : \tilde{x} \mapsto \tilde{x}$ e $\alpha : \tilde{x} \mapsto \tilde{\varphi}(e, \tilde{x})$ levantam Id_M , ou seja, $p \circ Id_{\widetilde{M}} = p \circ \alpha = Id_M$ e $Id_{\widetilde{M}}(\tilde{x}_0) = \alpha(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ logo $\alpha = Id_{\widetilde{M}}$.

Segundo, $\tilde{\varphi}(g, \tilde{\varphi}(h, \tilde{x})) = \tilde{\varphi}(gh, \tilde{x})$ para todo $g, h \in G$ e $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, pois as aplicações $\lambda, \mu : G \times G \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ definidas por $\lambda(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\varphi}(g, \tilde{\varphi}(h, \tilde{x}))$ e $\mu(g, h, \tilde{x}) = \tilde{\varphi}(gh, \tilde{x})$ levantam a aplicação $\nu : G \times G \times M \rightarrow M$ dada por $\nu(g, h, x) = \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$. Como $\lambda(e, e, \tilde{x}_0) = \mu(e, e, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$, então $\lambda = \mu$. ■

Nota 1. Dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ e $x = p(\tilde{x})$, então x é um ponto fixo de φ se, e somente se, \tilde{x} é um ponto fixo de $\tilde{\varphi}$.

Uma conseqüência do lema acima é que, para o Teorema Principal, só precisaremos tratar das 2-variedades compactas orientáveis. De fato, se $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é uma ação em uma 2-variedade M não-orientável, tome $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ seu recobrimto duplo orientável. Levante a ação φ a uma ação $\tilde{\varphi}$ de G em \widetilde{M} (no nosso caso, o grupo G é um espaço vetorial, e portanto, simplesmente conexo). \widetilde{M} será compacta se M o for e como M é não-orientável \widetilde{M} é conexa e $\chi(\widetilde{M}) = 2 \cdot \chi(M)$, logo $\chi(\widetilde{M}) \neq 0$ se $\chi(M) \neq 0$ (veja [6]).

A redução a uma variedade orientável não é essencial mas simplifica bastante o problema. Essa orientabilidade será assumida na prova do Teorema Principal.

Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz.

(um pouco enfraquecido e adaptado para o problema em questão)

Seja M uma 2-variedade compacta com $\chi(M) \neq 0$, então qualquer aplicação $f : M \rightarrow M$ homotópica à identidade tem um ponto fixo.

Para ver sua versão mais geral e sua demonstração veja [4](Cap.6).

Lema 2. *Todo fluxo $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ em uma 2-variedade compacta, com $\chi(M) \neq 0$ tem um ponto fixo.*

Prova. Para cada $n = 1, 2, \dots$ definamos $f_n : M \rightarrow M$ por $f_n(x) = \xi(2^{-n}, x)$. Cada f_n é, portanto homotópica à identidade, logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, tem um ponto fixo. Tome o conjunto F_n de todos os pontos fixos de f_n . Claramente $F_n \neq \emptyset$. Dada uma seqüência convergente $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M com $x_k \in F_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então, da continuidade do fluxo ξ , temos $f_n(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, logo F_n é fechado e, portanto, compacto, pois M é compacta. Obtemos a seqüência $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$

Tome $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. F é compacto, não-vazio e seus elementos são pontos fixos de ξ . De fato, tome $x \in F$. Para todo $r \in \mathbb{R}$ existe um inteiro p_r e uma seqüência $\{(a_r)_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{0, 1\}$ tal que $r = p_r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n}$, logo

$$\begin{aligned} \xi(r, x) &= \xi\left(p_r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n}, x\right) \\ &= \xi\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n}, x\right) \\ &= \xi\left(\sum_{n=2}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n}, x\right) = \dots \\ &= \xi\left(\sum_{n=k}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n}, x\right) = \dots \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} (a_r)_n \cdot 2^{-n} = 0$, então $\xi(r, x) = \xi(0, x) = x$, ou seja, x é ponto fixo de ξ . ■

Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo em uma 2-variedade M , e seja $y \in M$. Suponha que y não seja ponto fixo de ξ . Uma *secção transversal local* de ξ em y é um subconjunto

S de M , homeomorfo a um intervalo fechado $[-a, +a]$, contendo y e tal que para algum $\varepsilon > 0$, a aplicação $[-\varepsilon/2, +\varepsilon/2] \times S \rightarrow M$, dada por $(t, x) \mapsto \xi(t, x)$ é um homeomorfismo no fecho de um aberto contendo y . A imagem Q desse homeomorfismo é chamada vizinhança retangular de y relativo ao fluxo ξ . O ponto y será uma extremidade de S se, e somente se, y pertence ao bordo de M . Neste caso dizemos que Q é uma vizinhança retangular de comprimento ε relativo ao fluxo ξ . A grosso modo, isto significa que ε é o tempo que um ponto demora para ir de um dos lados verticais de Q ao outro pelo fluxo ξ .

Lema 3. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo em uma 2-variedade M , e seja $y \in M$ um ponto cujo grupo de isotropia é discreto. Existe uma secção transversal local de ξ em y (em particular y tem uma vizinhança retangular).*

Dado um subconjunto $A \subset M$, dizemos que S é uma secção transversal de A relativo ao fluxo ξ se:

- (i) nenhum ponto $y \in S \cap A$ é ponto fixo de ξ ;
- (ii) para todo $y \in S \cap A$, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $\xi([- \varepsilon_y, + \varepsilon_y], y) \subset A$;
- (iii) para todo $y \in S \cap A$, S contém uma secção transversal local de ξ em y .

Proposição 3. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ um ação de um grupo topológico G em uma 2-variedade M . Seja μ um conjunto minimal de φ . Então:*

- a) *Se $x \in \mu$, então a órbita de x é densa em μ .*
- b) *Se μ tem interior não-vazio, então $\mu = M$.*
- c) *Suponha $G = \mathbb{R}$, neste caso φ é um fluxo. Se S é uma secção transversal de μ e μ não é uma órbita fechada, então $S \cap \mu$ é um conjunto perfeito.*

Prova.

(a)

Sejam $x \in \mu$ e $\mathcal{O}(x)$ sua órbita, então $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é um subconjunto fechado e não-vazio de μ , pois μ é invariante. Como $\mathcal{O}(x)$ é invariante, a Proposição 2 garante que $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é invariante, logo $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mu$.

(b)

Se $\text{int}(\mu) \neq \emptyset$, então existe um aberto $A \subset M$ tal que $A \subset \mu$, logo $\mathcal{O}(A) \subset \mu$ pois μ é invariante. Por (a) toda órbita de μ passa por A , logo $\mu \subset \mathcal{O}(A)$. Isso nos dá $\mathcal{O}(A) = \mu$. Como A é aberto, a Proposição 1 garante que $\mathcal{O}(A)$ é aberto em M , ou seja, μ é aberto e fechado em M , e como M é conexa, $\mu = M$.

(c)

Seja $x \in S \cap \mu$ e seja $\mathcal{O}(x)$ sua órbita. Se $\mu \neq \mathcal{O}(x)$ existe $x' \in \mu$ tal que $x' \notin \mathcal{O}(x)$, logo $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(x') = \emptyset$ com $\mathcal{O}(x') \subset \mu$. Seja $h : [-1, 1] \rightarrow S$ um homeomorfismo tal que $h(0) = x$, existe um $N \in \mathbb{N}$, tal que $Q_n = \xi([-1/n, 1/n], [h(-1/n), h(1/n)])$ é uma vizinhança retangular de x relativa ao fluxo ξ para todo $n > N$, $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in \overline{\mathcal{O}(x')}$ então, para todo $n > N$ existe um $x_n \in \mathcal{O}(x') \cap Q_n$, x_n pode ser escolhido sobre S pois qualquer ponto sobre o segmento horizontal de Q_n que contem x_n pertence a $\mathcal{O}(x')$ e esse segmento intercecta S . Obtemos assim uma seqüência $\{x_n\} \subset \mathcal{O}(x') \cap S$ tal que $x_n \rightarrow x$, ou seja, $\mu \cap S$ é um conjunto perfeito. ■

Em particular se $\text{int}(\mu) = \emptyset$ e $\partial S \cap \mu = \emptyset$, então $S \cap \mu$ é um conjunto de Cantor. Neste caso dizemos que μ é um conjunto minimal não-trivial. Os conjuntos minimais triviais são: um ponto, uma curva fechada simples ou a variedade inteira.

Lema 4. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo topológico G em um espaço M . Todo subconjunto compacto, não-vazio e φ -invariante $A \subset M$ contém um conjunto minimal.*

Prova. Observe que $\mathcal{O}(x)$ é o menor subconjunto de M φ -invariante que contém x . Pela Proposição 3, $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é também invariante, portanto $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é o menor subconjunto fechado de M , φ -invariante e que contém x .

Tome a família $\{\overline{\mathcal{O}(x)}\}_{x \in A}$. Suponhamos que A não contenha nenhum subconjunto minimal, então, para cada $x_\alpha \in A$ podemos encontrar $x_\beta \in \overline{\mathcal{O}(x_\alpha)}$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x_\beta)} \not\subseteq \overline{\mathcal{O}(x_\alpha)}$, logo podemos construir em A uma subfamília maximal $\{\overline{\mathcal{O}(x_\alpha)}\}_\alpha$ de subconjuntos compactos, distintos e linearmente ordenados por inclusão.

Defina $\mu = \bigcap_\alpha \overline{\mathcal{O}(x_\alpha)}$. Como A é compacto, então μ é compacto e não-vazio, e $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mu$ para todo $x \in \mu$. Contradição. ■

O lema anterior pode ser visto como uma consequência do Lema de Zorn. O leitor interessado pode ver [17] e [18].

Denjoy [9] deu um exemplo de um fluxo de classe C^1 sem ponto fixo no toro T^2 com um conjunto minimal não-trivial. Este exemplo e os detalhes da sua construção podem ser encontrados em [2](Pág.56). Faremos aqui apenas um esboço deste:

Primeiro constrói-se um conjunto de Cantor μ em Σ , onde Σ é um meridiano fixo do toro. Depois constrói-se uma fluxo $\xi : \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2$ de classe C^1 sem pontos fixos tal que:

(i) O campo de vetores associado a este fluxo é transversal a Σ em todos os pontos de Σ ;

- (ii) A órbita $\mathcal{O}(x)$ de todo ponto $x \in \Sigma$ intersecta Σ uma infinidade de vezes;
- (iii) Para todo ponto $x \in \mu$ o conjunto $B = \{\psi^n(x), x \in \mu, \psi^n = \psi \circ \dots \circ \psi, n \text{ vezes}\}$ é denso em μ , onde $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação de Poincaré (aplicação de primeiro retorno) que leva cada ponto $x \in \Sigma$ em $\xi(t_0, x)$, onde t_0 é o menor número real positivo tal que $\xi(t_0, x) \in \Sigma$;
- (iv) $\psi(\mu) = \mu$.

O conjunto $\mathcal{O}(\mu)$ assim construído é um conjunto minimal não-trivial de ξ em T^2 .

Uma modificação desse exemplo fornece conjuntos minimais não-triviais em qualquer 2-variedade de gênero maior [14]. De acordo com um teorema de A. Schwartz [10] e A. Denjoy [9], um fluxo de classe C^2 em uma 2-variedade não admite conjuntos minimais não-triviais. Se o fluxo é apenas contínuo, um ótimo resultado sobre conjuntos minimais não-triviais é o lema abaixo, que é uma generalização do clássico Teorema de Poincaré-Bendixon.

Lema 5. *Um fluxo $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ em uma 2-variedade compacta M de gênero g , tem no máximo $2g - 1$ conjuntos minimais não-triviais.*

Prova. Observe que distintos e disjuntos dois-a-dois têm o mesmo significado para conjuntos minimais. Podemos assumir que M é orientável. Caso não seja, tomamos seu recobrimento duplo \widetilde{M} , que é orientável e tem o mesmo gênero que M ; e se $\widetilde{\xi} : \mathbb{R} \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ é o levantamento do fluxo ξ a \widetilde{M} , então $\widetilde{\xi}$ admite, no máximo, tantos conjuntos minimais em \widetilde{M} quantos ξ admite em M .

Faremos a prova por indução sobre o gênero g de M . Primeiro note que as curvas do bordo de M são subvariedades (com a topologia induzida) e são órbitas de ξ a menos que ξ tenha um ponto fixo em uma delas, então todo conjunto minimal não-trivial μ de ξ está contido no interior de M .

Primeiro considere $g = 0$. Se $M \neq S^2$ podemos assumir $M \subset \mathbb{R}^2$ (Teorema da Classificação das 2-Varieties Compactas [6]), e então o Lema é o clássico Teorema de Poincaré-Bendixon: Suponha que M tenha um subconjunto minimal não-trivial μ . Escolha $x \in \mu$ e tome uma vizinhança retangular Q de x relativo ao fluxo ξ . A órbita de x retornará a esta vizinhança e quando isso acontecer ela terá traçado uma curva de Jordan $aa'ba$, como na **figura 1** abaixo, limitando uma região plana $R \subset \mathbb{R}^2$, logo ou o α -limite ou o ω -limite de x está contido em R , e o que satisfazer esta condição será um subconjunto próprio e invariante de μ , o que é uma contradição. Se M for a esfera S^2 , da mesma forma como acima, obtemos a curva $aa'ba$ que limita duas regiões R, R' em S^2 homeomorfas a regiões simplesmente conexas de \mathbb{R}^2 onde o α -limite de x está em uma e o ω -limite de x na outra, e da mesma forma encontramos uma contradição.

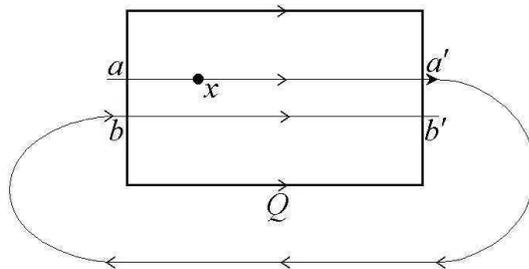


figura 1

Tome agora $g > 0$. Suponha que o lema tenha sido provado para todas as 2-variedades compactas de gênero $< g$.

Dado um fluxo $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ em uma 2-variedade compacta de gênero g , suponha por contradição que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2g}$ são $2g$ conjuntos minimais não-triviais distintos de ξ em M . Seja Q uma vizinhança retangular de um ponto $x \in \mu_{2g}$. Escolha Q tão pequena que não intersekte nenhum dos outros conjuntos μ_i , $1 \leq i \leq 2g - 1$ e $Q \cap \partial M = \emptyset$. Considere o seguinte mergulho $h : Q \rightarrow Q$: h é a identidade nos lados de Q exceto no lado vertical da direita (veja a **figura 2**), onde h é linear nos segmentos limitados por a' com $h(a') = b'$. No interior de Q , h é definido por uma função que leva linearmente cada segmento yy' em $yh(y')$, y pertencendo ao lado vertical esquerdo de Q e y' ao lado direito (como na **figura 2**).

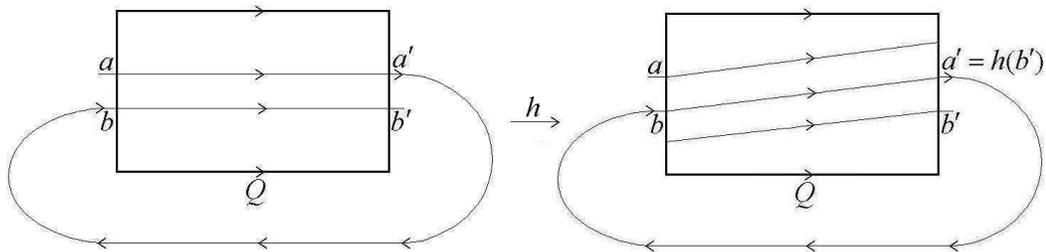


figura 2

Definamos agora um novo fluxo $\xi' : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ cujas órbitas fora de Q são as mesmas que as de ξ e dentro de Q , são as imagens das ξ -órbitas pelo mergulho h . Sob o novo fluxo ξ' , o ponto a tem uma órbita fechada γ . Observe que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2g-1}$ são conjuntos minimais não-triviais de ξ' em M .

A curva γ não pode separar uma subvariedade compacta de gênero 0 em M : Se isso acontecesse, a curva $aa'ba$, na figura 1, separaria, em M , uma região homeomorfa a uma região plana do \mathbb{R}^2 , e, argumentando com o fluxo anterior ξ , como fizemos no caso $g = 0$, teríamos uma contradição.

Suponha que γ separa M em duas subvariedades compactas M_1 e M_2 de gêneros g_1 e g_2 , respectivamente, com $g_1, g_2 > 0$, neste caso $g_1, g_2 < g$, pois $g_1 + g_2 = g$. A hipótese de indução garante no máximo $2g_1 - 1$ e $2g_2 - 1$ conjuntos minimais não triviais para a restrição de ξ' a M_1 e M_2 , respectivamente. Lembremos que M_1 e M_2 são ξ' -invariantes, logo ξ' admite no máximo $2g_1 - 1 + 2g_2 - 1 = 2g - 2$ conjuntos minimais não triviais em M (veja que $2g_1 - 1$ e $2g_2 - 1$ são positivos). Isso contradiz a hipótese inicial de que ξ' admitiria no mínimo $2g - 1$ conjuntos minimais não triviais em M . Concluimos que γ não pode separar M .

Portanto, cortando-se M ao longo de γ , nós obtemos uma nova 2-variedade compacta M' de gênero $g - 1$, em que o fluxo ξ' é definido e admite pelo menos os subconjuntos minimais não-triviais $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2g-1}$, que é uma contradição, pois a hipótese de indução nos garante no máximo $2(g - 1) - 1 = 2g - 3$ conjuntos minimais não-triviais para ξ' em M' . Isto conclui a prova do Lema 5. ■

Observação 1. *O resultado acima prova também que uma 2-variedade compacta de gênero g tem no máximo $2g - 1$ órbitas recorrentes (pg. 9) com fechos dois-a-dois disjuntos. Em particular, uma 2-variedade compacta com $g = 0$ não possui órbita recorrente. Note também que este resultado dá informações sobre fluxos diferenciáveis pois estes também admitem órbitas recorrentes.*

Lema 6. *Seja $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo em uma 2-variedade compacta M . Suponha que $x \in M$ é tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, onde cada x_n tem uma órbita fechada μ_n , de período t_n . Então:*

- a) *A órbita de x não é recorrente;*

b) Se x tem uma órbita fechada de período t_0 então $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a \cdot t_0$ (onde $a = 1$ se μ é uma curva de dois lados em M e $a = 2$ se μ é uma curva de um lado em M) e $\mu = \{y \in M; y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in \mu_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Prova.

(a)

1º caso. Nenhuma órbita da coleção $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ corta M .

Neste caso cada μ_n separa M em duas variedades M'_n e M''_n . Suponha que a órbita μ de x seja recorrente, então, dada uma vizinhança retangular Q de x relativa ao fluxo ξ , existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que a órbita μ de x passa por Q pelo menos três vezes para $0 \leq t \leq t_0$. A órbita de pontos suficientemente próximos de x tem a mesma propriedade. Escolha então $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que μ_n passe pelo interior de Q pelo menos três vezes (**figura 3**), logo existem dois segmentos consecutivos $\alpha, \beta \subset \mu_n \cap Q$, tais que Q entra em M'_n por um deles e sai pelo outro como na **figura 4** abaixo. Mas isso não pode acontecer, pois α e β deveriam ser igualmente orientados em μ_n e em Q , e isso não acontece neste caso. Portanto a órbita de x não pode ser recorrente. Isso prova o 1º caso.

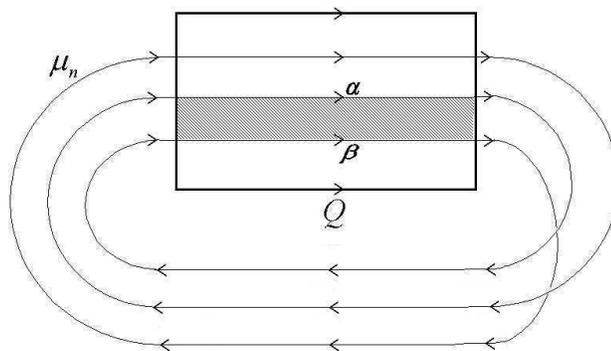


figura 3

x_n , caso contrário a órbita μ_n não seria fechada, logo o tempo para $\xi(t'_n, x_n)$ encontrar x_n a primeira vez é menor que $\frac{\epsilon}{2}$, portanto $|t_n - t'_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $|t'_n - t_0| < \frac{\epsilon}{2}$ temos que $|t_n - t_0| < \epsilon$. Neste caso temos $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$.

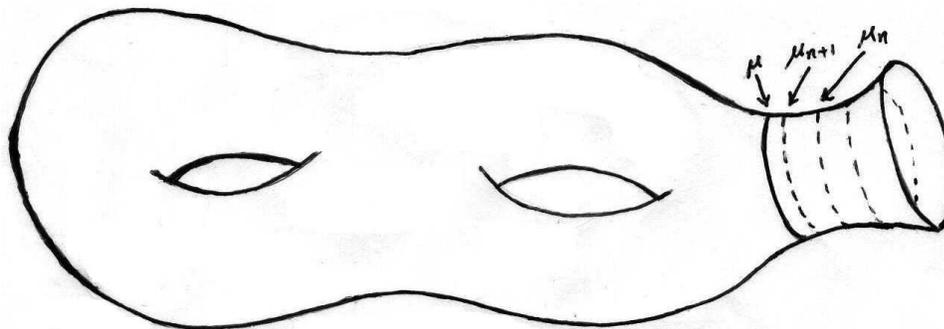


figura 5

Agora suponha que μ tenha apenas um lado em M (veja a **figura 6**). Então V é uma faixa de Möbius cujo equador é μ . Portanto $\xi(t, x_n)$ retorna a Q pela primeira vez, no outro lado de μ relativo a Q , mas o segundo retorno $\xi(t''_n, x_n)$ estará no mesmo segmento horizontal de Q que x_n , caso contrário a órbita μ_n não seria fechada, logo $|t_n - t''_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $|t''_n - 2t_0| < \frac{\epsilon}{2}$, temos que $|t_n - 2t_0| < \epsilon$. Neste caso temos $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2t_0$.

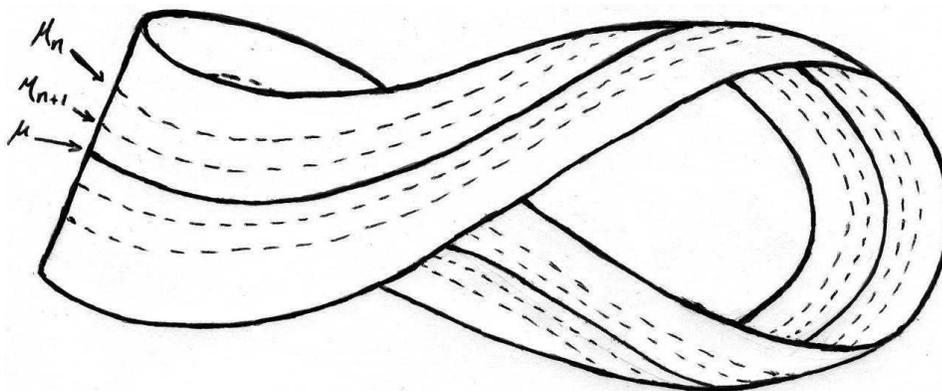


figura 6

Para concluir a prova de (b) primeiro observe que a inclusão $\mu \subset \{y \in M; y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in \mu_n, n = 1, 2, \dots\}$ é óbvia. Agora suponha $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in \mu_n, n = 1, 2, \dots$. Para cada $n = 1, 2, \dots$ temos $y_n = \xi(s_n, x_n)$, onde $0 \leq s_n \leq t_n$. Logo a seqüência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e portanto admite uma subseqüência $\{s_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Coloquemos $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ então $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(s_n, x_n) = \xi(s, x) \in \mu$. Isso prova a inclusão oposta e portanto a igualdade. ■

Para o próximo lema consideremos a seguinte situação: Seja M uma 2-variedade compacta e Γ um de seus círculos-bordo; seja $\{\mu_\alpha\}$ uma família de curvas fechadas, simples e disjuntas em M , nenhuma delas tocando o bordo de M . Assumiremos que para cada α exista um cilindro compacto $\bar{C}_\alpha \subset M$, cujos círculos-bordo sejam Γ e μ_α . Por conveniência, tomaremos $\Gamma \subset C_\alpha$, mas $C_\alpha \cap \mu_\alpha = \emptyset$, tal que cada C_α é aberto em M . O conjunto dos pontos do bordo de C_α em M é μ_α e podemos escrever $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$ para denotar o bordo de C_α em M . Assim teremos também $\bar{C}_\alpha = C_\alpha \cup \mu_\alpha$, onde \bar{C}_α é o fecho de C_α em M .

Lema 7. *Com a notação acima:*

a) *A família $\{C_\alpha\}$ é linearmente ordenada por inclusão, a menos que M seja um disco com bordo Γ ;*

b) *A união de qualquer subfamília linearmente ordenada de $\{C_\alpha\}$ é um cilindro C aberto em M , contendo Γ , e pode ser escrito como $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n, C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots$ onde, para cada $n = 1, 2, \dots, C_n = C_\alpha$ para algum α ;*

c) *Se o conjunto dos pontos do bordo de C em M é uma curva fechada simples então, ou o fecho \bar{C} é um cilindro com círculos-bordos Γ e μ , ou então $\bar{C} = M$ e M é faixa de Möebius.*

Prova.

(a)

Seja $C_\alpha \neq C_\beta$ uma escolha arbitrária. Suponha que M não é um disco. Denote por $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \bar{C}_\alpha$ um homeomorfismo, onde S^1 é o círculo unitário e $h(S^1 \times \{0\}) = \Gamma$. Como $\bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ é compacto, existe $t_0 \in [0, 1]$ e $y_0 \in S^1$ tal que $h(t_0, y_0) \in \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ e se $t_0 < 1$, então $h(t, y) \notin \bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$ para todo $t > t_0$ qualquer $y \in S^1$. Coloquemos $x = h(t_0, y_0)$. Veja que, da forma como x foi definido, nenhuma vizinhança aberta de x está contida em $\bar{C}_\alpha \cap \bar{C}_\beta$, logo $x \notin C_\alpha \cap C_\beta$, então $x \in \mu_\alpha \cup \mu_\beta$ e como $\mu_\alpha \cap \mu_\beta = \emptyset$, então ou $x \in \mu_\alpha$, ou $x \in \mu_\beta$.

Suponha $x \in \mu_\beta$, então $x \in \mu_\beta \cap C_\alpha$, portanto $\mu_\beta \subset C_\alpha$. Observe que μ_β não pode limitar um disco D em C_α , pois se isso acontecesse $C_\beta \cup D$ seria um disco em M com círculo-bordo igual a Γ . O disco $C_\beta \cup D$ é aberto em M pois todos os seus pontos tem uma vizinhança aberta em M . Como $C_\beta \cup D$ é aberto e fechado em M então $M = C_\beta \cup D = \text{disco}$, que contradiz a hipótese.

Portanto $\bar{C}_\alpha - \mu_\beta$ é uma união disjunta de duas componentes conexas X e Y , com $\Gamma \subset X$, $\mu_\alpha \subset Y$ e $\partial X = \partial Y = \mu_\beta$. $\Gamma \subset C_\beta \cap X$, mas $\mu_\beta = \partial X \not\subset C_\beta$. Como C_α , C_β e X são conjuntos conexos, $C_\beta \subset X \subset C_\alpha$. Se tivéssemos assumido $x \in \mu_\alpha$, a conclusão seria $C_\alpha \subset C_\beta$. Isto prova (a).

(b)

Mudando a notação, denotaremos ainda por $\{C_\alpha\}$ a subfamília em questão. Pelo *Teorema de Lindelöf* (Confira: Elon Lages Lima. Elementos de Topologia Geral, pg.219), existe uma seqüência $\{C_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{\alpha_n} = \bigcup_\alpha C_\alpha$. Denotemos $C_n = C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \cup \dots \cup C_{\alpha_n}$. Visto que os C_α 's são linearmente ordenados por inclusão, para

cada $n = 1, 2, \dots$, $C_n = C_\alpha$ para algum α . Temos então $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_\alpha C_\alpha$.

Denotemos $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Se $C = C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então C é um cilindro aberto em M . Caso contrário $\bar{C}_n \subset C_{n+1}$ para uma infinidade de n 's. Podemos assumir que isso acontece para todo $n \in \mathbb{N}$. Cada $\bar{C}_{n+1} - C_n$ é um cilindro fechado.

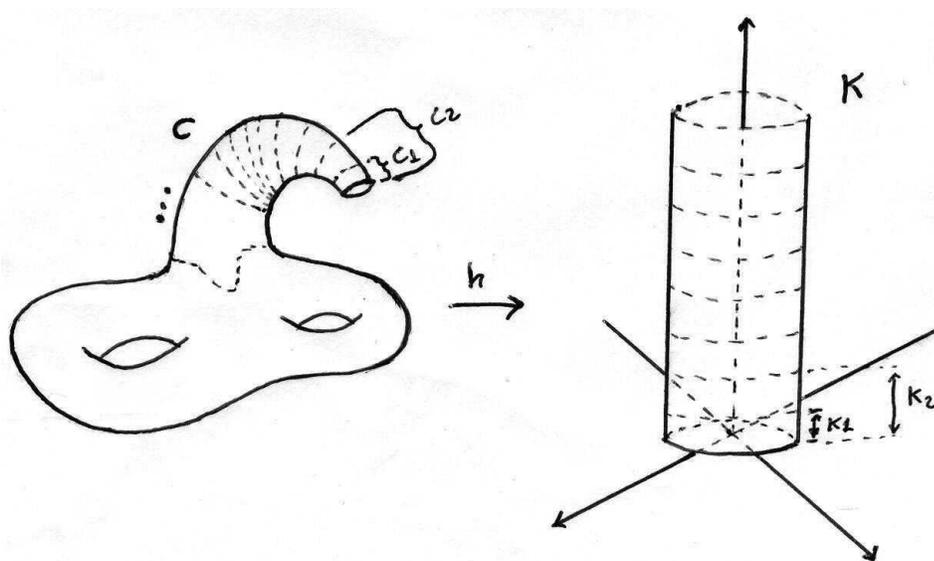


figura 7

Considere o cilindro padrão $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$. Denotemos $K_n = \{(x, y, z) \in K; z < n\}$, então $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ e $\bar{K}_n \subset K_{n+1}$. Para cada $n = 1, 2, \dots$, seja $k_n : \bar{K}_n - K_{n-1} \rightarrow \bar{C}_n - C_{n-1}$ um homeomorfismo tal que

$$k_n(\bar{K}_{n-1} - K_{n-1}) = \bar{C}_{n-1} - C_{n-1}.$$

Por conveniência tomemos $K_0 = C_0 = \emptyset$. Agora definamos um homeomorfismo $h : K \rightarrow C$ e assim provaremos que C é um cilindro (veja a **figura 7**). Começemos

tomando $h|_{K_1} = k_1$ e prosseguiremos por indução como segue: Suponha que já tenhamos definido h para \bar{K}_n de forma que $h|_{\bar{K}_n}$ é um homeomorfismo entre \bar{K}_n e \bar{C}_n , agora estendemos h a \bar{K}_{n+1} colocando, para cada $(x, y, z) \in \bar{K}_{n+1} - K_n$, $h(x, y, n + z') = k_{n+1}(k_{n+1}^{-1} \circ h(x, y, n) + (0, 0, z'))$ onde $0 \leq z' \leq 1$.

Assim, um homeomorfismo entre K e C foi construído, provando que C é um cilindro aberto de M , com $\Gamma \subset C$.

(c)

A partir das conclusões de (b) temos que $\mu \cap \Gamma \subset \mu \cap C = \partial C \cap C = \emptyset$, então μ não tem pontos em comum com Γ . Suponha que exista um colar $\bar{A} = S^1 \times [0, 1]$ em M , com $\mu = S^1 \times \{0\}$. Escreva $A = S^1 \times (0, 1)$.

Sempre existirá um colar se μ tocar o bordo de M ou se μ tem dois lados em M . No primeiro caso, qualquer colar intersecta C e no segundo caso existe um colar em ambos os lados de μ . Nós sempre escolheremos o colar que intersecta C .

Como A é conexo e disjunto de μ , segue que $A \subset C$. Podemos escolher A de tal forma que $A_1 = S^1 \times (0, 1] \subset C$ e $v = S^1 \times \{1\}$ seja uma curva fechada em C disjunta de Γ . Temos então duas possibilidades, *a priori*. A primeira é que v limita um disco em C . Isto não pode acontecer: tome o ponto de compactificação ϖ de C , ϖ também será o ponto de compactificação de A_1 e o disco $\hat{C} = C \cup \varpi$ contém o disco $\hat{A}_1 = A \cup \varpi$. Estes discos têm em comum o ponto interior ϖ , então $v = \partial A_1$ não pode limitar um disco em $C = \hat{C} - \varpi$.

Ficamos com a segunda possibilidade: v não limita um disco em C (veja a **figura 8**). Então v , juntamente com Γ limita um cilindro compacto \bar{B} , tal que $\bar{A} \cap \bar{B} = v$, logo $\bar{C} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e portanto \bar{C} é um cilindro compacto limitado por μ e Γ .

Agora suponha que μ tenha apenas um lado em M . Então μ não toca o bordo de M . Tome uma vizinhança tubular V de μ , tal que $\bar{V} \cap \partial M = \emptyset$. Então \bar{V} é uma faixa de Möebius com bordo v (veja a **figura 8**). $V - \mu$ é conexo e intersecta C mas não intersecta $\partial C = \mu$, logo $V \subset \bar{C}$. Então $\bar{C} = C \cup \mu$ é aberto e fechado em M pois, dado $x \in \bar{C}$, se $x \in \mu$ então $x \in V$ que é aberto em M , caso contrário $x \in C$ que também é aberto em M . Logo $\bar{C} = M$ é uma 2-variedade com bordo Γ e, se cortarmos M ao longo de μ , obtemos uma nova variedade M' com dois círculos-bordo, a saber, Γ e μ , tal que, omitindo-se o círculo-bordo μ obtemos o cilindro C . Logo M' é um cilindro compacto e M é uma faixa de Möebius.

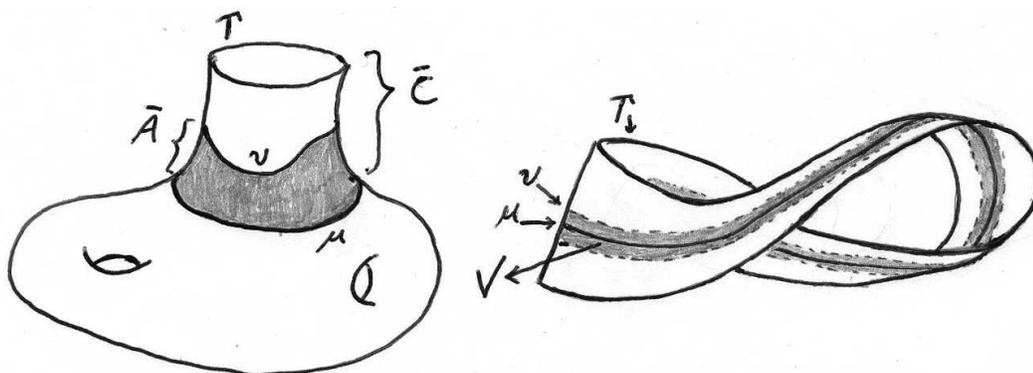


figura 8

■

Prova do Teorema A

Provaremos o Teorema A, por indução sobre n .

Para $n = 1$ o Teorema se reduz ao Lema 2, e portanto está provado.

Consideremos uma ação contínua $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$.

Suponha o Teorema provado para ações de \mathbb{R}^{n-1} .

Para esta demonstração usaremos as seguintes notações:

hiperplano: um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$;

reta: um subespaço vetorial unidimensional de \mathbb{R}^n ;

1-órbita: uma órbita unidimensional;

Dado um subespaço vetorial E de \mathbb{R}^n , $\varphi|_E$ denotará a ação de E em M induzida pela restrição de φ a E ;

Dado $x \in M$, denotaremos $\mathcal{O}(x)$ a sua φ -órbita.

Para continuarmos a prova precisaremos de dois resultados auxiliares:

Sublema 1. *Seja \mathfrak{M} a coleção de todos os conjuntos minimais da ação φ em M . Se φ não tiver ponto fixo, então \mathfrak{M} é não-enumerável e todos os seus elementos, a menos de um número finito, são curvas fechadas simples.*

Prova. Dado um hiperplano $Z \subset \mathbb{R}^n$, a hipótese de indução garante que $\varphi|_Z$ tem pelo menos um ponto fixo. Tome um ponto fixo $x_Z \in M$ de $\varphi|_Z$. Pela continuidade de φ todos os pontos de $\overline{\mathcal{O}(x_Z)}$ são pontos fixos de $\varphi|_Z$. Pela Proposição 2, $\overline{\mathcal{O}(x_Z)}$ é φ -invariante. Como $\overline{\mathcal{O}(x_Z)}$ é fechado e não-vazio, o Lema 4 garante que $\overline{\mathcal{O}(x_Z)}$ contém pelo menos um conjunto minimal de φ . Podemos então denotar $\mathfrak{M}(Z)$ a coleção de todos os conjuntos minimais de φ cujos pontos são pontos fixos de $\varphi|_Z$.

Dado uma reta $l \subset \mathbb{R}^n$ tal que $l \cap Z = \{0\}$, visto que l e Z geram \mathbb{R}^n , temos $\mathcal{O}(x) = \varphi(\mathbb{R}^n, \{x\}) = \varphi(l, \varphi(Z, \{x\})) = \varphi(l, \{x\})$ para qualquer ponto $x \in \overline{\mathcal{O}(x_Z)}$, ou seja, a φ -órbita de qualquer ponto de $\overline{\mathcal{O}(x_Z)}$ é igual à sua $\varphi|_l$ -órbita. É importante observar que se $\mu \in \mathfrak{M}(Z)$, então $\mu = \overline{\mathcal{O}(x)} = \overline{\varphi(l, \{x\})}$ para todo $x \in \mu$, logo μ é também um conjunto minimal do fluxo $\varphi|_l$.

Se Z e W são hiperplanos distintos então $\mathfrak{M}(Z) \cap \mathfrak{M}(W) = \emptyset$, pois se μ fosse um elemento comum a estas duas coleções, então cada ponto x de μ seria ponto fixo de $\varphi|_Z$ e de $\varphi|_W$, mas Z e W geram \mathbb{R}^n , logo x seria ponto fixo de φ , o que contraria a hipótese. Tomemos $\mathfrak{M} = \cup_{Z \in \Lambda} \mathfrak{M}(Z)$, onde Λ é a família de todos os hiperplanos de \mathbb{R}^n , portanto, \mathfrak{M} é não-enumerável.

Agora, seja μ um conjunto minimal de φ . Suponha μ tenha ponto interior. Então a Proposição 3 nos dá $\mu = M = \overline{\mathcal{O}(x)}$ para todo $x \in M$. Sejam Z e l um hiperplano e uma reta respectivamente tal que $l \cap Z = \{0\}$. Tome x_Z um ponto fixo de $\varphi|_Z$, logo $M = \overline{\mathcal{O}(x_Z)}$, portanto a φ -órbita de qualquer ponto de M é igual à sua $\varphi|_l$ -órbita. Tomemos x_l um ponto fixo do fluxo $\varphi|_l$, então $M = \overline{\mathcal{O}(x_l)} = \overline{\varphi(l, \{x_l\})} = \{x_l\}$. Absurdo. Logo μ tem interior vazio. Tomemos $x \in \mu$, como $\text{int}(\mu) = \emptyset$ então a φ -órbita de x é unidimensional, portanto o grupo de isotropia de x contém um

hiperplano $Z' \subset \mathbb{R}^n$, ou seja, x é ponto fixo de $\varphi|_{Z'}$. A Proposição 3 nos dá $\mu = \overline{\mathcal{O}(x)}$, logo $\mu \subset \mathfrak{M}(Z') \subset \mathfrak{M}$. Com isso concluímos que \mathfrak{M} contém todos os conjuntos minimais de φ .

Denotemos por l_1, l_2, \dots, l_n os eixos de \mathbb{R}^n e definemos $\mathfrak{M}_i = \cup\{\mathfrak{M}(Z); Z \in \Lambda, Z \cap l_i = \{0\}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Todo elemento $\mu \in \mathfrak{M}_i$ é conjunto minimal de $\varphi|_{l_i}$, então, pelo Lema 5, todos os elementos $\mu \in \mathfrak{M}_i$ são curvas fechadas simples, a menos de um número finito deles. Como um hiperplano não contém todos os eixos de \mathbb{R}^n , então $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{M}_n$. Portanto todos os elementos de \mathfrak{M} são curvas fechadas simples, a menos de um número finito de exceções. (Note que se o gênero de M é zero, então não existem exceções.) ■

Sublema 2. *Se φ não tiver ponto fixo, então podemos encontrar uma 1-órbita fechada de φ que é disjunta dos círculos-bordo de M e não limita um cilindro com nenhum deles.*

Prova. Escolhamos um círculo-bordo Γ de M . Considere a coleção $\{C_\alpha\}$ de todos os cilindros que são abertos em M tal que \bar{C}_α é um cilindro compacto cujos círculos-bordo são Γ e μ_α , onde μ_α é uma 1-órbita fechada de φ . Podemos então escrever $\partial C_\alpha = \mu_\alpha$. Se M não é um disco, a coleção $\{C_\alpha\}$ é linearmente ordenada por inclusão (Lema 7). Se M é um disco, o *Princípio Maximal de Hausdorff* (veja [17] e [18]) nos permite escolher uma subfamília maximal de $\{C_\alpha\}$ linearmente ordenada por inclusão, para a qual, por conveniência, usaremos a mesma notação. Em ambos os casos, usando novamente o Lema 7, a união $C = \cup_\alpha C_\alpha$ é um cilindro aberto que pode ser escrito como $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, onde, para cada $n = 1, 2, \dots$, $C_n = C_\alpha$ para algum α e $C_1 \subset C_2 \subset \dots$

Queremos, agora, mostrar que ∂C é uma curva fechada simples. Lembremos que $x \in \partial C$ se, e somente se, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $x_n \in \mu_n = \partial C_n$, $n = 1, 2, \dots$

Todo C_n é φ -invariante, logo C é φ -invariante e a Proposição 3 nos garante que ∂C é φ -invariante, portanto, pelo Lema 2, ∂C contém um conjunto minimal de φ . Seja $\mu \subset \partial C$ um conjunto minimal de φ . O grupo de isotropia de (todos os pontos de) μ contém um certo hiperplano Z . Escolha uma reta l que não esteja contida no grupo de isotropia de nenhuma das μ_n , nem de μ . Tome o fluxo $\varphi|l$. As curvas μ_n são órbitas de $\varphi|l$ e μ é um conjunto minimal de $\varphi|l$. Agora usaremos o Lema 6. Por (a) nenhum ponto de μ pode ter órbita recorrente, então μ é uma curva fechada. Por (b) $\mu = \partial C$. Concluimos então que \bar{C} é um cilindro compacto (lembramos que estamos lidando apenas com variedades orientáveis, logo $M \neq \bar{C} =$ faixa de Möebius) com círculos-bordos μ e Γ , cujo bordo (relativo a M) $\partial C = \mu$ é disjunto dos outros círculos-bordo de M (pois M não é um cilindro), e $M - C$ é uma 2-variedade homeomorfa a M com μ no lugar de Γ como círculo-bordo. $M - C$ é φ -invariante e nenhuma 1-órbita fechada de φ pode limitar um cilindro juntamente com Γ .

Repetimos a mesma construção para todos os círculos-bordo de M , obtendo assim uma 2-variedade $M' \subset M$ homeomorfa a M . Como $\chi(M') \neq 0$, existe uma 1-órbita fechada v de φ em M' , obtida pelo Sublema 1. Como \mathfrak{M} é infinito, v pode ser escolhida diferente dos círculos-bordos de M' (veja as **figuras 9 e 10**).

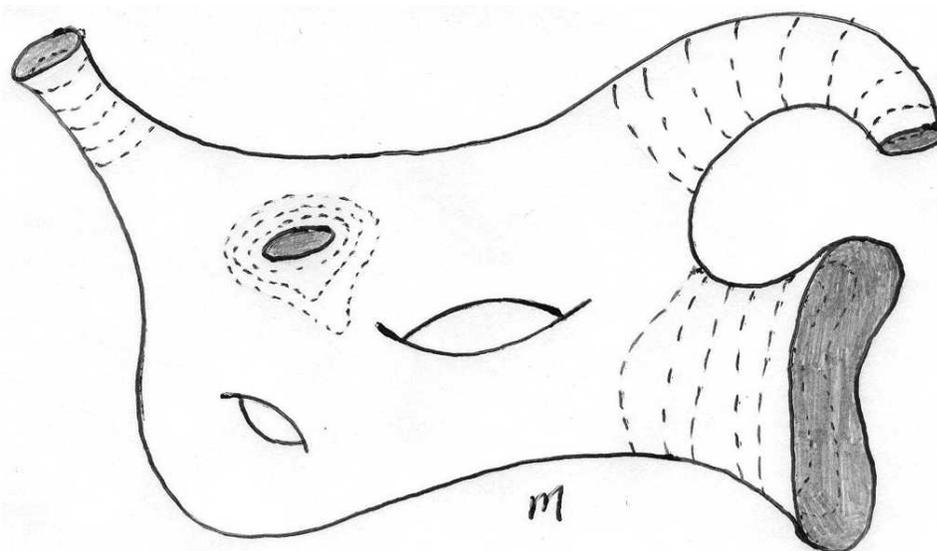


figura 9

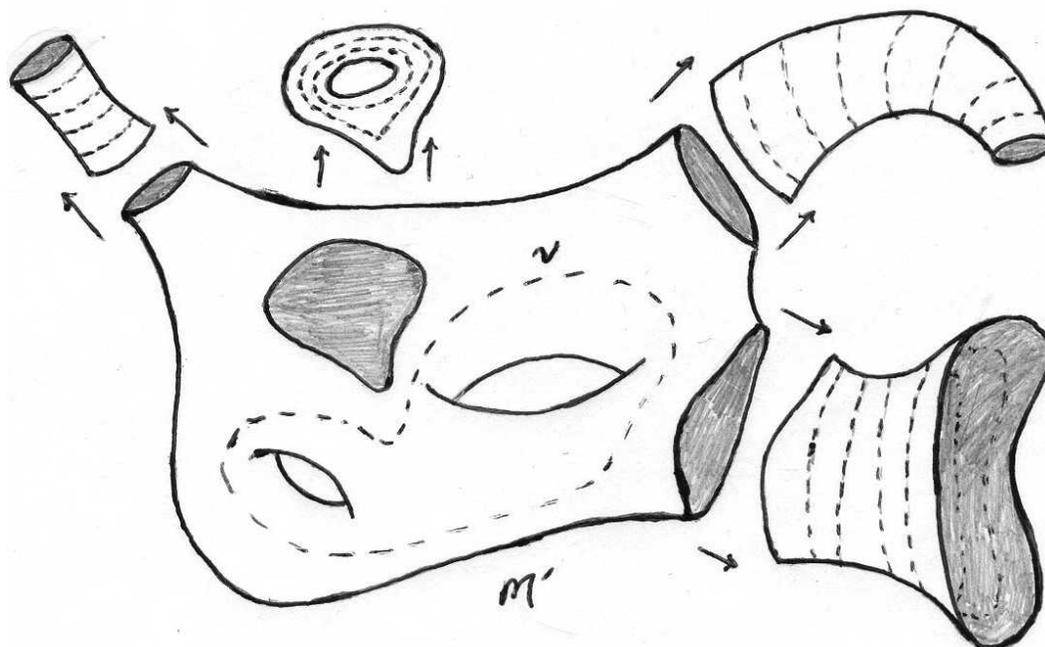


figura 10

A existência de v prova o Sublema 2. ■

Agora seguiremos com a prova do Teorema A.

Para provarmos que $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ tem um ponto fixo, usaremos uma segunda indução, que será dada sobre o gênero g da variedade M . Suponha que φ não tenha ponto fixo.

Começaremos provando o Teorema para variedades de gênero $g = 0$.

Considere, em primeiro lugar, o caso $M = D =$ disco, então uma aplicação do Sublema 2 nos dá um absurdo.

Agora tome o caso $M = S^2 =$ esfera. Pelo Sublema 1 encontramos uma 1-órbita fechada μ de φ em S^2 . Esta órbita limita um disco $D \subset S^2$ que é φ -invariante, logo, pelo caso anterior, existe um ponto fixo em D , e portanto em S^2 . Contradição.

Para os casos restantes (ainda $g = 0$) usaremos uma terceira indução, desta vez sobre o número de círculos-bordos b de M . O enunciado já foi provado para $b = 0$ (esfera) e $b = 1$ (disco). O caso $b = 2$ corresponde ao cilindro ($\chi(M) = 0$), e portanto, fora de questão. Seja M uma 2-variedade de gênero $g = 0$ com k círculos-bordo, $k > 2$. Nesse caso, M é uma esfera com k buracos, ou se preferir, um disco com $k - 1$ buracos. Suponha o enunciado provado para variedades com b círculos-bordo, $b < k$. Aplicando o Sublema 2 nós obtemos uma 1-órbita fechada v de φ que não limita cilindro em M com nenhum dos seus círculos-bordo. Neste caso, v divide em M duas variedades M' e M'' de gênero $g = 0$, φ -invariantes, com b' e b'' círculos-bordos respectivamente, tal que $b', b'' \neq 2$ e $b' \leq b''$. Como $b' + b'' = k + 2$ e $k \geq 3$, então $b' < k$ (Observe o exemplo mostrado na **figura 11**). Pela hipótese de indução sobre b , φ tem um ponto fixo em M' , e portanto em M . Contradição. Isto finaliza a prova para o caso $g = 0$.

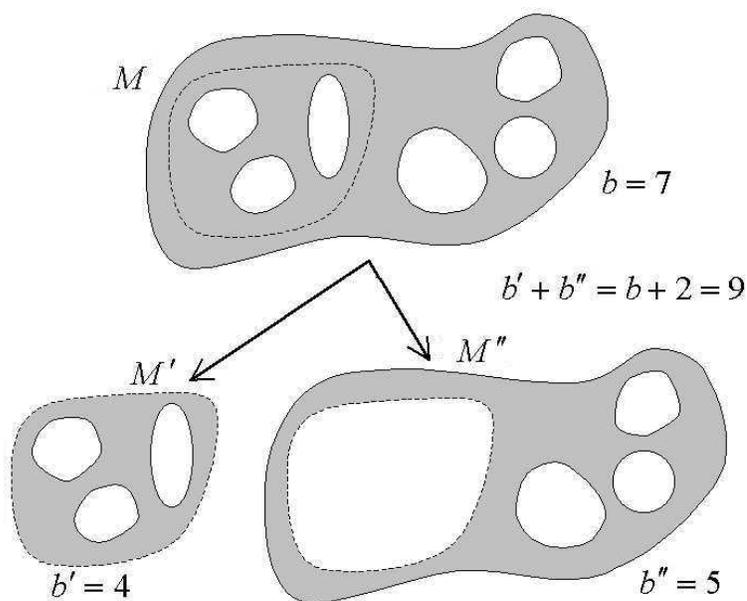


figura 11

Voltamos para a indução sobre o gênero g de M .

Seja M uma 2-variedade de gênero $g > 0$. Suponha o Teorema provado para variedades de gênero menor que g . Tomemos uma curva $v \subset M$ obtida por uma aplicação do Sublema 2. Cortando-se M ao longo de v , ou obtemos uma nova variedade de gênero $g - 1$ e mesma característica de Euler, ou então obtemos duas variedades com característica de Euler não-nula (as quais, somadas, dão $\chi(M)$), onde pelo menos uma delas tem gênero menor que g . Na **figura 12** vemos um exemplo em que o corte ao longo de v transforma a variedade M de gênero 2 e com 1 círculo-bordo na variedade M' de gênero 1 e com 3 círculos-bordo. A característica de Euler, entretanto, continua inalterada, ou seja, $\chi(M) = \chi(M') = -3$. A **figura 12** também mostra um exemplo em que o corte ao longo de v divide M que tem gênero 2, 1 círculo-bordo e característica de Euler -3 , em duas novas variedades, M_1 e M_2 onde a primeira tem

gênero 1, 2 círculos-bordo e característica de Euler -2 e a segunda tem gênero 1, 1 círculo-bordo e característica de Euler -1 .

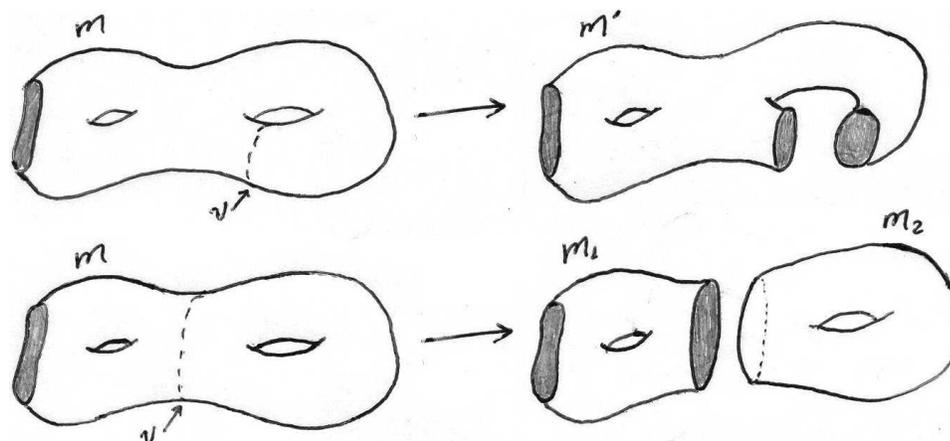


figura 12

Em ambos os casos a hipótese de indução sobre g garante um ponto fixo em M . Contradição. Isso finaliza a prova do Teorema A. ■

Corolário 1. *Se o conjunto minimal de uma ação de \mathbb{R}^n em uma 2-variedade compacta M é a variedade inteira, então M é um toro ou uma garrafa de Klein.*

Prova. Se M é o conjunto minimal de φ , então $M = \overline{\mathcal{O}(x)}$ para todo $x \in M$, logo φ não tem ponto fixo, portanto, pelo Teorema A, $\chi(M) = 0$. Nesse caso o gênero de M ou é zero ou é 1, visto que a fórmula que fornece a característica de Euler de M é dada por $\chi(M) = 2 - 2g - b$ se M é orientável e $\chi(M) = 1 - g - b$ se M é não-orientável, onde g é o gênero de M e b é a quantidade de círculos-bordo de M ($g, b > 0$).

Observamos que o gênero de M tem que ser 1. De fato, se o gênero de M for zero então M tem bordo ($b = 1$ ou $b = 2$ se M é orientável ou não, respectivamente),

e o bordo de M é φ -invariante pois todos os campos de vetores que definem φ são tangentes ao bordo de M , então para um ponto x do bordo ∂M de M temos $M = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset \partial M$. Absurdo.

Obtemos então que $\chi(M) = 0$ e que o gênero de M é 1. Conseqüentemente M não tem bordo. Concluimos, então, que M é um toro ou uma garrafa de Klein.

Exemplo: Tome o toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Todas as órbitas da ação $\varphi : \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2$ definida por

$$\varphi(t, e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\lambda}) = (e^{2\pi i(\theta+t)}, e^{2\pi i(\lambda+\alpha t)}), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

são densas em T^2 .

Para a garrafa de Klein K^2 , tome T^2 como seu recobrimento duplo orientável e $p : T^2 \rightarrow K^2$ sua aplicação de recobrimento. A ação φ induz uma ação $\tilde{\varphi}$ em K^2 cujas órbitas são as projeções por p das órbitas da ação φ em T^2 portanto são densas em K^2 . ■

Corolário 2. *Seja M uma $2k$ -variedade do tipo $M = \prod_{i=1}^k M_i$ onde M_i é uma 2-variedade compacta com $\chi(M_i) \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Se para todo $i = 1, 2, \dots, k$ tivermos uma ação contínua $\varphi_i : \mathbb{R}^{n_i} \times M_i \rightarrow M_i$, onde $n_i \in \mathbb{N}$, então a ação produto $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k : (\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}) \times M \rightarrow M$ definida por $(r_1, \dots, r_k) \times (x_1, \dots, x_k) \mapsto (\varphi_1(r_1, x_1), \dots, \varphi_k(r_k, x_k))$, onde $r_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ e $x_i \in M_i$, tem um ponto fixo.*

Prova. Pelo Teorema A, cada uma das ações $\varphi_i : \mathbb{R}^{n_i} \times M_i \rightarrow M_i$ admite um ponto fixo $z_i \in M_i$, portanto, um ponto $(z_1, z_2, \dots, z_k) \in M$ obtido desta forma é um ponto fixo de φ . ■

Corolário 3. *Seja M uma 3-variedade compacta com bordo, tal que pelo menos uma das componentes do seu bordo tenha Característica de Euler não-nula. Então toda ação (contínua) do grupo aditivo \mathbb{R}^n em M tem um ponto fixo.*

Prova. Seja ∂A a componente do bordo de M tal que $\chi(\partial A) \neq 0$ e seja φ uma ação contínua de \mathbb{R}^n em M . Segundo nossas condições iniciais, todos os campos de vetores que definem φ são tangentes a ∂A , portanto ∂A é φ -invariante, e uma aplicação do Teorema A garante a existência de um ponto fixo de φ em ∂A e portanto em M . ■

O leitor interessado pode encontrar mais informação sobre as 3-variedades em [19], [20] e [21].

Lema 8. *Seja M uma 3-variedade compacta sem bordo. Então $\chi(M) = 0$.*

Prova. Seja \mathcal{T} uma simplexação de M (por tetraedros). Como M é compacta \mathcal{T} é finita e podemos denotar por v , a , f e t o número de vértices, arestas, faces e tetraedros de \mathcal{T} respectivamente. Temos então

$$\chi(M) = v - a + f - t.$$

Como M não tem bordo então todo ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa à bola sólida aberta $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < 1\}$.

Em cada vértice V_i de \mathcal{T} , $i = 1, 2, \dots, v$, tomemos uma vizinhança W_i homeomorfa a B^3 tal que a coleção $\{\overline{W_i}\}$ é disjunta e tal que para todo tetraedro T_j de \mathcal{T} , $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, que tenha V_i como vértice, $W_i \cap T_j$ seja um tetraedro, de forma que $\partial W_i \cap T_j$ seja um triângulo. Dessa forma temos

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^v \partial W_i\right) = \sum_{i=1}^v \chi(\partial W_i) = 2v,$$

pois ∂W_i é homeomorfo a S^2 para todo i .

A simplexação \mathcal{T} de M induz uma triangulação T em $\cup_{i=1}^v \partial W_i$ tal que cada tetraedro de \mathcal{T} contém 4 triângulos de T , cada face de \mathcal{T} contém 3 arestas de T e cada aresta de \mathcal{T} contém 2 vértices de T (veja a **figura 13**), logo

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^v \partial W_i\right) = 2a - 3f + 4t.$$

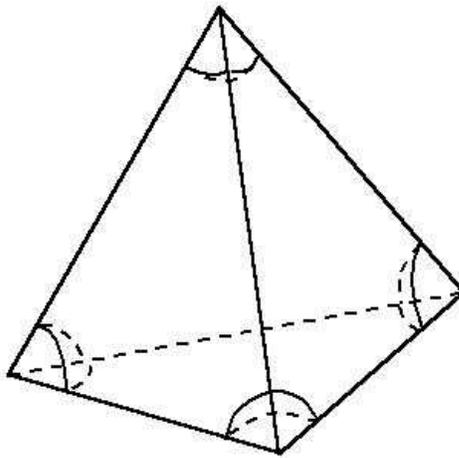


figura 13

Igualando estes dois resultados obtemos

$$2a - 3f + 4t = 2v.$$

Lembremos ainda que, para a simplexação \mathcal{T} , cada face pertence a exatamente 2 tetraedros, e, visto que cada tetraedro tem 4 faces, temos a seguinte relação:

$$4t = 2f \iff f = 2t.$$

Logo

$$-3f + 4t = -2f + (-f + 2t) + 2t = -2f + 2t,$$

então

$$2a - 3f + 4t = 2v \iff 2a - 2f + 2t = 2v,$$

e portanto

$$\chi(M) = v - a + f - t = 0.$$

■

Lema 9. *Seja A um conjunto compacto de \mathbb{R}^3 tal que ∂A seja uma 2-variedade compacta e conexa (portanto orientável e sem bordo) então $\chi(A) = \frac{1}{2} \cdot \chi(\partial A)$.*

Prova. Se A é uma bola sólida fechada, então A é homeomorfa a um tetraedro sólido fechado, logo

$$\chi(A) = 1.$$

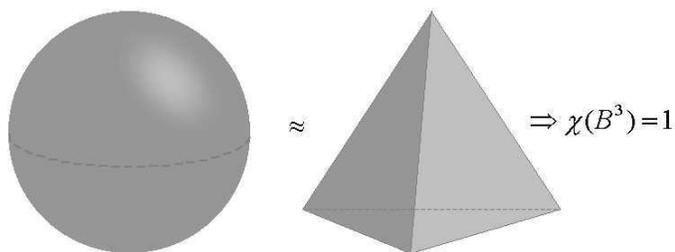


figura 14

Suponha que A seja um toro sólido fechado. Tomemos um prisma sólido fechado P de base triangular. “Colando” suas bases obtemos um toro sólido ST . P é homeomorfo a um tetraedro sólido fechado, por isso $\chi(P) = 1$. Tome uma simplexação de P tal que as bases de P sejam faces da simplexação. A “colagem” faz desaparecerem 3 vértices, 3 arestas e 1 face da simplexação, logo

$$\chi(ST) = \chi(P) - (3 - 3 + 1) = 1 - 1 = 0.$$

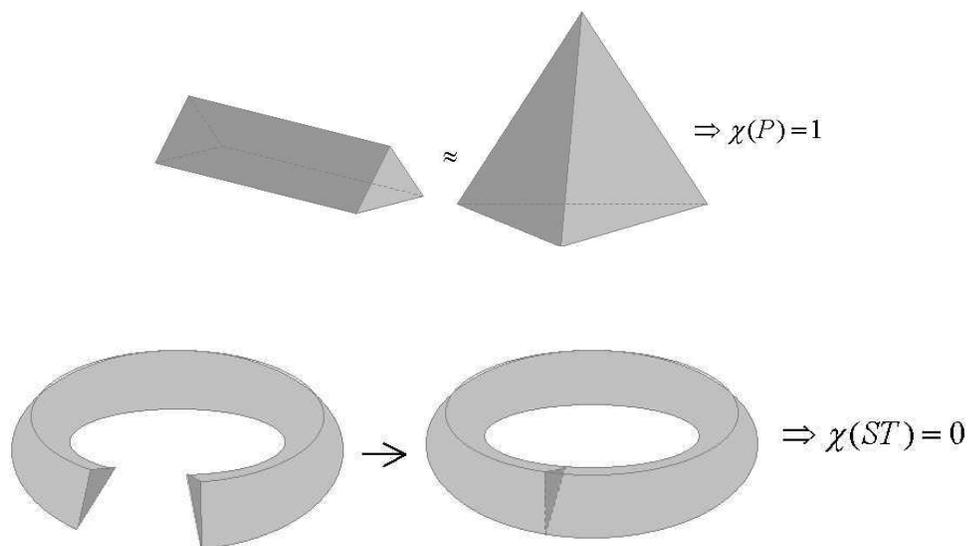


figura 15

Como A é homeomorfo a ST temos

$$\chi(A) = 0.$$

Falta apenas a prova para o caso em que A é um n -toro sólido fechado. Para isso basta provarmos para A sendo um bitoro sólido fechado e o restante segue-se indutivamente.

Tomemos dois toros sólidos fechados e tomemos uma simplexação para cada um. Para cada toro escolhamos uma face da simplexação que esteja no seu bordo e “colemos” os dois através destas (veja a **figura 16**). Obtemos assim um bitoro sólido fechado cuja simplexação é a união das simplexações dos dois toros menos 3 vértices, 3 arestas e 1 face. Portanto

$$\chi(A) = 0 + 0 - (3 - 3 + 1) = -1.$$

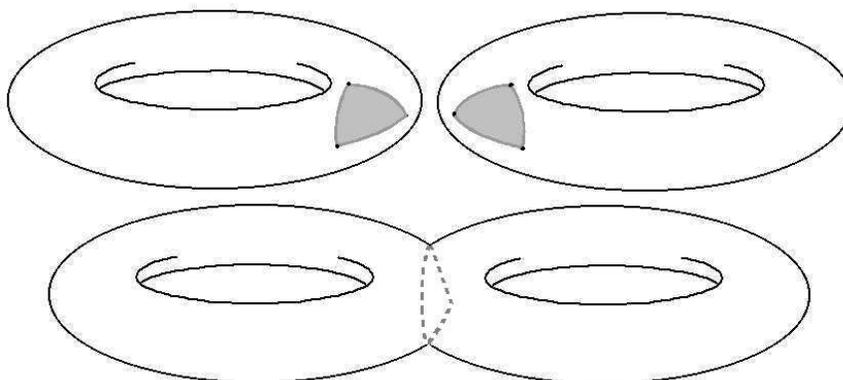


figura 16

Prosseguindo indutivamente, obtemos que: se A é um n -toro sólido fechado então

$$\chi(A) = n - 1.$$

■

Proposição 4. *Seja M uma 3-variedade compacta. Se $\chi(M) \neq 0$, então M tem bordo, e pelo menos uma das componentes do seu bordo tem Característica de Euler não-nula.*

Prova. Do Lema 8 vemos que se M não tem bordo então $\chi(M) = 0$. Observemos que uma 3-variedade compacta com bordo M é obtida excluindo-se de uma 3-variedade

compacta sem bordo \overline{M} abertos cujos fechados em \overline{M} são dois-a-dois disjuntos e homeomorfos a conjuntos compactos de \mathbb{R}^3 como no do Lema 9.

Ao se excluir um aberto A_1 de \overline{M} como acima obtemos

$$\begin{aligned}\chi(\overline{M} \setminus A_1) &= \chi(\overline{M}) - \chi(A_1) + \chi(\partial A_1) \\ &= \chi(\partial A_1) - \chi(A_1) \\ &= \chi(\partial A_1) - \frac{1}{2} \cdot \chi(\partial A_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \chi(\partial A_1) \\ &= 1 - n_1\end{aligned}$$

onde n_1 é o gênero de ∂A_1 .

Portanto, para M obtemos

$$\chi(M) = \chi(\overline{M} \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k (1 - n_i),$$

onde n_i é o gênero de ∂A_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Portanto, se $\chi(M) \neq 0$ então $1 - n_i \neq 0$ para algum i , logo $\chi(\partial A_i) \neq 0$. ■

Esta proposição mostra que as hipóteses do Corolário 3 são muito mais abrangentes do que $\chi(M) \neq 0$. De fato, podemos obter, sem esforço, 3-variedades compactas M com $\chi(M) = 0$ que verificam o corolário. Por exemplo: tome uma 3-variedade compacta M cujo bordo é composto de uma esfera e um bitoro. Qualquer ação contínua de \mathbb{R}^n nessa variedade admite pelo menos dois pontos fixos, um em cada componente do bordo, e pela Proposição 4, $\chi(M) = 0$.

Para a esfera S^3 temos $\chi(S^3) = 0$, mas sempre é possível encontrar uma ação de \mathbb{R} em S^3 sem ponto fixo como mostra o lema abaixo, que também traz um resultado muito importante para esferas de dimensão qualquer.

Lema 10. *Todo campo de vetores contínuo em uma esfera S^n tem singularidade se, e somente se, n é par.*

Prova.

Suponha n ímpar, digamos $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Sejam (x_1, \dots, x_{2k}) as coordenadas em \mathbb{R}^{2k} . Tome $S^{2k-1} = \{x \in \mathbb{R}^{2k}; |x| = 1\}$. Basta ver que o campo $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k}) \mapsto (-x_{k+1}, \dots, -x_{2k}, x_1, \dots, x_k)$ não tem singularidades em S^{2k-1} , veja que este campo é tangente a S^{2k-1} e é unitário em S^{2k-1} .

Agora suponha n par. Suponha por contradição que exista um campo de vetores v contínuo sem singularidades em S^n . Tomemos em S^n a aplicação $f : S^n \rightarrow S^n$ definida por

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{|x + v(x)|}.$$

Então existe uma homotopia $H : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n$ definida por

$$H(t, x) = \frac{tf(x) + (t-1)x}{|tf(x) + (t-1)x|}$$

entre a aplicação antípoda $\alpha : x \mapsto -x$ e f em S^n , veja que $tf(x) + (t-1)x$, $t \in [0, 1]$, descreve o seguimento de reta ligando $-x$ a $f(x)$ em \mathbb{R}^{n+1} , portanto, como $f(x) \neq x$ para todo $x \in S^n$, então $|tf(x) + (t-1)x| \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ e todo $x \in S^n$.

Também existe uma homotopia $G : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n$ definida por

$$G(t, x) = \frac{x + tv(x)}{|x + tv(x)|}$$

entre a aplicação identidade $Id : x \mapsto x$ e f em S^n , note que $|x + tv(x)| > 1$ para todo $t \in [0, 1]$ e todo $x \in S^n$.

Pela propriedade da transitividade da homotopia encontramos que a aplicação identidade é homotópica à aplicação antípoda em S^n , o que não é verdade para n par (Confira: Elon Lages Lima. Curso de Análise, vol.2, pg. 499). ■

Para ver mais sobre homotopia consulte [1].

Estes últimos resultados mostram, dentre outras coisas, que a hipótese “ $\chi(M) \neq 0$ ” não é uma “boa hipótese” para tentar estender o Teorema A para dimensão 3. Observe que a Característica de Euler não classifica as 3-variedades compactas como o faz em dimensão 2 (principalmente as sem bordo como mostrou o Lema 8).

Conseqüentemente, a ausência de um teorema de classificação das n -variedades, $n > 2$, dificulta a tentativa de estender o Teorema A a dimensões maiores.

Apêndice

Exemplo de uma ação sem ponto fixo do grupo afim no disco unitário fechado

O grupo afim da reta real é o conjunto G de todas as aplicações da forma $x \mapsto ax + b$, $a > 0$, de \mathbb{R} sobre si mesmo, com a estrutura de grupo dada pela composição de aplicações. Abstratamente, G é o conjunto de todos os pares (a, b) de números reais tais que $a > 0$, e a operação em G é definida por $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$. G tem a topologia natural que o torna homeomorfo ao semi-plano aberto direito de \mathbb{R}^2 e, portanto, é um grupo de Lie bidimensional simplesmente conexo. Sua álgebra de Lie tem uma base $\{e_1, e_2\}$ para a qual o único colchete não-nulo é $[e_1, e_2] = e_1$. Para obter uma ação de G em uma 2-variedade M , é suficiente obter um par de campos vetoriais X e Y em M , tais que $[X, Y] = X$.

Para construirmos campos de vetores X e Y no disco unitário fechado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ com essa propriedade, primeiro definiremos campos A e B em \mathbb{R}^2 por

$$A(x, y) = (0, 1) \text{ e } B(x, y) = (x, y).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
[A, B] &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= x \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} = A
\end{aligned}$$

Identifiquemos cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com o número complexo $z = x + yi$, e definamos o difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \text{int}(D)$ do plano no interior do disco D por

$$h(z) = \frac{ze^{if(|z|)}}{(1 + |z|^2)^{1/2}},$$

onde $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f(t) = 0$ para $t \leq 1$ e $f(t) = \log t$, para $t \geq 2$. O significado geométrico de h pode ser visualizado na **figura 17** abaixo, que exhibe a imagem, em $\text{int}(D)$, de duas retas ortogonais que passam pela origem.

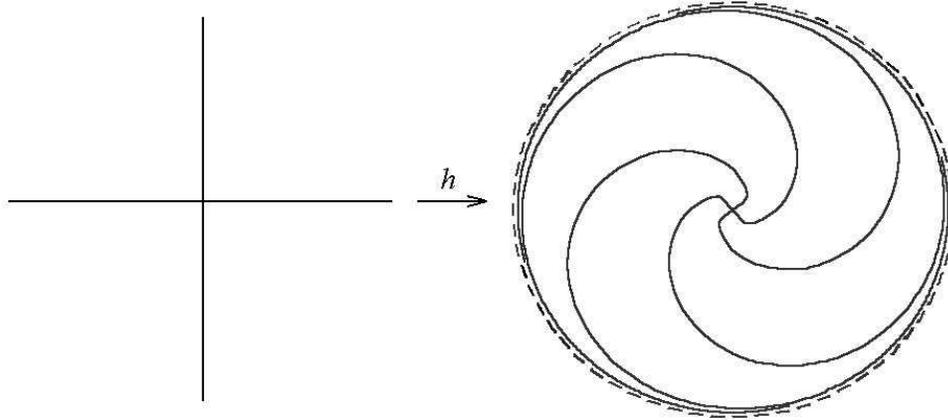


figura 17

Definamos X e Y em $\text{int}(D)$ como

$$X = h_*(A) \text{ e } Y = h_*(B)$$

Observe que

$$[X, Y] = [h_*(A), h_*(B)] = h_*([A, B]) = h_*(A) = X.$$

Agora é só mostrar que X e Y se estendem continuamente a ∂D . Para isso calcularemos a derivada de h para $|z| \geq 2$, neste caso, podemos tomar $f(|z|) = \log |z|$, logo $f'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{ze^{if(|z|)}}{(1+|z|^2)^{1/2}} \\ h'(z) &= \frac{(e^{if(|z|)} + iz e^{if(|z|)} f'(|z|)|z'|)(1+|z|^2)^{1/2} - (1+|z|^2)^{-1/2} \cdot |z||z'| z e^{if(|z|)}}{1+|z|^2} \\ &= \frac{ze^{if(|z|)}}{(1+|z|^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{z} + i f'(|z|)|z'| - \frac{|z||z'|}{1+|z|^2} \right) \\ &= h(z) \left(\frac{1}{z} + \left(\frac{i}{|z|^2} - \frac{1}{1+|z|^2} \right) |z||z'| \right) \end{aligned}$$

Lembremos que $|z|^2 = x^2 + y^2$ logo $2|z||z'| = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto $|z||z'| = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Agora podemos calcular X e Y em $\text{int}(D)$ próximo a ∂D . Lembremos que

$$A(z) = A(x, y) = (0, 1) = i$$

e

$$B(z) = B(x, y) = (x, y) = z.$$

Logo

$$\begin{aligned} X(h(z)) &= h_*(A)(h(z)) = h'(z) \cdot A(z) \\ &= h(z) \left(\frac{1}{z} + \left(\frac{i}{|z|^2} - \frac{1}{1+|z|^2} \right) \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot i \\ &= h(z) \left(\frac{i}{z} + \left(\frac{i}{|z|^2} - \frac{1}{1+|z|^2} \right) \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= h(z) \left(\frac{i}{z} + \frac{iy}{|z|^2} - \frac{y}{1+|z|^2} \right). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Y(z) &= h_*(B)(z) = h'(h^{-1}(z)) \cdot B(h^{-1}(z)) \\
&= h(h^{-1}(z)) \left(\frac{1}{h^{-1}(z)} + \left(\frac{i}{|h^{-1}(z)|^2} - \frac{1}{1 + |h^{-1}(z)|^2} \right) \begin{bmatrix} \operatorname{Re} h^{-1}(z) & \operatorname{Im} h^{-1}(z) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) h^{-1}(z) \\
&= z \left(\frac{h^{-1}(z)}{h^{-1}(z)} + \left(\frac{i}{|h^{-1}(z)|^2} - \frac{1}{1 + |h^{-1}(z)|^2} \right) \begin{bmatrix} \operatorname{Re} h^{-1}(z) & \operatorname{Im} h^{-1}(z) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Re} h^{-1}(z) \\ \operatorname{Im} h^{-1}(z) \end{bmatrix} \right) \\
&= z \left(1 + \left(\frac{i}{|h^{-1}(z)|^2} - \frac{1}{1 + |h^{-1}(z)|^2} \right) \cdot |h^{-1}(z)|^2 \right) \\
&= z(1 + i - |z|^2).
\end{aligned}$$

Note que $z = \frac{h^{-1}(z) \cdot e^{if(|h^{-1}(z)|)}}{(1 + |h^{-1}(z)|^2)^{1/2}}$ então $|z|^2 = \frac{|h^{-1}(z)|^2}{1 + |h^{-1}(z)|^2}$.

Obtemos assim expressões para os campos X e Y em $\operatorname{int}(D)$ definidas próximo a ∂D , dadas por

$$\begin{aligned}
X(h(z)) &= h(z) \left(\frac{i}{z} + \frac{iy}{|z|^2} - \frac{y}{1 + |z|^2} \right), \text{ onde } z = x + yi, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } |z| \geq 2 \\
Y(z) &= z(1 + i - |z|^2), \text{ onde } z \in D \text{ e } |h^{-1}(z)| \geq 2
\end{aligned}$$

Como $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos $\lim_{z \rightarrow \infty} |X(h(z))| = 0$ então podemos definir $X \equiv 0$ em ∂D .

Como $\lim_{|z| \rightarrow 1} Y(z) = iz$, podemos definir Y em $\partial D = S^1$ por $Y(z) = iz$.

Obtemos assim os campos X e Y que não se anulam simultaneamente em nenhum ponto de D , e $[X, Y] = X$. Os campos X e Y definem, portanto, uma ação sem ponto fixo do grupo afim G no disco unitário fechado D .

Como corolário da construção precedente, podemos obter uma ação sem ponto fixo de G na esfera S^2 . É só “colar” duas cópias de D pelo bordo e definir a ação de G em cada disco como foi definida acima.

Bibliografia

- [1] Lima, Elon Lages, Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.
- [2] Camacho, César, Teoria Geométrica das Folheações / Alcides Lins Neto & César Camacho. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [3] Manfredo P. do Carmo, Notas de Um Curso de Grupos de Lie. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1974.
- [4] Vick, James W, Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology. New York: Academic Press, 1973.
- [5] Hirsch, Moris W, Differential Topology. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [6] Massey, W S, Algebraic Topology - An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [7] Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- [8] Manfredo P. do Carmo, Differential Forms and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [9] A. Denjoy, Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore. J. Math. Pures Appl. (9) 11 (1932), pp. 333-345.

- [10] Schwartz, Arthur J, A generalization of the Poincaré-Bendixon theorem to closed two-manifolds, Amer. J. Math. 85 (1963) 453-458.
- [11] Lima, E. L., Commuting Vector Fields on 2-Manifolds. Bull Am Math Society, v. 69, p. 366-368, 1963.
- [12] Lima, E. L., Commuting Vector Fields on S^2 . Proc Am Math Society, v. 15, p. 138-141, 1964.
- [13] Lima, E. L., Common Singularities of Commuting Vector Fields on 2-Manifolds. Comment Math Helv, v. 39, n. 2, p. 97-110, 1964.
- [14] M. M. Peixoto, Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds. Topology, v. 1, 1962, pp.101-120.
- [15] Lima, E.L., Introdução as variedades diferenciáveis. Rio de Janeiro: IMPA, 1960.
- [16] Carmo, Manfredo Perdigão do, Geometria Riemanniana. Rio de Janeiro: IMPA, 1988 - 2^a. edição.
- [17] Judith M. Harper, Jean E. Rubin, Variations of Zorn's lemma, principles of cofinality, and Hausdorff's maximal principle. I. Set forms.. Notre Dame Journal of Formal Logic, volume 17, issue 4, 1976, pp. 565-588.
- [18] Judith M. Harper, Jean E. Rubin, Variations of Zorn's lemma, principles of cofinality, and Hausdorff's maximal principle. II. Class forms.. Notre Dame Journal of Formal Logic, volume 18, issue 1, 1977, pp. 151-163.
- [19] Bing, R. H., The Geometric Topology of 3-Manifolds. (Coloquium publications; ISSN 0065-9258: v.40). American Mathematical Society, 1983.
- [20] Hempel, Jonh, 3-Manifolds. Princeton; New Jersey, 1976.
- [21] Matveev, Sergei V., Algorithmic Topology and classification of 3-Manifold. (Algorithms and Computation in Mathematics v.9). Berlin; New York: Springer, 2003.