

Mesas de bilhar semidispersivas com cúspides não-compactas

Regis C. A. Soares Jr.

Fevereiro de 2005

Sumário

1	Introdução	1
2	Esboço da Prova	7
3	Preliminares	8
4	Construção do Sistema Dinâmico	12
5	Cones Invariantes e Vizinhanças das Singularidades	17
6	Existência de Variedades Estáveis e Instáveis Locais	24
7	Continuidade Absoluta	33
8	O Papel das Variedades Instáveis	42
9	Teorema de Sinai	49
10	Teorema de Ergodicidade Local	54
11	Prova da Afirmação A	58

1 Introdução

O **bilhar** é o sistema dinâmico definido pelas sucessivas colisões de uma partícula na fronteira de um domínio Q , pelo menos diferenciável por partes, denominado **mesa (de bilhar)**, de acordo com a lei "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão", ou seja, as colisões são

elásticas. O formato da mesa em duas dimensões define completamente o comportamento do fluxo.

Um ponto (denominado "line element" em [26]) está bem definido dados sua posição na mesa e seu vetor velocidade. Uma vez que as colisões são elásticas, há conservação de energia, e portanto a única informação que utilizaremos do vetor velocidade é a direção do movimento e, assim, podemos normalizá-lo, obtendo, desse modo, o espaço de fase $Q \times S^1$ para o fluxo do bilhar. Podemos também trabalhar com a transformação do bilhar obtida tomando a fronteira da mesa como seção transversal. Seu espaço de fase consiste nos pontos $(r, \varphi) \in \mathcal{M} = (0, L) \times (0, \pi)$, $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, onde r é o comprimento de arco medido sobre a fronteira a partir de um ponto convencionalizado como a origem até o ponto de colisão e φ é o ângulo que a trajetória faz com a tangente nesse mesmo ponto.

Ao estudar o bilhar, questões interessantes e intrigantes são levantadas como: "Será que a partícula visita as vizinhanças de todos os pontos da fronteira?", "Ela viaja em todas as direções?", "Ou seja, será que, para qualquer ponto inicial, a trajetória de uma partícula é densa no espaço de fase da transformação?". Perguntas como essas podem ser reformuladas na seguinte: "O bilhar é ergódico?" Ser ergódico é o mesmo, em algum sentido, que ser **caótico**, pois significa que qualquer região do espaço é visitada por um iterado de quase todo ponto pela transformação. Notamos que existem propriedades mais fortes que ergodicidade, como ser **misturadora**, **Kolmogorov** (propriedade K) ou **Bernoulli**. Esta última significa que o sistema se comporta assintoticamente como o lançamento de uma moeda, ou seja, perfeitamente aleatório. As outras propriedades são intermediárias entre ergodicidade e "bernoullicidade".

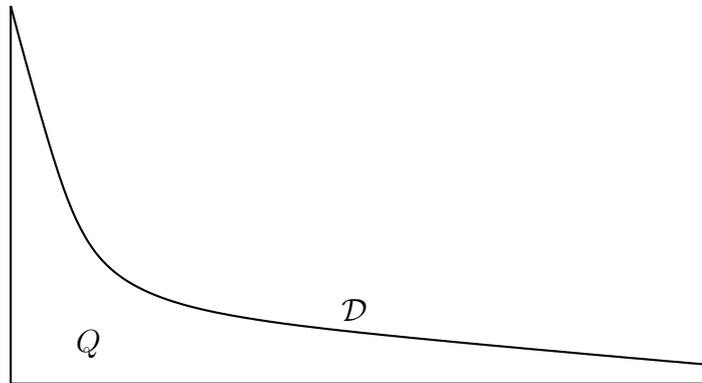


Figura 1: A mesa de bilhar com uma cúspide não compacta.

Trabalhos referentes ao bilhar surgiram nas décadas de 40 e 60 com Krylov [14] e Sinai [25]. Sinai [26] provou a propriedade K (que implica ergodicidade) do bilhar definido no toro bidimensional com obstáculos. Este resultado foi refinado em trabalho conjunto com Bunimovich [1] para uma classe mais ampla de bilhares **dispersivos** (bilhares cuja fron-

teira é formada por uma quantidade finita de pedaços convexos, quando vista do interior). Gallavotti e Ornstein [9] provaram que o bilhar de Sinai (ou seja, dispersivo) também é Bernoulli.

O primeiro exemplo de um bilhar caótico com fronteira **focalizadora** (ao contrário de dispersiva) foi apresentado por Bunimovich [2]. Este bilhar é definido em uma mesa formada por dois semicírculos unidos por segmentos de reta, denominada *estádio*.

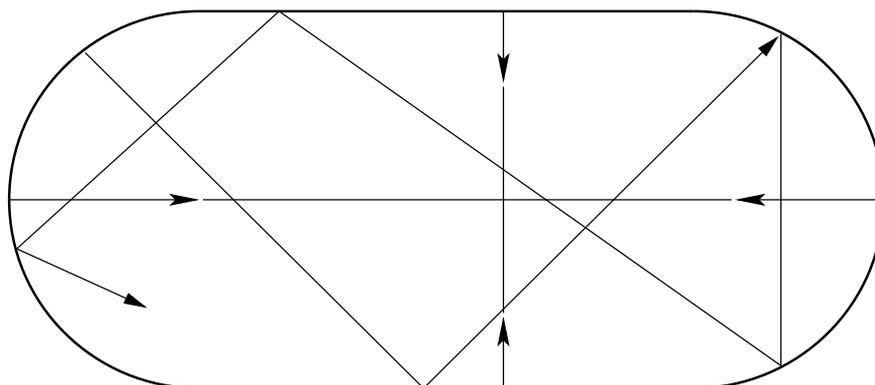


Figura 2: O estádio de Bunimovich.

Em 1977, Pesin [22] estabeleceu as fundações de sua teoria nas propriedades ergódicas de um sistema dinâmico hiperbólico e suave. Anos depois, esta teoria (agora chamada teoria de Pesin) foi estendida por Katok e Strelcyn [11] para sistemas hiperbólicos com singularidades. Esta teoria é aplicável a bilhares também.

Sinai e Chernov [28] e Krámlí, Simányi e Szász [13] provaram resultados que garantem uma certa ergodicidade local, isto é, sob certas condições, quase todo ponto possui uma vizinhança pertencente a uma componente ergódica. Resultados como esses são chamados "teoremas fundamentais". Chernov [3] e Liverani e Wojtkowski [19] apresentaram formulações mais gerais desse mesmo teorema.

Wojtkowski [29] formalizou e explorou o conceito de *cones invariantes* e em [30] mostrou como utilizar óptica geométrica para definir cones invariantes para bilhares no plano. Markarian [20] melhorou esse trabalho em 1988. Notamos que essa ferramenta foi utilizada em [19] para provar a ergodicidade local de sistemas hamiltonianos. Observamos que os bilhares podem ser considerados como casos particulares de sistemas hamiltonianos.

Bilhares com cúspides, ou seja, quinas com ângulo zero, foram estudados, por exemplo, por Leontovich [18], King [12] e Lenci [17]. Além disso, versões poligonais desse mesmo sistema foram apresentadas por Degli Esposti, Del Magno e Lenci ([6] e [7]).

A seguir apresentamos alguns exemplos de bilhares. O primeiro a analisarmos é o circular devido a sua simplicidade de apresentação e construção. Tomemos um círculo de raio 1 e centro C parametrizado pelo comprimento de arco. O espaço de fase da transformação do

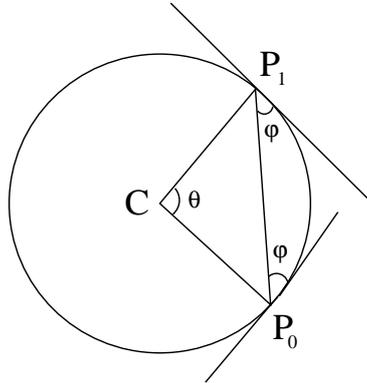


Figura 3: Construção do bilhar circular.

bilhar é um cilindro cuja base é o círculo e altura π .

Seja $z = (r, \varphi)$ onde r é comprimento de arco medido até um certo ponto P_0 pertencente ao círculo e φ o ângulo de reflexão em P_0 medido a partir da tangente. Se P_1 é o ponto do círculo da primeira colisão da trajetória de z , notamos que o triângulo P_0CP_1 é isósceles. Logo o ângulo de incidência em P_1 é φ e o ângulo central θ é 2φ . Assim, se $z_1 = Tz$, temos que $z_1 = (r + \varphi, \varphi)$ e $z_n = T^n z = (r + n\varphi, \varphi)$, onde $r + n\varphi$ é tomado módulo 2π .

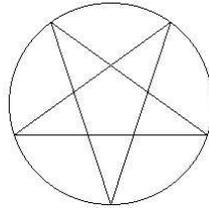


Figura 4: Exemplo de órbita periódica no círculo.

Isto mostra que as curvas $\varphi = \text{constante}$ são invariantes pela transformação T e este fato é suficiente para afirmarmos que a transformação do bilhar no círculo não é ergódica.

Se φ for um múltiplo irracional de π , observamos que a partícula descreve uma órbita que continuamente atinge pontos diferentes do círculo, preenchendo um anel no interior da mesa, como mostra a Figura 5. Caso contrário a órbita é periódica, como a da Figura 4. Notamos que em ambos os casos (mais visível no caso irracional) há a formação de uma curva no

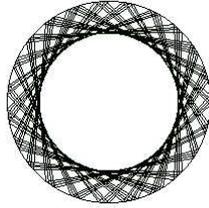


Figura 5: Exemplo de formação de cáustica no círculo.

interior da mesa com a propriedade de que se ela é tangente a um trecho de trajetória entre duas colisões sucessivas, então todos os outros trechos também serão tangentes a ela. Essa curva é denominada **cáustica**. Ver [15] para a prova de existência de cáusticas em domínios focalizados.

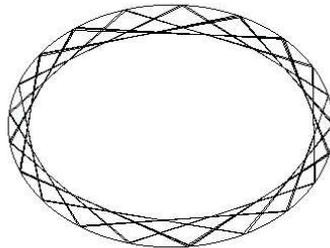


Figura 6: Exemplo de formação de cáustica elíptica.

Nosso segundo exemplo é o bilhar na elipse, que possui propriedades geométricas interessantes. Inicialmente apontamos que existem duas órbitas periódicas de período dois que são as descritas sobre os eixos maior e menor da elipse. Portanto estudemos a órbita de um ponto cuja trajetória corta o eixo maior. Temos três possibilidades para a trajetória de saída desse ponto: entre os focos, entre um dos focos e a elipse ou sobre um dos focos.

Se a trajetória passar entre os focos, todos os outros trechos de trajetória entre colisões sucessivas também passarão por entre os focos preenchendo uma área delimitada por uma hipérbole confocal á elipse, que no caso é uma cáustica (Figura 7). No entanto, se a trajetória

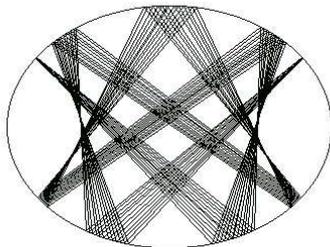


Figura 7: Exemplo de formação de cáustica hiperbólica.

passar entre um dos focos e a elipse, a órbita manterá esse padrão preenchendo uma área entre a mesa e a cáustica definida por uma elipse confocal à original (Figura 6). Passando sobre um dos focos, nossa terceira possibilidade, todos os segmentos de trajetória passarão por cima de um dos focos. Isto é consequência do fato de que raios partindo de cada um dos focos da elipse formam ângulos iguais com a tangente à elipse no ponto de colisão. Para prova desse resultado, ver [27].

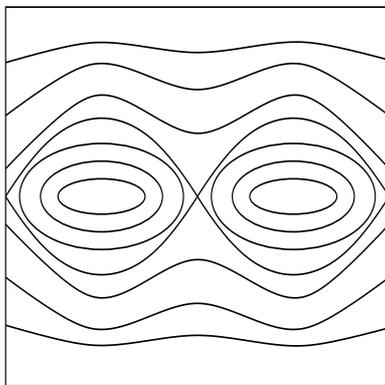


Figura 8: O espaço de fase do bilhar elíptico.

O bilhar elíptico não é ergódico. De fato, o espaço de fase da transformação é formado por curvas invariantes, conforme Figura 8. Nesta figura, as órbitas que descrevem uma hipérbole como cáustica são as curvas no interior da região com o formato de ∞ . As curvas fora dessa região são as formadas pelas órbitas que produzem elipses. As órbitas periódicas de período dois estão representadas em quatro pontos desse espaço de fase: as interseções dos ramos da região representam a órbita periódica sobre o eixo maior e os centros desses mesmos ramos

representam a órbita periódica sobre o eixo menor.

Obtém-se um bilhar ergódico deformando o círculo em um *estádio* (Figura 2). De fato, mostra-se (ver [2]) que o espaço de fase do bilhar no estádio, à medida que se aumenta o número de rebatidas, é totalmente preenchido, a menos de duas regiões que tornam-se cada vez menores quando o número de rebatidas tende a infinito. Essas duas regiões estão relacionadas à órbita periódica formada por rebatidas nos semicírculos cuja trajetória é paralela aos segmentos de reta.

O objetivo desse trabalho é provar a ergodicidade do bilhar definido em uma mesa delimitada pelos semi-eixos positivos e o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, limitada, convexa, três vezes diferenciável e tendendo à zero quando x tende a infinito. Mais geralmente, mesas compostas por partes convexas (quando vista do interior) e partes retas são denominadas **semidispersivas**. De fato, provaremos a afirmação abaixo:

Afirmação A. *Mesas de bilhar semidispersivas obtidas a partir de $f(x) = C(x + a)^{-p}$, $C, p, a > 0$, são ergódicas.*

Este resultado foi obtido por Lenci em [17].

O trabalho está organizado como descrito a seguir. Na Seção 2 apresentamos um pequeno roteiro com as idéias dos resultados por trás da demonstração da Afirmação A. As definições e resultados básicos sobre Teoria da Medida e Teoria Ergódica são expostos na Seção 3. Enquanto que na Seção 4, fazemos as principais considerações sobre o sistema que trabalharemos neste texto. Apresentamos a mesa do bilhar a ser estudado, definimos a transformação, seu espaço de fase, seu conjunto de singularidades e sua medida invariante. Na Seção 5 construímos um feixe de cones invariantes para o nosso bilhar, definimos a "distância instável" e descrevemos a vizinhança das singularidades com respeito a esta distância. Estes resultados serão utilizados, na Seção 6 para demonstrar a existência de variedades instáveis e estáveis locais para quase todo ponto do espaço de fase. Na Seção 7 provaremos que a folheação induzida por essas variedades é absolutamente contínua com respeito à medida invariante. Na Seção 8 estudamos as características das variedades instáveis, em uma seqüência de resultados que culminam na prova do Teorema de Sinai, na Seção 9. A Seção 10 nos apresenta a prova do Teorema de Ergodicidade Local e como conseqüência provaremos ergodicidade global para uma classe de bilhares. Na Seção 11 provaremos a Afirmação A.

2 Esboço da Prova

O objetivo deste texto, como salientamos no final da seção anterior, é demonstrar a Afirmação A. Em primeiro lugar, provaremos o Teorema de Ergodicidade Local (Teorema 10.4) que nos garantirá a existência de uma componente ergódica contendo uma vizinhança de quase todo ponto. Para isto utilizamos o método de Hopf que consiste em ir de um ponto a outro através das variedades estáveis e instáveis dos pontos entre eles, baseando-se no fato de que médias temporais passadas (futuras) são constantes em variedades estáveis (instáveis). Mas,

devido à existência de singularidades, as variedades estáveis e instáveis locais podem não ser longas o suficiente para se utilizar este método. No intuito de contornar essa dificuldade, apresentamos um método adicional, devido à Sinai. Este método foi apresentado em [19] para sistemas hamiltonianos com medida finita. A sua adaptação para sistemas com medida infinita foi obtida por Lenci [17] e está concentrada no Lema 9.4, denominado "Tail Bound Lemma".

Para a prova da existência e continuidade absoluta das variedades estáveis e instáveis locais, novamente nos confrontamos com o problema do sistema possuir medida infinita, pois, apesar da teoria de Katok e Strelcyn, citada na Seção 1, ser adequada para bilhares, ela não cobre sistemas com medida infinita. Portanto, teremos que (re)construir toda a demonstração para este caso. Para a existência baseamos na hipótese de que há um feixe de cones invariantes e na estimativa da medida das vizinhanças de singularidades, utilizando uma "distância instável" definida neste texto. Além disso, definimos uma variedade $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, que possui medida finita e contém as singularidades. Definimos a transformação T_0 de retorno a \mathcal{M}_0 e, para esse sistema, construímos as variedades estáveis e instáveis locais. Depois, uma vez que $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ não contém singularidades, podemos retornar a \mathcal{M} , aplicando T . No entanto, T_0 possui mais singularidades que T . Mas essas singularidades não interferem na dinâmica do sistema e, assim, alteramos a fronteira de \mathcal{M}_0 , definida arbitrariamente, sempre que necessário. Devido a este comportamento, em [17], a fronteira foi apelidada de "fuzzy boundary" (fronteira indistinta).

Para a continuidade absoluta, provaremos o resultado para um sistema dinâmico auxiliar, de medida finita e mostraremos que é possível estender o resultado para o sistema original (\mathcal{M}, T, μ) . Neste sistema auxiliar, a prova consistirá em construir uma holonomia sobre a folheação gerada pelas variedades estáveis e instáveis e mostrar que seu jacobiano é positivo.

Com tudo isto feito, a demonstração da Afirmação A sairá quando mostrarmos que a classe de bilhares obtida a partir de $f(x) = C(x + a)^{-p}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 10.4.

3 Preliminares

Nesta seção apresentaremos os principais conceitos necessários para uma melhor compreensão dos resultados apresentados no decorrer deste trabalho. Para mais informações e demonstrações dos teoremas relacionados nesta seção, recomendamos a leitura de [8], [21] e [24].

Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X é denominada uma **topologia** em X se τ possui as seguintes propriedades:

- (i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
- (ii) Se $V_i \in \tau$, para $i = 1, \dots, n$, então $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$.
- (iii) Se $\{V_\alpha\}$ é uma coleção abitrária de membros de τ (finita, enumerável ou não enumerável) então $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Se τ é uma topologia em X então X é denominado um **espaço topológico**, e os membros

de τ são chamados (**conjuntos**) **abertos** em X . Se X e Y são espaços topológicos e f é uma transformação de X em Y , então f é denominada **contínua** se $f^{-1}(V)$ é um aberto em X para todo aberto em Y .

Uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de um conjunto X é uma **σ -álgebra** em X se \mathcal{A} possui as seguintes propriedades:

- (i) $X \in \mathcal{A}$.
- (ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$, onde A^c é o complementar de A em relação a X .
- (iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1, 2, \dots$, então $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Se \mathcal{A} é uma σ -álgebra em X , então X é denominado um **espaço mensurável**, e os membros de \mathcal{A} são chamados **conjuntos mensuráveis** em X . Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico, e T é uma transformação de X em Y , então T é dita **mensurável** se $T^{-1}(B)$ é um conjunto mensurável em X para todo conjunto aberto B em Y .

Se (X, τ) é um espaço topológico, a σ -álgebra gerada pela topologia é chamada **σ -álgebra de Borel** e seus conjuntos, **boreleanos**. Uma medida definida sobre uma σ -álgebra de Borel é chamada **medida de Borel**.

Uma **medida** é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, onde o símbolo \bigsqcup denota união disjunta. Um **espaço de medida** é um espaço mensurável que possui uma medida definida na σ -álgebra de seu conjuntos mensuráveis, usualmente denotada pela terna (X, \mathcal{A}, μ) . Se $\mu(X) = 1$, dizemos que μ é uma probabilidade e (X, \mathcal{A}, μ) é um **espaço de probabilidade**.

Se $E \subset \mathbb{R}^k$ e $x \in \mathbb{R}^k$, a **translação** de E por x é o conjunto

$$E + x = \{y + x ; y \in E\}.$$

Um conjunto da forma

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n) ; \alpha_i < x_i < \beta_i, 1 \leq i \leq k\},$$

ou qualquer conjunto obtido substituindo um dos ou todos os sinais $<$ por \leq , é chamado uma **k-célula**. Seu volume é definido por

$$vol(W) = \prod_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i).$$

Proposição 3.1. *Existe uma medida Lebesgue definida em uma σ -álgebra \mathcal{A} em \mathbb{R}^k , com as seguintes propriedades:*

- (a) $Leb(W) = vol(W)$, para toda k -célula W .
- (b) \mathcal{A} contém todos os boreleanos em \mathbb{R}^k .
- (c) Leb é invariante por translação, isto é, $Leb(E + x) = Leb(E)$, $\forall E \in \mathcal{A}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^k$.
- (d) Se μ é uma medida de Borel em \mathbb{R}^k qualquer, invariante por translação, tal que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K , então existe uma constante c tal que $\mu(E) = c \cdot Leb(E)$, para todo boreleano $E \subset \mathbb{R}^k$.

(e) Para toda transformação linear T de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^k corresponde um número real $\Delta(T)$ tal que $Leb(T(E)) = \Delta(T)Leb(E)$ para todo $E \subset \mathcal{A}$.

Os membros de \mathcal{A} definida na proposição acima são os conjuntos **Lebesgue mensuráveis** em \mathbb{R}^k ; Leb é a **medida de Lebesgue** em \mathbb{R}^k .

Dado (X, \mathcal{A}) , sejam μ e ν medidas definidas sobre \mathcal{A} . Dizemos que ν é **absolutamente contínua** em relação à μ se $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$. As medidas μ e ν são **equivalentes** se μ é absolutamente contínua em relação à ν e vice-versa.

Sejam (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) espaços de medida. Dizemos que uma transformação $T : X \rightarrow Y$ **preserva medida** se, para $B \in \mathcal{B}$, temos que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ e $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$. Se $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu)$, diz-se também que μ é **T-invariante** ou **invariante sob T**.

Definição 3.2. Dizemos que um ponto $x \in X$ é **recorrente** se para toda vizinhança V de x , $T^n(x) \in V$ para infinitos valores de n . Em outras palavras, x é recorrente se existe uma seqüência $n_k \rightarrow \infty$ tal que $T^{n_k}(x) \rightarrow x$.

Teorema 3.3 (Poincaré - versão probabilística). Seja T um automorfismo do espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, μ) . Então, para todo $A \in \mathcal{A}$, o conjunto A_0 dos pontos x tais que $T^n(x) \in A$, para infinitos valores $n \geq 0$, pertence a \mathcal{A} e $\mu(A_0) = \mu(A)$.

Dada $f \in L^1(X, \mu)$ definimos sua **média temporal** no ponto x como

$$f^*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (f \circ T^k)(x).$$

Teorema 3.4 (Birkhoff). Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva μ . Seja f uma função definida em X integrável. Então o limite

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (f \circ T^k)(x)$$

existe para μ -q.t.p. $x \in X$.

Além disso:

- (a) $f^* \circ T = f^*$ em μ -q.t.p.;
- (b) se $f \in L^p(\mu)$ então $f^* \in L^p(\mu)$, temos convergência na norma $\|\cdot\|_p$ e temos que $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$;
- (c) $\int f^* d\mu = \int f d\mu$.

Definição 3.5. Seja T uma transformação que preserva medida de um espaço (X, \mathcal{A}, μ) . Dizemos que T é **ergódica** quando $\forall f \in L^1(X, \mu)$, sua média temporal existe e é constante para μ -q.t.p. $x \in X$.

Notamos que existem várias caracterizações para uma transformação ser ergódica, como pode ser visto em [21]. Porém, a maioria dessas são para sistemas com medida finita. Portanto preferimos enunciar a definição acima, devido a Boltzmann, que independe da medida ser finita ou não.

Antes de definirmos o que entendemos por variedades estáveis e instáveis locais, apresentaremos o conceito de cones. Para os resultados a seguir, utilizamos o sistema dinâmico (\mathcal{M}, T, μ) , com T pelo menos de classe C^2 , \mathcal{M} é seu espaço de fase e μ a medida invariante por T .

Definição 3.6. *Cone é o conjunto*

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} = \{u + v \mid u \in S, v \in S^\perp, \|u\| \geq \alpha \|v\| \alpha > 0\},$$

onde S é um subconjunto de \mathbb{R}^n , S^\perp é o seu complementar ortogonal. O complementar de \mathcal{C} , \mathcal{C}^- , também é um cone, chamado **cone complementar**.

Seja $\mathcal{C}(z)$ um cone definido em $T_z\mathcal{M}$ para quase todo $z \in \mathcal{M}$. Dizemos que $\{\mathcal{C}(z)\}$ é um **campo de cones** em \mathcal{M} . O campo de cones é **invariante** por T se

$$DT_z\mathcal{C}(z) \subset \mathcal{C}(Tz)$$

e **estritamente invariante** se, para quase todo $z \in \mathcal{M}$ existe $n = n(z)$ tal que

$$DT_z^n\mathcal{C}(z) \subset \text{int } \mathcal{C}(T^n z).$$

Seja S^+ (S^-) o conjunto de singularidades de T (T^-). Seja também

$$S_n^\pm = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{\mp i} S^\pm.$$

Definição 3.7. *Dado $z \in \mathcal{M} \setminus S_\infty^{+(-)}$, definimos uma **variedade estável (instável) local**, $W^{s(u)}$, **para T em z** como um disco topológico C^1 contendo z , sem interseção com $S^{+(-)}$ e tal que:*

(a) *o espaço tangente a $W^{s(u)}$, em todo ponto, está contido no cone estável (instável) de toda ordem, isto é, $\forall w \in W^{s(u)}, T_w W^{s(u)} \subset \bigcap_n \mathcal{C}_n^{-(+)}(w)$, e tem dimensão máxima (um, no nosso caso);*

(b) *$\forall w \in W^{s(u)}, \|T^n(w) - T^n(z)\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty(-\infty)$;*

(c) *Se $W_0^{s(u)}$ é outra variedade desse tipo, então $W^{s(u)} \cap W_0^{s(u)}$ também o é.*

*Se a convergência em (b) for exponencial, dizemos que $W^{s(u)}$ é **exponencialmente estável (instável)**.*

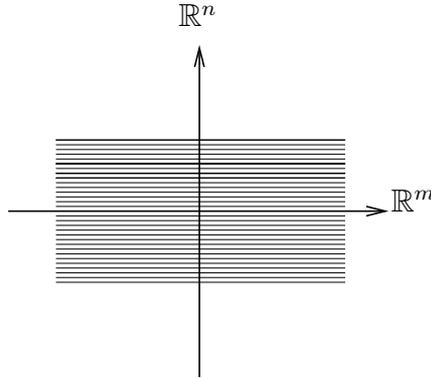


Figura 9: Exemplo de folheação.

A próxima definição fornece o significado de uma folheação ser absolutamente contínua em relação a uma medida. Usamos o termo **folheação** para indicar a decomposição de \mathcal{M} em subvariedades chamadas **folhas** que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com segunda coordenada constante.

Na definição a seguir, um cilindro é um conjunto difeomórfico a $B \times \mathbb{R}^{N-\nu}$ onde B é uma bola não-degenerada em \mathbb{R}^ν .

Definição 3.8. Uma folheação ν -dimensional \mathcal{W} em \mathbb{R}^N é **absolutamente contínua** com respeito a medida μ se o seguinte ocorre: dados qualquer espaço $(N - \nu)$ -dimensional afim Θ e qualquer cilindro C contendo Θ , e qualquer união L de folhas $W(z) \in \mathcal{W}$, transversal em todo ponto à direção de Θ e excedendo C (isto é, $\partial W(z) \in \mathbb{R}^N \setminus C$), então temos que

$$\mu(L \cap C) = 0 \quad \implies \quad Leb_{\Theta}(L \cap \Theta) = 0;$$

onde Leb_{Θ} é a medida de Lebesgue $(N - \nu)$ -dimensional em Θ .

A Definição acima diz que a medida transversal em \mathcal{W} definida por Leb em Θ é absolutamente contínua com respeito a μ .

Seja $\Lambda = \{x \in \mathcal{M}; x \text{ possui variedades estável e instável locais}\}$ (conforme Definição 3.7). Suponhamos que esse conjunto possua medida total.

4 Construção do Sistema Dinâmico

Nesta seção apresentamos o tipo de mesa de bilhar com a qual trabalharemos, listando as hipóteses que exigimos sobre a curva delimitadora da mesa para garantirmos a existência de estrutura hiperbólica para o sistema. Definimos a transformação do bilhar, seu espaço de fase e sua medida invariante. Em seguida apresentamos a matriz Jacobiana da transformação e

seu conjunto de singularidades. Finalmente provamos que a transformação do nosso bilhar é recorrente (Corolário 4.3)

Estudaremos o bilhar definido na mesa

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+; 0 \leq y \leq f(x)\},$$

onde $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é três vezes diferenciável, limitada e convexa. Uma mesa desse tipo é dita **semidispersiva** pois possui uma parte reta e a uma convexa (seus efeitos são como os de espelhos planos e convexos). Por exemplo, a mesa da Figura 1.

O ângulo no vértice $V = (0, f(0))$ é $\pi/2 + \arctg f'(0^+)$ e pode ser zero. Assim o bilhar pode ter uma cúspide -isto é, quina com ângulo zero- compacta junto com a não-compacta em $x = +\infty$.

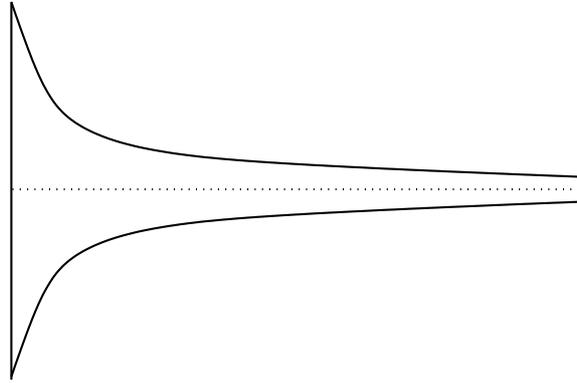


Figura 10: Apresentação de Q_2 .

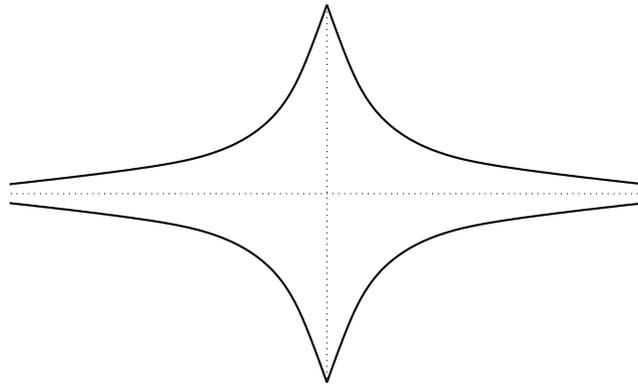


Figura 11: Apresentação de Q_4 .

Aproveitando o momento, vamos apresentar duas outras mesas que serão úteis em várias provas geométricas no decorrer do texto (Figuras 10 e 11):

$$Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+; |y| \leq f(x)\},$$

$$Q_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+; |y| \leq f(|x|)\}.$$

Introduzimos as seguintes notações. Para f, g funções positivas, seja:

- (i) $f(x) \ll g(x)$ indica que existe C constante tal que $f(x) \leq Cg(x)$, quando $x \rightarrow +\infty$. Analogamente para $f(x) \gg g(x)$;
- (ii) $f(x) \sim g(x)$ indica que $f(x)/g(x)$ tende a um c diferente de 0 e de $+\infty$, quando $x \rightarrow +\infty$.

Definimos $x_t = x_t(x)$, para cada x em Q_2 , implicitamente por

$$\frac{f(x) + f(x_t)}{x - x_t} = -f'(x_t).$$

Temos que x_t é a abscissa do ponto de tangência em \mathcal{D} .

A seguir, enumeramos certas hipóteses que f deve satisfazer para ser escolhida como fronteira para nossa mesa de bilhar (lembrando que todos os limites são tomados com $x \rightarrow \infty$):

$$(H1) \quad f''(x) \rightarrow +\infty,$$

$$(H2) \quad |f'(x_t)| \ll |f'(x)|,$$

$$(H3) \quad \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \gg 1,$$

$$(H4) \quad \frac{|f'''(x)|}{f''(x)} \ll 1.$$

$$(H5) \quad |f'(x)| \gg (f(x))^\theta, \text{ para algum } \theta > 0.$$

As hipóteses (H1)-(H4) devem ser satisfeitas para obtermos a existência de variedades estáveis e instáveis locais, enquanto que (H5) é necessária para obtermos a continuidade absoluta das variedades estáveis e instáveis locais. Vale notar que, com um argumento parecido com o da regra de l'Hôpital, (H1) e (H4) implicam

$$\frac{|f'(x)|}{f(x)} \ll \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \ll 1. \tag{1}$$

As funções $f(x) = (x+a)^{-p}$, $p > 0$, $a > 0$ por exemplo, verificam as hipóteses (H1)-(H5).

Dado um fluxo do bilhar, é comum tomar ∂Q como seção transversal. Mas, dada a geometria de nossa mesa, como podemos perceber utilizando Q_4 , basta tomarmos a porção dispersiva \mathcal{D} de ∂Q , pois as colisões nas partes retas estão associadas a rebatidas nas partes dispersivas de um (ou mais) dos outros três quadrantes.

Com essa seção transversal, definimos uma transformação T , denominada **transformação do bilhar**. O espaço de fase para essa transformação é constituído dos pontos $(r, \varphi) \in \mathcal{M} = (0, +\infty) \times (0, \pi)$, onde r é a medida do comprimento de arco tomado em \mathcal{D} e φ é o ângulo que a trajetória da partícula faz com a tangente do ponto de colisão.

A matriz jacobiana da transformação do bilhar é facilmente calculada e dada por:

$$DT_z = \pm \begin{bmatrix} -\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} - \frac{k\tau}{\sin \varphi_1} & \frac{\tau}{\sin \varphi_1} \\ k + k_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} + \frac{k k_1 \tau}{\sin \varphi_1} & -1 - \frac{k_1 \tau}{\sin \varphi_1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde $\tau = \tau(z)$ é o tempo de viagem (correspondente a distância em Q_4) entre dois pontos de colisão; k (respectivamente k_1) é a curvatura de ∂Q em z (em z_1). Por convenção, a curvatura é não-negativa. O sinal menos em evidência na matriz é para quando a trajetória do bilhar quica uma vez nas fronteiras planas e o sinal mais quando a trajetória rebate duas vezes nessas fronteiras.

Na verdade a forma comum de apresentação da matriz jacobiana é com o sinal mais. Só que, como adotamos como seção transversal apenas um trecho de ∂Q (no caso, a porção dispersiva \mathcal{D}), notamos que quando a partícula se choca com uma das partes retas da fronteira há uma mudança de orientação de um dado vetor $v \in T_z \mathcal{M}$.

A partir da matriz jacobiana podemos obter que se a fronteira for uma curva de classe C^{k+1} a transformação do bilhar é um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 0$.

É sabido também que T preserva a medida $d\mu = \sin \varphi dr d\varphi$ (ver [4] pp. 113-115 e suas referências).

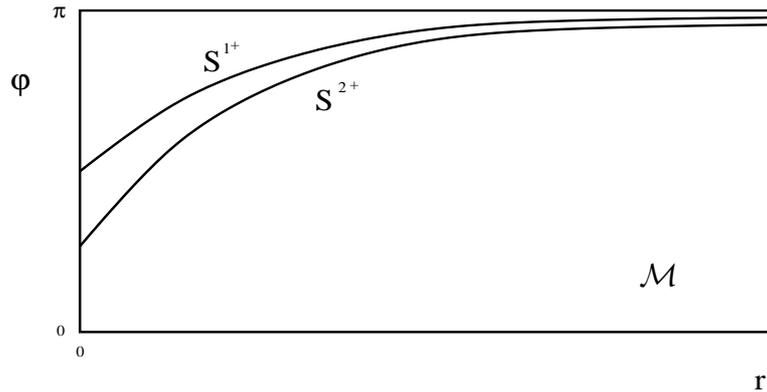


Figura 12: Curvas de singularidades.

Note que, na adoção de \mathcal{M} , não definimos T em pontos que passariam tangentes a \mathcal{D} ou que colidiriam com o vértice. Ou seja, excluimos $T^{-1}\partial\mathcal{M}$. Esses pontos formam o conjunto

de **singularidades** de T , denotado por S . Este é formado por duas curvas (conforme [17] p.138) $S = S^{1+} \cup S^{2+}$ (como mostrado na Figura 12). S^{1+} corresponde a tangências em ∂Q_4 no terceiro quadrante (em Q , tangências em \mathcal{D} , após quicar no lado vertical); esta curva é regular como f . Em relação à S^{2+} , sua primeira parte corresponde a elementos apontando para V (em Q , após quicar na horizontal); à medida que r aumenta, esses tornam-se tangentes a ∂Q . A fronteira desses dois comportamentos é o único ponto não-regular de S^{2+} .

Observação 4.1. *As partículas que atingem a origem do plano xy têm suas trajetórias revertidas após essa colisão, ou seja, fazem o mesmo percurso porém em sentido contrário. Para ver que essa reversão de sentido ocorre na origem, basta tomar trajetórias suficientemente próximas a original e paralelas a essa mesma. Notamos que após as consecutivas colisões com os eixos x e y (não necessariamente nessa ordem) a trajetória de partida é paralela à de chegada. Com isso a trajetória que incide sobre a origem pode ser estendida continuamente de modo que retorna paralelamente, no caso, coincidentemente.*

Analogamente definimos $S^- = S^{1-} \cup S^{2-}$, o conjunto de singularidades de T^{-1} , onde S^{i-} é obtido a partir de S^{i+} aplicando o operador de reversão de tempo

$$(r, \varphi) \mapsto (r, \pi - \varphi).$$

Proposição 4.2. *Nenhuma semi-órbita do bilhar cai no vértice ou no "vértice no infinito", a não ser que disparado diretamente para esses pontos. Ou seja, se $(x(t), y(t))$ é uma órbita em Q*

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x(t), y(t)) = V \Leftrightarrow (x(t), y(t)) = V, \quad \forall t \geq (\leq) t_0,$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x(t)) = +\infty \Leftrightarrow (y(t)) = 0, \quad \forall t.$$

Demonstração. No caso (i), quando o vértice possui ângulo positivo é possível estimar o número máximo de rebatidas antes que a partícula retorne (ver [1] p. 410). No caso de uma cúspide, o resultado se encontra em [10]. No caso (ii), quando há uma cúspide não-compacta, damos como referência [12] p. 9. □

Corolário 4.3. *O sistema (\mathcal{M}, T, μ) é recorrente no sentido do Teorema 3.3.*

O corolário acima segue trivialmente do Teorema 4.4 abaixo. Antes de enunciá-lo, vamos apresentar algumas características do fluxo do bilhar Φ^t .

O espaço $Q \times S^1$ possui uma medida-produto natural

$$vol = area \times arco,$$

onde *area* é a medida de Lebesgue definida sobre Q e *arco* é a medida de Lebesgue definida sobre S^1 . O fluxo do bilhar deixa essa medida invariante, se a fronteira da mesa for diferenciável por partes [12].

Introduzimos a notação $\Phi^{(a,b)}(v)$ para indicar a trajetória do fluxo do bilhar, passando por $v \in Q$ para os instantes de tempo $a < t < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. A notação do intervalo (a, b) é a usual.

Para $\Sigma \subset \mathcal{M}$, definimos a **função primeiro retorno** $\mathcal{R}_\Sigma : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\mathcal{R}_\Sigma(v) = \sup\{t > 0; \Phi^{(0,t)}(v) \cap \Sigma = \emptyset\}.$$

Como a transformação T é recorrente se, e somente se, o fluxo Φ^t é recorrente, [12], provaremos a seguir que o fluxo do bilhar é recorrente.

O próximo teorema é válido para domínios que satisfazem

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (3)$$

Teorema 4.4. *O fluxo do bilhar sobre uma cúspide que satisfaz (3), mesmo que de área infinita, é recorrente.*

Demonstração. Ver [12] pp. 14-16. □

5 Cones Invariantes e Vizinhanças das Singularidades

Nessa seção apresentaremos um feixe de cones estritamente invariantes para o nosso sistema e mostraremos que esses cones convergem para um subespaço do espaço tangente formado por vetores que expandem (ou contraem, dependendo do cone) sob ação da transformação T (Proposição 5.1). Em seguida apresentamos a definição de distância instável (Definição 5.3) e com essa métrica estimamos a medida de vizinhanças tubulares das curvas de singularidades (Teorema 5.4). Como corolário desse teorema obtemos uma medida finita definida sobre os conjuntos de singularidades (Corolário 5.5).

Em $T\mathcal{M}$ defina

$$\mathcal{C}^+(z) = \mathcal{C}(z) = \{(dr, d\varphi) \in T_z\mathcal{M}; dr \cdot d\varphi \leq 0\},$$

onde \cdot denota a multiplicação usual. Ou seja, o segundo e o quarto quadrante do espaço tangente $T_z\mathcal{M}$, que serão denominados **cones instáveis**, (pela Definição 3.6, identificando $T_z\mathcal{M}$ com o \mathbb{R}^2 , tomando L como sendo a bissetriz par e $\alpha = 1$).

Estes cones possuem a propriedade de serem **estritamente invariantes**, isto é, $DT_z\mathcal{C}(z) \subset \text{int}\mathcal{C}(T(z))$, onde $\text{int}\mathcal{C}(T(z))$ indica o interior de \mathcal{C} mais o 0. De fato, seja $(dr, d\varphi) \in \mathcal{C}(z)$.

$$\begin{aligned}
DT_z(dr, d\varphi) &= \pm \frac{1}{\sin \varphi_1} ((-\sin \varphi - k\tau)dr + (\tau)d\varphi, (k \sin \varphi_1 + \sin \varphi + kk_1\tau)dr + (-\sin \varphi_1 - k_1\tau)d\varphi) \\
&= (dr_1, d\varphi_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dr_1 \cdot d\varphi_1 &= \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} ((-\sin \varphi - k\tau)(k \sin \varphi_1 + \sin \varphi + kk_1\tau)dr^2 \\
&\quad + (-\sin \varphi - k\tau)(-\sin \varphi_1 - k_1\tau)drd\varphi + \\
&\quad + \tau(k \sin \varphi_1 + \sin \varphi + kk_1\tau)drd\varphi + \tau(-\sin \varphi_1 - k_1\tau)d\varphi^2).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\varphi, \varphi_1 \in (0, \pi)$, $k, k_1, \tau \geq 0$ e $(dr, d\varphi) \in \mathcal{C}(z)$, todas as parcelas são não-positivas e portanto $(dr_1, d\varphi_1) \in \mathcal{C}(Tz)$.

Analogamente, define-se para T^{-1} os cones estáveis como sendo o primeiro e o terceiro quadrantes de $T_z\mathcal{M}$.

Seja $S_n^- = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^i S^-$.

Para $(r_{-n}, \varphi_{-n}) = z_{-n} = T^{-n}(z) = T^{-n}(r, \varphi)$, defina o **n-ésimo cone encaixado**

$$\mathcal{C}_n(z) = DT_{z_{-n}}^n \mathcal{C}(z_{-n}) = \left\{ (dr, d\varphi) \in T_z\mathcal{M}; a_n \leq \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{dr} \leq b_n \right\}.$$

Utilizando a propriedade do cone e a matriz jacobiana (2), temos que

$$a_n = -\frac{k}{\sin \varphi} + \frac{1}{-\tau_{-1} + \frac{1}{-\frac{2k_{-1}}{\sin \varphi_{-1}} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{-\tau_{-n}}}}}}, \quad (4)$$

e

$$b_n = -\frac{k}{\sin \varphi} + \frac{1}{-\tau_{-1} + \frac{1}{-\frac{2k_{-1}}{\sin \varphi_{-1}} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{-\tau_{-n} + \frac{1}{\frac{2k_n}{\sin \varphi_{-n}}}}}}}}, \quad (5)$$

onde τ_{-i} e k_{-i} são, respectivamente, $\tau(z_{-i})$ e $k(z_{-i})$. Da maneira como foram definidos, a_n e b_n são aproximações à esquerda e à direita de uma fração contínua, que, pela próxima proposição, converge.

Proposição 5.1. Para todo $z \notin S_\infty^- = \bigcup_{i=0}^\infty T^i S^-$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \chi^u(z).$$

Observação 5.2. A proposição acima assegura que quando $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{C}_n(z)$ converge, no sentido de conjuntos decrescentes, a um subespaço $E^u(z) \subset T_z \mathcal{M}$, chamado **subespaço instável**. Este é uma linha de inclinação $\chi^u(z) \sin \varphi$, com respeito à base $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \varphi\}$.

Demonstração. Uma vez que os termos de (4)-(5) são negativos, uma condição necessária e suficiente para convergência é (ver [26] e suas referências)

$$\sum_{i=-1}^{-\infty} \left(\tau_i + \frac{2k_i}{\sin \varphi_i} \right) = +\infty.$$

Supondo o contrário, o convergência da série acima implicaria que o termo geral tenderia a zero, e assim, τ_i tenderia a zero. Mas isto significa que as órbitas passadas de z tenderiam à V ou à cúspide no infinito. Em qualquer caso, obtemos uma contradição com a Proposição 4.2. \square

Utilizando a matriz jacobiana da transformação do bilhar 2, vamos calcular uma cota inferior para o vetor $(dr_1, d\varphi_1)$ em $\mathcal{C}(z)$:

$$(dr_1)^2 \geq \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} \right)^2 \left(1 + \frac{k\tau}{\sin \varphi} \right)^2 dr^2; \quad (6)$$

$$(d\varphi_1)^2 \geq \left(1 + \frac{k_1\tau}{\sin \varphi_1} \right)^2 d\varphi^2. \quad (7)$$

A partir de agora estamos interessados em estimar a medida das vizinhanças tubulares do conjunto de singularidades. Como $S^{i\pm}$ são curvas de comprimento infinito toda ε -vizinhança tem medida infinita, pelo menos se usa-se a distância riemanniana usual. Por outro lado, em todos os argumentos, é suficiente medir distâncias ao longo da direção instável. Com este propósito segue a

Definição 5.3. Uma **curva instável** é uma curva diferenciável γ tal que $d\gamma(t)/dt \in \mathcal{C}_1(\gamma(t))$. Definimos a **distância instável** entre z e w , $d^u(z, w)$, como sendo o ínfimo dos comprimentos das curvas instáveis unindo z e w (caso não exista tal curva, definimos $d^u(z, w) = 1$). A distância instável entre um ponto e um conjunto e entre conjuntos são definidas da maneira usual.

Dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset \mathcal{M}$, seja

$$A_{[\varepsilon]} = \{z \in \mathcal{M}; d^u(z, A) < \varepsilon\}.$$

Teorema 5.4. *Seja Leb a medida de Lebesgue em \mathcal{M} e assumamos (H1)-(H4). Para $i=0,1,2$,*

$$\mu(S_{[\varepsilon]}^{i\pm}) \leq Leb(S_{[\varepsilon]}^{i\pm}) \ll \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Demonstração. Tomemos, inicialmente, S^{2+} . Seja γ uma curva instável de comprimento menor que ε e com um extremo, digamos γ_0 , em S^{2+} . Suponha que γ está abaixo de S^{2+} .

A curva γ tem inclinação negativa e, portanto, pode ser reparametrizada como o gráfico de uma função $\varphi : [r_0, r_0 + \delta] \rightarrow (0, \pi)$, com $\varphi(r_0) = \varphi_0$ e $(r_0, \varphi_0) = \gamma_0$.

Por definição de curva instável e aplicando (4) com $n = 1$,

$$\frac{d\varphi}{dr} \geq -k(r) - \frac{\sin \varphi}{\tau_{-1}(r, \varphi)}; \quad \varphi(r_0) = \varphi_0, \quad (8)$$

tomado no domínio $U = [r_0, r_0 + \varepsilon_0] \times [\varphi_0 - b, \varphi_0]$, com ε_0 fixo a posteriori e b suficientemente grande.

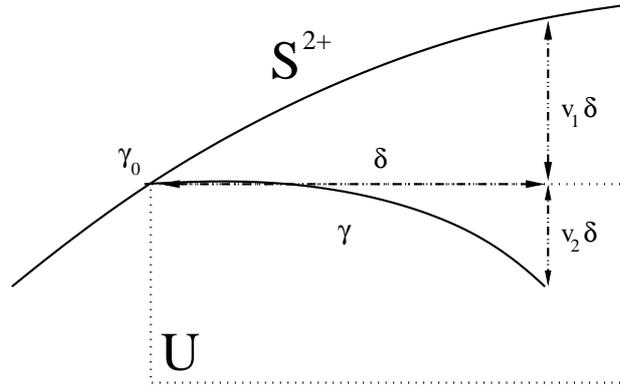


Figura 13: A curva instável γ .

Defina $a(r, \varphi) = \tau_{-1} \sin \varphi$ como na Figura 14. Logo (8) se torna

$$\frac{d\varphi}{dr} \geq -k(r) - \frac{\sin^2 \varphi}{a(r, \varphi)}; \quad \varphi(r_0) = \varphi_0. \quad (9)$$

Como se trata de uma desigualdade, para facilitar sua resolução, podemos limitar algumas funções. Tomemos $k_M = k(\bar{r}) = \max_{[r_0, r_0 + \varepsilon_0]} k$ no lugar de $k(r)$ e, uma vez que $a(r, \varphi)$ é decrescente em φ , seu mínimo, a_m , é atingido em algum $(\hat{r}_0, \varphi_0) \in \partial U$ e (9) fica

$$\frac{d\varphi}{dr} \geq -k_M - \frac{\sin^2 \varphi}{a_m} \geq -k_M - cte \frac{(\pi - \varphi)^2}{a_m}.$$

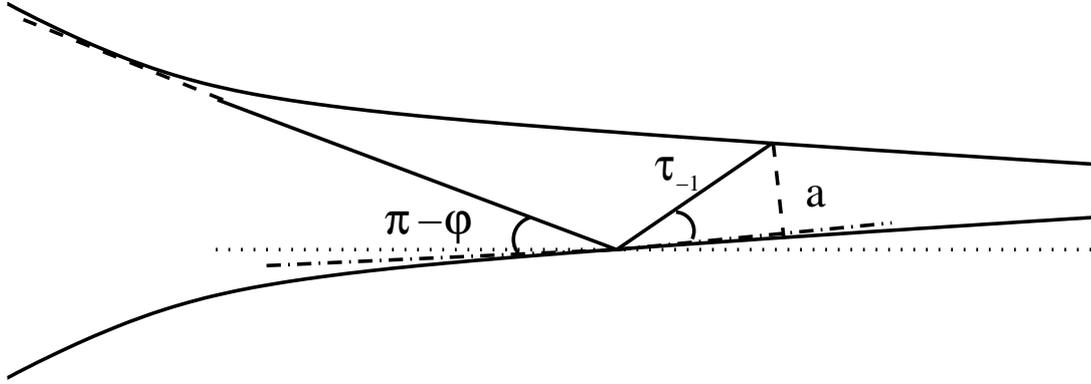


Figura 14: Definição de a .

A constante pode ser absorvida por a_m sem perda de generalidade e utilizando $\tilde{\varphi} = \pi - \varphi(r + r_0)$, obtemos

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} = -\frac{d\varphi}{dr} \leq k_M + \frac{(\pi - \varphi)^2}{a_m} = k_M + \frac{\tilde{\varphi}^2}{a_m}; \quad \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0, \quad (10)$$

cujas solução é

$$\tilde{\varphi}(r) \leq \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{k_M}{a_m}} r + \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{\sqrt{k_M a_m}} \right) \right) \sqrt{k_M a_m}. \quad (11)$$

Estamos interessados na distância vertical máxima entre S^{2+} e γ , com γ definida no domínio $[r_0, r_0 + \delta]$. Esta distância é a soma de dois valores, a saber, $v_1\delta$ e $v_2\delta$ (ver Figura 13). As funções v_1 e v_2 são na verdade funções de γ_0 e δ . Para o que vamos fazer a seguir será mais conveniente eliminar a dependência de δ , obtendo limitações para as v_i 's por funções de $\gamma_0 = (r_0, \varphi_0) \in S^2$, integráveis. De fato, poderemos considerá-las funções de $x = x(r_0)$, ou seja, a coordenada x de um ponto de ∂Q antes parametrizado por r_0 . Assim, $x(r)$ é a inversa de

$$r(x) = \int_0^x (1 + (f'(t))^2)^{1/2} dt.$$

Com isso, no decorrer do texto, alternaremos livremente entre r_0 .

Em relação a v_1 , note que S^{2+} pode ser considerada gráfico de uma função $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \pi)$, côncava. E assim temos

$$v_1(x, \delta)\delta \leq g'(x)\delta,$$

onde g' é a derivada da função g em relação à x , e g' é obviamente integrável.

Para v_2 temos que

$$\begin{aligned}
v_2(x, \delta) &\leq \max_{[r_0, r_0 + \delta]} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| \leq \frac{d\tilde{\varphi}}{dr}(\varepsilon_0) \leq k_M + \frac{\tilde{\varphi}^2}{a_m} \\
&\leq \left(1 + tg^2 \left(\sqrt{\frac{k_M}{a_m}}(\varepsilon_0) + \arctg \left(\frac{\tilde{\varphi}_0}{\sqrt{k_M a_m}} \right) \right) \right) k_M,
\end{aligned} \tag{12}$$

onde a última igualdade foi obtida substituindo (11) em (10). Vamos estudar seu comportamento assintótico. Se $\bar{x} = x(\bar{r})$ obtemos

$$k_M = k(\bar{r}) = \frac{f''(\bar{x})}{(1 + (f'(\bar{x}))^2)^{3/2}} \sim f''(\bar{x}).$$

Integrando (H4), para todo $\bar{x} \geq x$, obtemos $f''(\bar{x}) \leq f''(x)e^{c(\bar{x}-x)}$, para algum c positivo. Como $\bar{r} - r \leq \varepsilon_0$ implica $\bar{x} - x < \varepsilon_0$, temos que $f''(\bar{x}) \sim f''(x)$ e portanto

$$k_M \sim f''(x). \tag{13}$$

Pela Figura 14 e definição de x_t ,

$$\tilde{\varphi}_0 = \pi - \varphi_0 = \arctg|f'(x)| + \arctg|f'(x_t)|.$$

Mas

$$\arctg|f'(x)| + \arctg|f'(x_t)| \sim |f'(x)| + |f'(x_t)|,$$

(basta utilizar a expansão de tangente da soma de dois ângulos e o limite trigonométrico fundamental). Logo

$$\tilde{\varphi}_0 \sim |f'(x)| + |f'(x_t)| \sim |f'(x)|. \tag{14}$$

Quanto a $a_m = a(\hat{r}, \varphi_0)$, por definição,

$$a_m > \tau_{-1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) \sin \hat{\varphi}, \tag{15}$$

onde $\hat{\varphi}$ foi escolhido de tal modo que $(\hat{r}, \hat{\varphi}) \in S^{2+}$. Denotando $\hat{x} = x(\hat{r})$ e $\hat{x}_t = x_t(\hat{x})$, temos que

$$\begin{aligned}
\sin \hat{\varphi} &= \sin(\pi - \hat{\varphi}) \sim \pi - \hat{\varphi} \sim |f'(\hat{x})| + |f'(\hat{x}_t)| \sim \\
&\sim 2|f'(\hat{x})| + |f'(\hat{x}_t)| \sim 2\arctg|f'(\hat{x})| + \arctg|f'(\hat{x}_t)|,
\end{aligned} \tag{16}$$

sendo que a primeira relação é o limite trigonométrico fundamental, e a segunda e a última foram obtidas acima.

Note que o último termo da relação acima é a inclinação da trajetória de comprimento τ_{-1} entre $(\hat{r}, \hat{\varphi})$ e um ponto que denotamos (r_{-1}, φ_{-1}) . Assim, (15) fica $a_m \gg f(\hat{x}) + f(x_{-1}) > f(\hat{x})$.

Integrando (1) obtemos, para todo $\hat{x} > x$,

$$f(\hat{x}) \geq e^{-c(\hat{x}-x)},$$

para algum $c > 0$. Logo $a_m \gg f(x)$.

E a medida que φ se aproxima de $\pi/2$, $a_m < 2f(x)$. Portanto

$$a_m \sim f(x). \quad (17)$$

Por (13), (14) e (17) e por (H3), o argumento da função arcotangente em (11) é limitado e, assim, essa função é menor que um $\lambda < \pi/2$. Por (1), $f''(x) \ll f(x)$ e portanto $\sqrt{\frac{k_M}{a_m}} \ll 1$. Tome ε_0 suficientemente pequeno tal que $\sqrt{\frac{k_M}{a_m}}\varepsilon_0 < \pi/2 - \lambda$. Feito isso, obtemos que $v_2(x, \delta) \ll k_M \sim f''(x)$, que é integrável.

Denote por $S_{[\varepsilon]}^\dagger$ a porção de $S_{[\varepsilon]}^2$ abaixo de S^2 . Para $r > 0$ dado, a espessura de $S_{[\varepsilon]}^\dagger$ é de $\delta[v_1(r - \delta, \delta) + v_2(r - \delta, \delta)]$, onde $\delta < \varepsilon$ é o comprimento do suporte da curva instável que une (r, φ) na parte inferior de $\partial S_{[\varepsilon]}^\dagger$ à (r_0, φ_0) em S^2 (ε é o comprimento de γ e δ é $r - r_0$). Note que δ depende de r . Além disso,

$$\begin{aligned} \text{Leb}(S_{[\varepsilon]}^\dagger) &< \int_0^\infty \varepsilon[v_1(r - \varepsilon, \varepsilon) + v_2(r - \varepsilon, \varepsilon)]dr \leq \\ &C.\varepsilon \int_0^\infty [g'(x - \varepsilon) + f''(x - \varepsilon)]dx \leq C.\varepsilon, \end{aligned} \quad (18)$$

uma vez que, pela definição, $dr/dx \rightarrow 1$, quando $x \rightarrow \infty$, e C é uma constante.

Provaremos o mesmo resultado acima para a porção de $S_{[\varepsilon]}^2$ acima de S^2 . Temos que a desigualdade (8) ainda é válida. Tomemos, no entanto $U = [r_0 - \varepsilon_0] \times [\varphi_0, \varphi_0 + b]$. Novamente fazemos as simplificações, tomando o máximo de k , $k_M = k(\bar{r})$ e o mínimo de τ_{-1} , $\tau_m = \tau_{-1}(\hat{r}, \varphi_0)$, para algum $\bar{r}, \hat{r} \in [r_0 - \varepsilon_0, r_0]$. E fazendo a mudança de variáveis $\tilde{\varphi}(r) = \pi - \varphi(r + r_0)$, a desigualdade se torna

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dr} \leq k_M + \frac{\tilde{\varphi}}{\tau_m}; \quad \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0.$$

Como $d\tilde{\varphi}/dr > 0$ (os vetores tangentes à γ pertencem ao cone instável),

$$\max_{[-\delta, 0]} \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} = \frac{d\tilde{\varphi}}{dr}(0) = k_M + \frac{\tilde{\varphi}_0}{\tau_m} = v_2(x, \delta).$$

Os valores assintóticos para k_M e $\tilde{\varphi}_0$ ainda valem e, para τ_m , temos que $\tau_m > \tau_{-1}(\hat{r}, \hat{\varphi})$, $\hat{r}, \hat{\varphi} \in S^2$. Assim $\hat{a} = \tau_{-1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) \sin \hat{\varphi}$ é semelhante à a_m do caso anterior e portanto $\tilde{\varphi}_0/\tau_m \sim \varphi_0^2/\hat{a} \ll k_m$, o que implica em $v_2(x, \delta) \ll f''$, que é integrável.

A integrabilidade de v_1 é garantida da mesma maneira que a anterior, uma vez que ainda se trata de S^{2+} . E assim terminamos a prova para $S_{[\varepsilon]}^{2+}$.

Provaremos os outros casos como corolário do primeiro. Por exemplo, tomemos $S_{[\varepsilon]}^{1+}$. O lado direito de (8) é decrescente em φ (ou seja, os cones encolhem à medida que se aproximam da fronteira superior verticalmente). Assim, as soluções terão inclinação menor e v_2 (e v_1) será menor, verificando (18) ainda. Para $S_{[\varepsilon]}^{2-}$, tomemos o simétrico de uma vizinhança de S^{2+} . Assim $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ e $\tau_{-1}(r, \pi - \varphi)\tau(r, \varphi) > \tau_{-1}(r, \varphi)$, para $\varphi > \pi/2$ e r suficientemente grande. Novamente, o lado direito de (8) se torna pequeno e a estimativa de v_2 é grande o suficiente. Além disso, a distância vertical máxima entre γ e S^{2-} e $|v_2 - v_1|$, o que torna a limitação suficiente para provar (18). Os outros casos seguem como esses. \square

Corolário 5.5. *Existe uma medida π definida no conjunto de singularidades, de massa finita, tal que para todo $A \subseteq S^+ \cup S^-$ **fechado**,*

$$\text{Leb}(A_{[\varepsilon]}) \leq \pi(A)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Essa medida é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue unidimensional no conjunto de singularidades.

Demonstração. Considere sem perda de generalidade um arco fechado $A = \{(r, g(r)); b \leq r \leq c\} \subseteq S^{2+}$, com g como a da demonstração do Teorema 5.4. Defina

$$\pi(A) = \int_{x(b)}^{x(c)} [g'(x) + f''(x)] \frac{dr}{dx} dx.$$

Para aproveitar o raciocínio da demonstração anterior, vamos estimar apenas a parte de $A_{[\varepsilon]}$ que se encontra abaixo de S^{2+} e chamá-la $A_{[\varepsilon]}^\dagger$. Com isto, obtemos que, para ε pequeno,

$$\text{Leb}(A_{[\varepsilon]}^\dagger) \leq \pi(A)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

seguindo a linha de demonstração que nos conduziu até a estimativa de (18) no teorema anterior. O termo que resta é basicamente $\text{Leb}(\{c\}_{[\varepsilon]})$, dependendo de A .

Para o caso geral, podemos supor que $A = A^{1+} \cup A^{2+} \cup A^{1-} \cup A^{2-}$, $A^{i\pm} \subset S^{1\pm}$. Como vimos no final da demonstração do Teorema 5.4, a medida das ε -vizinhanças de cada $S^{i\pm}$ é estimada como a de S^{2+} , o raciocínio acima continua válido. \square

6 Existência de Variedades Estáveis e Instáveis Locais

O objetivo dessa seção é mostrar a existência de variedades estáveis e instáveis locais para μ -quase todo ponto $z \in \mathcal{M}$. O ideal seria podermos utilizar ou a teoria de Pesin ou a de Katok

e Strelcyn para obtermos este resultado. Isto não é possível diretamente porque o nosso sistema possui medida infinita e um conjunto de singularidades de medida finita positiva. Para superar essas dificuldades, trabalharemos em um subconjunto $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ de medida finita, que contém o conjunto das singularidades e tal que para $z \in \mathcal{M}$, exista n inteiro tal que $T^n z \in \mathcal{M}_0$. Em \mathcal{M}_0 seguiremos a mesma linha da teoria de Katok e Strelcyn [11] para obter a existência das variedades estáveis e instáveis locais. Feito isto, utilizaremos o fato de que $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ não contém singularidades e de que contém um representante da órbita de cada ponto de \mathcal{M} para estender a existência de variedades estáveis e instáveis locais para quase todo \mathcal{M} . Procedemos do seguinte modo.

Seja \mathcal{M}_0 definido de modo arbitrário em uma região compacta de \mathcal{M} e para r (ou x , como na correspondência da seção anterior) grande, exigimos que $\partial\mathcal{M}_0 \cap \text{int } \mathcal{M}$ seja composta por duas curvas: a inferior é S^{2-} , que é o gráfico da função

$$r \mapsto g(r) = \arctan |f'(x)| + \arctan |f'(x_t)| \sim |f'(x)|;$$

e a superior é o gráfico de uma função $r \mapsto \pi - h(r)$, com $h(r) \sim g(r) \sim |f'(x)|$. Desse modo, $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_3$ e, portanto, \mathcal{M}_0 é uma seção transversal global para o fluxo. Logo, faz sentido pensar em T_0 , a transformação de retorno a \mathcal{M}_0 .

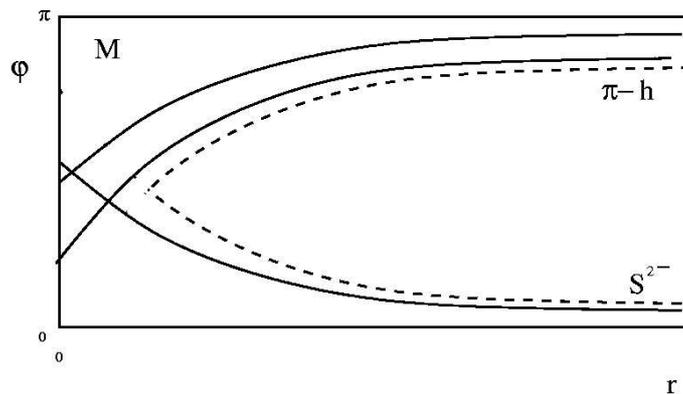


Figura 15: A escolha de \mathcal{M}_0 .

Porém, o conjunto de descontinuidades de T_0 é maior que o de T , uma vez que o conjunto $\mathcal{M}_0 \cap T^{-n} \partial\mathcal{M}_0$ induz novas descontinuidades. Mesmo assim, utilizaremos a idéia apresentada acima, adicionando o fato de que estas novas descontinuidades não têm nenhum apelo físico no sistema. Assim, sempre que for necessário, podemos alterar a fronteira de \mathcal{M}_0 , uma vez que esta foi definida de maneira arbitrária.

Vale a pena ressaltar que as definições de d^u e B^u são as generalizações naturais da Definição 5.3 para contexto mais abstrato.

Teorema 6.1. *Seja \mathcal{M} uma variedade riemanniana, imersa em \mathbb{R}^n e (\mathcal{M}, T, μ) um sistema dinâmico recorrente e inversível definido em \mathcal{M} . Seja S o conjunto de descontinuidades de*

T. Suponha que, para algum $\alpha, \beta > 0$, o seguinte ocorre:

- (a) $\mu((S \cup \partial\mathcal{M})_{[\varepsilon]}) \ll \varepsilon^\alpha, \varepsilon \rightarrow 0^+$;
- (b) *existe um feixe de cones invariantes e contínuos \mathcal{C} , tal que $\forall z \in \mathcal{M}, \bigcap_n \mathcal{C}_n(z) = E^u(z)$ subespaço de $T_z\mathcal{M}$;*
- (c) *existe uma norma $\|\cdot\|$ para vetores do cone tal que, $\forall z \in \mathcal{M} \setminus S \exists k(z) > 1$ tal que $\forall v \in C(z)$,*

$$\|DT_z v\|_{Tz} \geq k(z)\|v\|_z;$$

- (d) *seja $H = \{z; \exists z_n \rightarrow z, k(z) \rightarrow 1\}$. Então $\mu(H_{[\varepsilon]}) \ll \varepsilon^\alpha, \varepsilon \rightarrow 0^+$;*
- (e) *denote por $|\cdot|$ a norma riemanniana em $T\mathcal{M}$ e tome duas funções $0 < p \leq q$ tais que $\forall z \in \mathcal{M} \setminus S, p(z)\|\cdot\|_z \leq |\cdot|_z \leq q(z)\|\cdot\|_z$. Então $p(z)$ pode acumular apenas em 0 se z acumula em $S \cup \partial\mathcal{M}$ e $q(z) \ll (d^u(z, S \cup \partial\mathcal{M}))^{-\beta}$.*

Então para μ -q.t.p. z , a variedade instável local existe.

Além disso, tomemos $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}, \mu(\mathcal{M}_0) < \infty$ tal que $(S \cup \partial\mathcal{M})_{[\varepsilon_0]} \subseteq \mathcal{M}_0$ para algum $\varepsilon_0 > 0$. Então $W^u(z)$ é exponencialmente expansor com respeito aos retornos a \mathcal{M}_0 . Isto significa que dado um $z \in \mathcal{M}_0$, para o qual $W^u(z)$ existe, e denotando por $\{-n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência de seus retornos no passado, então $\exists C, \lambda > 0$ tais que $\forall w \in W^u(z), |T^{-n_k}(w) - T^{-n_k}(z)| \leq Ce^{-\lambda k}, k \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Podemos assumir também que $H_{[\varepsilon_0]} \subseteq \mathcal{M}_0$. Seja T_0 a transformação de retorno a \mathcal{M}_0 (está bem definida devido a recorrência).

Defina

$$\begin{aligned} A_k &= \{z \in \mathcal{M}_0; d^u(T_0^{-k}z, H \cup S \cup \partial\mathcal{M}) < 1/(k+1)^{2/\alpha}\} \\ &= T_0^k((H \cup S \cup \partial\mathcal{M})_{[(k+1)^{-2/\alpha}]}). \end{aligned}$$

Pela hipótese (a), $\mu((S \cup \partial\mathcal{M})_{[(k+1)^{-2/\alpha}]}) \ll (k+1)^{-2}$ e, por (d), $\mu((H)_{[(k+1)^{-2/\alpha}]}) \ll (k+1)^{-2}$, ambas quando $k \rightarrow +\infty$. Logo

$$\begin{aligned} \mu(A_k) &= \mu(T_0^k((H \cup S \cup \partial\mathcal{M})_{[(k+1)^{-2/\alpha}]})) \\ &= \mu((H \cup S \cup \partial\mathcal{M})_{[(k+1)^{-2/\alpha}]}) \\ &\ll 2(k+1)^{-2}. \end{aligned}$$

Definindo

$$A = \{\{A_k\} \text{ infinitas vezes}\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} A_k,$$

então $\mu(A) = 0$, pelo lema de Borel-Cantelli¹. Assim, para todo $z \in \mathcal{M}_0 \setminus A$, existe $C_1(z) > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d^u(T_0^{-k}z, H \cup S \cup \partial\mathcal{M}) \geq \frac{2C_1}{(k+1)^{2/\alpha}}. \quad (19)$$

Por (d), H é um conjunto de medida nula. Logo, para $z \in \mathcal{M} \setminus H$ defina

$$\psi(z) = \inf\{\log k(w) ; w \in B^u(z, (d^u(z, H))/2)\} > 0. \quad (20)$$

Precisamos de um resultado de demonstração direta:

Lema 6.2. *Seja $(\mathcal{M}_0, T_0, \mu)$ um sistema dinâmico, com $\mu(\mathcal{M}_0) < +\infty$, e ψ uma função positiva em \mathcal{M}_0 . Então sua média ergódica ψ^* é positiva em q.t.p..*

Assim, existe $B \subset \mathcal{M}_0$, $\mu(B) = 0$, tal que se $z \in \mathcal{M}_0 \setminus B$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \psi(T_0^{-k}z) > 0. \quad (21)$$

Agora fixe $z \in \mathcal{M}_0 \setminus (A \cup B)$ e seja $\{-n_k\}$ sua seqüência de retornos à \mathcal{M}_0 . Como ψ é positiva, pelo Lema 6.2 e (21), existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\sum_{k=1}^m \psi(T_0^{-n_k}z) \geq m\lambda. \quad (22)$$

Um ponto w pertencente a uma vizinhança de $T^{-n_m}z$ é "bom" se, para todo $j=0,1,\dots,m$

$$T^{n_m-n_j}w \in B^u\left(T^{-n_j}z, \frac{C_1}{(j+1)^{2/\alpha}}\right). \quad (23)$$

De (19) e (23) obtemos que

$$T^{n_m-n_j}w \in B^u\left(T^{-n_j}z, \frac{d^u(T_0^{-k}z, H \cup S \cup \partial\mathcal{M})}{2}\right). \quad (24)$$

Se w é bom, (20) vale com folga para w e suas m primeiras imagens no futuro. A dinâmica aqui tratada é a de $\{T^{n_m-n_j}\}$, gerada pelos retornos de z . Esses não são necessariamente os mesmos retornos de $T^{n_m}w$. De fato, as bolas em (24) podem exceder \mathcal{M}_0 . Mas como \mathcal{M}_0 pode ser escolhida arbitrariamente (desde que ela ainda seja de medida finita, contenha as singularidades e contenha pontos da órbita de pontos de \mathcal{M}), contornamos essa dificuldade ajustando $\partial\mathcal{M}_0$ e concluímos que os iterados $T^{n_m-n_j}w$, para $j = 0, 1, \dots, m$, de w bom continuam no interior de \mathcal{M}_0 .

¹Se $\{A_n, n \geq 1\}$ é uma seqüência de eventos para os quais $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ então $P(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n) = 0$. Ver [5] p.42

Para w bom e $v \in \mathcal{C}(w)$

$$\|DT^{n_m}v\|_{T^{n_m}w} \geq \prod_{j=0}^{m-1} k(T^{n_m-n_j}w)\|v\|_w \geq \exp\left(\sum_{j=0}^{m-1} \psi(T^{n_m-n_j}w)\right)\|v\|_w \geq e^{\lambda m}\|v\|_w, \quad (25)$$

onde a primeira desigualdade é de acordo com a hipótese (c), a segunda é devido a (20) e a terceira é pela estimativa em (22).

Uma curva instável é boa se contém $T^{-n_m}z$ e é formada por pontos bons. Seja l_{\parallel} o comprimento de uma curva na métrica $\|\cdot\|$, então (25) implica que uma curva boa γ verifica

$$l_{\parallel}(T^{n_m}\gamma) \geq e^{\lambda m}l_{\parallel}(\gamma). \quad (26)$$

Note que γ suficientemente pequena (em termos de l_{\parallel}) é boa. Mas mais do que isso, pode-se alongar γ de maneira que ela continue boa e

$$l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma) \leq C_2e^{-\lambda j}, \quad j = 1, \dots, m; \quad l_{\parallel}(T^{n_m}\gamma) = C_2, \quad (27)$$

para algum $C_2 = C_2(z)$ a ser determinado a seguir:

Por (19) e (24), temos que

$$d^u(T^{n_m-n_j}w, S \cup \partial\mathcal{M}) \geq \frac{C_1}{(j+1)^{2/\alpha}}.$$

Portanto, de acordo com a hipótese (e) do Teorema, existe C_3 tal que

$$q(T^{n_m-n_j}w) \leq C_3(j+1)^{2\beta/\alpha}. \quad (28)$$

Defina C_2 como qualquer número inteiro que satisfaça, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$C_2C_3(k+1)^{2\beta/\alpha}e^{-\lambda k} \leq \frac{C_1}{(k+1)^{2/\alpha}}. \quad (29)$$

Vamos provar a afirmação de (27):

Primeiro suponha que γ continue boa à medida que é alongada. Não satisfazer (27) significa encontrar um j , $1 \leq j \leq m$, tal que $l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma) = C_2e^{-\lambda j}$ e $l_{\parallel}(T^{n_m}\gamma) < C_2$. Mas isto contradiz (26) que, efetuando as substituições adequadas, garante que $l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma)e^{\lambda j} \leq l_{\parallel}(T^{n_m}\gamma)$.

Resta mostrar que γ continua boa até alcançar a situação de (27), isto é, quando $l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma) \leq C_2e^{-\lambda j}$, $j = 1, \dots, m$.

De (28) e da hipótese (e) do Teorema, obtemos

$$l(T^{n_m-n_j}\gamma) \leq q(T^{n_m-n_j}w)l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma) \leq C_3(j+1)^{2\beta/\alpha}l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma), \quad (30)$$

onde l é o comprimento de uma curva na norma riemanniana. E, de (29) obtemos

$$l(T^{n_m-n_j}\gamma) \leq C_2 C_3 (j+1)^{2\beta/\alpha} e^{-\lambda j} \leq \frac{C_1}{(j+1)^{2/\alpha}}. \quad (31)$$

Assim, pela definição de d^u , todos os pontos de $T^{n_m-n_j}\gamma$ estão tão próximos de $T^{-n_j}z$ quanto (23) recomenda e isto prova (27).

Observação 6.3. Por (24), nenhum dos $T^{n_m-n_j}\gamma$, $j = 0, \dots, m$ podem ser cortados por S . E isto também é verdade para $T^{n_m-n}\gamma$, $n = 0, \dots, n_m$, $n \neq n_j$. De fato, para $n_j < n < n_{j+1}$, $T^{-n}z \notin \mathcal{M}_0$ (por definição de $\{n_j\}$), e, por construção, $T^{-n}z$ está mais longe de $S \cup \partial\mathcal{M}_0$ que $T^{-n_j}z$. Portanto, pela hipótese (e), (28) e (30) valem com n no lugar de n_j . E como $l_{\parallel}(T^{n_m-n}\gamma) < l_{\parallel}(T^{n_m-n_j}\gamma)$, (31) vale também com n no lugar de n_j .

Dado $z \in \mathcal{M}_0 \setminus (A \cup B)$, seja Δ_m um disco topológico suave, centrado em $T^{-n_m}z$, bom, dentro do feixe de cones (isto é, $\forall w \in \Delta_m$, $DT_w\Delta_m \subset C(w)$), e com dimensão máxima, digamos $\nu \in \mathbb{Z}^+$.

Apesar de Δ_m ser pequeno (condição necessária para ser bom), nós podemos tomar $T^{n_m}\Delta_m$ com um tamanho adequadamente maior, isto é,

$$\inf\{l_{\parallel}(\gamma); \gamma \text{ curva suave } \subset \Delta_m \text{ unindo } T^{-n_m}z \text{ a } \partial\Delta_m\} \geq C_2 e^{-\lambda m}. \quad (32)$$

Pela hipótese (e), $l_{\parallel}(\cdot) \leq C_4 l(\cdot)$ em uma vizinhança de z , o que garante a existência de um disco topológico de raio C_2/C_4 dentro de $T^{n_m}\Delta_m$, digamos B_m . De fato, suponha o contrário, ou seja, existe uma curva $\eta \subset T^{n_m}\Delta_m$, que une z a $\partial T^{n_m}\Delta_m$, com $l(\eta) < C_2/C_4$, ou, $l_{\parallel}(\eta) < C_2$. Assim $T^{-n_m}\eta$ é boa e, conseqüentemente, por (27) $l_{\parallel}(T^{-n_m}\eta) < C_2 e^{-\lambda m}$ (basta substituir η no lugar de $T^{n_m}\gamma$). Mas $T^{-n_m}\eta$ une $T^{-n_m}z$ a alguma $\partial\Delta_m$, contradizendo (32).

Defina

$$W^u(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m.$$

O limite acima é tomado com a seguinte distância:

$$\text{dist}(B, \hat{B}) = \max_{z \in B} \text{dist}(z, \hat{B}) + \max_{w \in \hat{B}} \text{dist}(w, B),$$

onde

$$\text{dist}(z, \hat{B}) = \min_{w \in \hat{B}} \{|z - w| + d_{G_\nu}(T_z B, T_w \hat{B})\}.$$

A norma e a métrica no lado direito da equação acima são aquelas herdadas da imersão em \mathbb{R}^N . A métrica d_{G_ν} é qualquer métrica em $G_\nu(\mathbb{R}^N)$, o espaço dos planos ν -dimensionais em \mathbb{R}^N .

A distância definida acima é completa. Vamos mostrar que o limite acima está bem definido. Para isto vamos utilizar o próximo lema:

Lema 6.4. *Seja $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de funções positivas definida em um compacto K_0 . Suponha que g_n é contínua no compacto K_n , com $K_n \supseteq K_{n+1}$. Se, $\forall x \in K_0$, $g_n(x) \searrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então $\max_{K_n} g_n \searrow 0$.*

Para todo $m \geq 0$, chamemos K_m a vizinhança compacta de z constituída pelos pontos \tilde{z} tais que $T^{-n_m} \tilde{z}$ é bom. Ou seja, $T^{-n_m} \tilde{z} \in B^u \left(T^{-n_j} z, \frac{C_1}{(j+1)^{2/\alpha}} \right)$, $\forall j = 0, \dots, m$. Logo K_m é a interseção dessas bolas para $j = 0, \dots, m$. Dessa forma, é claro que $K_{m+1} \subseteq K_m$.

Revedo a definição, pontos de K_m permanecem distantes de $S_{n_m}^-$, portanto T^{-n_m} é um difeomorfismo entre K_m e sua imagem. Com isso, \mathcal{C}_{n_m} varia continuamente em K_m . Definindo $g_m(\tilde{z})$ da seguinte maneira:

$$g_m(\tilde{z}) = \max\{d_{G_\nu}(X - Y); X, Y \text{ subespaços } \nu\text{-dimensionais de } \mathcal{C}_{n_m}(\tilde{z})\},$$

ou seja, $g_m(\tilde{z})$ corresponde à abertura do cone $\mathcal{C}_{n_m}(\tilde{z})$ e dessa maneira $g_m(\tilde{z}) \searrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$, de acordo com a hipótese (b). Pelo Lema 6.4, essa convergência ocorre de maneira uniforme em subconjuntos decrescentes, o que é suficiente para nós obtermos que, para $j > m$ suficientemente grande, $\text{dist}(B_m, B_j) \leq \varepsilon$. De fato, $T^{n_m} \Delta_m$ e $T^{n_j} \Delta_j$ estão contidos em K_m e seus espaços tangentes estão uniformemente pertos; e como ambos os discos possuem z em comum, seus pontos também estão pertos.

Como a métrica dist é completa, B_m possui um limite. E este limite não depende da escolha do disco Δ_m . Basta utilizar o mesmo argumento do parágrafo anterior para um outro $\hat{\Delta}_j$ bom, com $\text{dist}(B_m, \hat{B}_j) \leq \varepsilon$. Assim, $W^u(z) = \lim_m B_m = \lim_j \hat{B}_j$.

Para quase todo $z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, define-se $W^u(z)$ como $T^{-n} W^u(T^n z)$, n o menor inteiro positivo tal que $T^n z \in M_0$.

Note que $W^u(z)$ definido dessa maneira satisfaz os axiomas da Definição 3.7: (a) é verificado por construção. Para (b) basta lembrarmos a Observação 6.3, que diz que $|T^{-n}(\tilde{z}) - T^{-n}(z)|$ torna-se pequeno, mesmo quando $n \neq n_j$. No caso de (c), fixamos $z \in \mathcal{M}_0$ e, dado $W_0^u(z)$, construímos $\hat{\Delta}_j$ tomando $T^{-n_j} W_0^u(z)$ que deve ser menor que o tamanho regulamentado por (37). Aplicando T^{n_j} e tomando o limite, pelo mesmo argumento usado acima, obtemos $W^u(z)$. finalmente, com uma estimativa para (34), mostramos que $\forall \tilde{z} \in W^u(z)$, $|T^{-n_j}(\tilde{z}) - T^{-n_j}(z)| \leq C_5 e^{-\lambda_j^1}$, para $\lambda^1 < \lambda$, uma vez que a distância em \mathbb{R}^n é menor ou igual à distância instável em \mathcal{M} . Isto prova a última afirmação do teorema. \square

Observemos que as hipóteses (a)-(d) do Teorema 6.1 são satisfeitas pelo nosso sistema: o Teorema 5.4 garante a veracidade de (a); (b) é verdade por construção de Δ_m ; a norma crescente de (c) é

$$\|(dr, d\varphi)\|_{(r, \varphi)}^2 = \sin^2 \varphi dr^2 + d\varphi^2 \quad (33)$$

, obtida a partir de (6) e (7); $H = \emptyset$, e assim, (d) é trivialmente verificado. No entanto, da norma obtida para a hipótese (c), obtemos $p \equiv 1$ e $q(r, \varphi) = 1/\sin \varphi$, e portanto a condição (e) não é satisfeita. Entretanto, podemos inserir algumas pequenas adaptações neste teorema para que o resultado continue válido para o nosso sistema.

Teorema 6.5. *As afirmações do teorema anterior continuam válidas se a estimativa sobre q em (e) é substituída pelas seguintes:*

(f) *existe um $\beta > 0$ tal que $\int_{\mathcal{M}_0} q^\beta d\mu < \infty$;*

(g) *existem $\varepsilon_0, \tilde{C} > 0$ tais que $\sup\{q(w) | w \in B^u(z, d^u(z, S \cup \partial\mathcal{M})/2)\} \leq \tilde{C}q(z)$ uniformemente em z , sempre que $d^u(z, S \cup \partial\mathcal{M}) \leq \varepsilon_0$;*

(h) *para $z \in \mathcal{M}$ fixo, com $\{-n_j\}$ sua seqüência de retornos no passado para \mathcal{M}_0 , $q(T^{-n}(z)) \leq C'' q(T^{-n_j}(z))$, para $n_j < n < n_{j+1}$, C'' não dependendo de z .*

Demonstração. Após uma rápida revisão, notamos que o fato principal utilizado sobre q é a estimativa (28), ou seja, que a razão entre as duas métricas de um ponto bom w cresce polinomialmente ao longo da órbita no passado de $T^{n_m}w$. Logo é essa que devemos recuperar com as novas hipóteses.

Por (f) e uma desigualdade do tipo da de Tchebychev ²

$$\mu(\{z \in \mathcal{M}_0; q(z) > k^{2/\beta}\}) \ll k^{-2}.$$

Logo, repetindo a linha de raciocínio que conduziu a (19), existe $C_6 = C_6(z)$ tal que

$$q(T_0^{-n}z) = q(T^{-n_k}z) \leq C_6 k^{2/\beta},$$

para todo z não pertencente a um conjunto de medida nula.

De (g), e seguindo a demonstração do teorema anterior, para w bom e $m \geq j \geq j_0$, para algum $j_0 = j_0(\varepsilon_0)$

$$d^u(T^{n_m-n_j}w, T^{-n_k}z) \leq \min \left\{ \varepsilon_0, \frac{d^u(T^{-n_j}z, S \cup \partial\mathcal{M})}{2} \right\}.$$

Então, para $j \geq j_0$

$$q(T^{n_m-n_j}w) \leq \tilde{C}q(T^{-n_j}) \leq \tilde{C}C_6 j^{2/\beta} = C_7 j^{2/\beta}. \quad (34)$$

Para a quantidade finita de valores de j restante, basta um pequeno ajuste em C_7 . Finalmente, (34) é a substituição para (28) que necessitamos.

Quanto à hipótese (h), ela se refere à observação 6.3, que faz referência a (28). Sem essa hipótese, poderia acontecer de $T^n\gamma$ ser tão grande na norma riemanniana e atingir S , para $n_j < n < n_{j+1}$. Ao invés disso, a hipótese (h), juntamente com a equação (34), garante que a observação ainda é verdadeira. \square

Vamos agora mostrar que a variedade \mathcal{M}_0 definida no início da seção (antes do enunciado do Teorema 6.1), satisfaz o Teorema 6.5. De fato (f) vale com $\beta=1$ pois, por definição

$$\int_{\mathcal{M}_0} q(r, \varphi) d\mu(r, \varphi) = \int_{\mathcal{M}_0} \frac{1}{\sin \varphi} \sin \varphi dr d\varphi = \int_{\mathcal{M}_0} dr d\varphi = \text{Leb}(\mathcal{M}_0) < +\infty.$$

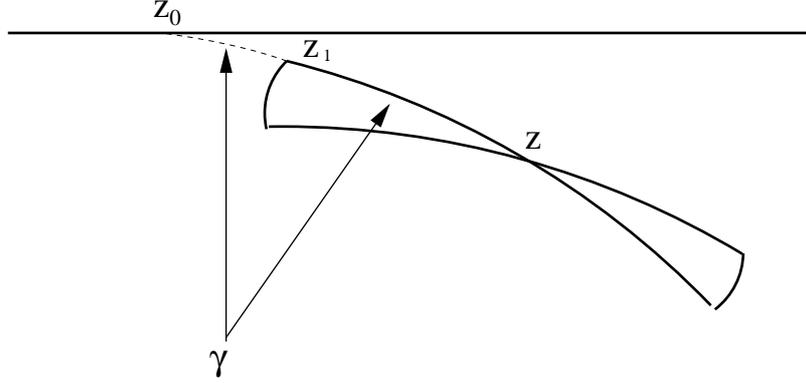


Figura 16: A forma de $B^u(z, d^u(z, \partial\mathcal{M})/2)$.

Vamos para (g): podemos não nos preocupar com S uma vez que q só diverge em $\partial\mathcal{M}$. A Figura 16 mostra como é $B^u(z, d^u(z, \partial\mathcal{M})/2)$. Se $z = (r, \varphi)$ está muito próximo (na métrica riemanniana) de $\partial\mathcal{M}$, B^u é quase horizontal e o máximo de q é atingido em $z_1 = (r_1, \varphi_1)$. Este ponto corta a curva γ em duas partes de mesmo comprimento. A curva γ é exatamente o tipo de curva instável que estudamos na prova do Teorema 5.4. É o gráfico de uma função $r \mapsto \varphi(r)$ que satisfaz

$$\frac{d\varphi}{dr} = -k(r) - \frac{\sin \varphi}{\tau_{-1}(r, \varphi)}, \quad \varphi(r_0) = \pi,$$

conforme (8). Temos que mostrar que

$$\frac{q(z_1)}{q(z)} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \varphi(r)}{\sin \varphi(r_1)} \leq C'. \quad (35)$$

Definindo $\tilde{\varphi}(r) = \pi - \varphi(r + r_0)$, como na Seção 5, e notando que $\sin \varphi = \sin \tilde{\varphi} \sim \tilde{\varphi}$, para φ próximo de π , uma condição suficiente para (35) é $\tilde{\varphi}(2\bar{r}_1)/\tilde{\varphi}(\bar{r}_1) \leq C'$, onde $\bar{r}_1 = r_1 - r_0$. De fato, $\tilde{\varphi}$ é uma função convexa crescente e $2(r_1 - r_0) > r - r_0$. Logo

$$\frac{\sin \varphi(r)}{\sin \varphi(r_1)} = \frac{\sin \tilde{\varphi}(r - r_0)}{\sin \tilde{\varphi}(r_1 - r_0)} \sim \frac{\tilde{\varphi}(r - r_0)}{\tilde{\varphi}(r_1 - r_0)} \leq \frac{\tilde{\varphi}(2(r_1 - r_0))}{\tilde{\varphi}(r_1 - r_0)}.$$

O Teorema do Valor Médio de Lagrange garante que existem $\rho_1, \rho_2 \in (0, \bar{r}_1)$ tais que

$$\frac{\tilde{\varphi}(2\bar{r}_1)}{\tilde{\varphi}(\bar{r}_1)} = \frac{2 \frac{d\tilde{\varphi}}{dr}(2\rho_1)}{\frac{d\tilde{\varphi}}{dr}(\rho_2)}. \quad (36)$$

² $PX - EX \geq a \leq \frac{\sigma_x^2}{a^2}$. Ver [5] p.106

O denominador é limitado inferiormente por $k(r_0 + \rho_2)$. Quanto ao numerador, para γ menor que um certo ε_0 , sabemos estimar a partir da demonstração do Teorema 5.4. De fato, $d\tilde{\varphi}/dr(2\rho_1) \leq C_8 k_M$, C_8 não dependendo de z_0 . Mas k_M é da mesma ordem, assintoticamente, de $k(r_0 + \rho_1)$ e, portanto, (36) é limitado superiormente, como queríamos mostrar.

Vamos mostrar agora que a hipótese (h) é satisfeita. Seja $z_{-n} = (r_{-n}, \varphi_{-n}) = T^{-n}z$. Quando z_{-n_k} pertence a um subconjunto compacto de \mathcal{M}_0 o trecho de sua órbita formado pelos pontos $\{z_{-n}\}_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}$ está em um subconjunto compacto de \mathcal{M} , onde q é limitado. Logo, podemos estudar somente o caso no qual z_{-n_k} situa-se muito à direita de \mathcal{M}_0 , seja acima do gráfico de $\pi - h$ ou abaixo S^{2-} .

Caso z_{-n_k} esteja acima do gráfico de $\pi - h$, existe no máximo um valor para n para o qual $r_n > r_{-n_k}$ e $1/q(z_{-n} = \sin \varphi_{-n} \leq \sin \varphi_{-n_k} = 1/q(z_{-n_k})$. Para este n , obtemos que $\sin \varphi_{-n} \sim \sin \varphi_{-n_k}$. Para os outros valores de n para os quais $\sin \varphi_{-n} < \sin \varphi_{-n_k}$, z_n deve estar à esquerda de z_{n_k} e acima de S^{2-} . Assim, como $g(r) \gg h(r)$,

$$\sin \varphi_{-n} \sim \varphi_{-n} \geq g(r_{-n_k}) \gg h(r_{-n_k}) \geq \varphi_{-n_k} \sim \sin \varphi_{-n_k}.$$

Por outro lado, nada há a demonstrar no caso em que z_{-n_k} está abaixo de S^{2-} uma vez que a trajetória passada desse ponto atravessa o eixo y em Q_4 e, portanto, z_{-n_k-1} situa-se acima de S^{2+} , logo, em \mathcal{M}_0 .

7 Continuidade Absoluta

O objetivo dessa seção é provar a continuidade absoluta das variedades estáveis e instáveis locais de \mathcal{M} com respeito à medida μ . Isto será feito indiretamente. De fato, construiremos um sistema dinâmico auxiliar tomando uma seção transversal para o fluxo do bilhar diferente da seção transversal \mathcal{D} que temos considerado até agora. Consideramos na mesa do bilhar Q linhas verticais ao longo de sua extensão tal que o comprimento de sua união é finito. Isto acarretará na medida finita do novo sistema. A cada uma dessas linhas chamaremos "paredes transparentes", pois as "colisões" com essas paredes serão passagens através delas. A união dessas paredes será nossa nova seção transversal que denotaremos por \mathcal{G} . Definimos a transformação T_1 que leva um ponto sobre uma parede transparente no ponto correspondente à passagem através da parede consecutiva.

Para $n > 1$, sejam as paredes transparentes

$$G_n = \{X_n\} \times [0, f(X_n)],$$

onde X_n é tal que $f(X_n) = n^{-3}$. O novo espaço de fase é

$$\mathcal{M}_1 = \bigsqcup_{n \geq 1} (\mathcal{M}^{r,n} \sqcup \mathcal{M}^{l,n}),$$

onde $\mathcal{M}^{l,n} = (0, n^{-3}) \times (0, \pi)$ é constituído por pontos $z = (r, \varphi)$, sendo r a coordenada y do ponto em G_n e φ o ângulo, medido no sentido anti-horário, entre a direção y e o vetor velocidade; e $\mathcal{M}^{r,n} = (0, n^{-3}) \times (0, \pi)$ também é formado por pontos $z = (r, \varphi)$ mas r é n^{-3} menos o valor da coordenada y e φ é o ângulo, medido no sentido anti-horário, entre direção negativa do eixo y e o vetor unitário.

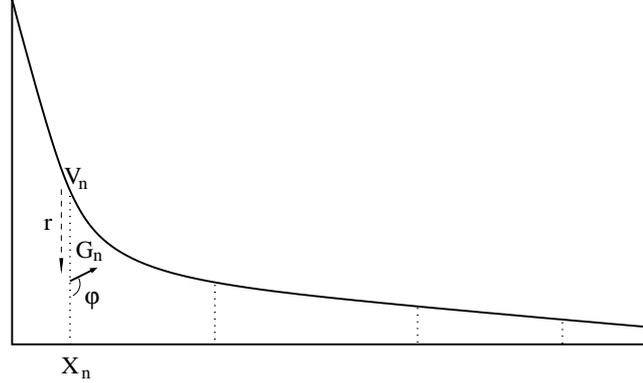


Figura 17: Definição de G_n , V_n e $\mathcal{M}^{r,n}$.

Mais adiante mostraremos que as variedades estáveis e instáveis de \mathcal{M} induzem variedades estáveis e instáveis em \mathcal{M}_1 e, dessa forma, provaremos para o sistema $(\mathcal{M}_1, T_1, \mu)$ a continuidade absoluta dessas variedades, estendendo depois o resultado para \mathcal{M} .

A transformação T_1 está definida em todo os pontos que não resultarão em tangências nas paredes transparentes ou que não atingirão um vértice V_n . Chamamos \mathcal{R} o conjunto desses pontos excluídos, e para $i = l, r$, seja $\mathcal{R}^{i,n} = \mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{i,n}$.

Observação 7.1. *Seja $z \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{R}$ um ponto cuja trajetória atinge \mathcal{D} uma certa quantidade k de vezes antes de atravessar a próxima parede transparente, digamos G_m . Devemos considerar que, ao atravessar G_m , há uma dupla colisão instantânea que não altera a direção da trajetória da partícula. A diferencial de T_1 em z , $D(T_1)_z$, é igual ao produto*

$$\prod_{i=0}^{k-1} DT_{z_i} \cdot (-DT_{z_k}),$$

onde cada z_i , $i = 0, \dots, k-1$, são os pontos de colisão com \mathcal{D} e DT_{z_k} se refere a 'dupla colisão instantânea' em G_m . A matriz que representa DT_{z_k} é (2), escolhendo o sinal mais em evidência e tomando $\varphi_1 = \pi - \varphi$ e $k = k_1 = \tau = 0$, isto é, a matriz jacobiana de DT_{z_k} é menos a matriz identidade.

Seja M_n o número máximo de rebatidas em \mathcal{D} para pontos em G_n .

Lema 7.2. *Assumindo (H5), $M_n \ll n^{\theta_0}$, $\theta_0 = 6\theta - 1$.*

Demonstração. A trajetória que maximiza o número de colisões em \mathcal{D} entre G_{n-1} , G_n , G_{n+1} é como a da figura 18, ou seja, partindo de G_n , a partícula atinge o ponto $(X_{n+1}, 0)$ e sua trajetória é revertida, fazendo com que a partícula faça o mesmo percurso duas vezes antes de atravessar G_n .

Seja $\beta_n = \arctan |f'(X_n)|$. Defina e_n como

$$e_n = f(X_{n+1})tg(2\beta_{n+1}) \sim f(X_{n+1})|f'(X_{n+1})| = (n+1)^{-3}|f'(X_{n+1})|.$$

Note que

$$M_n \ll \frac{X_{n+1} - X_n}{e_n},$$

onde a constante implícita não é maior que dois. É claro que

$$f'(X_{n+1}) = f'(f^{-1}((n+1)^{-3})) = \frac{1}{(f^{-1})'((n+1)^{-3})}.$$

Tome $g = f^{-1}$ e $t_n = n^{-3}$. Então

$$e_n \sim \frac{t_{n+1}}{|g'(t_{n+1})|}.$$

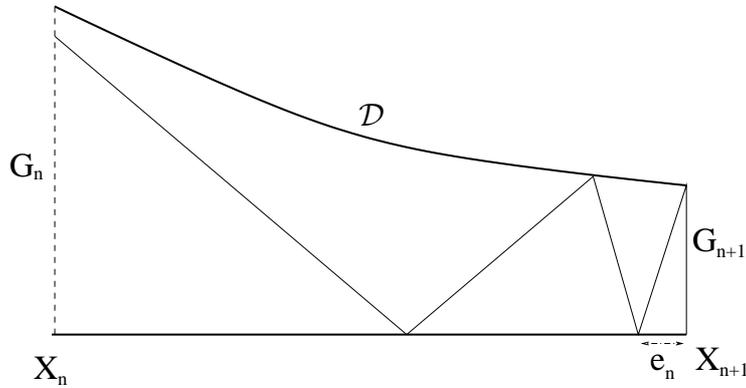


Figura 18: Definição de e_n .

Também obtemos que

$$X_{n+1} - X_n = g(t_{n+1}) - g(t_n) \leq |g'(t_{n+1})|(t_{n+1} - t_n),$$

uma vez que f' (e conseqentemente g') é monótona. Assim

$$M_n \ll \frac{|g'(t_{n+1})|^2(t_{n+1} - t_n)}{t_{n+1}} \sim |g'(t_{n+1})|^2 \frac{1}{n}.$$

Por (H5)

$$|g'(t_{n+1})| = \frac{1}{|f'(f^{-1}(t_{n+1}))|} \ll \frac{1}{[f(f^{-1}(t_{n+1}))]^\theta} \sim t_n^{-\theta} = n^{3\theta},$$

e assim, $M_n \ll \frac{n^{6\theta}}{n}$. □

Vamos mostrar que as variedades estáveis e instáveis de T em \mathcal{M} podem ser levadas sobre \mathcal{M}_1 . Concentraremos nosso raciocínio nas variedades instáveis, sendo o outro caso análogo. Consideremos a transformação de Poincaré T_2 correspondente à seção transversal formada pela união de \mathcal{D} com as paredes transparentes. A variedade sobre a qual T_2 está definida é $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}_1$. Para $z \in \mathcal{M}_1$, seja k o menor inteiro positivo tal que $T_2^k z \in \mathcal{M}$. Então defina $\tilde{W}^u(z) = T_2^{-k} W^u(T_2^k z)$. Embora $\tilde{W}^u(z)$ contraia para iterações no passado, em geral, não é uma curva de classe C^1 , devido às singularidades \mathcal{R} . Nosso objetivo é ajustá-la de modo que as condições da Definição 3.7 sejam satisfeitas. Para isso, precisamos da seguinte Proposição:

Proposição 7.3. *Para algum $\eta > 1$, defina $\mathcal{M}^n = [0, n^{-\eta}] \times [0, 1]$ e seja $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{M}^n$ a união de M_n gráficos de funções monótonas sobre $[0, n^{-\eta}]$. Defina $\mathcal{R} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^n$ e denote por $\mathcal{R}_{\{\varepsilon\}}$ a vizinhança de \mathcal{R} de raio ε (com respeito à métrica usual). Se M_n cresce no máximo polinomialmente em n , então $\text{Leb}(\mathcal{R}_{\{\varepsilon\}})$ decai polinomialmente em ε , quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que \mathcal{R}^n é formado por segmentos verticais \mathcal{M}^n . A pior situação, no sentido de menor quantidade de sobreposições entre as vizinhanças, ocorre quando esses segmentos são espaçados igualmente, que é a que iremos considerar.

Seja $M_n \leq C_1 n^\rho$. Então o espaçamento entre os segmentos \mathcal{R}^n é de pelo menos $n^{-(\eta+\rho)}/C_1$. Dado $\varepsilon > 0$, seja k o máximo n tal que $n^{-(\eta+\rho)}/C_1 \leq 2\varepsilon$. Para $n > k$, a medida de \mathcal{R}^k é estimada pela de \mathcal{M}^k . Assim:

$$\text{Leb} \left(\bigsqcup_{n=k+1}^{\infty} \mathcal{R}_{\{\varepsilon\}}^n \right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-\eta} \leq C_2(k+1)^{-\eta+1} \leq C_3 \varepsilon^{\frac{\eta-1}{\eta+\rho}}.$$

Para $n \leq k$, as vizinhanças de raio ε dos segmentos não se sobrepõem. Logo:

$$\text{Leb} \left(\bigsqcup_{n=1}^k \mathcal{R}_{\{\varepsilon\}}^n \right) \leq \varepsilon C_1 \sum_{n=1}^k n^\rho \leq C_4 \varepsilon k^{\rho+1} \leq C_5 \varepsilon^{1-\frac{\rho+1}{\eta+\rho}} = C_5 \varepsilon^{\frac{\eta-1}{\eta+\rho}}.$$

□

Pela Proposição 7.3, $\mu(\mathcal{R}_{\{\varepsilon\}})$ vai a zero como uma potência em ε . Além disso, sendo $q(r, \varphi) = 1/\sin \varphi$, como na Seção 6, é claro que $\int_{\mathcal{M}_1} q \, d\mu < \infty$. Estes dois fatos implicam

que as pré-imagens de quase todo ponto $z \in \mathcal{M}_1$, via T_1 , aproximam de \mathcal{R} apenas polinomialmente e a constante de deformação entre a distância riemanniana e a distância $\|\cdot\|$ também cresce polinomialmente. Uma vez que $T_1^{-k}\tilde{W}^u(z)$ contrai exponencialmente com respeito a $\|\cdot\|$, segue que ela pode não ser suave apenas para um número finito de k 's. Assim, ela pode ser ajustada, de forma que a Definição 3.7, (b), vale, sem o risco de seu comprimento reduzir a zero.

Observação 7.4. *Adotamos \mathcal{M}_1 como nossa variedade pois $\mu(\mathcal{M}_1) < \infty$, garantindo contração exponencial para tempos no passado. Não utilizamos \mathcal{M}_0 porque nessa variedade não fica claro estabelecer a quantidade de rebatidas em \mathcal{D} . Mas \mathcal{M}_0 é necessária pois para a prova do "Tail Bound Lemma" (Lema 9.4), precisamos que as vizinhanças ε das singularidades tenham medida ε . O conjunto $S_{[\varepsilon]}$ satisfaz isto mas para $\mathcal{R}_{\{\varepsilon\}}$ isto não é claro. De fato, a partir da demonstração do Lema 7.3, obtemos que a medida de $\mathcal{R}_{\{\varepsilon\}}$ é da ordem de $\varepsilon^{\frac{\eta-1}{\eta+\rho}}$. Lembrando que $\eta = 3$ e ρ está associado a θ obtido em (H5), o expoente de ε pode ser menor que 1.*

Antes do próximo teorema, podemos simplificar a situação da Definição 3.8. A medida μ pode ser substituída pela medida da Lebesgue bidimensional, uma vez que as duas são equivalentes. Consideramos \mathcal{V} a folheação definida por segmentos de reta paralelos estritamente contidos no cone \mathcal{C}^- . Apesar do abuso de notação, utilizamos l não só para indicar o comprimento dado pela métrica riemanniana d , mas também para a medida de Lebesgue unidimensional em curvas suaves, por exemplo, em $\Theta \in \mathcal{V}$.

Tome um $\Theta \in \mathcal{V}$ e defina $I \subset \Theta$, $l(I) > 0$, tal que $W^u(z)$ existe para l -q.t $z \in I$. Chamemos $W^{u,r}(z)$ o lado direito de $W^u(z)$ com respeito à Θ , e L a união de todos os $W^{u,r}(z)$ para z pertencentes a I . Se provarmos que existe $d_0 > 0$ tal que para l -q.t. $\tilde{\Theta} \in \mathcal{V}$ à direita de Θ , com $d(\Theta, \tilde{\Theta}) \leq d_0$, $l(\tilde{\Theta}, L) > 0$, então teremos provado que Θ verifica a Definição 3.8 para todo cilindro C (utilizando o Teorema de Fubini e integrando Θ sobre \mathcal{V}). O caso da folheação estável é análogo.

Teorema 7.5. *Supondo (H1)-(H5), as folheações estáveis e instáveis em \mathcal{M}_1 são absolutamente contínuas com respeito a μ .*

Demonstração. Seja $A \subset \mathcal{M}_1$ um conjunto de medida total. De que maneira escolhemos A ? A primeira exigência é que todo $z \in A$ tem uma variedade instável local.

Tome $\Theta \in \mathcal{V}$ e um $I \subset \Theta$ tal que para l -quase todo $z \in I$, $z \in A$. Fixemos um desses z , o qual passaremos a chamar z_0 . Se denotarmos por L_ε a união de todos $W^{u,r}(z)$, com $z \in I$ e $l(W^{u,r}(z)) \geq \varepsilon$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $z_0 \in I \cap L_\varepsilon$ e $l(I \cap L_\varepsilon) > 0$.

Fixemos $d_0 = \text{const.}\varepsilon_0$. Para uma escolha adequada de const. , asseguramos que qualquer $W^{u,r}(z)$ maior que ε_0 intercepta qualquer $\tilde{\Theta}$ à direita de Θ , com $d(\tilde{\Theta}, \Theta) \leq d_0$. Assim, para um $\tilde{\Theta}$ fixo, definimos a holonomia h em $I \cap L_\varepsilon$ tal que $h(z)$ é o único ponto (por transversalidade) em $W^{u,r}(z) \cap \tilde{\Theta}$. Seja $w_0 = h(z_0)$.

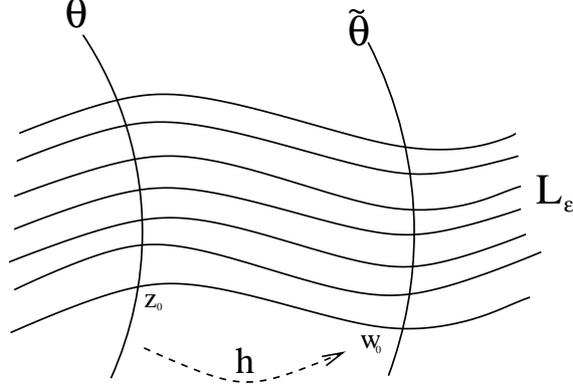


Figura 19: Construção da holonomia h .

Sem perda de generalidade, z_0 é um ponto de densidade de Lebesgue de $I \cap L_\varepsilon$ e, portanto, também é um ponto de acumulação do mesmo conjunto. Assim, faz sentido falar do jacobiano de h em z_0 , isto é,

$$Jh_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|h(z) - h(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (37)$$

Queremos mostrar que esse limite existe e é positivo.

Vamos trabalhar com h_n , a holonomia entre $T_1^{-n}\Theta$ e $T_1^{-n}\tilde{\Theta}$. Seja $z_{-n} = T_1^{-n}z_0$ e $w_{-n} = T_1^{-n}w_0$. Por (37)

$$Jh_{z_0} = J(T_1^{-n})_{z_0} J(h_n)_{z_{-n}} J(T_1^n)_{w_{-n}} = J(h_n)_{z_{-n}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{J(T_1^{-1})_{z_{-k}}}{J(T_1^{-1})_{w_{-k}}}. \quad (38)$$

Se u_{-k} e v_{-k} forem vetores unitários tangentes para $T_1^{-k}\Theta$ em z_{-k} e $T_1^{-k}\tilde{\Theta}$ em w_{-k} , respectivamente, então

$$J(T_1^{-1})_{z_{-k}} = |D(T_1^{-1})_{z_{-k}} u_{-k}| \quad \text{e} \quad J(T_1^{-1})_{w_{-k}} = |D(T_1^{-1})_{w_{-k}} v_{-k}|$$

são derivadas, uma vez que, por definição de A , $W^u(z_0)$ (que contém z_0 e w_0) pertence a $\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{R}_\infty^-$. Portanto, para todo k , uma certa vizinhança de $W^u(z_{-k})$ está contida em uma componente conexa de $\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{R}^-$, no qual T_1^{-1} é suave.

Temos que mostrar que o produto em (38) converge para um número finito e $\lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n)_{z_{-n}} = 1$, uma vez que $T_1^{-n}\Theta$ e $T_1^{-n}\tilde{\Theta}$ se aproximam quando n cresce. Mas este é um passo deveras complicado. Na verdade, mostraremos isso para aproximações do jacobiano

$$R(h_n)(z_{-n}, \tilde{z}_{-n}) = \frac{l(\text{arc}(w_{-n}, \tilde{w}_{-n}))}{l(\text{arc}(z_{-n}, \tilde{z}_{-n}))},$$

onde $\tilde{w}_{-n} = h_n(\tilde{z}_{-n})$ e $\text{arc}(z, \tilde{z})$ é o segmento de arco na pré-imagem apropriada de Θ e $\tilde{\Theta}$.

Observação 7.6. O jacobiano de h é dado por

$$Jh(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{l(h(B(z, r)))}{l(B(z, r))} \text{q.t.p.}$$

onde $B(z, r)$ é a bola aberta de centro z e raio r . Se h é um difeomorfismo de classe C^1 , então

$$Jh(z) = \left| \det \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) (z) \right|,$$

onde o membro direito indica o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana $\left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)$ no ponto z [8].

Fixemos $\tilde{z}_0 \in I \cap L_\varepsilon$ suficientemente perto de z_0 e consideremos o quadrilátero curvilíneo P formado pelos pontos z_0, \tilde{z}_0, w_0 e $\tilde{w}_0 = h(\tilde{z}_0)$. Seja λ a constante obtida no Teorema 6.1 e tomemos $\lambda_1 < \lambda$ e $C > 0$ tais que a bola $B(z_{-n}, Ce^{-\lambda_1 n})$ é boa, $\forall n \geq 0$ e $W^{u,r}(z_0)$ está estritamente contido em $B(z_0, C)$ (basta tomar ε_0, d_0 menores, se necessário). Seja, também, n o menor inteiro tal que $P_n = T_1^{-n}P$ não está contido em $B(z_{-n}, Ce^{-\lambda_1 n})$ (isto acontece porque $\mu(P_n)$ é constante em $n - T_1$ preserva μ - enquanto que $\mu(B(z_{-n}, Ce^{-\lambda_1 n}))$ tende a zero).

Uma vez que os pontos de P_n são bons, por construção, para qualquer $z \in I \cap L_\varepsilon$ $W^{u,r}(z)$ contrai a uma velocidade maior que $e^{-\lambda' n}$, para todo $\lambda' \in (\lambda_1, \lambda)$, conforme (31). Mas o diâmetro de P_n é maior que $Ce^{-\lambda_1 n}$, pela definição de P_n acima. Isto implica que P_n estica cada vez mais na direção estável. Além disso, os lados opostos formados por $z_{-n}\tilde{z}_{-n}$ e $w_{-n}\tilde{w}_{-n}$ terão aproximadamente o mesmo tamanho e, também, as curvas que os unem são quase paralelas uma vez que suas tangentes devem pertencer ao cone \mathcal{C}_n que, por sua vez, é estreito pra n grande, para pelo menos quase todo z_0 .

Isto prova que, quando $\tilde{z}_0 \rightarrow z_0$ (ou seja, $n \rightarrow \infty$), $R(h_n)(z_{-n}, \tilde{z}_{-n}) \rightarrow 1$. Agora temos que mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{R(T_1^{-1})(z_{-k}, \tilde{z}_{-k})}{R(T_1^{-1})(w_{-k}, \tilde{w}_{-k})} > 0. \quad (39)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, $R(T_1^{-1})(z_{-k}, \tilde{z}_{-k}) = J(T_1^{-1})_{\bar{z}_{-k}}$, para algum $\bar{z}_{-k} \in \text{arc}(z_{-k}, \tilde{z}_{-k})$. O mesmo vale para $R(T_1^{-1})(w_{-k}, \tilde{w}_{-k})$. Desse modo, obtemos uma condição suficiente para (39) com o seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\log J(T_1^{-1})_{\bar{z}_{-k}} - \log J(T_1^{-1})_{\bar{w}_{-k}}| < \infty.$$

Podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para cada termo acima obtendo

$$|\bar{w}_{-k} - \bar{z}_{-k}| \left| \frac{\partial}{\partial b_k} \log J(T_1^{-1})_{\tilde{z}_{-k}} \right|, \quad (40)$$

com \tilde{z}_{-k} no segmento entre \bar{z}_{-k} e \bar{w}_{-k} , e b_k sendo um vetor unitário na direção desse segmento.

Para $z \in \mathcal{M}_1$, seja $M(z)$ o número de rebatidas em \mathcal{D} (isto é, iterações de T , ou melhor, de T_2) antes da partícula retornar à \mathcal{M}_1 . Pelo Lema 7.2, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\{z \in \mathcal{M}_1; M(z) \geq C_1 k^{\theta_0}\} \subset \bigsqcup_{n=k}^{\infty} (\mathcal{M}^{r,n} \sqcup \mathcal{M}^{l,n}),$$

cujas medidas são da ordem de k^{-2} . A série acima converge e, portanto, podemos utilizar o argumento de Borel-Cantelli para garantirmos que, para qualquer z pertencente a um subconjunto de medida total de \mathcal{M}_1 (podemos supor contendo A) existe $C_2 = C_2(z)$ para o qual $M(z_{-k}) = M(T_1^{-k}z) \leq C_2 k^{\theta_0}$.

Para todo $w \in P_k$ (inclusive \tilde{z}_{-k}), o número de rebatidas em \mathcal{D} é o mesmo de z_{-k} . De fato, se $M(w) \neq M(z_{-k})$ então w e z_{-k} estão separados por uma curva de singularidade de \mathcal{R} , o que contradiz a construção de P_k . Assim $M(\tilde{z}_{-k}) \leq C_2 k^{\theta_0}$. Decompondo $D(T_1^{-1})$ no produto de diferenciais de T_2^{-1} , (40) se torna

$$|\bar{w}_{-k} - \bar{z}_{-k}| \left| \sum_{i=0}^{M(\tilde{z}_{-k})-1} \frac{\partial}{\partial b_k} \log J(T_2^{-1})_{\tilde{z}_{-k,i}} \right|,$$

com $\tilde{z}_{-k,i} = T_2^{-i} \tilde{z}_{-k}$, para $i = 0, 1, \dots, M(\tilde{z}_{-k}) - 1$. Desse modo, uma vez que $|\bar{w}_{-k} - \bar{z}_{-k}| \ll e^{\lambda^1 k}$ e o número de termos do somatório é uma potência de k , é suficiente mostrar que cada termo do somatório é limitado por uma potência de k .

Seja $b_{k,i} = D(T_2^{-i})_{\tilde{z}_{-k}} b_k / |D(T_2^{-i})_{\tilde{z}_{-k}} b_k|$. Observamos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial b_k} (\cdot) \right| \leq \frac{1}{\sin \tilde{\varphi}_{-k,i}} \left| \frac{\partial}{\partial b_{k,i}} (\cdot) \right|. \quad (41)$$

De fato, b_k está no cone instável de \tilde{z}_k (se não, basta ajustar a definição de \bar{w}_k para que este esteja em $W^{u,r}(\tilde{z}_k)$). Assim $\|D(T_2^{-i})_{\tilde{z}_{-k}} b_k\| \leq \|b_k\|$ e $|D(T_2^{-i})_{\tilde{z}_{-k}} b_k| \leq \frac{1}{\sin \tilde{\varphi}_{-k,i}} |b_k|$. Logo, podemos considerar derivadas direcionais de $\log J(T_2^{-i})$.

O seguinte lema nos será útil:

Lema 7.7. *Seja T uma transformação do bilhar associada a uma mesa Q com horizonte finito, isto é, $\tau(z) \leq \tau_M, \forall z$. Assuma que a curvatura $k(r)$ e sua derivada são limitadas superiormente por k_M e k'_M , respectivamente. Seja $JT_z = |DT_z v(z)|$ o jacobiano de T relativo ao campo direcional suave v contido no reticulado tangente unitário SM de \mathcal{M} . Então, para $b \in SM_z$, temos que*

$$\frac{\partial}{\partial b} \log JT_z \leq \frac{C}{\sin^2 \varphi \sin^4 \varphi_1},$$

onde C depende apenas de τ_M , k_M , k'_M e $|(\partial v/\partial b)(z)|$.

Demonstração do Lema 7.7. Ver [17] p. 177. □

Pela Observação 7.1, podemos considerar $D(T_2^{-i})$ como uma diferencial de uma transformação de bilhar regular. Portanto, podemos aplicar o Lema 7.7 à $\tilde{z}_{-k,i} = (\tilde{r}_{-k,i}, \tilde{\varphi}_{-k,i})$ e encontramos uma constante C_3 tal que

$$\left| \frac{\partial}{\partial b_{-k,i}} \log J(T_2^{-i})_{\tilde{z}_{-k,i}} \right| \leq \frac{C_3}{\sin^2 \tilde{\varphi}_{-k,i} \sin^4 \tilde{\varphi}_{-k,i+1}}, \quad (42)$$

levando em consideração que, quando $i = M(\tilde{z}_{-k}) - 1$, $\tilde{\varphi}_{-k,i+1}$ é a segunda coordenada de $T_2^{-1}\tilde{z}_{-k,i}$. Mas este ponto pertence a P_{k+1} e observamos que os próximos argumentos não são invalidados.

Observação 7.8. *Há duas questões a esclarecer para que possamos utilizar o Lema 7.7. Primeiro, o lema aplica-se a bilhares com horizonte finito. Mas suponhamos, por exemplo, que temos uma iteração de T_2 que corresponde a um segmento de trajetória indo de G_n a G_{n-1} (este é o caminho livre mais longo para um ponto em $\mathcal{M}^{l,n}$). Podemos sempre dividir este segmento em M_n segmentos com aproximadamente o mesmo comprimento, imaginando a mesma quantidade de paredes transparentes entre G_{n-1} e G_n . É fácil ver que este comprimento é menor que uma quantidade que depende apenas do formato da mesa.*

A segunda questão é controlar $(\partial u_{-k,i}/\partial b_{k,i})(\tilde{z}_{-k,i})$ uniformemente em k e i . Temos que $\tilde{z}_{-k,i}$ pertence a uma seqüência de conjuntos bons com respeito ao mesmo z_0 (mais precisamente, vizinhanças de $\{z_{-k,i}\}$). Com esta seqüência, tem-se algum tipo de hiperbolicidade uniforme. Portanto, para as (pré-)imagens do campo direcional (estável) \mathcal{V} , as iterações de Θ , $\tilde{\Theta} \in \mathcal{V}$ aproximam uniformemente da direção estável mais rápido do que se aproximam uma das outras (ver [23] 3.10-3.14).

De acordo com (41) e (42), resta mostrar que $q(\tilde{z}_{-k,i}) = 1/\sin \tilde{\varphi}_{-k,i}$ cresce como uma potência de k . De fato, para a subseqüência de $\{z_{-k,i}\}$ correspondente a retornos a \mathcal{M} , isto foi provado no Teorema 6.5, (f) e (h). Quanto aos retornos a \mathcal{M}_1 , usa-se os mesmos argumentos, uma vez que $\int_{\mathcal{M}_1} q \, d\mu < \infty$, também.

Apesar disso, isto não é suficiente para garantir que essa mesma propriedade vale para $\tilde{z}_{-k,i}$; este estando suficientemente próximo de $z_{-k,i}$, para ser bom através da órbita no passado de z_0 . Ou seja, não podemos utilizar o Teorema 6.5, (g), porque estamos lidando com iterações de T_2 e, embora a distância riemanniana entre $\tilde{z}_{-k,i}$ e $z_{-k,i}$ tende a zero exponencialmente, a distância instável pode ser infinita (isto é, para qualquer $\rho > 0$, $\tilde{z}_{-k,i}$ pertence à bola $B^u(z_{-k,i}, \rho)$).

Entretanto, uma vez que $\tilde{z}_{-k,i} \in P_{k,i} - T_2^{-i}P_k$, cujos lados encolhem exponencialmente em k , então, pelo menos para k grande, $\tilde{z}_{-k,i}$ deve pertencer ao triângulo curvilíneo $F_{k,i}$ definido por prolongamentos dos lados de $P_{k,i}$ que se interceptam em $z_{-k,i}$, nas direções estáveis e

instáveis, até que seus comprimentos sejam $d^s(z_{-k,i}, \partial\mathcal{M})/2$ e $d^u(z_{-k,i}, \partial\mathcal{M})/2$ (quantidades maiores que uma certa potência de k), e unindo os vértices originados por um segmento de reta.

Uma vez que $q(z)$ é uma função de uma variável, seu máximo em $F_{k,i}$ é atingido em um ponto pertencente a um dos lados curvilíneos. Então, uma aplicação dupla do Teorema 6.5, (g), para as bolas estável e instável, mostra que o valor de q sobre esses lados curvilíneos é comparável à $q(z_{-k,i})$. Mas este tem a exata taxa de crescimento, como mencionado acima. E assim, concluímos a prova do teorema. \square

Uma vez que T_2 é suave para quase todo ponto, a continuidade absoluta estabelecida para \mathcal{M}_1 é estendida para \mathcal{M} , concluindo o objetivo desta seção.

8 O Papel das Variedades Instáveis

Nesta seção trabalharemos com as variedades instáveis, que garantimos existirem para quase todo ponto em \mathcal{M} na Seção 6. Introduziremos a definição de variedade instável de tamanho ε (Definição 8.4), mostraremos que devido à existência de singularidades é preferível construir uma variedade instável pequena e expandi-la até interceptar o conjunto de singularidades (Teorema 8.6), definiremos o que são retângulos (Definição 8.8) e o que significa uma variedade instável ser conexa no retângulo (Definição 8.9), que formaliza a idéia de uma variedade ser "longa" o suficiente. Analogamente, tudo o que for feito para variedades instáveis vale para as variedades estáveis. Finalmente, provaremos que se a medida das variedades estáveis e instáveis conexas em um certo retângulo (e restritas a esse mesmo retângulo) for positiva, sua união pertence a uma componente ergódica (Proposição 8.12). As demonstrações dos lemas e proposições desta seção podem ser encontradas em [19] § 8-10.

Definição 8.1. *Um subconjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado **regular** se é uma união finita de pedaços Σ_i de subvariedades de codimensão 1, tal que:*

- (i) Σ_i é o fecho do seu interior (na topologia da subvariedade);
- (ii) Os pedaços sobrepõem-se no máximo em suas fronteiras, isto é, $\Sigma_i \cap \Sigma_j \subset \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$;
- (iii) $\partial\Sigma_i$ é uma união finita de suconjuntos compactos de subvariedades de codimensão 1.

*A é chamado **localmente regular** se, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança U de z tal que $A \cap U$ é regular.*

Vamos aqui enumerar as condições que nosso sistema dinâmico deve satisfazer para que os resultados apresentados no decorrer do texto sejam aplicáveis.

Condições:

(C1) **Espaço de Fase:** O espaço de fase \mathcal{M} é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^{2d} , com $\partial\mathcal{M}$ regular. \mathbb{R}^{2d} está dotado de uma forma simplética que assume-se equivalente a

padrão, isto é, o elemento de volume simplético $d\mu$ é assumido como absolutamente contínuo com respeito ao elemento de volume padrão $dLeb$, e vice-versa.

(C2) **Transformação:** A transformação T é inversível e recorrente, no sentido de Poincaré. Ela não está definida no conjunto de singularidades S^+ e T^{-1} não está definida em S^- . Em $\mathcal{M} \setminus S^+$, T preserva a forma simplética mencionada em (C1).

(C3) **Feixe de Cones:** Um feixe de cones $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}$ está definido onde a transformação está definida, é contínuo e invariante por T . Além disso, \mathcal{C} é estritamente invariante.

(C4) **Regularidade Local dos Conjuntos de Singularidades:** Denotando $S_n^\pm = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{\mp i} S^\pm$, suponhamos que S_n^+ e S_n^- são localmente regulares para todo n .

(C5) **Medida das vizinhanças tubulares:** Em S^- , existe uma medida finita π_- tal que para todo subconjunto fechado A de S^- (na topologia de S^-),

$$\mu(A_{[\varepsilon]}) \leq \pi_-(A)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

A medida π_- deve ser absolutamente contínua com respeito a medida μ induzida em S^- e a distância usual. Uma condição análoga vale para S^+ e a distância estável.

(C6) **Alinhamento correto dos conjuntos de singularidades:** O espaço tangente à S^+ em qualquer ponto $z \in S^+$ possui uma linha característica contida em $C^-(z)$.

(C7) **Propriedade de não-contração ao redor dos conjuntos de singularidades:** Para todo $z_0 \in \mathcal{M}$, existem U_0 vizinhança de z_0 , $\varepsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tal que, sempre que $w \in S_{[\varepsilon]}^-$ e $T^n w \in U_0$, $n > 0$, então

$$|DT_w^n v| \geq k|v|,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma riemanniana apropriada de um vetor em \mathbb{R}^2 . A condição análoga vale para o sistema dinâmico no passado.

Definição 8.2. Uma norma $\|\cdot\|$ é dita **crescente** se satisfaz as hipóteses (c) e (d) do Teorema 6.1, com $H = \emptyset$, e é localmente equivalente à norma riemanniana $|\cdot|$ de (C7).

(C8) **Sinai-Chernov Ansatz para a norma crescente:** Existe uma norma crescente $\|\cdot\|$ tal que para π_- -q.t. $z \in S^-$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{0 \neq v \in C_1(z)} \frac{\|DT_z^n v\|}{\|v\|} = \infty.$$

Relembramos que as provas omitidas nessa seção podem ser encontradas em [19], § 8-10.

Antes de prosseguirmos, faz-se necessária uma definição. Dadas uma transformação $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, um ponto $p \in \mathcal{M}$ e $N \geq 1$, dizemos que $D_p T^{-N}$ é **estritamente monótona** se ela satisfaz a condição de um cone ser estritamente invariante.

Construiremos um sistema de coordenadas conveniente em uma vizinhança de um ponto estritamente monótono $p \in \mathcal{M}$. Como monotonicidade estrita no passado e no futuro são

simétricas, vamos nos ater a apenas um dos casos. A saber, assumiremos que existe $N \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & T^{-N} \text{ é diferenciável em } p : p \notin S_N^- \cup \partial\mathcal{M}; \\ (ii) \quad & D_p T^{-N} \text{ é estritamente monótona.} \end{aligned} \tag{43}$$

Encontraremos uma vizinhança $\mathcal{U}(p)$ na qual existe uma grande quantidade de variedades estáveis e instáveis ‘longas’. Enfatizamos que assumimos apenas que p (e suas N pré-imagens) não pertencem a S^- mas pode muito bem pertencer a S^+ . Tal nível de generalidade é crucial para obtermos ergodicidade local também para pontos nos conjuntos de singularidades S^\pm .

Nossa primeira suposição sobre a vizinhança é que T^{-N} é um difeomorfismo de $\mathcal{U}(p)$ em uma vizinhança de $\bar{p} = T^{-N}p$. Além disso, reduzindo mais $\mathcal{U}(p)$, se necessário, podemos identificá-la com uma vizinhança \mathcal{U} do espaço linear simplético usual $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a = \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_a,$$

onde $\mathcal{V}_a = \{x = (x_1, \dots, x_d) \mid |x_i| < a, i = 1, \dots, d\}$.

No restante do texto, será mais útil definir novos setores no espaço tangente, como os seguintes: para qualquer positivo ρ ,

$$\mathcal{C}_\rho = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \|\eta\| \leq \rho\|\xi\|\},$$

e seu complementar

$$\mathcal{C}'_\rho = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \|\xi\| \leq \rho^{-1}\|\eta\|\}.$$

Pela hipótese (43) o cone $D_{\bar{p}}T^N\mathcal{C}(\bar{p})$ está estritamente contido no cone $\mathcal{C}(p)$. Fazemos uma mudança de coordenadas em \mathcal{U} de tal maneira que para algum $\tilde{\rho} < 1$

$$\mathcal{C}'(p) = \mathcal{C}'_{\tilde{\rho}^{-1}} \quad \text{e} \quad D_{\bar{p}}T^N\mathcal{C}(\bar{p}) \subset \mathcal{C}_{\tilde{\rho}}.$$

(Ver [19] §8 para mais detalhes sobre essa mudança de coordenadas.)

Tomamos $\rho, \tilde{\rho} < \rho < 1$. Pela continuidade do feixe de cones $\mathcal{C}(z)$, $z \in \mathcal{U}$ (condição (C3)), e da derivada $D_y T^N$, $y \in T^{-N}\mathcal{U}$, se reduzirmos o tamanho de \mathcal{U} apropriadamente, podemos obter que para qualquer $z \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{C}'(z) \subset \mathcal{C}'_{\rho^{-1}},$$

e para qualquer $y \in T^{-N}\mathcal{U}$

$$D_y T^N \mathcal{C}(y) \subset \mathcal{C}_\rho.$$

As propriedades acima parecem ser assimétricas no tempo, isto é, T atua diferentemente nelas de T^{-1} . Contudo podemos obter delas a próxima Proposição que é perfeitamente simétrica no tempo.

Dizemos que um ponto $z \in \mathcal{U}$ possui k **retornos espaçados** em um dado intervalo de tempo se existem k tempos $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ nos quais z visita \mathcal{U} e as visitas são espaçadas por pelo menos N , isto é, $i_j - i_{j+1} \geq N$, para $j = 1, \dots, k-1$.

Proposição 8.3. *Se T^n é diferenciável em $z \in \mathcal{U}$, para $n \geq N$ e $z_n = T^n z \in \mathcal{U}$, então $D_z T^n \mathcal{C}_{\rho^{-1}} \subset \mathcal{C}_\rho$ e $D_{z_n} T^{-n} \mathcal{C}'_\rho \subset \mathcal{C}'_{\rho^{-1}}$. Além disso, para $(\xi_n, \eta_n) = D_z T^n(\xi, \eta)$, se $(\xi, \eta) \in \mathcal{C}_\rho$ então $\|\xi_n\| \geq b\rho^{-k}\|\xi\|$ e se $(\xi_n, \eta_n) \in \mathcal{C}'_{\rho^{-1}}$ então $\|\eta\| \geq b\rho^{-k}\|\eta_n\|$, onde k é o número máximo de retornos espaçados de z no intervalo de tempo de N a n e $b = \sqrt{1 - \rho^4}$.*

Definição 8.4. *Dizemos que uma variedade instável em \mathcal{U} de um ponto $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{U}$ possui **tamanho** ε se ela contém o gráfico de uma transformação suave de $B(z_1, \varepsilon)$ para V . Essa variedade será denominada **variedade instável de tamanho** ε , $W_\varepsilon^u z$.*

Sejam π_1 e π_2 as projeções em relação a primeira e segunda coordenada, respectivamente. Por definição, $\pi_1(W_\varepsilon^u(z)) = B(\pi_1(z), \varepsilon)$.

Lema 8.5. $\pi_2(W_\varepsilon^u(z)) \subset B(\pi_2(z), \rho\varepsilon)$

Uma vez que nosso sistema apresenta singularidades, não temos tanta liberdade no tamanho das variedades instáveis locais. De fato, é preferível começar com uma variedade "pequena" e aumentá-la até um certo limite. Este é o papel do próximo Teorema.

Teorema 8.6. *Para cada $\delta > 0$, quase todo ponto $z \in \mathcal{U}_\delta^1 = \mathcal{U}_{a_1(\delta)}$ ($a_1(\delta) = a - b^{-1}\delta$, $b = \sqrt{1 - \rho^4}$), ou possui uma variedade instável de tamanho δ ou possui uma variedade instável de tamanho $\delta' < \delta$ tal que o fecho de $W_{\delta'}^u(z)$ intercepta $\bigcup_{j>n} T^j S^-$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(\varepsilon) \subset \mathcal{U}_\delta^1$ o conjunto dos pontos que possuem variedades instáveis de tamanho ε . Pelos resultados anteriores, quase todo ponto de \mathcal{U}_δ^1 pertence a $\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{A}(\varepsilon)$. Fixe $\mathcal{A}(\varepsilon)$ de medida positiva e seja k o menor natural tal que $b\rho^{-k}\varepsilon \geq \delta$.

Quase todo ponto em $\mathcal{A}(\varepsilon)$ possui k retornos espaçados à $\mathcal{A}(\varepsilon)$ no passado. Tome z um destes pontos e seja

$$-N \geq -i_1 > \dots > -i_k = -n$$

os k tempos de retornos espaçados deste ponto, isto é, $T^{-i_j} z \in \mathcal{A}(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, k$.

O mecanismo para aumentar as variedades instáveis consiste em tomar a variedade instável de tamanho ε de $T^{-n}z$ e mapeá-la para frente sobre a ação de T^n . A propriedade de expansão de T garante que a imagem contém a variedade instável de tamanho δ . Porém, T^n pode não ser contínua em $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$, ou seja, $W_\varepsilon^u(T^{-n}z) \cap S_n^+ \neq \emptyset$. Além disso, partes da imagem da variedade instável podem estar fora de \mathcal{U} , onde a propriedade de expansão pode falhar.

Inicialmente, suponhamos que T^n é diferenciável em $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ e que

$$T^{n-i_j} W_\varepsilon^u(T^{-n}z) \subset \mathcal{U}, j = 0, \dots, k. (i_0 = 0)$$

Prova-se que z possui uma variedade instável de tamanho δ . Com efeito, seja $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ o gráfico de $\psi : B(\pi_1(T^{-n}z), \varepsilon) \rightarrow V$ e tomemos a transformação $\phi : B(\pi_1(T^{-n}z), \varepsilon) \rightarrow V$, definida como

$$\phi(x) = \pi_1(T^n(x, \psi(x))).$$

Temos que $\|D\phi\xi\| = \|\xi_n\| \geq b\rho^{-k}\|\xi\|$, ou seja, ϕ é expansora, com coeficiente de expansão maior ou igual a $b\rho^{-k}$. Isto é suficiente para garantir que a imagem de $B(\pi_1(T^{-n}z), \varepsilon)$ por ϕ contém $B(\pi_1z, \delta)$. ϕ não é necessariamente injetiva. Mas, uma vez que ϕ é um difeomorfismo local, podemos definir ϕ^{-1} em $B(\pi_1z, \delta)$ como o ramo da inversa para o qual $\phi^{-1}(\pi_1z) = \pi_1(T^{-n}z)$. Portanto, $T^nW_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ contém o gráfico da transformação $\pi_2 \circ T^n \circ (id \times \psi) \circ \phi^{-1}$, que define $W_\delta^u(z)$.

Vamos agora trabalhar o caso geral. De acordo com as observações acima, devemos construir o subconjunto maximal de $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ no qual T^n é diferenciável e suas imagens pelos tempos de retorno à \mathcal{U} estão contidas em \mathcal{U} .

Consideremos \overline{W} a componente conexa de $W_\varepsilon^u(T^{-n}z) \setminus S_n^+$ que contém $T^{-n}z$. E mais, a componenete conexa de

$$\bigcap_{j=0}^k T^{i_j-n}(T^{n-i_j}\overline{W} \cap \mathcal{U})$$

que contém $T^{-n}z$ será denotada por W . Esta é a parte da variedade instável que possui as propriedades desejadas.

Considere a imagem T^nW e seja δ' o maior número positivo tal que $W_{\delta'}^u(z)$ está bem definido e contido em T^nW . Se $\delta' \geq \delta$, nada resta a demonstrar. Vamos supor que $\delta' < \delta$.

Da maximalidade de δ' , obtemos que a fronteira de $W_{\delta'}^u(z)$ deve conter um ponto da fronteira de T^nW . Seja \tilde{z} tal ponto. Se \tilde{z} pertence a $\cup_{i \geq N}^{n-1} T^i S^-$, acabou. Se não, T^{-n} é diferenciável em \tilde{z} e, assim, $T^{-n}\tilde{z}$ pertence a fronteira de W e não pertence a S_n^+ . Por construção, $T^{-n}\tilde{z}$ pertence a fronteira de $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ ou $T^{-i_j}\tilde{z}$ pertence a fronteira de \mathcal{U} , para algum $0 \leq j \leq k$.

Seja $W_{\delta'}^u(z)$ o gráfico de $\chi : B(\pi_1z, \delta') \rightarrow V$ e seja $\gamma_0 : [0, 1) \rightarrow B(\pi_1z, \delta')$ o segmento unindo π_1z e $\pi_1\tilde{z}$. Tomemos as pré-imagens da curva $\{(\gamma_0(t), \chi\gamma_0(t)); 0 \leq t < 1\} \subset W_{\delta'}^u(z)$ e obtemos $\gamma_j : [0, 1) \rightarrow V$, $j = 0, 1, \dots, k$ pela fórmula

$$\gamma_j(t) = \pi_1(T^{-i_j}(\gamma_0(t), \chi\gamma_0(t))).$$

Segue da Proposição 8.3 que o comprimento de γ_0 não é menor que o comprimento de γ_j vezes $b\rho^{-j}$. Se $T^{-n}\tilde{z}$ pertence a fronteira de $W_\varepsilon^u(T^{-n}z)$ então o comprimento de γ_k é de pelo menos ε e assim obtemos a contradição $\delta' \geq b\rho^{-k}\varepsilon \geq \delta$. Se $T^{-i_j}\tilde{z}$ pertence a fronteira de \mathcal{U} para algum $0 \leq j \leq k$, então γ_j deve ter comprimento de pelo menos $b\rho^{-j}$, que leve à contradição $\delta' \geq b\rho^{-j}b^{-1}\delta \geq \delta$. □

Definição 8.7. Dizemos que a variedade instável de tamanho δ , $W_\delta^u(z)$, é **cortada por** $T^i S^-$, $i \geq 0$, se sua fronteira contém um ponto de $T^i S^-$.

Fixemos um δ_0 suficientemente pequeno e tomemos $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_{\delta_0}^1$. Em \mathcal{U}^1 , pelo Teorema 8.6, quase todo ponto possui uma variedade instável (de tamanho δ_0) uniformemente grande ou uma variedade instável menor, cortada por alguma imagem do conjunto de singularidades S^- .

Definição 8.8. Um **retângulo** $R(z, \delta)$ com centro $z = (z_1, z_2)$ e tamanho δ é o produto cartesiano de bolas fechadas $R(z, \delta) = \overline{B}(z_1, \delta/2) \times \overline{B}(z_2, \delta/2)$.

Note que, para sistemas bidimensionais, as bolas fechadas definidas acima são na verdade intervalos fechados ocasionado que seus produtos cartesianos formam verdadeiro retângulos, daí o nome.

Definição 8.9. Dizemos que uma variedade instável de \tilde{z} de tamanho δ' , $W_{\delta'}^u(\tilde{z})$, é **conexa no retângulo** $R(z, \delta)$ se

$$\overline{B}(z_1, \delta/2) \subset B(\tilde{z}_1, \delta') \text{ e } \pi_2(W_{\delta'}^u(\tilde{z}) \cap R(z, \delta)) \subset B(z_2, \delta/2).$$

Poderíamos ter definido, de maneira equivalente, que uma variedade instável de z' de tamanho δ' , $W_{\delta'}^u(\tilde{z})$, é **conexa no retângulo** $R(z, \delta)$ quando a interseção de $W_{\delta'}^u(\tilde{z})$ com $R(z, \delta)$ é o gráfico de uma aplicação suave da bola fechada $\overline{B}(\pi_1(z), \delta/2)$ à bola aberta $B(\pi_2(z), \delta/2)$. Necessariamente, $\delta' \geq \delta/2$.

Definimos o **núcleo instável** de um retângulo $R(z, \delta)$, o subconjunto dos pontos $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ para os quais $\rho \|\tilde{z}_1 - z_1\| + \|\tilde{z}_2 - z_2\| < (1 - \rho)\delta/2$. A importância do núcleo instável de um retângulo pode ser visualizada no próximo lema:

Lema 8.10. Se uma variedade instável $W_{\delta'}^u(z')$ de tamanho $\delta' > \|\pi_1 z' - \pi_1 z\| + \delta/2$ intercepta o núcleo instável de um retângulo $R(z, \delta)$, então ela é conexa no retângulo.

Vemos, pelo Lema anterior que, uma variedade instável pode não ser conexa se ela interceptar o retângulo em pontos muito próximos da fronteira.

Lema 8.11. Se uma variedade estável e uma variedade instável são conexas no retângulo, então a interseção é constituída por um único ponto e este ponto pertence ao interior do retângulo.

Dado um retângulo R , seja $W^{u(s)}(R)$ a união das interseções com R de todas as variedades instáveis (estáveis) conexas no retângulo, isto é,

$$W^{u(s)}(R) = \bigcup \{R \cap W_{\delta'}^{u(s)}(\tilde{z}) \mid W_{\delta'}^{u(s)}(\tilde{z}) \text{ e' conexa em } R\}.$$

Proposição 8.12. Para cada retângulo $R \subset \mathcal{U}^1$, se os conjuntos $W^u(R)$ e $W^s(R)$ têm medida positiva então $W^u(R) \cup W^s(R)$ pertence a uma componente ergódica de T .

Demonstração. Seja ψ uma função contínua definida em nosso espaço de fase. Como esta é uma proposição local, podemos supor ψ com suporte compacto em R (e portanto, uniformemente contínua). Sejam

$$\psi^\pm(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^{\pm k}(z).$$

Afirmamos que ψ^+ é constante em todas as variedades estáveis e ψ^- é constante em todas as variedades instáveis. Vamos provar isto para ψ^+ e, analogamente, obteremos para ψ^- : Seja w pertencente a uma variedade estável local de $W^s(R)$, digamos, $W_\delta^s(z)$. Temos que

$$\begin{aligned} |\psi^+(w) - \psi^+(z)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k(w) - \psi \circ T^k(z) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\psi \circ T^k(w) - \psi \circ T^k(z)|. \end{aligned}$$

Como $w \in W_\delta^s(z)$, $|T^k(w) - T^k(z)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow 0$, e assim, $|\psi \circ T^k(w) - \psi \circ T^k(z)| \rightarrow 0$, pela continuidade uniforme de ψ . Portanto $\psi^+(w) = \psi^+(z)$, para todo $w \in W_\delta^s(z)$.

Chamamos \tilde{z} um **ponto típico** se $\psi^+(\tilde{z})$ e $\psi^-(\tilde{z})$ estão bem definidos e estes dois valores são iguais.

Queremos mostrar que ψ^+ e ψ^- são constantes para quase todo ponto em $W^u(R) \cup W^s(R)$. Antes, vamos tentar compreender o método que iremos utilizar. Suponhamos que as variedades estáveis e instáveis de $W^s(R)$ e $W^u(R)$, respectivamente, sejam paralelas. Pelo Teorema de Fubini, a menos de uma união de variedades instáveis de $W^u(R)$ de medida zero, quase todo ponto de uma variedade instável é típico. Fixemos uma dessas variedades. Novamente pelo Teorema de Fubini, as variedades estáveis de $W^s(R)$ devem interceptar nossa variedade instável fixa em pontos típicos, a menos de um conjunto de variedades estáveis de medida zero. Pela afirmação acima sobre o valor de ψ^+ e ψ^- em variedades estáveis e instáveis, respectivamente, concluímos que a média temporal de ψ é constante em quase todo $W^u(R)$. Usando ainda o Teorema de Fubini, obtemos que $W^u(R)$ e $W^s(R)$ se interceptam em um conjunto de medida positiva e, portanto, a média temporal é constante em todo $W^u(R) \cup W^s(R)$.

Porém, nossas variedades não são paralelas. Entretanto, o argumento acima ainda é válido. Basta substituímos as várias aplicações do Teorema de Fubini pela continuidade absoluta das folheações estáveis e instáveis, provada na seção 7.

Segue da continuidade absoluta das folheações em variedades instáveis que, exceto pela união de variedades instáveis de $W^u(R)$ de medida zero, quase todo ponto (com respeito ao volume riemanniano na variedade) em uma variedade instável de $W^u(R)$ tem médias temporais futuras e passadas iguais. Tomemos uma dessas variedades instáveis. Novamente pela propriedade de continuidade absoluta a união de variedades estáveis em $W^s(R)$ que interceptam a variedade instável escolhida em pontos onde as médias temporais passadas e futuras existem e são iguais difere de $W^s(R)$ por um conjunto de medida zero. Assim a média temporal de nossa função é constante em q.t.p. pertencente a $W^u(R)$. Finalmente, pela propriedade da continuidade absoluta, $W^u(R)$ e $W^s(R)$ se interceptam em um conjunto de medida positiva. Portanto a média temporal de nossa função é constante em q.t.p. pertencente a $W^u(R) \cup W^s(R)$.

Estamos prontos para terminar a demonstração da proposição. Seja A um subconjunto T -invariante e χ_A sua função característica. Tomemos $\{g_n\}_n$ uma seqüência de funções contínuas uniformemente limitadas tais que $g_n \rightarrow \chi_A$ em $L^1(\mathcal{M}, \mu)$. Se $\|\cdot\|_1$ denota a norma L^1 , temos que

$$\begin{aligned} \|g_n^+ - \chi_A^+\| &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (g_n \circ T^i - \chi_A \circ T^i) \right\| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=1}^N (g_n \circ T^i - \chi_A \circ T^i) \right\|, \end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. Assim,

$$\begin{aligned} \|g_n^+ - \chi_A^+\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=1}^N (g_n \circ T^i - \chi_A \circ T^i) \right\| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|(g_n \circ T^i - \chi_A \circ T^i)\| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|(g_n - \chi_A)\| = \|g_n - \chi_A\|, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade foi obtida pela invariância da medida e lembrando a definição de $\|\cdot\|_1$.

Como as médias temporais são constantes em quase todo $W^u(R) \cup W^s(R)$, a desigualdade acima nos diz que χ_A^+ é constante em quase todo $W^u(R) \cup W^s(R)$. Por outro lado, a invariância de A implica que $\chi_A^+ = \chi_A$. Unindo estes dois fatos, concluímos que ou $(W^u(R) \cup W^s(R)) \setminus A$ ou $(W^u(R) \cup W^s(R)) \cap A$ tem medida zero. Pela arbitrariedade de A , obtemos que $W^u(R) \cup W^s(R)$ pertence a uma componente ergódica. □

9 Teorema de Sinai

Nesta seção provaremos a adaptação do Teorema de Sinai (Teorema 9.1) para sistemas com medida infinita. Este teorema garante que a união dos retângulos de tamanho δ que não são atravessados por variedades estáveis e instáveis têm medida $o(\delta)$ (isto é, quando dividida por δ , tende a zero quando δ tende a zero). Provaremos apenas o caso instável, podendo ser feito de maneira análoga para o caso estável. A prova do Teorema de Sinai será feita a partir

de dois resultados. No primeiro provaremos que dado $M \geq N$, a união dos retângulos de tamanho δ que possuem variedades instáveis cortadas por $\bigcup_{i=N}^M T^i S^-$ têm medida $o(\delta)$ (este resultado - Proposição 9.3 - vale para sistemas com medida finita ou infinita). E no segundo mostraremos que, para um certo $z_0 \in \mathcal{M}$, existem uma vizinhança U de z_0 e um $M > 0$ tais que as variedades instáveis de tamanho δ de pontos da vizinhança U cortadas por $\bigcup_{i=M+1}^{\infty} T^i S^-$ têm medida $o(\delta)$. Este último resultado é chamado "Tail Bound Lemma" (Lema 9.4) e nele é realizado a adaptação para sistema com medida infinita. De fato, provaremos apenas este último resultado sendo que a prova da Proposição 9.3 pode ser encontrada em [19] § 12.

Consideremos \mathcal{U}_δ^2 definido de tal modo que um retângulo com centro em \mathcal{U}_δ^2 e tamanho δ esteja totalmente contido em \mathcal{U}^1 ($\mathcal{U}_\delta^2 = \mathcal{U}_{a_2(\delta)}$, $a_2(\delta) = a_1(\delta_0) - \delta/2$ - esta é a folga que necessitamos). Note que $\mathcal{U}_\delta^2 \rightarrow \mathcal{U}^1$ a medida que $\delta \rightarrow 0$.

Seja $\mathcal{N}(\delta, c)$ a rede definida por

$$\mathcal{N}(\delta, c) = \{c\delta(m, k) \in \mathcal{U}_\delta^2 \mid m, k \in \mathbb{Z}^d\},$$

e \mathcal{G}_δ a família de todos os retângulos com centro em $\mathcal{N}(\delta, c)$ e tamanho δ ,

$$\mathcal{G}_\delta = \{R(z, \delta) \mid z \in \mathcal{N}(\delta, c)\}.$$

Se δ é suficientemente pequeno, \mathcal{G}_δ é uma cobertura de \mathcal{U}_δ^2 e o valor de c será escolhido de tal maneira que uma grande quantidade de retângulos em \mathcal{G}_δ se sobrepõem. Mas, depois de fixado c , um ponto poderá pertencer a, no máximo, $\mathbf{k}(c)$ retângulos.

Os centros de dois retângulos em \mathcal{G}_δ serão **vizinhos próximos** se a distância entre eles for de $c\delta$.

Dado α , $0 < \alpha < 1$, um retângulo $R \in \mathcal{G}_\delta$ é **α -conexo na direção instável (estável)** (ou, simplificadamente, **conexo**) se pelo menos a α parte da medida do núcleo instável (estável) de R é coberta por $W^{u(s)}(R)$

Teorema 9.1 (Teorema de Sinai). *Se $\rho < 1/3$ então existe α , $0 < \alpha < 1$ tal que para todo c ,*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \mu\left(\bigcup \{R \in \mathcal{G}_\delta; R \text{ não é } \alpha\text{-conexo}\}\right) = 0,$$

isto é, a união de retângulos que não são α -conexos tanto na direção estável quanto na instável tem medida $o(\delta)$.

Dividiremos a demonstração deste teorema em dois resultados, aos quais nos ocuparemos até o final dessa seção.

Para cada y pertencente ao núcleo de um retângulo $R(z, \delta)$ há duas alternativas:

- (1) y possui uma variedade instável de tamanho $\delta' > \|\pi_1(y) - \pi_1(z)\| + \delta/2$ (que é conexa pelo Lema 8.10);
- (2) y possui uma variedade instável de tamanho $\delta' \leq \|\pi_1(y) - \pi_1(z)\| + \delta/2$ cortada por $\bigcup_{i \geq 0} T^i S^-$.

Se um retângulo $R(z, \delta)$ é desconexo, a segunda possibilidade deve ocorrer para pelo menos $1-\alpha$ parte de seu núcleo.

Para o que se segue, será conveniente apresentarmos uma nova definição. Para $M \geq N$

(2M) y possui uma variedade instável de tamanho $\delta' \leq \|\pi_1(y) - \pi_1(z)\| + \delta/2$ cortada por $\bigcup_{i=N}^M T^i S^-$.

Definição 9.2. *Dado $\alpha < 1/2$, um retângulo R de tamanho δ é **M-desconexo** se pelo menos $1 - 2\alpha$ parte da medida do núcleo instável de R é formado por pontos que satisfazem (2M).*

Proposição 9.3. *Para todo $\rho < 1/3$, existe α , $0 < \alpha < 1$ tal que, para todo $M \geq N$*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \mu\left(\bigcup \{R; R \text{ tem tamanho } \delta \text{ e é } M\text{-desconexo}\}\right) = 0.$$

Lema 9.4 ("Tail Bound Lemma"). *Para todo $z_0 \in \mathcal{M}$, existe uma vizinhança U de z_0 e um $\delta_0 > 0$ tais que, para todo $\eta > 0$, existe M que verifica*

$$\mu\left(\left\{z \in U; W^u(z) \text{ tem raio } < \delta \text{ e é cortada por } \bigcup_{i=M+1}^{\infty} T^i S^-\right\}\right) \leq \eta \delta_0,$$

para todo $\delta \leq \delta_0$.

Demonstração. Fixe $h > 0$. Como a medida π_- de (C5) é finita, existe $E_1 \subset S$, com $\pi_-(E_1) \leq h$ e $S^- \setminus E_1$ limitado. Pela condição (C4), podemos assumir que $S^- \setminus E_1$ é compacto e $\pi_-(\overline{E_1}) \leq h$.

Para uma transformação linear $L : TM_z \rightarrow TM_z$, que deixa \mathcal{C} invariante, defina

$$\sigma_*(L) = \inf_{0 \neq v \in \mathcal{C}} \frac{\|Lv\|}{|v|}.$$

Pela equivalência das normas e por (C8), temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_*(DT_z^n) = +\infty$, para π -q.t. $z \in S^-$.

Para todo $s > 0$ suficientemente grande, existe $M = M(h, s)$ tal que

$$E_2 = \{z \in S; \sigma_*(DT_z^n) \leq s + 1\}$$

tem medida $\pi_-(E_2) \leq h$.

Do conjunto de descontinuidades de T^M , que, pela condição (C6), possui medida μ (e, conseqüentemente medida π_-) zero, remova um aberto E_3 tal que $\pi_-(\overline{E_3}) \leq h$.

Seja

$$S^s = S^- \setminus \bigcup_{j=1}^3 = \{z \in S^- \setminus (E_1 \cup E_3); \sigma_*(DT_z^M) > s + 1\}.$$

$S^s \subset S^- \setminus (E_1 \cup E_3)$ é compacto, tem distância positiva de S_M^+ e a derivada de $z \mapsto \sigma_*(DT_z^M)$ é limitada superiormente em $S_{[c]}^s$, c suficientemente pequeno. Em $S_{[c]}^s$, $\sigma_*(DT_z^M) \geq s$.

Note que

$$\bigcup_{j=1}^3 E_j \subset \overline{E_1} \cup E_2 \cup \overline{E_3} = \overline{E_1} \cup (E_2 \setminus E_3) \cup \overline{E_3}$$

é fechado e $\pi_-(\bigcup_{j=1}^3 E_j) \leq 3h$.

Tome U_0, ε_0 como em (C7). Existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $w \in U_0$,

$$\|\cdot\|_w \leq C_1 |\cdot|_w,$$

pela equivalência das normas (como visto na demonstração do Teorema 6.1). Tome U vizinhança de z_0 tal que $U_{[C_1\delta_0]} \subseteq U_0$.

Para $z \in Y(\delta, M)$, seja $m(z)$ o menor $i \geq M + 1$ tal que $W^u(z)$ é cortado por $T^i S$, e seja

$$k(z) = \#\{i = 1, \dots, m(z) - M; T^{-i}z \in U\}.$$

Defina

$$Y_m^k = \{z \in Y(\delta, M); m(z) = m, k(z) = k\}.$$

Temos que $T^{-m}Y_m^k \cap T^{-m'}Y_{m'}^k = \emptyset$, para $m \neq m'$. Com efeito, suponhamos o contrário e que $m < m'$. Seja $w \in T^{-m}Y_m^k \cap T^{-m'}Y_{m'}^k$. Então, para $z = T^m w$ e $z_{m'} = T^{m'} w$, como $w \in U$ e $m' > m$, temos que $k(z_{m'}) > k(z)$, absurdo.

Para $k \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\mu \left(\bigcup_{m>M} Y_m^k \right) \leq \sum_{m>M} \mu(Y_m^k) = \sum_{m>M} \mu(T^{-m}Y_m^k) = \mu \left(\bigcup_{m>M} T^{-m}Y_m^k \right), \quad (44)$$

onde a primeira igualdade foi obtida pela invariância da medida μ .

Pela definição de norma crescente, existe $\rho < 1$ tal que, para todo $w \in U_0$ e $v \in \mathcal{C}(w)$,

$$\|DT_w^{-n}v\|_{T^{-n}w} \leq \rho^j \|v\|_w,$$

se j é o número de retornos a U_0 de $\{T^{-i}w\}_{i=1}^n$. O resultado acima é satisfeito uniformemente em $w \in U_0$. Com efeito, se supormos que U_0 permanece afastado de $\partial\mathcal{M}$, então, pelo Teorema 6.1(c), a quantidade de contração é limitada inferiormente por $\inf_{w \in U_0} k(w)^{-1} = \rho$. (Isto para vetores instáveis com relação à norma crescente).

Fixe $z \in Y_m^k$ ($k \in \mathbb{N}, M \geq M + 1$). Existe, como vimos na demonstração do Teorema 6.1, γ curva suave que liga z a $z_{m'} \in \partial W^u(z) \cap T^m S^-$ e tal que $l(\gamma) < \delta$. Assim

$$l_{\parallel}(T^{-n}\gamma) < C_1 \rho^k \delta, \quad (45)$$

sendo n o maior natural $i \leq m - M$ tal que $T^{-i}z \in U$. De fato, pela definição de U , como $T^{-i}z$ retorna a U k vezes, $T^{-i}\gamma$ retorna a U_0 k vezes.

Para $T^{-m}z_{m'}$, temos dois casos:

Caso 1: $T^{-m}z_{m'} \in \cup_{j=1}^3 E_j$:

Por (45), equivalência das normas e (C7), $l(T^{-m}\gamma) < \frac{C_2}{K}\rho^k\delta$.

Se $C_3 = C_2/K$

$$T^{-m}z \in T^{-m}\gamma \subset \left(\bigcup_{j=1}^3 E_j \right)_{[C_3\rho^k\delta]},$$

que possui medida μ menor ou igual a $6hC_3\rho^k\delta$.

Caso 2: $T^{-m}z_{m'} \in S^s$:

Então $l(T^{-m}\gamma) < \frac{C_1}{s}\rho^k\delta$ e assim

$$T^{-m}z \in S_{[C_1s^{-1}\rho^k\delta]}^s \subset S_{[C_1s^{-1}\rho^k\delta]},$$

que possui medida μ menor ou igual a $2\pi(S)C_1s^{-1}\rho^k\delta$.

Os dois casos acima e (44) implicam que

$$\mu\left(\bigcup T^{-m}Y_m^k\right) \leq [6hC_3 + 2\pi(S)s^{-1}C_1]\rho^k\delta.$$

E portanto

$$\begin{aligned} \mu(Y(\delta, M)) &= \mu\left(\bigcup_k \bigcup_{m>M} Y_m^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{m>M} Y_m^k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m>M} \mu(Y_m^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [6hC_3 + 2\pi(S)s^{-1}C_1]\rho^k\delta = \\ &= [6hC_3 + 2\pi(S)s^{-1}C_1]\delta \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = [6hC_3 + 2\pi(S)s^{-1}C_1] \frac{\delta}{1-\rho}, \end{aligned}$$

pois $\rho < 1$.

Dado $\eta > 0$, tomando h suficientemente pequeno e s suficientemente grande, conseguimos tornar o coeficiente de δ menor do que o valor de η . Isto nos diz quão grande $M = M(h, s)$ deve ser no enunciado do lema. □

10 Teorema de Ergodicidade Local

Nesta seção apresentamos a prova do Teorema de Ergodicidade Local (Teorema 10.4) que garante que se um sistema dinâmico satisfizer certas condições (que o nosso satisfaz) então quase todo ponto possui uma vizinhança pertencente a uma componente ergódica. Para a prova deste Teorema, utilizaremos o Teorema de Sinai (Teorema 9.1) e a Proposição 8.12. Em seguida provamos a ergodicidade global dos bilhares que satisfazem às hipóteses do Teorema 10.4 (Teorema 10.5).

Para cada subconjunto finito A , seja $|A|$ a cardinalidade de A .

Lema 10.1. *Seja $\{Y_a | a \in A\}$ uma família de subconjuntos mensuráveis de igual medida m no espaço mensurável (X, ν) , tal que nenhum ponto em X pertence a mais do que k elementos da família. Para cada subfamília finita $\{Y_a | a \in A_1\}$, $A_1 \subset A$, temos que*

$$\frac{m}{k}|A_1| \leq \nu\left(\bigcup_{a \in A_1} Y_a\right) \leq m|A_1|$$

Além disso, se para cada subconjunto mensurável $Y \subset X$ e um α , $0 < \alpha < 1$, $\nu(Y_a \cap Y) \geq \alpha \nu(Y_a)$, $a \in A_1$, então

$$\nu\left(\bigcup_{a \in A_1} Y_a \cap Y\right) \geq \frac{\alpha}{k} \nu\left(\bigcup_{a \in A_1} Y_a\right).$$

Demonstração. Uma vez que a família de subconjuntos é finita, temos que:

$$\nu\left(\bigcup_{a \in A_1} Y_a\right) \leq \sum_{a \in A_1} \mu(Y_a) = \sum_{a \in A_1} m = m|A_1|.$$

E, como cada ponto de X pertence a no máximo k elementos da família, obtemos, da análise combinatória,

$$\frac{m}{k}|A_1| \leq \nu\left(\bigcup_{a \in A_1} Y_a\right).$$

De substituição direta, segue o "além disso". □

Consideremos o reticulado \mathbb{Z}^d e suas partes finitas $L_n = L_n(d) = \{0, 1, \dots, n-1\}^d \subset \mathbb{Z}^d$. Seja $K \subset L_n(d)$ um subconjunto arbitrário, que chamaremos de **configuração**. Elementos de K são **sítios ocupados** e elementos de $L_n \setminus K$, **sítios vazios**.

Para uma configuração $K \subset L_n$ dada, consideremos o gráfico obtido unindo, por segmentos de reta, todos pares de sítios ocupados que são vizinhos próximos. Seja $gK \subset K$ a família de sítios na maior componente conexa do gráfico.

Lema 10.2. *Seja $K \subset L_n(d)$ uma configuração arbitrária. Se $\frac{|L_n \setminus K|}{n^{d-1}} < a < 1$ então*

$$\frac{|gK|}{n^d} \geq 1 - (d-1)a.$$

Demonstração. Prova por indução em d :

Se $d=1$, temos: $|L_n \setminus K| < a < 1 \Rightarrow |L_n \setminus K| = 0 \Rightarrow$ todos os sítios são ocupados $\Rightarrow |gK| \geq 1$.

Suponhamos o resultado válido para d e queremos mostrar que vale para $d+1$:

Inicialmente particionamos $L_n(d+1)$ como $L_n(d) \times \{i\}$, $i=0, \dots, n-1$ e chamaremos cada uma dessas partições **andares**. Escolhemos o andar com o menor número de sítios vazios. Por hipótese, $|L_n \setminus K| < an^d$, e como tomamos um dos n andares, este número não é maior que an^{d-1} para este específico andar. Assim, por hipótese de indução, temos que o gráfico conexo neste andar possui pelo menos $(1 - (d-1)a)n^d$ elementos.

Particionamos agora $L_n(d+1)$ em subconjuntos $\{z\} \times \{0, 1, \dots, n-1\}$, $z \in L_n(d)$, que chamaremos **colunas**. Uma coluna será um **elevador** se todos os seus elementos são sítios ocupados.

Temos que a quantidade de elevadores é de, pelo menos, $(1-a)n^d$. Com efeito, posicione todos os sítios vazios em cada andar de maneira que, em cada coluna haja apenas um sítio vazio. Como em cada andar há no máximo an^{d-1} desses, teremos um total de an^d colunas com pelo menos um sítio vazio, e portanto, $n^d - an^d = (1-a)n^d$ elevadores.

Assim, a quantidade de elevadores que interceptam o gráfico do andar considerado acima é de pelo menos $(1-da)n^d$. Adicionando esses elevadores ao gráfico original obtemos um novo gráfico conexo, com pelo menos $(1-da)n^{d+1}$ elementos. \square

A partir desse lema, obtemos diretamente a seguinte proposição:

Proposição 10.3. *Seja $K_n \subset L_n(d)$, $n=1, 2, \dots$ uma seqüência de configurações. Se $\frac{n|L_n \setminus K|}{L_n} \rightarrow 0$ então $\frac{|gK|}{L_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.*

Teorema 10.4 (Teorema de Ergodicidade Local). *Considere um sistema dinâmico (\mathcal{M}, T, μ) , dotado de uma estrutura hiperbólica. Suponha, além disso, que este sistema satisfaz (C1) – (C8). Então para todo z_0 que possua uma semi-órbita (isto é, $z_0 \in \mathcal{M} \setminus S_\infty^-$ ou $z_0 \in \mathcal{M} \setminus S_\infty^+$), existe uma vizinhança U de z_0 pertencente a uma componente ergódica de T .*

Demonstração. A idéia é provar que a vizinhança \mathcal{U}^1 , construída na seção 8, pertence a uma componente ergódica. Podemos tomar $\rho < 1/3$. Do Teorema de Sinai (Teorema 9.1) obtemos um $\alpha < 1$ que depende apenas de ρ e que pode ser muito pequeno se o valor de ρ for muito próximo de $1/3$.

Consideremos a rede $\mathcal{N}(\delta, c)$ e a cobertura \mathcal{G}_δ . Escolhemos c suficientemente pequeno, de modo que se os centros de dois retângulos são vizinhos próximos em $\mathcal{N}(\delta, c)$ então seus núcleos instáveis (e assim, os núcleos estáveis, também) sobrepõem-se em mais que $1-\alpha$ parte de suas medidas. Note que c não depende de δ .

Como conseqüência dessa escolha de c , se dois retângulos R_1 e R_2 com centros vizinhos próximos em $\mathcal{N}(\delta, c)$ são α -conexos na direção instável então $W^u(R_1)$ e $W^u(R_2)$ se interceptam em um subconjunto de medida positiva. Se, além disso, soubermos que $W^s(R_1)$ e

$W^s(R_2)$ têm medida positiva então, pela Proposição 8.12, $W^u(R_1) \cup W^u(R_2) \cup W^s(R_1) \cup W^s(R_2)$ pertence a uma componente ergódica.

Seja $K(\delta)$ a configuração na rede $\mathcal{N}(\delta, c)$ constituída pelos centros de todos os retângulos em \mathcal{G}_δ que são α -conexos tanto na direção estável quanto na instável; o gráfico obtido unindo, com segmentos de reta, todos os pares de vizinhos próximos em $K(\delta)$; e $gK(\delta)$ a coleção de vértices na maior componente conexa desse gráfico.

Por construção, o conjunto

$$Y(\delta) = \bigcup \{W^u(R(z, \delta)) \cup W^s(R(z, \delta)); z \in gK(\delta)\}$$

pertence a uma componente ergódica. Este conjunto cobre uma certa parte α' da medida dos retângulos com centros em $gK(\delta)$, ou seja,

$$\mu(R(z, \delta) \cap Y(\delta)) \geq \alpha' \mu(R(z, \delta)). \quad (46)$$

Resta mostrar que os pontos de $gK(\delta)$ alcançam todas as partes de \mathcal{U}^1 . Pelo Teorema de Sinai, a medida total coberta por retângulos que não são α -conexos é $o(\delta)$. Utilizando o Lema 10.1, temos que

$$\frac{\delta^{2d}}{k(c)} |\mathcal{N}(\delta, c) \setminus K(\delta)| = o(\delta).$$

Além disso, $(c\delta)^{2d} |\mathcal{N}(\delta, c)| = O(1)$. Assim

$$\frac{1}{c^{2d} k(c)} \frac{1}{\delta} \frac{|\mathcal{N}(\delta, c) \setminus K(\delta)|}{|\mathcal{N}(\delta, c)|} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Portanto, pela Proposição 10.3

$$\frac{|gK(\delta)|}{|\mathcal{N}(\delta, c)|} \rightarrow 1, \delta \rightarrow 0. \quad (47)$$

Estamos prestes a terminar a demonstração, por contradição. Tomemos E_1, E_2 conjuntos T -invariantes, ambos interceptando \mathcal{U}^1 em subconjuntos de medida positiva. Sejam p_1, p_2 pontos de densidade de Lebesgue para $E_1 \cap \mathcal{U}^1$ e $E_2 \cap \mathcal{U}^1$, respectivamente. Fixemos cubos C_1, C_2 com centros em P_1, p_2 tão pequenos que

$$\mu(C_i \cap E_i) \geq \left(1 - \frac{\alpha'}{2k(c)}\right) \mu(C_i) \quad (48)$$

(é possível pois p_1 e p_2 são pontos de densidade de Lebesgue).

Por (47)

$$\frac{|\mathcal{N}(\delta, c) \setminus gK(\delta) \cap C_i|}{|\mathcal{N}(\delta, c)|} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$

para $i = 1, 2$. Uma vez que

$$\frac{|\mathcal{N}(\delta, c)|}{|\mathcal{N}(\delta, c) \cap C_i|} = O(1),$$

concluimos que

$$\frac{|\mathcal{N}(\delta, c) \cap C_i \setminus gK(\delta)|}{|\mathcal{N}(\delta, c) \cap C_i|} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$

para $i = 1, 2$.

Obtemos que

$$\mu \left(\bigcup \{R(z, \delta); z \in gK(\delta) \cap C_i\} \triangle C_i \right) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \quad (49)$$

$i = 1, 2$.

Por (46) e o Lema 10.1,

$$\mu \left(\bigcup \{R(z, \delta); z \in gK(\delta) \cap C_i\} \cap Y(\delta) \right) \geq \frac{\alpha'}{k(c)} \mu \left(\bigcup \{R(z, \delta); z \in gK(\delta) \cap C_i\} \right), \quad (50)$$

$i = 1, 2$.

Utilizando (49) podemos afirmar que, a partir de (50),

$$\mu(C_i \cap Y(\delta)) \geq \frac{\alpha'}{k(c)} \mu(C_i).$$

Comparando com (48), concluimos que $Y(\delta)$ deve interceptar tanto E_1 quanto E_2 em subconjuntos de medida positiva. Mas isto contradiz o fato de $Y(\delta)$ pertencer a uma componente ergódica. \square

Como consequência do Teorema 10.4, obtemos a ergodicidade global do sistema:

Teorema 10.5. *Se os bilhares T apresentados na Seção 4 são localmente ergódicos, como no Teorema 10.4, então eles são ergódicos como na Definição 3.5.*

Demonstração. Note que os conjuntos S_∞^+ e S_∞^- são uniões enumeráveis de curvas suaves, crescentes e decrescentes, respectivamente. Assim, a interseção de cada par de curvas crescente/decrescente é constituída de no máximo um ponto, o que acarreta na existência de uma quantidade enumerável de pontos em $S_\infty^+ \cap S_\infty^+$ que não verificam o Teorema 10.4, isto é, não estão no interior de uma componente ergódica. Mas a remoção desses pontos ainda mantém \mathcal{M} conexa.

Mostremos que, sob essas condições, existe uma única componente ergódica. De fato, seja z_0 um ponto que satisfaça o Teorema 10.4. Logo existe uma vizinhança de z_0 pertencente a uma componente ergódica Λ_{z_0} . Têm-se que pelo menos um ponto z_1 da fronteira dessa vizinhança também satisfaz o Teorema 10.4 (caso contrário \mathcal{M} deixaria de ser conexa), obtendo uma componente ergódica Λ_{z_1} . Observamos que $\Lambda_{z_0} \cap \Lambda_{z_1} \neq \emptyset$. Assim temos que $\Lambda_{z_0} = \Lambda_{z_1}$. Como z_0 é arbitrário, mostramos que existe uma única componente ergódica e, portanto, o sistema é ergódico, concluindo a demonstração. \square

11 Prova da Afirmação A

Com base nos Teoremas 10.4 e 10.5, devemos mostrar que os bilhares obtidos a partir da classe de funções $f(x) = C(x+a)^{-p}$, $C, p, a > 0$, devem satisfazer as hipóteses do Teorema 10.4 para garantirmos que esses mesmos são ergódicos.

A existência de estrutura hiperbólica foi mostrada nas Seções 5, 6 e 7. Quanto às condições (C1)-(C8) apresentadas no início da Seção 8, as condições (C1) e (C2) foram mostradas na Seção 4; (C3) é garantido na Seção 5; (C5) foi obtido no Teorema 5.4 e seu Corolário 5.5; (C6) é trivialmente satisfeito em nosso caso.

Quanto à (C4), cada um dos conjuntos S^\pm é constituído por três curvas, duas das quais não são limitadas. Assim S_n^\pm é formado de um número finito de curvas suaves, das quais algumas deixarão de ser compactas apenas devido a suas não limitações. Assim a regularidade local é garantida.

Para (C8), a norma crescente é a obtida em (33), ou seja, $\|dr, d\varphi\|_{(r,\varphi)}^2 = \sin^2 \varphi dr^2 + d\varphi^2$. De (6) e (7) obtemos:

$$\begin{aligned} \|DT_z v\|^2 &= \sin^2 \varphi_1 dr_1^2 + d\varphi_1^2 \\ &\geq \min \left\{ \left(1 + \frac{k\tau}{\sin \varphi}\right)^2, \left(1 + \frac{k_1\tau}{\sin \varphi_1}\right)^2 \right\} \|v\|^2. \end{aligned}$$

De (H4) obtemos que $f'' > 0$ e portanto a curvatura de \mathcal{D} é positiva e é contínua devido a hipótese de diferenciabilidade de f . Logo $k\tau$ e $k_1\tau$ são limitados inferiormente quando o a partícula está suficientemente longe de V e da cúspide no infinito. Mas de acordo com a Proposição 4.2 para toda órbita isto acontece infinitas vezes e assim (C8) é garantido.

Resta mostrar a validade da condição (C7). Relembrando a definição de x_t , tomemos a reta tangente a ∂Q_4 em $(x_t, f(x_t))$ e denote por $-x_u = -x_u(x) < 0$ a abscissa do ponto de interseção da reta tangente com ∂Q_4 no segundo quadrante (ver Figura 20).

As fuções do tipo $f(x) = C(x+a)^{-p}$ satisfazem a

$$|f'(x_u)| \ll |f'(x)|. \quad (51)$$

Sejam r_T um número suficientemente grande determinado a posteriori e

$$\mathcal{M}_T = \{(r, \varphi) \in \mathcal{M} ; r < r_T\} = (0, r_T) \times (0, \pi)$$

os elementos relativos a Q_T , um certo bilhar truncado cuja cópia de quatro folhas $Q_{4,T}$ está mostrada na Figura 20. Devido ao formato de S^- , existe ε_0 tão pequeno tal que $S_{[\varepsilon_0]}^- \cap \mathcal{M}_T$ permanece longe de $\varphi = 0$.

Portanto para $w \in S_{[\varepsilon_0]}^- \cap \mathcal{M}_T$ e v vetor instável com base em w temos

$$|DT_w^n v| \geq \min \left\{ 1, \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} \right\} |v| \geq C_1 |v|,$$

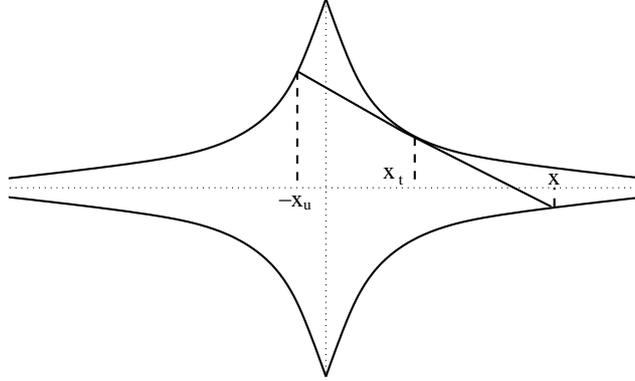


Figura 20: A definição de x_u .

onde $w = (r, \varphi)$ e $(r_n, \varphi_n) = w_n = T^n w$ (o vetor $DT_w v$ foi obtido no início da Seção 5; para $DT_w^n v$ basta utilizar o mesmo processo recursivamente).

Falta considerar o caso em que $w \in S_{[\varepsilon_0]}^- \setminus \mathcal{M}_T$. Tomemos $w \in F_T$, um conjunto definido como se segue (ver Figura 21): $F_T \subset M \setminus \mathcal{M}_T$ e $F_T \supset S_{[\varepsilon_0]}^- \setminus \mathcal{M}_T$. A parte mais a esquerda de ∂F_T pertence ao segmento $r = r_T$.

Na Seção 6 vimos que S^{2-} e as fronteiras superior e inferior de $S_{[\varepsilon_0]}^{2-}$ são gráficos de funções que se comportam assintoticamente como $|f'(x)|$. O mesmo vale par S^{1-} . Assim é possível tomar as fronteiras inferior e superior de F_T como gráficos de duas funções h_j ($j = 1, 2$) tais que

$$h_j(x) = K_j |f'(x)|. \quad (52)$$

Em K_2 adicionaremos mais algumas restrições a fim de que o gráfico de h_2 esteja acima de $S_{[\varepsilon_0]}^{2-}$. Seja também G_T a região à direita de $r = r_T$ e abaixo do gráfico de h_1 .

Assumimos que r_T é grande o suficiente para que $z \in \mathcal{M}_T$ e tomamos U_0 estritamente contido em \mathcal{M}_T . Além disso, sem perda de generalidade, r_T é tão grande que todo $w \in F_T$ aponta à direita com pouca deflexão quando tomado como um vetor com base em \mathcal{D} .

Fixemos um w como acima e chamemos m o número de colisões que a trajetória correspondente faz na parte de Q_4 que está à direita do bilhar truncado $Q_{4,T}$. Assim w_m é a última colisão antes que a partícula atravesse o eixo y ou atinja a porção dispersiva de $\partial Q_{4,T}$ (ou ambos). A Figura 22 exhibe exemplos para w_m assim como de w' que é o vetor velocidade logo após a colisão em r .

Lema 11.1. *Considere o segmento finito de trajetória $\{z_0 = z, z_1 = Tz, z_2 = T^2 z\}$ de uma transformação do bilhar T . Então, na primeira ordem em dz , e a menos de um sinal menos, dz_2 é dada por uma diferencial simples de uma transformação do bilhar, com parâmetros dinâmicos:*

$$\text{Caminho livre: } \hat{\tau} = \tau_0 + \tau_1 + 2 \frac{k_1}{\sin \varphi_1} \tau_0 \tau_1;$$

Curvatura no ponto inicial z_0 : $\hat{k}_0 = k_0 + 2 \sin \varphi_0 \frac{k_1 - \tau_1}{\hat{\tau}}$;

Curvatura no ponto final z_2 : $\hat{k}_2 = k_2 + 2 \sin \varphi_2 \frac{k_1 - \tau_0}{\hat{\tau}}$.

Ou seja, $DT_{z_1}DT_{z_0} = -M$, onde $M(\hat{\tau}, \hat{\varphi}_0, \hat{k}_0, \hat{\varphi}_2, \hat{k}_2)$ é novamente uma diferencial do tipo de (2). Se tomamos os mesmos ângulos inicial e final como para o verdadeiro segmento da trajetória, $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0$, $\hat{\varphi}_2 = \varphi_2$, então os outros três parâmetros são fixados como acima.

Demonstração. Ver [17] pp. 178-179. □

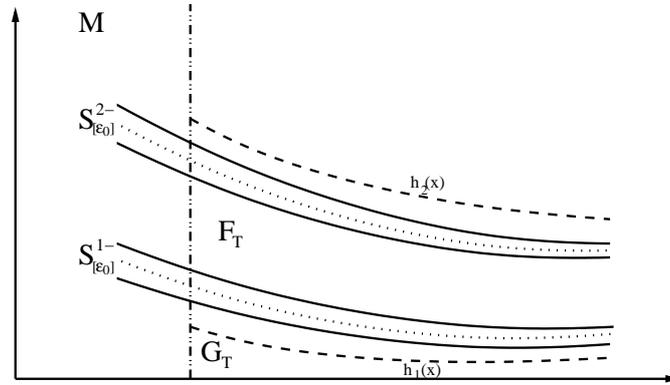


Figura 21: A definição de F_T e G_T .

Seja $\{w_i\}_{i=0}^m$ uma porção finita da órbita. Utilizando o Lema 11.1 juntamente com (6) obtemos que

$$(dr_{m+1})^2 \geq \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{m+1}} \right)^2 \left(1 + \frac{k}{\sin \varphi} \left(\sum_{i=0}^m \tau_i \right) \right)^2 dr^2,$$

e este resultado diz que a quantidade de expansão horizontal só decresce se é tomado colisões com as partes retas da fronteira.

Consideremos $\{w_i\}_{i=0}^m$ e tomemos $v \in \mathcal{C}_1(w)$ e seja $\bar{\tau} = \sum_{i=0}^m \tau_i$. A partir da estimativa do parágrafo anterior, obtemos que

$$\frac{|DT_w^{m+1}v|}{|v|} \geq C_2 \left(\frac{\sin \varphi + k\bar{\tau}}{\sin \varphi_{m+1}} \right), \quad (53)$$

para algum $C_2 \in (0, 1)$. De fato, se $v = (dr, d\varphi)$ pertence a $\mathcal{C}_1(w)$ então $|dr| \geq C_2|v|$ porque $\mathcal{C}_1(w)$ se torna mais fino e horizontal à medida que w permanece em F_T e se move para a direita, conforme (8).

Resta-nos analisar três casos referentes a w_{m+1} : $w_{m+1} \in F_T$, $w_{m+1} \in G_T$ ou $w_{m+1} \in \mathcal{M}_T$.

Caso 1: $w_{m+1} \in F_T$. Ou seja, w_m atravessa o bilhar truncado atinge a porção do segundo ou do terceiro quadrante de ∂Q com ângulo de incidência não tão perto de zero. Por exemplo, o vetor B da Figura 22.

Afirmamos que o lado direito de (53) pode ser tomado maior que 1 se r_T for selecionado suficientemente grande, ou seja,

$$|DT_w^{m+1}v| > v. \quad (54)$$

Como $w \in F_T$ e $h_j(x) = K_j|f'(x)|$, $j = 1, 2$, temos que $\sin \varphi \geq |f'(x)|$.

Agora devemos estabelecer uma estimativa para $\sin \varphi_{m+1}$, que será obtida a partir do pior caso, que está exemplificado pelo vetor A na Figura 22. Assim,

$$\sin \varphi_{m+1} \sim |f'(x_t)| + |f'(x_u)| \ll |f'(x)|,$$

conforme (16), (H2) e (51).

Analogamente a (13), temos que, utilizando a equivalência $r \leftrightarrow x$,

$$k(r) \sim f''(x).$$

Logo

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{m+1}} \left(1 + \frac{k\tau}{\sin \varphi} \right) \geq C_3 + C_4 \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \bar{\tau}.$$

Devido à classe de funções que estamos estudando, $f''(x)/|f'(x)| = \text{constante}/x$. Assim o resultado seguirá a partir do próximo Lema:

Lema 11.2. *Para as funções do tipo $f(x) = C(x+a)^{-p}$ e r_T fixo temos*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \min_{(r(x), \varphi) \in F_T} \frac{\bar{\tau}(x, \varphi)}{x} = +\infty.$$

Demonstração. Ver [17] pp. 175-176. □

Caso 2: $w_{m+1} \in G_T$

A estimativa do Caso 1 serve com folga para esta possibilidade de w_{m+1} uma vez que $\sin \varphi_{m+1}$ é menor neste caso. Mas queremos evitar que a colisão no terceiro quadrante seja com ângulo próximo de zero, como o vetor C na Figura 22. Com isso, trabalharemos com w_{m+2} ao invés de w_{m+1}

Primeiramente mostremos que $w_{m+2} \in F_T$. Temos que $|f'(x_{m+1})| \ll |f'(x_{m+2})|$. De fato, $|f'(x_{m+1})|/|f'(x_{m+2})|$ é máximo quando $x_{m+1} = x_t(x_{m+2})$. Temos também que

$$\varphi_{m+2} = \varphi_{m+1} + \arctan |f'(x_{m+1})| + \arctan |f'(x_{m+2})|.$$

Temos que $\varphi_{m+1} \leq K_1|f'(x_{m+1})|$ e escolhendo K_2 suficientemente grande, $\varphi_{m+2} \leq K_2|f'(x_{m+2})|$ e $w_{m+2} \in F_T$.

Além disso, $\sin \varphi_{m+2} \ll |f'(x_{m+2})| < |f'(x)|$ (pois $x > x_{m+2}$). Dessa maneira, utilizando (53) com $m + 2$ no lugar de $m + 1$ e as desigualdades obtidas acima, temos:

$$\frac{|DT_w^{m+2}v|}{|v|} \geq C_2 \left(\frac{\sin \varphi + k\tau}{\sin \varphi_{m+2}} \right) \geq C_3 + C_4 \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \bar{r},$$

como no Caso 1, e o resultado segue.

Fizemos uma distinção entre o Caso 1 e o Caso 2 porque se estabelecessemos w' como sendo w_{m+1} ou w_{m+2} , dependendo do Caso 1 ou 2, então $w' \in F_T$. Então é possível considerar os três casos anteriores para w' também, e assim, sucessivamente. Em particular, enquanto a trajetória estiver oscilando entre a cúspide esquerda e direita sem colidir no interior de $Q_{4,T}$,

$$|DT_w^{m_j+1}v| > |v|, \quad (55)$$

onde os valores m_j são os análogos a m ou $m + 1$, nos retornos futuros aos "passeios" na cúspide.

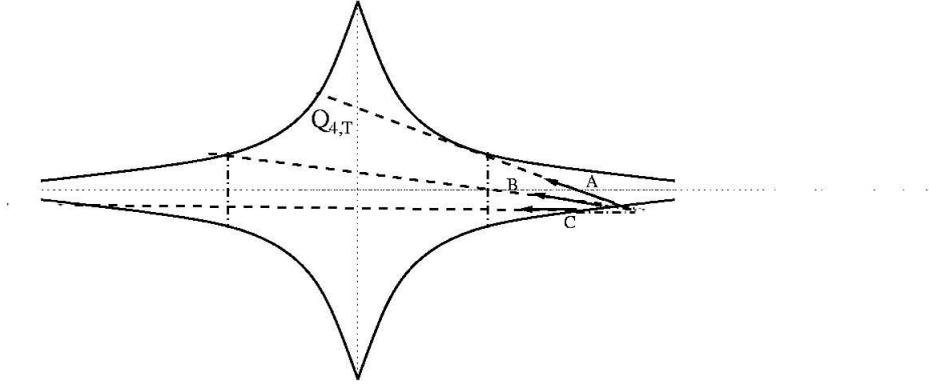


Figura 22: Dado w' , o vetor velocidade de uma trajetória viajando em direção a cúspide e retornando, apresentamos exemplos possibilidades para w_m , a última colisão na região á direita de $Q_{4,T}$. Essas possibilidades são escolhidas de um mesmo raio dispersivo, isto é, possuem um mesmo foco.

Caso 3: $w_{m+1} \in \mathcal{M}_T$.

A estimativa em (54) vale neste caso também afinal de contas essa estimativa foi obtida considerando o vetor A da Figura 22 que também é a pior possibilidade para o caso em que $w_{m+1} \in \mathcal{M}_T$.

Por motivos que ficarão claros mais tarde, também gostaríamos de garantir que

$$\sin \varphi_{m+1} \geq C_5, \quad (56)$$

para algum $C_5 = C_5(r_T)$. Isto não é verdade em geral, como mostra a Figura 22. Podemos ter $w_M \notin \mathcal{M}_T$ e $\sin \varphi_{m+1}$ arbitrariamente perto de zero. Se este é o caso podemos ajustar as

coisas na próxima colisão adaptando as idéias já utilizadas. Escolhendo C_5 suficientemente pequeno, se $\sin \varphi_{m+1} < C_5$, então w_{m+1} está posicionado na parte do primeiro quadrante de $\partial Q_{4,T}$ (atingindo a fronteira do segundo ou do terceiro quadrante implicaria em $\varphi_{m+1} > \arctan |f'(x_T)| = M$). Além disso, a próxima colisão ocorrerá no segundo quadrante, com ângulo de incidência φ_{m+2} maior que, por exemplo, M .

Finalmente notamos que decidindo escolher a próxima colisão implica que $|DT_w^{m+2}v| > |v|$, uma vez que $\sin \varphi_{m+2}$ é menor do que $\sin \varphi_{m+1}$ poderia ser, já que w_m sendo tangente. De qualquer maneira, estamos em boas situações.

Verificamos agora a condição (C7). Se, para algum $n > 0$, w_n pertence a U_0 (e assim a \mathcal{M}_T), existe um inteiro positivo l tal que $w_{m_l+1} \in \mathcal{M}_T$. Excluindo o caso em que deveríamos considerar w_{m+2} , que não mudaria muito a situação, como vimos, podemos aplicar (55) e (56) para $m = m_l$ e obter

$$\frac{|DT_w^n v|}{|v|} = \frac{|DT_w^{m_l+1} v|}{|v|} \frac{|DT_w^n v|}{|DT_w^{m_l+1} v|} > \min \left\{ 1, \frac{\sin \varphi_{m_l+1}}{\sin \varphi_n} \right\} \geq C_5,$$

que estabelece a propriedade de não-contração.

Referências

- [1] Bunimovich, L. A., Sinai, Ya. G.. *On a fundamental theorem in the theory of dispersing billiards*. Math. USSR Sbornik, **19**(3):407–423, 1973.
- [2] Bunimovich, L. A.. *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., **65**(3):295–312, 1979.
- [3] Chernov, N.. *On local ergodicity in hyperbolic systems with singularities*. Funct. Anal. Appl., **27**(1):51–54, 1993.
- [4] Chernov, N., Markarian, R.. *Introduction to the Theory of Chaotic Billiards*. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [5] Chow, Y. S., Teicher, H.. *Probability Theory: Independence, Interchangeability and Martingales*. 3rd edition, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [6] Degli Esposti, M., Del Magno, G., Lenci, M.. *An infinite step billiard*. Nonlinearity, **11**(4):991–1013, 1998.
- [7] Degli Esposti, M., Del Magno, G., Lenci, M.. *Escape orbits and ergodicity in infinite step billiards*. Nonlinearity, **13**(4):1275–1292, 2000.
- [8] Fernandez, P. J.. *Medida e Integração*. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

- [9] Gallavotti, G., Ornstein, D. S.. *Billiards and Bernoulli schemes*. Commun. Math. Phys., **38**:83–101, 1974.
- [10] Gal’perin, G. A.. *On systems of locally interacting and repelling particles moving in space* Trans. Moscow Math. Soc., **43**:159–214, 1981.
- [11] Katok, A., Strelcyn, J.-M.(in collaboration with F. Ledrappier and F.Przytycki). *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*. LNM, 1222, Springer-Verlag, 1986.
- [12] King, J. L.. *Billiards inside a cusp*. Math. Intelligencer, **17**(1):8–16, 1995.
- [13] Krámli, A., Simányi, N., Szász, D.. *A transversal fundamental theorem for semi-dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., **129**(3):535–560, 1990.
- [14] Krylov, N. S.. *The processes of relaxation of statistical systems and the criterion of mechanical instability*. Thesi, Moscow, 1942; Republished in English by Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [15] Lazutkin, V. F.. *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*. Math. USSR Izvestija, **7**(1):185–214, 1973.
- [16] Lenci, M.. *Escape orbits for non-compact flat billiards*. Chaos, **6**(3):428–431, 1996.
- [17] Lenci, M.. *Semi-dispersing billiards with an infinite cusp I*. Commun. Math. Phys., **230**:133–180, 2002.
- [18] Leontovich, A. M.. *The existence of unbounded oscillating trajectories in a problem of billiards*. Soviet Math. Dokl., **3**(4):1049–1052, 1962.
- [19] Liverani, C., Wojtkowski, M.. *Ergodicity in Hamiltonian systems*. <http://arxiv.org/abs/math.DS/9210229>.
- [20] Markarian, R.. *Billiards with pesin region of measure one*. Commun. Math. Phys., **118**(1):87–97, 1988.
- [21] Mañé, R.. *Teoria Ergódica*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [22] Pesin, Ya. B.. *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. Russ. Math. Surveys, **32**(4):55–114, 1977.
- [23] Pugh, C., Shub, M.. *Ergodic Attractors*. Trans. Am. Math. Soc., **312**(1):1–54, 1989.
- [24] Rudin, W.. *Real and Complex Analysis*. WCB/McGraw-Hill, 1987.

- [25] Sinai, Ya. G.. *On the foundation of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*. Soviet Math. Dokl, **4**:1818–1822, 1963.
- [26] Sinai, Ya. G.. *Dynamical systems with elastic reflections*. Russ. Math. Surveys, **25**:137–189, 1970.
- [27] Sinai, Ya. G.. *Introduction to Ergodic Theory*. Princeton University Press, 1976.
- [28] Sinai, Ya. G., Chernov, N. I.. *Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three- dimensional balls*. Russ. Math. Surveys, **42**(3):181–207, 1987.
- [29] Wojtkowski, M.. *Invariant families of cones and Lyapunov exponents*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., **5**:145–161, 1985.
- [30] Wojtkowski, M.. *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents*. Commun. Math. Phys., **105**:391–414, 1986.