Universidade Federal do Rio de Janeiro

Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente

Caio Guimarães Souza

Rio de Janeiro

Junho de 2010

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente

Caio Guimarães Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Gregorio Malajovich.

Rio de Janeiro
Junho de 2010

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente

Caio Guimarães Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____

Presidente, Prof. Gregorio Malajovich

____

Prof. Flávio Dickstein

____

Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

____

Prof. Rolci Cipolatti

Rio de Janeiro
Junho de 2010

S728 Souza, Caio Guimarães.
Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente./Caio Guimarães Souza. - Rio de Janeiro : UFRJ/IM, 2010.
viii, 39f.; 30cm..
Orientador: Gregório Malajovich.
Dissertação (mestrado) - UFRJ/IM. Programa de pós graduação em Matemática, 2010.
Referências: f.39.

1.Análise numérica - Tese . 2. Métodos iterativos (Matemática)I.Malajovich, Gregório.
II.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática. III. Título.

À minha mãe, Heloísa, por ser a melhor mãe do mundo, a pessoa que eu mais amo e admiro, o meu porto seguro.

Agradecimentos

Aos meus pais, Heloísa e Carlos Eduardo, por todo amor, carinho, apoio e dedicação.

À minha piquininha, minha namorada Isadora, por me fazer acreditar em almas gêmeas apesar de saber que elas não existem.

À minha vovozinha, por ser essa mãe^2 que eu tanto amo e por puxar o saco do neto que gosta de estudar.

À minha tia Míriam, por ter sido sempre como uma mãe para mim e por ter nos ajudado, eu e minha mãe, incondicionalmente no momento que mais precisamos.

Ao meu orientador, Gregorio Malajovich, pela ótima orientação, paciência, boas conversas e cafés nos intervalos.

Ao Braga (pelo menos aqui ele merece ser chamado assim), por todo o auxílio matemático e pela amizade, com a qual sei que sempre poderei contar.

À minha família e amigos, por serem parte essencial da minha vida (sem citar nomes para não ser extenso e omisso).

Ao membros da banca examinadora, por avaliarem o meu trabalho.

À Walcy Santos, pelo ótimo curso de Geometria Diferencial e por toda a ajuda extraclasse.

A todos os demais professores, por me orientarem no meu processo de aprendizado.

A todos os funcionários, por fazerem parte do meu dia-a-dia.

E, finalmente, à moça da quentinha, por ter me alimentado nesses últimos dois anos.

Caio Guimarães Souza
Junho de 2010

"LOUCO, adj. Afetado por um alto grau de independência intelectual"

The devil's dictionary
página 189

Resumo

Estimativas sobre a convergência da iteração de Graeffe tangente

Caio Guimarães Souza

Resumo da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Resumo: A iteração de Graeffe era o algoritmo mais popular para aproximar as raízes de um polinômio no século dezenove e no início do século vinte. Em [5], Malajovich e Zubelli propuseram uma variação desse método, chamada iteração de Graeffe tangente, adequada para a aritmética de ponto flutuante IEEE de computadores digitais. Após N iterações, o erro do algoritmo proposto é função da separação das raízes do polinômio de entrada, cujo valor, desconhecido, não é estimado em [5]. Nesta dissertação, expomos a teoria desenvolvida em [5] e, adicionalmente, provemos meios de estimar-se a separação das raízes de certas classes de polinômios.

Palavras–chave. Iteração de Graeffe, método de Graeffe, iteração de Graeffe tangente, zeros de um polinômio, algoritmo para aproximar as raízes de um polinômio, estimativa da separação das raízes.

Rio de Janeiro
Junho de 2010

Abstract

Estimates of the convergence of the tangent Graeffe iteration

Caio Guimarães Souza

Abstract da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abstract: Graeffe iteration was the most popular algorithm to approximate the roots of a polynomial in the nineteenth and early twentieth centuries. In [5], Malajovich and Zubelli proposed a variation of this method, called tangent Graeffe iteration, suitable for IEEE floating-point arithmetic on digital computers. After N iterations, the error of the proposed algorithm depends on the separation ratio of the roots, whose value, unknown, is not estimated in [5]. In this dissertation, we expose the theory developed in [5] and, further, we provide means to estimate the separation ratio of the roots for some classes of polynomials.

Keywords. Graeffe's iteration, Graeffe's method, tangent Graeffe iteration, polynomial zeros, algorithm to approximate the roots of a polynomial, estimate of the separation ratio of the roots.

Rio de Janeiro
Junho de 2010

Sumário

1 Introdução **5**
1.1 Os resultados principais 5
1.2 O método de Graeffe 7
1.3 As limitações do método de Graeffe 9

2 Renormalizando Graeffe **11**
2.1 A iteração de Graeffe renormalizada 11
2.2 O diagrama de Newton renormalizado 13
2.3 O diagrama de Newton limite e os índices principais de um polinômio 20

3 Computando os índices principais de um polinômio **23**
3.1 O algoritmo 23
3.2 Estimativas a respeito dos coeficientes de um polinômio 24
3.3 Um critério de decisão 27
3.4 Prova da proposição 3.1 29

4 A iteração de Graeffe tangente **31**
4.1 Preliminares 31
4.2 A iteração 32
4.3 Recuperando os argumentos das raízes 32
4.4 Prova dos lemas 4.3 e 4.4 34
4.5 O algoritmo de Graeffe tangente 38

5 Estimativas sobre o erro de aproximação do algoritmo de Graeffe tangente **43**
5.1 Estimativas da separação das raízes 43
5.2 Estimativas dos módulos das raízes 49

Prefácio

O método de Graeffe é um procedimento para estimar as raízes de um polinômio que foi inventado independentemente por Karl Heinrich Graeffe, Germinal Pierre Dandelin e Nikolai Ivanovich Lobatchevsky [2]. Introduzimo-lo na seção 1.2.

O método gozou de grande popularidade no século 19 e na maior parte do século 20, mas não recebeu muita atenção desde então [8]. Um algoritmo que, baseando-se no método, permite resolver o problema para um polinômio qualquer eficientemente foi proposto apenas no artigo "Tangent Graeffe iteration" [5] de Malajovich e Zubelli. Apresentamos, na seção 1.3, os principais obstáculos que existiam antes das inovações promovidas pelos autores do artigo mencionado.

Nos capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação, estudaremos a teoria desenvolvida em [5], que corrobora o algoritmo proposto pelos autores, ao qual nos referiremos como o algoritmo de Graeffe tangente. O algoritmo de Graeffe tangente se baseia na convergência da iteração de Graeffe tangente, a qual gera valores aproximados para as raízes de um polinômio. Resultados numéricos obtidos a partir de sua implementação são apresentados nesse artigo, mas não serão mostrados aqui.

A velocidade de convergência da iteração de Graeffe tangente depende de parâmetros inerentes ao polinômio de entrada cujos valores não são conhecidos, a saber, dos módulos das raízes e da separação das raízes. Por essa razão, não podemos, dada uma margem de erro, estabelecer um número de iterações do algoritmo de Graeffe tangente que seja suficiente para aproximar as raízes de um polinômio a menos que saibamos estimar tais parâmetros.

Ostrowski desenvolve em [6] e [7] uma vasta análise de propriedades de raízes de polinômios e, mais geralmente, de séries de Laurent. Muitos dos resultados presentes nesse trabalho possibilitam estimar os parâmetros em questão.

Em "Tangent Graeffe iteration", enuncia-se sem prova um teorema de Ostrowski que pode ser usado para fazer estimativas *a priori* e *a posteriori* dos módulos das raízes. Esse é o teorema 2.14 deste trabalho, o qual demonstraremos integralmente. Adicionalmente, apresentaremos um outro resultado (corolário 5.7) que possibilita aproximar os módulos das raízes desde que uma estimativa da separação das raízes seja conhecida.

Por outro lado, com o fim de prover um meio de fazer estimativas *a priori* e *a posteriori* da separação das raízes para certa classe de polinômios, apresentaremos um resultado obtido por Malajovich em [3]. Enunciaremos e demonstraremos, ainda, um teorema de [7], do qual extrairemos um corolário que tornará possível a realização de tais estimativas em outra classe de polinômios. No caso de um polinômio pertencer à interseção dessas classes, exemplificaremos na seção 1.1 que a estimativa do corolário obtido nesta dissertação é mais fina.

Os méritos desta dissertação residem, então, sobretudo no seguinte: a velocidade de convergência da iteração de Graeffe tangente, que em [5] era função de um parâmetro desconhecido, passa a poder ser estimada numericamente para certas classes de polinômios através da análise desenvolvida neste trabalho. Os ingredientes principais de tal análise são resultados de [6], de [7], de [3] e do próprio [5].

Capítulo 1

Introdução

Apresentaremos, aqui, os resultados principais desta dissertação e exporemos o método de Graeffe, o qual embasará a teoria a ser desenvolvida.

1.1 Os resultados principais

Seja

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d} f_j x^j = f_0 + f_1 x + \cdots + f_d x^d$$

um polinômio real ou complexo de grau d e sejam $\zeta_1 \neq 0, \ldots, \zeta_d \neq 0$ as suas raízes.

Definição 1.1.

$$\rho := \min_{|\zeta_{j+1}| > |\zeta_j|} \frac{|\zeta_{j+1}|}{|\zeta_j|}$$

é dita a separação das raízes de f. Se $|\zeta_1| = \cdots = |\zeta_d|$ convencionamos $\rho = \infty$, de modo que $\rho^{-1} = 0$.

Vamos apresentar nesta dissertação um algoritmo (algoritmo 7, seção 4.5), ao qual nos referiremos como o algoritmo de Graeffe tangente, para estimar as raízes de polinômios reais e complexos, o qual foi proposto originalmente em [5]. Serão requeridos polinômios livres de círculos e sem raízes nulas como entrada:

Definição 1.2. Um polinômio real p é dito livre de círculos se para quaisquer ζ, ξ raízes distintas de p, temos $|\zeta| \neq |\xi|$ ou $\zeta = \bar{\xi}$.

Definição 1.3. Um polinômio complexo p é dito livre de círculos se para quaisquer ζ, ξ raízes distintas de p, temos $|\zeta| \neq |\xi|$.

Proposição 1.4. *Dado um polinômio f com raízes não nulas, temos que*

$$\hat{f}(x) := (x \sin\theta + \cos\theta)^d f\left(\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta + \cos\theta}\right)$$

é polinômio livre de círculos para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ a menos de um número finito de valores.

Demonstração. Sejam $\zeta_1 = a_1 + ib_1$, $\zeta_2 = a_2 + ib_2$ duas raízes de f. Logo, as raízes x_i de $\hat{f}$ correspondentes a ζ_i, $i = 1, 2$, são tais que

$$\zeta_i = \frac{x_i \cos\theta - \sin\theta}{x_i \sin\theta + \cos\theta}$$

o que pode ser expresso como

$$x_i = \frac{\zeta_i \cos\theta + \sin\theta}{-\zeta_i \sin\theta + \cos\theta},$$

já que $\zeta_1, \zeta_2 \neq 0$. Daí, $|x_1| = |x_2|$ se, e somente se,

$$\frac{|(a_1\cos\theta + \sin\theta) + i(b_1\cos\theta)|}{|(-a_1\sin\theta + \cos\theta) + i(-b_1\sin\theta)|} = \frac{|(a_2\cos\theta + \sin\theta) + i(b_2\cos\theta)|}{|(-a_2\sin\theta + \cos\theta) + i(-b_2\sin\theta)|}$$

o que é equivalente a

$$\frac{(a_1\cos\theta + \sin\theta)^2 + b_1^2\cos^2\theta}{(a_1\sin\theta - \cos\theta)^2 + b_1^2\sin^2\theta} = \frac{(a_2\cos\theta + \sin\theta)^2 + b_2^2\cos^2\theta}{(a_2\sin\theta - \cos\theta)^2 + b_2^2\sin^2\theta}. \tag{1.1}$$

Desenvolvendo essa expressão para $|\zeta_1| \neq |\zeta_2|$, obteríamos uma equação polinomial de grau 4 em $\cos\theta$, o que nos daria no máximo 8 valores de θ para os quais teríamos $|x_1| = |x_2|$.

Por outro lado, supondo que $|\zeta_1| = |\zeta_2|$, isto é, $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$, a equação (1.1) é equivalente a

$$(2a_1\sin\theta\cos\theta - 2a_2\sin\theta\cos\theta)(|\zeta_1| + 1) = 0,$$

equação que é válida se, e somente se, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ou $a_1 = a_2$.

Logo, duas raízes distintas não conjugadas de f correspondem a raízes de mesmo módulo de $\hat{f}$ apenas para um número finito de valores de θ. Como a probabilidade de um polinômio complexo possuir duas raízes conjugadas é nula, isso conclui a demonstração.

□

A proposição acima mostra que tal restrição da entrada não implica perda de generalidade do algoritmo. De fato, dado um polinômio arbitrário, podemos reduzí-lo a um polinômio sem raízes nulas (guardando a informação sobre tais raízes) e aplicar a transformação da proposição 1.4 para θ aleatório, de maneira a obter uma entrada válida para o algoritmo; uma vez calculadas aproximações das raízes para o polinômio modificado, recuperamos facilmente estimativas para as raízes do polinômio original.

Podemos supor, então, sem perda de generalidade, que f é livre de círculos.

Se contadas com multiplicidade, as raízes $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ de um polinômio livre de círculos f podem ser ordenadas de sorte que:

$$\begin{cases} |\zeta_1| \leq \cdots \leq |\zeta_d| \\ \text{Para } f \text{ real, se } |\zeta_j| = |\zeta_{j+1}| \text{ então } \zeta_j = \bar{\zeta}_{j+1}. \\ \text{Para } f \text{ real, se } j = 1 \text{ ou } |\zeta_{j-1}| < |\zeta_j| \text{ então } \operatorname{Im}\zeta_j \geq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Seja $1 < \tilde{\rho} \leq \rho$ uma estimativa de ρ. Se assumirmos que todas as operações aritméticas são realizadas de maneira exata, as propriedades matemáticas do algoritmo de Graeffe tangente são resumidas pelo teorema seguinte.

Teorema 1.5. *Seja f um polinômio, real ou complexo, livre de círculos e sem raízes nulas de grau d, cujas raízes $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ são ordenadas como em (1.2). Então, a N-ésima iteração do algoritmo de Graeffe tangente (algoritmo 7) produz $\zeta_1^{(N)}, \ldots, \zeta_d^{(N)} \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\lim_{N\to\infty} \zeta_j^{(N)} = \zeta_j \qquad j = 1, \ldots, d.$$

O tempo de execução de cada iteração é $O(d^2)$ operações aritméticas exatas. Se

$$N > 3 + \log_2 \frac{d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}},$$

o erro da aproximação das raízes é menor que $2^{-2^N C}$, onde C é um parâmetro que depende das estimativas dos módulos e da estimativa da separação das raízes de f.

Demonstração. Veja a seção 4.5.

□

Para estimar o quão perto estamos do valores verdadeiros das raízes numa dada iteração do algoritmo de Graeffe tangente, é suficiente estimar o parâmetro C do teorema acima. Podemos aproximar os módulos das raízes através do teorema 2.14, o qual estava presente em [5], e do corolário 5.7. Entretanto, tal artigo não apresenta meios de se estimar a separação das raízes.

Conforme veremos no capítulo 5, o corolário 5.4 desta dissertação permite estimar a separação das raízes de um certo conjunto de polinômios, o qual contém o conjunto de todos os polinômios cujas raízes têm módulos diferentes. Veremos, ainda, um resultado de Malajovich [3], o teorema 5.6, que possibilita realizar estimativas da separação das raízes de polinômios com coeficientes inteiros.

O exemplo seguinte mostra que, quando podemos aplicar tanto o corolário 5.4 quanto o teorema 5.6, a estimativa dada pelo corolário é mais fina:

Exemplo 1.6. Seja

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0,$$

cujas raízes são $2 \pm \sqrt{3}$ e cuja separação das raízes é

$$\rho = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \simeq 13.93.$$

Usando o teorema 5.6 de Malajovich, estimamos

$$\rho > 1 + (8 \times 4)^{-2\times 2} > 1.000976.$$

Por outro lado, utilizando o corolário 5.4 deste trabalho, obtemos (ver exemplo 5.5)

$$\rho > 3.342,$$

o que é uma estimativa muito superior à obtida com o teorema 5.6.

1.2 O método de Graeffe

Como em 1.1, seja

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} f_j x^j$$

um polinômio de grau d cuja separação das raízes é ρ e sejam $\zeta_1 \neq 0, \ldots, \zeta_d \neq 0$ as suas raízes, as quais ordenamos de modo que

$$|\zeta_1| \leq \cdots \leq |\zeta_d|.$$

Assumiremos daqui por diante, sem perda de generalidade, que f é mônico. Para o restante deste capítulo, f não precisa ser necessariamente livre de círculos.

Vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema 1.7 (Fórmulas de Viète). *Dado f como acima e definindo*

$$\sigma_k (x_1, \ldots, x_d) := \sum_{j_1 < \cdots < j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$$

temos que

$$\begin{aligned} f_0 &= (-1)^d \sigma_d(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (-1)^d \zeta_1 \dots \zeta_d \\ f_1 &= (-1)^{d-1} \sigma_{d-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) \\ &\vdots \\ f_j &= (-1)^{d-j} \sigma_{d-j}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) \\ &\vdots \\ f_d &= \sigma_0(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = 1. \end{aligned}$$

Definição 1.8. Os *índices principais de f* são os elementos de

$$\{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\},$$

os quais denotaremos por $i_1 < \dots < i_l$. Se $\{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} = \emptyset$ convencionamos $l = 0$.

A escolha desse termo para referir-se aos elementos do conjunto em questão é motivada no fim da seção 2.3.

Se $k \in \{1, \dots, l\}$ temos que

$$\begin{aligned} f_{i_k} &= (-1)^{d-i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_{d-i_k}} \zeta_{j_1} \dots \zeta_{j_{d-i_k}} \\ &= (-1)^{d-i_k} \left(\zeta_{i_k+1} \dots \zeta_d + \sum\nolimits' \zeta_{j_1} \dots \zeta_{j_{d-i_k}} \right), \end{aligned}$$

onde $\sum'$ é o somatório sobre todos os $j_1 < \dots < j_{d-i_k}$ exceto o caso $j_1 = i_k + 1, j_2 = i_k + 2, \dots, j_{d-i_k} = d$. Logo,

$$\begin{aligned} f_{i_k} &= (-1)^{d-i_k} \zeta_{i_k+1} \dots \zeta_d \left(1 + \sum\nolimits' \frac{\zeta_{j_1}}{\zeta_{i_k+1}} \dots \frac{\zeta_{j_{d-i_k}}}{\zeta_d} \right) \\ &= (-1)^{d-i_k} \zeta_{i_k+1} \dots \zeta_d (1 + \delta), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |\delta| &\le \sum\nolimits' \left| \frac{\zeta_{j_1}}{\zeta_{i_k+1}} \right| \dots \left| \frac{\zeta_{j_{d-i_k}}}{\zeta_d} \right| \\ &\le \sum\nolimits' \rho^{-1} = \rho^{-1} \left(\binom{d}{d-i_k} - 1 \right). \end{aligned}$$

Portanto, supondo ρ "grande" podemos aproximar:

$$|f_{i_k}| \simeq |\zeta_{i_k+1}| \dots |\zeta_d|.$$

Fazendo $i_0 := 0$ e $i_{l+1} := d$ temos $i_0 < i_1 < \dots < i_{l+1}$, $f_{i_0} = (-1)^d \zeta_1 \dots \zeta_d$ e $f_{i_{l+1}} = 1$.

Dentro da hipótese anterior sobre ρ, dado $j \in \{1, \dots, d\}$ e tomando $k \in \{0, \dots, l\}$ tal que $i_k < j \le i_{k+1}$, concluímos que

$$\left| \frac{f_{i_k}}{f_{i_{k+1}}} \right| \simeq |\zeta_j|^{i_{k+1} - i_k}. \tag{1.3}$$

Essa equação nos fornece uma maneira de estimar os módulos das raízes de um polinômio que tenha ρ "grande" desde que sejam conhecidos os seus índices principais.

Um procedimento de determinação dos índices principais de um polinômio é exposto no capítulo 3. Para aproximarmos os módulos das raízes de um polinômio qualquer é suficiente, portanto, que contornemos a suposição a respeito de ρ na equação (1.3). Isso é feito através da introdução do seguinte conceito:

Definição 1.9. A iterada de Graeffe de $f(x)$ é o polinômio de grau d

$$Gf(x) := (-1)^d f(\sqrt{x}) f(-\sqrt{x}).$$

As raízes de Gf são ${\zeta_1}^2, \ldots, {\zeta_d}^2$. De fato:

$$\begin{aligned} Gf(x) &= (-1)^d \left(\sqrt{x} - \zeta_1\right) \left(-\sqrt{x} - \zeta_1\right) \ldots \left(\sqrt{x} - \zeta_d\right) \left(-\sqrt{x} - \zeta_d\right) \\ &= \left(\sqrt{x} + \zeta_1\right) \left(\sqrt{x} - \zeta_1\right) \ldots \left(\sqrt{x} + \zeta_d\right) \left(\sqrt{x} - \zeta_d\right) \\ &= \left(x - {\zeta_1}^2\right) \ldots \left(x - {\zeta_d}^2\right). \end{aligned}$$

Concluímos por indução que se

$$g^{(N)}(x) := G^N f(x)$$

é a N-ésima iterada de Graeffe de f, então as raízes de $g^{(N)}$ são

$${\zeta_1}^{2^N}, \ldots, {\zeta_d}^{2^N}.$$

Isso implica que a separação das raízes de $g^{(N)}$ é ρ^{2^N} e que os índices principais de $g^{(N)}$ são os mesmos que os de f.

Usaremos daqui pra frente a convenção $g^{(0)} = f$.

Como $\rho > 1$, fato que segue diretamente de sua definição, podemos escolher uma iterada de Graeffe que tenha a separação de raízes tão grande quanto desejarmos. De fato, dado $M > 0$, se tomarmos um número natural $N_0 \geq \log_2 \frac{\ln M}{\ln \rho}$ então

$$\rho^{2^{N_0}} \geq \rho^{2^{\log_2 \frac{\ln M}{\ln \rho}}} = \rho^{\frac{\ln M}{\ln \rho}} = \left(\rho^{\frac{1}{\ln \rho}}\right)^{\ln M} = e^{\ln M} = M,$$

donde a N_0-ésima iterada de Graeffe de f tem a separação das raízes maior que M.

Deduzimos, seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, que

$$g_{i_k}^{(N)} = (-1)^{d - i_k} {\zeta_{i_k+1}}^{2^N} \ldots {\zeta_d}^{2^N} (1 + \delta) \tag{1.4}$$

onde

$$|\delta| \leq \rho^{-2^N} \left(\binom{d}{d - i_k} - 1 \right).$$

Então, se ρ é "grande", podemos aproximar

$$\left| \frac{g_{i_k}^{(N)}}{g_{i_{k+1}}^{(N)}} \right|^{2^{-N}} \simeq |\zeta_i|^{i_{k+1} - i_k}. \tag{1.5}$$

Como $\lim_{N\to\infty} \rho^{2^N} = 0$ concluímos finalmente que

$$\lim_{N\to\infty} \left| \frac{g_{i_k}^{(N)}}{g_{i_{k+1}}^{(N)}} \right|^{2^{-N}} = |\zeta_i|^{i_{k+1} - i_k}. \tag{1.6}$$

Essa é a fórmula fundamental do método de Graeffe. Na seção 3.2, apresentaremos, por motivo a ser visto, a equação (1.6) sob uma outra forma, e estimaremos o seu erro de truncamento.

1.3 As limitações do método de Graeffe

O fato de retornar apenas o módulo das raízes é uma das duas grandes fraquezas do método de Graeffe. Como vemos no exemplo abaixo, a informação a respeito do argumento das raízes é perdida e, por conseguinte, deve ser recuperada por outros meios.

Exemplo 1.10. Considere os polinômios $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $p(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x^2 + 1$. Depois de duas iterações de Graeffe, os três polinômios são levados em $f(x)$.

O mérito de Graeffe perante aos predecessores Dandelin e Lobatchevsky reside sobretudo em ele ter desenvolvido métodos práticos para a determinação dos argumentos da raízes. No entanto, além dos procedimentos serem diferentes para diversos casos particulares, eles não englobam o caso mais geral possível. Por exemplo, não seria possível calcular os argumentos das raízes de um polinômio que tivesse duas raízes de mesmo módulo.

Depois de Graeffe, muitos algoritmos foram propostos para recuperar os valores completos das raízes: veja [8]. O algoritmo desenvolvido em [5] será exposto no capítulo 4 desta dissertação. O fato, o qual pode ser verificado no trabalho [9] de Wilkinson, que as iteradas de Graeffe podem levar polinômios bem condicionados em polinômio mal condicionados não afetará o algoritmo em questão.

A outra grande fraqueza da iteração de Graeffe clássica relaciona-se à representação digital das iteradas. Como seus coeficientes crescem duplamente exponencialmente com o número de iterações, um overflow do expoente do sistema de ponto flutuante ocorre, em geral, após poucas iterações, o que limita a precisão obtida no cálculo dos módulos das raízes:

Exemplo 1.11. Se

$$f(x) = (x - 1)(x - 1.01)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

então $g^{(N)}(x)$ tem raízes $1, 1.01^{2^N}, 2^{2^N}, 3^{2^N}, 4^{2^N}$ e $|g_0^{(N)}| \geq 24^{2^N}$. Se $N = 8$, então o cálculo de $g_0^{(8)} \simeq 1.68 \times 2^{1173}$ causaria um overflow, já que o sistema numérico de ponto flutuante IEEE de precisão dupla, utilizado na maioria dos computadores modernos, não pode conter números de ponto flutuante maiores que 2^{1024} [1]. Por outro lado, mostraremos que 8 iterações de Graeffe não são suficientes para calcular o módulo da primeira raiz (isto é, 1) de f com um precisão de 10^{-4}. De fato, usando a estimativa (1.5) para $N = 8$,

$$\begin{aligned} \left|\zeta_1^{2^8}\right| \simeq \left|\frac{g_0^{(8)}}{g_1^{(8)}}\right| &= \frac{1.01^{2^8} 24^{2^8}}{(1^{2^8} + 1.01^{2^8}) 24^{2^8}} \\ &= \frac{1}{1 + 1.01^{-2^8}} \\ &\simeq 0.927, \end{aligned}$$

donde $|\zeta_1| \simeq 1 - 2.9 \times 10^{-4}$. O erro obtido é, portanto, maior que 10^{-4}.

A teoria dos capítulos 2, 3 e 4 será desenvolvida no sentido de superar as restrições e limitações aqui expostas com o objetivo de resolver o problema de aproximar os valores completos das raízes de um polinômio arbitrário. A solução encontrada é resumida no teorema 1.5, enunciado na seção 1.1, e algumas análises a respeito do erro de aproximação do algoritmo de Graeffe tangente são realizadas no capítulo 5.

Capítulo 2

Renormalizando Graeffe

Neste capítulo, definimos uma nova maneira de representar os coeficientes da iteração de Graeffe, desenvolvemos um método para estimar os módulos das raízes de um polinômio, motivamos o algoritmo de determinação dos índices principais de um polinômio (algoritmo 3), o qual será mostrado no capítulo 3, e apresentamos conceitos e resultados que nos serão úteis no capítulo 5.

2.1 A iteração de Graeffe renormalizada

Com o fim de superar a segunda fraqueza da iteração de Graeffe clássica, que foi exemplificada na seção 1.3 (ver exemplo 1.11), introduzimos nesta seção a iteração de Graeffe renormalizada, que foi proposta originalmente por Malajovich e Zubelli em [3]. A partir de agora, todos os cálculos envolvendo os coeficientes das iteradas de Graeffe serão realizados nas novas coordenadas. Resultados numéricos fornecidos em [4] mostram que polinômios aleatórios de grau até 1000 podem ser resolvidos através de tal iteração sem a ocorrência de overflow.

Neste capítulo e no próximo, f será como na seção 1.2. Novamente, a teoria aqui desenvolvida não demanda que f seja livre de círculos.

Dado $g^{(N)} = G^N f$, $N \geq 0$, os seus coeficientes $g_j^{(N)}, j = 0, 1, \ldots, d$, serão representados em coordenadas, ditas coordenadas renormalizadas:

$$\begin{cases} r_j^{(N)} := -2^{-N} \ln |g_j^{(N)}| \\ \\ \alpha_j^{(N)} := g_j^{(N)} / |g_j^{(N)}|. \end{cases}$$

A representação é, de fato, válida, uma vez que $g_j^{(N)} = \alpha_j^{(N)} e^{-2^N r_j^{(N)}}$.

Notemos que $g_j^{(0)} = f_j, j = 0, 1, \ldots, d$, são os coeficientes de f.

O cálculo das coordenadas renormalizadas de $g^{(N)}$ será dividido em níveis de renormalização, passando pelo nível 0 (as coordenadas renormalizadas de f), pelo 1 (as de Gf), assim sucessivamente até chegar ao nível N, que é associado às coordenadas renormalizadas de $G^N f$.

A passagem de um nível para o seguinte em coordenadas renormalizadas será feita no algoritmo 4 na seção 4.2. Esse procedimento realizará, como cálculos intermediários, operações aritméticas em coordenadas renormalizadas, as quais definimos da maneira óbvia: o produto renormalizado (r, α) de (r_1, α_1) por (r_2, α_2) em nível de renormalização N é

$$\begin{cases} r = r_1 + r_2 \\ \\ \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \end{cases}$$

Algoritmo 1 SomaRenormalizada $(r_1, \alpha_1, r_1, \alpha_2, p)$

Entradas:

$r_1 := r_1^{(N)}, r_2 := r_2^{(N)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$,

$p = 2^N$, onde N é o nível de renormalização.

Saída:

As coordenadas renormalizadas em nível de renormalização N da soma de $\alpha_1 e^{-pr_1}$ com $\alpha_2 e^{-pr_2}$.

se $r_1 = r_2 = \infty$ **então**
  retorne $\infty, 1$
$\Delta \leftarrow r_2 - r_1$
se $\Delta \geq 0$ **então**
  $t \leftarrow \alpha_1 + \alpha_2 e^{-p\Delta}$
  retorne $r_1 - \frac{\ln|t|}{p}, \frac{t}{|t|}$
senão
  $t \leftarrow \alpha_2 + \alpha_1 e^{p\Delta}$
  retorne $r_2 - \frac{\ln|t|}{p}, \frac{t}{|t|}$

e a soma renormalizada (r, α) de (r_1, α_1) com (r_2, α_2) em nível de renormalização N é

$$\begin{cases} r = -2^{-N} \ln|\alpha_1 e^{-2^N r_1} + \alpha_2 e^{-2^N r_2}| \\ \\ \alpha = \frac{\alpha_1 e^{-2^N r_1} + \alpha_2 e^{-2^N r_2}}{|\alpha_1 e^{-2^N r_1} + \alpha_2 e^{-2^N r_2}|}. \end{cases}$$

A soma renormalizada pode ser computada fazendo-se apenas uma exponenciação através do algoritmo 1.

Da forma como foram definidas, as coordenadas "angulares" possuem dinâmica caótica. Entretanto, pelo menos no caso de raízes de módulos diferentes, obteremos a convergência das coordenadas radiais. Com efeito, da equação (1.4) segue que

$$\begin{aligned} r_j^{(N)} &= -2^{-N} \ln|g_j^{(N)}| \\ &= -2^{-N} \ln|{\zeta_{j+1}}^{2^N} \ldots {\zeta_d}^{2^N}| - 2^{-N} \ln|1+\delta| \qquad j = 1, \ldots, d-1, \end{aligned}$$

onde $|\delta| \leq \rho^{-2^N} \binom{d}{d-j}$. Daí,

$$\lim_{N\to\infty} r_j^{(N)} = -\ln|\zeta_{j+1} \ldots \zeta_d| \qquad j = 1, \ldots, d-1.$$

Como $r_0^{(N)} = -\ln|\zeta_1 \ldots \zeta_d|$ e $r_d^{(N)} = 0$ para todo N, temos que $r_j^{(N)}$ converge para todo j de fato.

Para cada N, considere a função linear por partes

$$r^{(N)} : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{2.1}$$

satisfazendo

$$r^{(N)}(j) = r_j^{(N)} = -2^{-N} \ln|g_j^{(N)}|, \qquad j = 0, \ldots, d,$$

e tal que o gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta.

Dentro da hipótese que $|\zeta_1| < \cdots < |\zeta_d|$, afirmamos que essa função converge para uma função convexa linear por partes em $[0, d]$. De fato, pela equação (1.6) e pelo fato de as desigualdades dos módulos das raízes serem estritas temos que

$$\lim_{N\to\infty} 2^{-N} \ln\left(\frac{|g_j^{(N)}|}{|g_{j+1}^{(N)}|}\right) = \ln(|\zeta_{j+1}|), \qquad \forall j = 0, \ldots, d-1,$$

donde, para N suficientemente grande,

$$r^{(N)}(j+1) - r^{(N)}(j) > r^{(N)}(j) - r^{(N)}(j-1)$$

uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left[r^{(N)}(j+1) - r^{(N)}(j)\right] &= \lim_{N\to\infty} 2^{-N}\ln\left(\frac{|g_j^{(N)}|}{|g_{j+1}^{(N)}|}\right)\\ &= \ln(|\zeta_{j+1}|)\\ &> \ln(|\zeta_j|)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left[r^{(N)}(j) - r^{(N)}(j-1)\right].\end{aligned}$$

Isso prova a afirmação.

No entanto, se existirem pelo menos duas raízes de mesmo módulo, não podemos garantir a convergência de $r^{(N)}$, como mostramos no exemplo seguinte. Essa é uma das razões para introduzirmos o diagrama de Newton renormalizado, que, conforme demonstraremos na próxima seção, converge sempre.

Exemplo 2.1. Se $f(x) = (x-1)(x-e^{i\theta})$, então sua N-ésima iterada de Graeffe é

$$g^{(N)}(x) = x^2 - (1 + e^{2^N i\theta})x + e^{2^N i\theta}.$$

Temos $r^{(N)}(0) = r^{(N)}(2) = 0$, mas

$$r^{(N)}(1) = -2^{-N}\ln|1 + e^{2^N i\theta}| = -2^{-N}\ln|2\cos 2^{N-1}\theta|.$$

Portanto, dependendo da escolha de θ, $r^{(N)}(1)$ pode não convergir.

2.2 O diagrama de Newton renormalizado

Definição 2.2. Se $\varphi : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é tal que o gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta, e se J é o conjunto dos elementos da lista de índices retornada pelo algoritmo 2 com parâmetros de entrada (φ, d), dizemos que o fecho convexo de φ é a função

$$\psi : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tal que

$$\psi(j) = \varphi(j) \qquad \forall j \in J$$

e que o gráfico entre dois índices de J consecutivos é uma reta.

Como pode ser observado na demonstração da proposição 2.8 abaixo, o fecho convexo de φ nada mais é que a maior função convexa menor ou igual a φ.

Definição 2.3. Se $\varphi : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é tal que o gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta, dizemos que as quinas de φ são os pontos de não-diferenciabilidade do fecho convexo de φ mais as extremidades 0 e d.

Algoritmo 2 FECHOCONVEXO (φ, d)

Entrada:

$\varphi : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cujo gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta,

$d \in \mathbb{N}$.

Saída:

Uma lista de números naturais com pelo menos 2 elementos (o 0 e o d) e no máximo $d + 1$.

{ Crie uma lista Λ contendo inicialmente o elemento $\Lambda_0 = 0$ }

$k \leftarrow 0$

$\Lambda_k \leftarrow 0$ { Λ_k será sempre o último elemento da lista }

{ Agora, vamos tentar adicionar novos pontos a Λ. Seja $\varphi'_j : [0, j] \longrightarrow \mathbb{R}$ construída no final da j-ésima iteração de maneira que $\varphi'(j) = \varphi(j), \varphi'(\Lambda_l) = \varphi(\Lambda_l)$ para $l = 0, \dots, k$ e cujo gráfico entre os índices consecutivos de $\{\Lambda_0, \dots, \Lambda_k, j\}$ seja uma reta. Procedemos na j-ésima iteração de modo a assegurar que ${\varphi_j}'$ é convexa e que a sua derivada não está definida em $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_k\}$ }

para $j \leftarrow 1$ a d **faça**

  enquanto $k > 0$ e $\frac{\varphi(\Lambda_k) - \varphi(\Lambda_{k-1})}{\Lambda_k - \Lambda_{k-1}} \geq \frac{\varphi(j) - \varphi(\Lambda_k)}{j - \Lambda_k}$ **faça**

    $k \leftarrow k - 1$ { Retira o último elemento da lista }

  { Agora, vamos acrescentar o ponto j no fim da lista }

  $k \leftarrow k + 1$

  $\Lambda_k \leftarrow j$

retorne $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_k)$

Note que as quinas de φ são exatamente os índices retornados pelo algoritmo 2 com parâmetros de entrada (φ, d).

Definição 2.4. O diagrama de Newton renormalizado de f de nível N é o fecho convexo de $r^{(N)}$ (equação 2.1), que denotamos por $\mathbf{d}^{(N)}$. Se $N = 0$, referiremos-nos a tal diagrama simplesmente como o diagrama de Newton renormalizado de f e denotamos-no simplesmente por $\mathbf{d}$.

Notemos que são utilizadas as coordenadas renormalizadas radiais $r_j^{(N)}$ para construir o diagrama, ao invés dos módulos dos coeficientes de $g^{(N)}$, como é feito em [6]. Por esse motivo o termo "renormalizado" é adicionado à nomenclatura original do trabalho de Ostrowski. Daqui pra frente, no entanto, nos referiremos a $\mathbf{d}^{(N)}$ simplesmente como o diagrama de Newton de f de nível N.

Definição 2.5. O majorante de um polinômio dado é qualquer outro polinômio de mesmo grau que tenha coeficientes não negativos maiores ou iguais aos módulos dos coeficientes do polinômio dado.

Definição 2.6. Um polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{d} p_i x^i$ é dito normal se valem as seguintes condições:

1. $p_j \geq 0$ para $j = 0, \dots, d$
2. Se $p_j > 0$ e $p_k > 0$ para $j < k$, então $p_l > 0$ para todo $j < l < k$
3. $p_j^2 \geq p_{j-1} p_{j+1}$ para $j = 1, \dots, d - 1$

Definição 2.7. Um majorante normal é dito minimal se os seus coeficientes são menores ou iguais aos de qualquer outro majorante normal.

Proposição 2.8. *Qualquer polinômio*

$$g^{(N)} = \sum_{j=0}^{d} g_j^{(N)} x^j,$$

$N \geq 0$, *possui um único majorante normal minimal*

$$M_f^{(N)} = \sum_{j=0}^{d} T_j^{(N)} x^j.$$

Demonstração. Seja $\mathbf{d}^{(N)}$ o diagrama de Newton de f de nível N. Como $g_0^{(N)}, g_d^{(N)} \neq 0$ (já que o polinômio tem grau d e não possui raízes nulas), temos pela construção de $\mathbf{d}^{(N)}$ que

$$\mathbf{d}^{(N)}([0,d]) \subset \mathbb{R}.$$

Definamos

$$T_j^{(N)} := e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j)} \qquad j = 0, \ldots, d.$$

É claro que $T_j^{(N)} > 0$ para todo j. Como $\mathbf{d}^{(N)} \leq r^{(N)}$, temos que

$$T_j^{(N)} \geq e^{-2^N r^{(N)}(j)} = |g_j^{(N)}|,$$

donde $M_f^{(N)}$ é um majorante de $g^{(N)}$.

Que $M_f^{(N)}$ é normal segue da desigualdade

$$\mathbf{d}^{(N)}(j) \leq \frac{1}{2}\left[\mathbf{d}^{(N)}(j+1) + \mathbf{d}^{(N)}(j-1)\right],$$

a qual resulta da convexidade de $\mathbf{d}^{(N)}$ e é equivalente a

$$T_j^{(N)^2} \geq T_{j-1}^{(N)} T_{j+1}^{(N)}.$$

Resta apenas provar a minimalidade de $M_f^{(N)}$. Seja $h(x) = \sum_{j=0}^{d} h_j x^j$ um outro majorante normal de $g^{(N)}$. Como $h_0, h_d > 0$ (uma vez que $|g_0^{(N)}|, |g_d^{(N)}| > 0$), $h_j > 0$ para todo j pela definição de polinômio normal.

Definamos $\mathbf{d}'^{(N)} : [0,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ fazendo

$$\mathbf{d}'^{(N)}(j) = -2^{-N} \ln h_j \qquad j = 0, \ldots, d$$

e assumindo que o seu gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta. Uma vez que h é normal, concluímos, de modo análogo ao que acabamos de fazer, que $\mathbf{d}'^{(N)}$ é convexa. Se J é o conjunto de quinas de $r^{(N)}$ então

$$\mathbf{d}^{(N)}(j) = r^{(N)}(j) \qquad \forall j \in J.$$

Daí,

$$\mathbf{d}'^{(N)}(j) = -2^{-N} \ln h_j \leq -2^{-N} \ln |g_j^{(N)}| = \mathbf{d}^{(N)}(j) \qquad \forall j \in J,$$

donde segue, pela construção de $\mathbf{d}^{(N)}$ e pelo fato de $\mathbf{d}'^{(N)}$ ser convexo que

$$\mathbf{d}'^{(N)}(j) \leq \mathbf{d}^{(N)}(j) \qquad j = 0, \ldots, d.$$

Finalmente, essa última desigualdade implica que

$$h_j = e^{-2^N \mathbf{d}'^{(N)}(j)} \geq e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j)} = T_j^{(N)} \qquad j = 0, \ldots, d,$$

o que conclui a demonstração.

□

Faz sentido, então, o seguinte:

Definição 2.9. O majorante normal minimal $M_f^{(N)}$ de $g^{(N)}$, $N \geq 0$, é dito o majorante de Newton de f de nível N. Chamaremos o majorante normal minimal $M_f^{(0)}$, também denotado por M_f, de $g(0) = f$ simplesmente de majorante de Newton de f.

Definição 2.10. A j-ésima inclinação numérica de f de Nível N, $N \geq 0$, é

$$R_j^{(N)} := \frac{T_{j-1}^{(N)}}{T_j^{(N)}} \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Por convenção, $R_0^{(N)} = 0$ e $R_{d+1}^{(N)} = \infty$. Nos referiremos a $R_j^{(0)}$ simplesmente como a j-ésima inclinação numérica de f.

Definição 2.11. O j-ésimo desvio de f de Nível N, $N \geq 0$, é

$$D_j^{(N)} := \frac{R_{j+1}^{(N)}}{R_j^{(N)}} \qquad j = 1, \ldots, d-1.$$

Por convenção, $D_0^{(N)} = D_d^{(N)} = \infty$. Nos referiremos a $D_j^{(0)}$ simplesmente como o j-ésimo desvio de f.

Como ${T_j^{(N)}}^2 \geq T_{j-1}^{(N)} T_{j+1}^{(N)}$, temos $R_{j+1}^{(N)} \geq R_j^{(N)}$ e $D_j^{(N)} \geq 1$.

Definição 2.12. j é dito um índice principal de $\mathbf{d}^{(N)}$ se $D_j^{(N)} > 1$.

Afirmamos que os índices principais do diagrama de Newton de f de nível N são exatamente as suas quinas. Optamos por estabelecer a definição anterior, no entanto, com o intuito de manter a coerência com a nomenclatura utilizada por Ostrowski em [6]. De fato, $D_j^{(N)} > 1$ se, e somente, se $j = 0$, $j = d$ ou

$$\frac{e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j)}}{e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j+1)}} > \frac{e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j-1)}}{e^{-2^N \mathbf{d}^{(N)}(j)}}.$$

Essa desigualdade, por sua vez, é equivalente à equação

$$\mathbf{d}^{(N)}(j+1) - \mathbf{d}^{(N)}(j) > \mathbf{d}^{(N)}(j) - \mathbf{d}^{(N)}(j-1),$$

a qual constitue o critério para determinar se j é uma quina de $\mathbf{d}^{(N)}$. Isso prova a afirmação.

No caso em que o polinômio tem raízes de módulos diferentes, temos que, para N suficientemente grande,

$$T_j^{(N)} = |g_j^{(N)}| \qquad j = 0, \ldots, d.$$

Com efeito, já que, nesse caso, $r^{(N)}$ é função convexa para N suficientemente grande, como vimos na seção 2.1, esse fato segue diretamente da construção do majorante de Newton.

Os resultados a seguir, originalmente obtidos em [6], nos serão úteis nas seções 2.3 e 5.2.

Lema 2.13. *Seja*

$$\varrho(j) := \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{j}} - 1.$$

Então,

$$\frac{|\zeta_j|^{2^N}}{R_j^{(N)}} \geq \varrho(j) \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Demonstração. Seja $j \in \{1, \ldots, d\}$. É claro que é suficiente provar que

$$\prod_{k=1}^{j} \left(1 + \frac{|\zeta_k|^{2^N}}{R_j^{(N)}}\right) \geq \frac{3}{2}.$$

Ponha

$$R = R_j^{(N)}$$

e tome os dois índices principais consecutivos j_1, j_2 de $\mathbf{d}^{(N)}$ tais que

$$j_1 = j - \alpha < j \leq j_2.$$

Uma vez que $D_{j_1+1} = D_{j_1+2} = \cdots = D_{j_2-1} = 1$, temos que

$$R_{j_1+1} = R_{j_1+2} = \cdots = R_{j_2} = R.$$

Além disso, por construção do diagrama de Newton de f de nível N, é evidente que

$$T_{j_1}^{(N)} = |g_{j_1}^{(N)}|, \quad T_{j_2}^{(N)} = |g_{j_2}^{(N)}|.$$

Daí, se $k > j_1$,

$$R^{k-j_1} = R_{j_1+1}^{(N)} \ldots R_k^{(N)} = \frac{T_{j_1}^{(N)}}{T_k^{(N)}} = \frac{|g_{j_1}^{(N)}|}{T_k^{(N)}} \leq \frac{|g_{j_1}^{(N)}|}{|g_k^{(N)}|}$$

e, se $k \leq j_1$,

$$R^{j_1-k} = R_{k+1}^{(N)} \ldots R_{j_1}^{(N)} = \frac{T_k^{(N)}}{T_{j_1}^{(N)}} = \frac{T_k^{(N)}}{|g_{j_1}^{(N)}|} \geq \frac{|g_k^{(N)}|}{|g_{j_1}^{(N)}|}.$$

Concluímos então que

$$|g_k^{(N)}|R^k \leq |g_{j_1}^{(N)}|R^{j_1} = |g_{j-\alpha}^{(N)}|R^{j-\alpha} \qquad k = 0, \ldots, d.$$

Multiplicando $g^{(N)}$ por uma constante, afirmamos que podemos fazer com que o termo da direita da equação anterior seja igual a 1, de maneira que podemos supor, sem perda de generalidade, que as relações

$$|g_k^{(N)}|R^k \leq 1, \quad |g_{j-\alpha}^{(N)}|R^{j-\alpha} = 1 \qquad k = 0, \ldots, d, \tag{2.2}$$

são válidas. De fato, se $c > 0$ é uma constante e ${g'}^{(N)} = cg^{(N)}$ então

$$g_k'^{(N)} = cg_k^{(N)} \qquad k = 0, \ldots, d. \tag{2.3}$$

Isso implica que ${r'}^{(N)}(k) = r^{(N)}(k) - 2^{-N}\ln c$, donde $\mathbf{d'}^{(N)}(k) = \mathbf{d}^{(N)}(k) - 2^{-N}\ln c$. Daí, $T_k'^{(N)} = cT_k^{(N)}$ e isso nos permite concluir, finalmente, que

$$R_k'^{(N)} = R_k^{(N)} \qquad k = 0, \ldots, d. \tag{2.4}$$

As equações (2.3) e (2.4) implicam, portanto, trivialmente a afirmação anterior.

Agora, consideremos o polinômio

$$h(x) = \prod_{k=1}^{j}(x - \zeta_k^{2^N}) = \sum_{k=0}^{j} a_k R^{-k} x^k,$$

o qual, obviamente, tem $\prod_{k=1}^{j}(x + |\zeta_k^{2^N}|)$ como majorante. Então, avaliando os polinômios em $x = R$,

$$\sum_{k=0}^{j} |a_k| \leq \prod_{k=1}^{j}(R + |\zeta_k|^{2^N}) = R^j \prod_{k=1}^{j}\left(1 + \frac{|\zeta_k|^{2^N}}{R}\right)$$

e, portanto, para provar o lema, basta mostrar que

$$\sum_{k=0}^{j} |a_k| \geq \frac{3}{2} R^j$$

ou, como, pela definição de h, $a_j = R^j$, que

$$\sum_{k=0}^{j-1} |a_k| \geq \frac{R^j}{2} = \frac{a_j}{2}. \tag{2.5}$$

Seja agora

$$\frac{g^{(N)}(x)}{h(x)} = \sum_{k=0}^{d-j} A_k R^{-k} x^k.$$

Designemos $\max_{k\in\{0,\dots,d-j\}} |A_k|$ por A e tomemos um índice $l \in \{0, \dots, d-j\}$ para o qual

$$|A_l| = A = \max_{k\in\{0,\dots,d-j\}} |A_k|.$$

Comparando os coeficientes de mesma potência de x dos dois lado da equação

$$g^{(N)}(x) = h(x) \sum_{k=0}^{d-j} A_k R^{-k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{j} a_k R^{-k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{d-j} A_k R^{-k} x^k\right)$$

e expressando $g^{(N)}_{j+l}$ e $g^{(N)}_{j-\alpha}$:

$$g^{(N)}_{j+l} = (a_j A_l + a_{j-1} A_{l+1} + \cdots + a_0 A_{j+l}) R^{-(j+l)}, \tag{2.6}$$

$$g^{(N)}_{j-\alpha} = (a_{j-\alpha} A_0 + a_{j-\alpha-1} A_1 + \cdots + a_0 A_{j-\alpha}) R^{-(j-\alpha)}, \tag{2.7}$$

onde $A_k = 0$ para $k > d-j$. Segue das equações (2.7) e (2.2) que

$$1 = |g^{(N)}_{j-\alpha}| R^{j-\alpha} \leq A \sum_{k=0}^{j-\alpha} |a_k| \leq A \sum_{k=0}^{j-1} |a_k|,$$

donde

$$A \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^{j-1} |a_k|}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, utilizando as equações (2.6) e (2.2):

$$\begin{aligned} 1 \geq |g^{(N)}_{j+l}| R^{j+l} &\geq |a_j||A_l| - |a_{j-1} A_{l+1} + \cdots + a_0 A_{j+l}| \\ &\geq A\left(a_j - \sum_{k=0}^{j-1} |a_k|\right) \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos uma desigualdade tringular reversa. Segue, finalmente, desta última equação e de (2.8) que

$$1 \geq \frac{a_j - \sum_{k=0}^{j-1} |a_k|}{\sum_{k=0}^{j-1} |a_k|}$$

o que implica a equação (2.5) e, portanto, conclui a demonstração.

□

Teorema 2.14. *Seja*

$$\varrho(j) := \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{j}} - 1.$$

Então,

$$\varrho(j) \leq \frac{|\zeta_j|^{2^N}}{R_j^{(N)}} \leq \frac{1}{\varrho(d-j+1)} \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Como consequência dessa estimativa, obtemos

$$(3d)^{-2^{-N}} \leq \frac{|\zeta_j|}{R_j^{(N)^{2^{-N}}}} \leq (3d)^{2^{-N}} \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Demonstração. Seja

$$\breve{f}(x) = x^d f(\frac{1}{x}) = \sum_{k=0}^{d} f_{d-k} x^k$$

cujas raízes são $|\breve{\zeta}_1| \leq \cdots \leq |\breve{\zeta}_d|$. Se $N \geq 0$, defina

$$\breve{g}^{(N)}(x) = G^N \breve{f}(x),$$

que tem raízes $|\breve{\zeta}_1|^{2^N} \leq \cdots \leq |\breve{\zeta}_d|^{2^N}$. Note que

$$\breve{\zeta}_1 = \frac{1}{\zeta_d}, \ldots, \breve{\zeta}_{d-j+1} = \frac{1}{\zeta_j}, \ldots, \breve{\zeta}_d = \frac{1}{\zeta_1}.$$

Como

$$\breve{g}_1^{(N)} = g_d^{(N)}, \ldots, \breve{g}_{d-j+1}^{(N)} = g_j^{(N)}, \ldots \breve{g}_d^{(N)} = g_1^{(N)},$$

temos que

$$\breve{R}_{d-j+1}^{(N)} = \frac{1}{R_j^{(N)}} \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Daí, usando o lema 2.13 para o polinômio $\breve{g}^{(N)}(x)$, obtemos:

$$\frac{|\breve{\zeta}_{d-j+1}|^{2^N}}{\breve{R}_{d-j+1}^{(N)}} \geq \varrho(d-j+1) \qquad j = 1, \ldots, d,$$

o que é equivalente a

$$\frac{R_j^{(N)}}{|\zeta_j|^{2^N}} \geq \varrho(d-j+1),$$

que é o que buscávamos mostrar.

Finalmente, que

$$\varrho(j) \geq \frac{1}{3d} \qquad j = 1, \ldots, d,$$

segue trivialmente de sua expansão em série binomial

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{j}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{j}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

onde os coeficientes binomiais gененeralizados são

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

□

Corolário 2.15.
$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathbf{d}^{(N)}(j)-\mathbf{d}^{(N)}(j-1)\right)=\ln|\zeta_j| \qquad j=1,\dots,d.$$
Além disso, o erro de aproximação na N-ésima iteração é em módulo menor ou igual a
$$2^{-N}\ln(3d).$$

Demonstração. Pelo teorema,
$$-2^{-N}\ln(3d)\le \ln|\zeta_j|-2^{-N}\ln T_{j-1}^{(N)}+2^{-N}\ln T_j^{(N)}\le 2^{-N}\ln(3d),$$
donde o resultado segue da definição de $\mathbf{d}^{(N)}$.

□

Como $\mathbf{d}^{(N)}(d)=r^{(N)}(d)=0$ para todo $N\ge 0$, a convergência do diagrama de Newton de f de nível N resulta do corolário.

2.3 O diagrama de Newton limite e os índices principais de um polinômio

Esta seção visa estabelecer a conexão entre o diagrama de Newton e os índices principais de um polinômio f.

Definição 2.16. O diagrama de Newton limite de f é o limite de $\mathbf{d}^{(N)}$ quando $N\to\infty$.

A definição acima faz sentido pelo que vimos no final da seção anterior.

Definição 2.17. Os índices principais do diagrama de Newton limite de f são as suas quinas.

Alternativamente, os índices principais do diagrama de Newton limite de f são os elementos do limite do conjunto de índices principais $\mathbf{d}^{(N)}$ quando $N\to\infty$.

Considere a extensão linear por partes da função
$$\phi:\{0,\dots,d\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
definida por
$$\begin{cases}\phi(0)=-\ln|f_0|\\ \phi(j)=-\ln|f_0|+\sum_{1\le k\le j}\ln|\zeta_k| \qquad j=1,\dots,d,\end{cases}$$
ao intervalo $[0,d]$ tal que o gráfico entre dois números naturais consecutivos é uma reta. As suas quinas, excluindo-se os elementos 0 e d, são exatamente os índices principais de f. Com efeito, as quinas de ϕ são 0, d e os índices $j\in\{1,\dots,d-1\}$ tais que
$$\phi(j)-\phi(j-1)<\phi(j+1)-\phi(j).$$
Essa última desigualdade é equivalente a
$$|\zeta_j|<|\zeta_{j+1}|$$
e isso demonstra o fato citado.

Por outro lado, afirmamos que os índices principais do diagrama de Newton limite de f são iguais às quinas da extensão da função mencionada acima. Como consequência disso, estabelecemos de maneira óbvia a relação entre o diagrama de Newton limite de f e os índices principais de f. A validade da afirmação decorre de que, pelo corolário 5.4,
$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{d}^{(N)}(j)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{d}^{(N)}(j-1)+\ln|\zeta_j|,$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbf{d}^{(N)}(j) &= \lim_{N\to\infty} \mathbf{d}^{(N)}(0) + \sum_{1\leq k\leq j} \ln|\zeta_j| \\ &= -\ln|f_0| + \sum_{1\leq k\leq j} \ln|\zeta_j| \\ &= \phi(j).\end{aligned}$$

Assim, podemos reformular a definição 2.17:

Definição 2.18. O conjunto dos índices principais do diagrama de Newton limite de f é

$$I = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\},$$

os quais denotaremos por $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1} = d$, como na definição 1.8.

Essa definição sintetiza a relação entre os índices principais de um polinômio e o seu diagrama de Newton limite, a qual motivou a escolha do termo “índices principais” na definição 1.8 da seção 1.2.

Capítulo 3

Computando os índices principais de um polinômio

Este capítulo é dedicado à enunciação e justificação teórica de um algoritmo de determinação dos índices principais de um polinômio. Como subproduto dos resultados obtidos, teremos, se assumirmos dados os índices principais de um polinômio, uma estimativa dos módulos das raízes em função das coordenadas radiais da N-ésima iteração de Graeffe. Tal estimativa será usada no capítulo 4 no procedimento de cálculo dos valores completos das raízes.

3.1 O algoritmo

Consideramos, como na seção 1.2,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} f_j x^j$$

um polinômio de grau d sem raízes nulas cuja separação das raízes é ρ e cujas raízes ordenamos de sorte que

$$|\zeta_1| \leq \cdots \leq |\zeta_d|.$$

Conforme visto na seção 2.3, para determinar os índices principais de f basta calcular as quinas do limite do fecho convexo de $r^{(N)}$ quando $N \to \infty$ (isto é, do diagrama de Newton limite de f). Tal cálculo não é, entretanto, viável na prática, pois não pode ser feito em tempo finito. A solução aqui proposta supera essa limitação através da computação das quinas do fecho estritamente convexo de $r^{(N)}$ para um N suficientemente grande: essa ideia ficará clara no decorrer do desenvolvimento dos resultados.

Seja N um nível de renormalização fixado. Denotemos por $Z_1, \ldots, Z_d$ as raízes de $g = G^N f$ de sorte que

$$Z_1 = \zeta_1^{2^N}, \ldots, Z_d = \zeta_d^{2^N}.$$

Note que omitimos o sobrescrito N de $g^{(N)}$ e de $Z_j^{(N)}$. Pelo restante do capítulo, não expressaremos, por simplicidade, explicitamente a dependência de N quando ela existir em algum termo.

Lembremos que a separação das raízes de g é ρ^{2^N} e que o conhecimento de I é equivalente a o dos índices principais de f.

Suponha que tenhamos uma estimativa $1 < \tilde{\rho} \leq \rho$ da separação das raízes de f. Métodos para fazer essa aproximação para certas classes de polinômios serão vistos no capítulo 5.

Eis o algoritmo principal deste capítulo e o resultado que o corrobora:

Proposição 3.1. *Se*

$$N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}}$$

Algoritmo 3 FechoEstritamenteConvexo $(r, d, N, \tilde{\rho})$

Entrada:

$r := r^{(N)}$ (a coordenada radial renormalizada de $G^N f$),

$d \in \mathbb{N}$ (o grau de f),

$N \in \mathbb{N}$ (o nível de renormalização de f),

$\tilde{\rho} > 1$ (estimativa inferior da separação das raízes de f).

Saída:

Uma lista de números naturais com pelo menos 2 elementos (o 0 e o d) e no máximo $d + 1$.

{ Crie uma lista Λ contendo inicialmente o elemento $\Lambda_0 = 0$ }

$k \leftarrow 0$

$\Lambda_k \leftarrow 0$ { Λ_k será sempre o último elemento da lista }

{ A escolha de E é baseada no lema 3.6 }

$E \leftarrow \frac{1}{2}[2^{-N+1} \ln(2^d + 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N+2} \ln(1 - 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}) + \frac{\ln \tilde{\rho}}{2}]$

{ O procedimento é essencialmente igual ao algoritmo 2 }

para $j \leftarrow 1$ a d **faça**

  enquanto $k > 0$ e $\frac{\varphi(\Lambda_k) - \varphi(\Lambda_{k-1})}{\Lambda_k - \Lambda_{k-1}} > \frac{\varphi(j) - \varphi(\Lambda_k)}{j - \Lambda_k} - E$ **faça**

    $k \leftarrow k - 1$

  { Adicione o ponto j na lista }

  $k \leftarrow k + 1$

  $\Lambda_k \leftarrow j$

retorne $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_k)$

então o algoritmo 3 com entradas $r, d, N, \tilde{\rho}$ produz I (os índices principais do diagrama de Newton limite de f) como saída.

3.2 Estimativas a respeito dos coeficientes de um polinômio

Com a notação da seção anterior,

$$\begin{aligned} g_0 &= (-1)^d \sigma_d (Z_1, \ldots, Z_d) \\ g_1 &= (-1)^{d-1} \sigma_{d-1} (Z_1, \ldots, Z_d) \\ &\vdots \\ g_j &= (-1)^{d-j} \sigma_{d-j} (Z_1, \ldots, Z_d) \\ &\vdots \\ g_d &= \sigma_0 (Z_1, \ldots, Z_d) = 1. \end{aligned}$$

Para provar a proposição 3.1, vamos precisar de algumas estimativas sobre as k-ésimas funções simétricas elementares

$$\sigma_k (Z_1, \ldots, Z_d) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} Z_{j_1} \ldots Z_{j_k}.$$

Lema 3.2. *Se $j \in I$ temos*

$$\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right) = Z_{j+1} Z_{j+2} \ldots Z_d (1+c),$$

onde $|c| \leq \left(\binom{d}{j} - 1\right) \rho^{-2^N} < 2^d \rho^{-2^N} \leq 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}$.

Demonstração. Escreva

$$\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right) = \sum_{j_1 < \cdots < j_{d-j}} Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-j}}.$$

Na soma acima, $|Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-j}}| \leq \tilde{\rho}^{-2^N} |Z_{j+1} \ldots Z_d|$ para qualquer escolha de $j_1, \ldots, j_{d-j}$, exceto $j+1, \ldots, d$, uma vez que $|Z_j| < |Z_{j+1}|$.

Já que o somatório contém $\binom{d}{j} - 1$ termos diferentes de $Z_{j+1} \ldots Z_d$, obtemos que

$$|\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right) - Z_{j+1} \ldots Z_d| \leq \left(\binom{d}{j} - 1\right) \tilde{\rho}^{-2^N} |Z_{j+1} \ldots Z_d|.$$

Que $\binom{d}{j} - 1 < 2^d$ segue do fato que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j.$$

□

Lembremos que

$$I = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\} = \{i_0, i_1, \ldots, i_l, i_{l+1}\},$$

onde $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1} = d$.

Definição 3.3. Dizemos que k_1 e k_2 são elementos sucessivos de I se existe $k \in \{0, \ldots, l\}$ tal que $k_1 = i_k, k_2 = i_{k+1}$.

Lema 3.4. *Sejam k_1 e k_2 elementos sucessivos de I, e m tal que $k_1 < m < k_2$. Então*

$$|\sigma_{d-m}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)| \leq \left(\binom{k_2 - k_1}{k_2 - m} + c'\right) |Z_{j_2}|^{k_2 - m} |Z_{k_2+1}| \ldots |Z_d|,$$

onde $c' \leq \left(\binom{d}{d-m} - \binom{k_2-k_1}{k_2-m}\right) \rho^{-2^N} < 2^d \rho^{-2^N} \leq 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}$.

Demonstração. Escreva

$$\begin{aligned}
\sigma_{d-m}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right) &= \sum_{j_1 < \cdots < j_{d-m}} Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-m}} \\
&= {\sum}' Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-m}} + {\sum}'' Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-m}},
\end{aligned}$$

onde ${\sum}'$ abrange os índices tais que $k_1 < j_1 < \cdots < j_{k_2-m} < k_2+1$ e que $j_{k_2-m+1} = k_2+1, \ldots, j_{d-m} = d$.

Podemos reescrever ${\sum}'$ como:

$${\sum}' = Z_{k_2+1} \ldots Z_d \left(\sum_{k_1 < j_1 < \cdots < j_{k_2-m} \leq k_2} Z_{j_1} \ldots Z_{j_{k_2-m}} \right)$$

Então,

$$\left|{\sum}'\right| \leq \binom{k_2 - k_1}{k_2 - m} |Z_{k_2}|^{k_2 - m} |Z_{k_2+1}| \ldots |Z_d|.$$

Todos os $\binom{d}{d-m} - \binom{k_2-k_1}{k_2-m}$ termos de $\sum''$ são, em módulo, menores que $\tilde{\rho}^{-2^N}|Z_{k_2}|^{k_2-m}|Z_{k_2+1}|\ldots|Z_d|$. Logo,

$$\left|\sum''\right| \leq \left(\binom{d}{d-m} - \binom{k_2-k_1}{k_2-m}\right)\tilde{\rho}^{-2^N}|Z_{k_2}|^{k_2-m}|Z_{k_2+1}|\ldots|Z_d|.$$

Somando essas duas estimativas, obtemos

$$|\sigma_{d-m}\left(Z_1,\ldots,Z_d\right)| \leq \left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m} + \left(\binom{d}{d-m} - \binom{k_2-k_1}{k_2-m}\right)\tilde{\rho}^{-2^N}\right)|Z_{j_2}|^{k_2-m}|Z_{j_2+1}|\ldots|Z_d|.$$

$\square$

Como estamos trabalhando com os coeficientes em coordenadas renormalizadas, precisamos converter as estimativas acima:

Lema 3.5. *Sejam k_1 e k_2 elementos sucessivos de I, e m tal que $k_1 < m < k_2$. Então, se*

$$N > 3 + \log_2 \frac{d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}$$

vale o seguinte:

1.
$$\frac{r(k_2) - r(k_1)}{k_2 - k_1} = \ln|\zeta_{k_2}| + 2^{-N+1}\ln(1+c),$$

onde $|c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$.

2.
$$\frac{r(k_2) - r(m)}{k_2 - m} \leq \ln|\zeta_{k_2}| + 2^{-N}\ln\left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m} + c'\right) + 2^{-N}\ln|1+c|,$$

onde $|c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$.

3.
$$\frac{r(m) - r(k_1)}{l - k_1} \geq \ln|\zeta_{k_2}| - 2^{-N}\ln\left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m} + c'\right) + 2^{-N}\ln|1+c|,$$

onde $|c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$.

Demonstração. O lema 3.2 com $j = k_1$ nos dá

$$\begin{aligned} r(k_1) &= -2^{-N}\ln|\sigma_{d-k_1}\left(Z_1,\ldots,Z_d\right)| \\ &= -2^{-N}(\ln|Z_{k_1+1}| + \cdots + \ln|Z_d|) - 2^{-N}\ln|1+c_1|, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $|c_1| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$. Usando, agora, o lema com $j = k_2$:

$$\begin{aligned} r(k_2) &= -2^{-N}\ln|\sigma_{d-k_2}\left(Z_1,\ldots,Z_d\right)| \\ &= -2^{-N}(\ln|Z_{k_2+1}| + \cdots + \ln|Z_d|) - 2^{-N}\ln|1+c_2|, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $|c_2| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$. Como mostraremos na seção 3.4, $|c_1|, |c_2| < 1$ para tais valores de N. Subtraindo as duas expressões e usando o fato, o qual segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe c, $|c| \leq \max(|c_1|, |c_2|)$, tal que

$$\ln(1+c) = \frac{\ln|1+c_1| - \ln|1+c_2|}{2(k_2-k_1)},$$

temos:

$$\begin{aligned}
\frac{r(k_2)-r(k_1)}{k_2-k_1} &= \frac{2^{-N}(\ln|Z_{k_1+1}|+\cdots+\ln|Z_{k_2}|)}{k_2-k_1} + 2^{-N}(\ln|1+c_1|-\ln|1+c_2|) \\
&= 2^{-N}\ln|Z_{k_2}| + 2^{-N+1}\ln(1+c) \\
&= \ln|\zeta_{k_2}| + 2^{-N+1}\ln(1+c).
\end{aligned}$$

Para provar as parte 2 e 3 do lema, usamos o lema 3.4:

$$\begin{aligned}
r(m) &= -2^{-N}\ln|\sigma_{d-m}(Z_1,\ldots,Z_d)| \\
&\geq -2^{-N}(k_2-l)\ln|Z_{k_2}| - 2^{-N}(\ln|Z_{k_2+1}|+\cdots+\ln|Z_d|) - 2^{-N}\ln\left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m}+c'\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $|c'| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$.

Subtraindo (3.3) de (3.2), dividindo por k_2-m e, novamente, escolhendo c, $|c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$, de maneira apropriada, obtemos:

$$\frac{r(k_2)-r(m)}{k_2-m} \leq \ln|\zeta_{k_2}| + 2^{-N}\ln\left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m}+c'\right) + 2^{-N}\ln|1+c|.$$

Subtraindo, agora, (3.1) de (3.3), dividindo por $m-k_1$ e escolhendo c, $|c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}$, de maneira apropriada, obtemos finalmente:

$$\frac{r(m)-r(k_1)}{l-k_1} \geq \ln|\zeta_{k_2}| - 2^{-N}\ln\left(\binom{k_2-k_1}{k_2-m}+c'\right) + 2^{-N}\ln|1+c|.$$

□

3.3 Um critério de decisão

O lema seguinte nos diz que o lema 3.5 pode ser usado para decidir se um ponto do fecho estritamente convexo de r é uma quina do diagrama de Newton limite de f desde que sejam satisfeitas certas hipóteses. Na prova da proposição 3.1 vemos que tais suposições valem automaticamente para N suficientemente grande.

Lema 3.6. *Supondo que*

a. $N > 3 + \log_2 \frac{d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}$

b. $p \geq \max(k_2-k_1)$, *onde* k_1, k_2 *são elementos sucessivos de* I.

c. $2^{-N+1}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N+2}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) < E < \frac{\ln\tilde{\rho}}{2}$

d. $i < j < k$

temos o seguinte

1. Se i *e* j *são elementos de* I *e não existe elemento de* I *entre* j *e* k, *então*

$$\frac{r(j)-r(i)}{j-i} < \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - E$$

2. Se i *e* k *são elementos de* I *então*

$$\frac{r(j)-r(i)}{j-i} > \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - E$$

Demonstração. Prova da parte 1: Assuma que i, j são elementos sucessivos de I. Como $2^d\tilde{\rho}^{-2^N} < 1$, como verificaremos na seção 3.4, a parte 1 do lema 3.5 nos diz que

$$\frac{r(j)-r(i)}{j-i} \leq \ln|\zeta_j| - 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}),$$

já que

$$\ln(1+c) \leq -\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) \qquad \forall |c| < 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}.$$

Para estimar $\frac{r(k)-r(j)}{k-j}$, temos que distinguir dois casos. Se $k \in I$, então, novamente utilizando a parte 1 do lema 3.5,

$$\frac{r(k)-r(j)}{k-j} \geq \ln|\zeta_k| + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}).$$

Por outro lado, se $k \notin I$, tome m de modo que j e m sejam elementos sucessivos de I. Por hipótese, $j < k < m$. A parte 3 do lema 3.5, então, nos dá:

$$\begin{aligned}\frac{r(k)-r(j)}{k-j} &\geq \ln|\zeta_m| - 2^{-N}\ln\left(\binom{m-j}{m-k} + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}\right) + 2^{-N}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\\ &\geq \ln|\zeta_m| - 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) + 2^{-N}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}).\end{aligned}$$

No primeiro caso, é óbvio que

$$\frac{r(k)-r(j)}{k-j} \geq \ln|\zeta_k| + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}).$$

Também no segundo caso, temos que

$$\frac{r(k)-r(j)}{k-j} \geq \ln|\zeta_k| + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}).$$

Logo, em qualquer caso,

$$\begin{aligned}\frac{r(j)-r(i)}{j-i} &\leq \ln|\zeta_j| - \Big(2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\Big) - 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\\ &= \Big(\ln|\zeta_k| + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\Big)\\ &\quad + \ln|\zeta_j| - \ln|\zeta_k| + 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N+2}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\\ &\leq \frac{r(k)-r(j)}{k-j} + \ln|\zeta_j| - \ln|\zeta_k| + 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N+2}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})\\ &< \frac{r(k)-r(j)}{k-j} + \ln|\zeta_j| - \ln|\zeta_k| + E.\end{aligned}$$

Usando que $E < \frac{\ln\rho}{2}$ por hipótese, deduzimos que $\ln|\zeta_j| - \ln|\zeta_k| = -\ln|\zeta_k/\zeta_j| \leq -\ln\rho < -2E$, isto é, $\ln|\zeta_j| - \ln|\zeta_k| + E < -E$ e, por conseguinte, concluímos finalmente que

$$\frac{r(j)-r(i)}{j-i} < \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - E.$$

Prova da parte 2: Usando o lema 3.5, obtemos

$$\frac{r(j)-r(i)}{j-i} \geq \ln|\zeta_k| - 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) + 2^{-N}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N})$$

e

$$\frac{r(k)-r(j)}{k-j} \leq \ln|\zeta_k| + 2^{-N}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}).$$

Subtraindo a segunda desigualdade da primeira:

$$\begin{aligned}\frac{r(j)-r(i)}{j-i} &\geq \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - 2^{-N+1}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) + 2^{-N+1}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) \\ &\geq \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - 2^{-N+1}\ln(2^p + 2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) + 2^{-N+2}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) \\ &> \frac{r(k)-r(j)}{k-j} - E.\end{aligned}$$

□

3.4 Prova da proposição 3.1

Demonstração (da proposição 3.1)**.** Seja

$$N > 3 + \log_2 \frac{d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}.$$

Como

$$\tilde{\rho}^{2^N} > \tilde{\rho}^{\frac{8d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}} = \left(\tilde{\rho}^{\frac{1}{\ln\tilde{\rho}}}\right)^{\ln 2^{8d}} = 2^{8d}$$

então $2^d\tilde{\rho}^{-2^N} < 2^{-7d}$.

Sabemos que, se $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j!},$$

donde concluímos que

$$-\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) < -\ln(1-2^{-7d}) \leq -\ln(1-2^{-7}) \leq \sum_{j=1}^{\infty}2^{-7j} = \frac{2^{-7}}{1-2^{-7}} \leq 2^{-6}.$$

Portanto, podemos estimar:

$$\begin{aligned}2^{-N+1}\ln(2^p+2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) - 2^{-N+2}\ln(1-2^d\tilde{\rho}^{-2^N}) &< \frac{2\ln 2^{p+1}}{\frac{8d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}} + \frac{4\times 2^{-6}}{\frac{8d\ln 2}{\ln\tilde{\rho}}} \\ &= \frac{2(p+1)\ln\tilde{\rho}}{8d} + \frac{\ln\tilde{\rho}}{2^7 d\ln 2} \\ &< \frac{\ln\tilde{\rho}}{2}.\end{aligned}$$

Isso mostra que é possível escolher E como no lema 3.6, donde podemos fazer uso desse lema.

A validade do algoritmo 3 segue, então, por indução.

Hipótese de indução No início da iteração j do loop do algoritmo, a lista Λ contém $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s, \Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$, onde $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s$ são elementos sucessivos de I e $\Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$ não estão em I. Note que é possível que tenhamos $s = k$.

A hipótese de indução é verdadeira para $j = 1$, com $k = 0$ e $0 \in I$. Em cada passo, há duas possibilidades.

Caso 1: $j \notin I$. Nesse caso, alguns dos elementos $\Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$ podem ser descartados. Entretanto, como pela parte 1 do lema 3.6,

$$\frac{r(\Lambda_s)-r(\Lambda_{s-1})}{\Lambda_s-\Lambda_{s-1}} < \frac{r(j)-r(\Lambda_s)}{j-\Lambda_s} - E$$

se $s > 0$, então nenhum elemento de I pode ser descartado.
Caso 2: $j \in I$. Vamos mostrar que, nesse caso, todos os $\Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$ serão descartados e nenhum dentre os $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s$ será descartado.
Que nenhum elemento de I pode ser descartado segue novamente pela parte 1 do lema 3.6.
Se $1 \leq t \leq k - s$, Λ_{s+t} será descartado se, e somente se, os $\Lambda_{s+t+1}, \ldots, \Lambda_k$ forem descartados e

$$\frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_{s+t-1})}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_{s+t-1}} > \frac{r(j) - r(\Lambda_{s+t})}{j - \Lambda_{s+t}} - E.$$

Como j e Λ_s são elementos sucessivos de I, segue da parte 2 do lema 3.6 que

$$\frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_s)}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s} > \frac{r(j) - r(\Lambda_{s+t})}{j - \Lambda_{s+t}} - E \qquad \forall t.$$

Para concluir a prova da proposição é suficiente, então, mostrar que

$$\frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_{s+t-1})}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_{s+t-1}} \geq \frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_s)}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s},$$

vale $\forall t$, o que decorre diretamente de dois fatos:

1)
$$\frac{r(\Lambda_{s+t-1}) - r(\Lambda_{s+t-2})}{\Lambda_{s+t-1} - \Lambda_{s+t-2}} \leq \frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_{s+t-1})}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_{s+t-1}},$$

2)
$$\frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_s)}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s} \leq \max_{u \in \{1,\ldots,t\}} \frac{r(\Lambda_{s+u}) - r(\Lambda_{s+u-1})}{\Lambda_{s+u} - \Lambda_{s+u-1}}.$$

Como Λ_{s+t-1} não foi descartado na iteração Λ_{s+t}, temos que

$$\frac{r(\Lambda_{s+t-1}) - r(\Lambda_{s+t-2})}{\Lambda_{s+t-1} - \Lambda_{s+t-2}} \leq \frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_{s+t-1})}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_{s+t-1}} - E,$$

donde segue 1).
Uma vez r é derivável exceto possivelmente em um número finito de pontos,

$$r(\Lambda_{s+t}) = r(\Lambda_s) + \int_{\Lambda_s}^{\Lambda_{s+t}} r'(v)\, dv,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\frac{r(\Lambda_{s+t}) - r(\Lambda_s)}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s} &= \frac{1}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s} \int_{\Lambda_s}^{\Lambda_{s+t}} r'(v)\, dv \\
&\leq \frac{1}{\Lambda_{s+t} - \Lambda_s} \int_{\Lambda_s}^{\Lambda_{s+t}} \max_{u \in [\Lambda_s, \Lambda_{s+t}]} r'(u)\, dv \\
&= \max_{u \in [\Lambda_s, \Lambda_{s+t}]} r'(u) \\
&= \max_{u \in \{1,\ldots,t\}} \frac{r(\Lambda_{s+u}) - r(\Lambda_{s+u-1})}{\Lambda_{s+u} - \Lambda_{s+u-1}}.
\end{aligned}$$

Isso prova 2) e conclui a demonstração.

□

Capítulo 4

A iteração de Graeffe tangente

Neste capítulo, definiremos a iteração de Graeffe tangente, a qual, conforme mostraremos, guarda a informação relativa não só aos módulos das raízes de um polinômio, mas também aos seus argumentos. Por conseguinte, essa nova iterada nos permitirá estabelecer um procedimento para recuperar os valores completos das raízes. Lembremos que, conforme mostrou o exemplo 1.10, é impossível calcular os argumentos das raízes através da iteração de Graeffe original.

O produto central deste capítulo é a demonstração do teorema 1.5, que estabelece as propriedades matemáticas do algoritmo de Graeffe tangente (algoritmo 7), o qual será exposto na seção 4.5.

4.1 Preliminares

Consideramos, neste capítulo, f um polinômio mônico livre de círculos com raízes $\zeta_1 \neq 0, \ldots, \zeta_d \neq 0$ ordenadas como no teorema 1.5.

Podemos utilizar a iteração de Graeffe renormalizada de f através do corolário 5.4, por exemplo, para estimar os módulos das raízes: obtemos $\alpha_1 \simeq |\zeta_1|, \ldots, \alpha_d \simeq |\zeta_d|$.

Consideremos agora uma perturbação de f: $f(x+\varepsilon)$. Analogamente, utilizando as iteradas de Graeffe renormalizadas de $f(x+\varepsilon)$ obtemos $\beta_1 \simeq |\zeta_1 - \varepsilon|, \ldots, \beta_d \simeq |\zeta_d - \varepsilon|$. Daí,

$$\alpha_j^2 - \beta_j^2 \simeq |\zeta_j|^2 - |\zeta_j - \varepsilon|^2 = -2\varepsilon \mathrm{Re}\, \zeta_j + \varepsilon^2, \qquad j = 1, \ldots, d,$$

donde podemos estimar os valores completos das raízes.

A utilização desse método, no entanto, implica a perda de metade da precisão ao calcular-se a diferença entre duas estimativas. Vamos buscar ver essa pertubação de uma outra maneira.

Definição 4.1. O k-jato de um polinômio f no ponto x é

$$J_{\varepsilon,k}(x) = f(x) + f'(x)\varepsilon + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\varepsilon^k.$$

Notemos que o k-jato de f assemelha-se à série de Taylor de f truncada após o k-ésimo termo; entretanto, o k-jato de f é visto como dependendo funcionalmente do ponto base x ao invés de ε.

Consideremos novamente a perturbação $f(x+\varepsilon)$. A sua representação em série de Taylor é

$$f(x+\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}\varepsilon^j.$$

Se ε é "pequeno", então $f(x+\varepsilon) \simeq f(x) + f'(x)\varepsilon$, e essa aproximação é tão boa quanto menor for ε. Se, entretanto, tratarmos ε como um infinitesimal, de maneira que $\varepsilon^2 = 0$, então vale a igualdade:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon = J_{\varepsilon,1}(x).$$

A representação da perturbação pelo 1-jato de f se mostrará conveniente.

Polinômios de grau d serão representados como pontos em $\mathbb{R}^{d+1}$ ou $\mathbb{C}^{d+1}$. Uma vez que ε não será armazenado em memória, 1-jets de polinômios serão representados como pontos em $\mathbb{R}^{2d+1}$ ou $\mathbb{C}^{2d+1}$.

4.2 A iteração

Definição 4.2. A iteração de Graeffe tangente do 1-jato de f é

$$TG(f(x) + \varepsilon f'(x)) = (-1)^d \left(f(\sqrt{x}) + \varepsilon f'(\sqrt{x})\right) \left(f(-\sqrt{x}) + \varepsilon f'(-\sqrt{x})\right).$$

A definição acima é motivada em [5] através da diferenciação do operador da iteração de Graeffe. Notemos que a expressão da iteração de Graeffe tangente é semelhante à da iteração original.

Lembrando que $\varepsilon^2 = 0$ e rearranjando termos, podemos reescrever:

$$TG(f(x) + \varepsilon f'(x)) = Gf + \varepsilon\,(-1)^d \left(f(\sqrt{x})f'(-\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})f'(\sqrt{x})\right).$$

Seja

$$g^{(N)}(x) + \varepsilon \dot{g}^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{d} (g_j^{(N)} x^j + \varepsilon \dot{g}_j^{(N)} x^j) = TG^N(f(x) + \varepsilon f'(x)). \tag{4.1}$$

Denotamos $\dot{g}^{(0)}(x)$, $\dot{g}^{(1)}(x)$ simplesmente por $\dot{f}(x) = f'(x)$, $\dot{g}(x)$, respectivamente.

Em coordenadas renormalizadas:

$$\begin{cases} \dot{r}_j^{(N)} = -2^{-N} \ln |\dot{g}_j^{(N)}| \\[2ex] \dot{\alpha}_j^{(N)} = \dot{g}_j^{(N)} / |\dot{g}_j^{(N)}|. \end{cases}$$

A equação (4.1) nos dá, de maneira óbvia, fórmulas para calcular a primeira iterada do 1-jato $f + \varepsilon f'$:

$$\begin{cases} g_j = (-1)^{d+j} f_j^2 + 2 \sum_{k \geq 1} (-1)^{d+j+k} f_{j+k} f_{j-k} \\[2ex] \dot{g}_j = 2 \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d+j+k} f_{j-k} f'_{j+k} \end{cases}$$

desde que assumamos que $f_j = f'_j = 0$ se $j < 0$ ou $j > d$. Daí, para passar dos coeficientes da iterada N para os da iteradas $N+1$, fazemos

$$\begin{cases} g_j^{(N+1)} = (-1)^{d+j} {g_j^{(N)}}^2 + 2 \sum_{k \geq 1} (-1)^{d+j+k} g_{j+k}^{(N)} g_{j-k}^{(N)} \\[2ex] \dot{g}_j^{(N+1)} = 2 \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d+j+k} g_{j-k}^{(N)} \dot{g}_{j+k}^{(N)} \end{cases} \tag{4.2}$$

considerando $g_j^{(N)} = \dot{g}_j^{(N)} = 0$ se $j < 0$ ou $j > d$.

Para evitar overflow na computação das iteradas, as fórmulas acima precisam, no entanto ser renormalizadas: isso é feito no algoritmo abaixo utilizando as operações de soma e produto em coordenadas renormalizadas que derivamos na seção 2.1. São necessários, também, ajustes para que os resultados sejam expressos no nível de renormalização seguinte.

4.3 Recuperando os argumentos das raízes

Seja $1 < \tilde{\rho} \leq \rho$ uma estimativa de ρ.

Algoritmo 4 ITERACAOTANGENTE $(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d)$

Entradas:

$r = r^{(N)}, \alpha = \alpha^{(N)}, \dot{r} = \dot{r}^{(N)}, \dot{\alpha} = \dot{\alpha}^{(N)}$ (as coordenadas renormalizadas de $TG^N(f + \varepsilon f'))$,

N (o nível de renormalização),

d (o grau do polinômio f).

Saída:

As coordenadas renormalizadas em nível de renormalização $N+1$ da $(N+1)$-ésima iterada de Graeffe tangente de $f + \epsilon f'$.

$p \leftarrow 2^{N+1}$

para $j \leftarrow 0$ a d **faça**

{ Primeiro, calculamos as primeiras parcelas de (4.2) em nível de renormalização $N+1$. }

$(s_j, \beta_j) \leftarrow (r_j, (-1)^{d+j}\alpha_j^2)$

$(\dot{s}_j, \dot{\beta}_j) \leftarrow ((r_j + \dot{r}_j)/2 + \ln 2/p, (-1)^{d+j}\alpha_j\dot{\alpha}_j)$

{ Agora, somamos as demais parcelas, uma a uma, em nível de renormalização $N+1$. }

para $k \leftarrow 1$ a $\min(j, d-j)$ **faça**

$(s_j, \beta_j) \leftarrow$ SomaRenormalizada$(s_j, \beta_j, (r_{j+k} + r_{j-k})/2 + \ln 2/p, (-1)^{d+j+k}\alpha_{j+k}\alpha_{j-k}, p)$

$(\dot{s}_j, \dot{\beta}_j) \leftarrow$ SomaRenormalizada$(\dot{s}_j, \dot{\beta}_j, (r_{j+k} + \dot{r}_{j-k})/2 + \ln 2/p, (-1)^{d+j+k}\alpha_{j+k}\dot{\alpha}_{j-k}, p)$

$(\dot{s}_j, \dot{\beta}_j) \leftarrow$ SomaRenormalizada$(\dot{s}_j, \dot{\beta}_j, (r_{j-k} + \dot{r}_{j+k})/2 + \ln 2/p, (-1)^{d+j-k}\alpha_{j-k}\dot{\alpha}_{j+k}, p)$

retorne $(s, \beta, \dot{s}, \dot{\beta})$

Enunciamos nesta seção dois resultados que relacionam os valores completos das raízes de um polinômio livre de círculos f com a convergência das iteradas de Graeffe tangente do seu 1-jet. Supomos I dado: para calculá-lo, basta utilizar, pela proposição 3.1, o algoritmo 3 com

$$N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}}.$$

Lembremos que um polinômio complexo livre de círculos só admite duas raízes de mesmo módulos se elas forem iguais:

Lema 4.3 (Caso complexo)**.** *Seja f um polinômio complexo livre de círculos com raízes $\zeta_1 \neq 0, \ldots, \zeta_d$ ordenadas como no teorema 1.5. Sejam $i_0 < \cdots < i_{l+1}$ os elementos de $I = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\}$. Então, se $k \in \{0, \ldots, l\}$, $d' = i_{k+1} - i_k$,*

$$\lim_{N \to \infty} -\frac{2^{-N}}{d'} \overline{\left(\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_{k+1}}}{g^{(N)}_{i_{k+1}}} - \frac{\dot{g}^{(N)}_{i_k}}{g^{(N)}_{i_k}} \right)} = \frac{\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}.$$

Além disso, se $N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}}$, o erro de aproximação não é em módulo maior que

$$2^{d+3} \frac{d}{d'} \frac{\rho^{-2^N}}{|\zeta_1|} \leq 2^{d+3} \frac{d}{d'} \frac{\tilde{\rho}^{-2^N}}{|\zeta_1|}.$$

Já no caso de termos um polinômio real livre de círculos, duas raízes de mesmo módulo são iguais ou conjugadas:

Algoritmo 5 RECUPERACOMPLEXO $(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d, I)$

Entradas:

$r = r^{(N)}, \alpha = \alpha^{(N)}, \dot{r} = \dot{r}^{(N)}, \dot{\alpha} = \dot{\alpha}^{(N)}$ (as coordenadas renormalizadas de $TG^N(f + \varepsilon f'))$,

N (o nível de renormalização),

d (o grau do polinômio f),

$I = \{i_0, \ldots, i_{l+1}\} = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\}$.

Saída:

$\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$ (as raízes aproximadas de f)

para $k \leftarrow 0$ a l **faça**

$d' = i_{k+1} - i_k$

{ Calculamos a soma (em coordenadas renormalizadas) das coordenadas renormalizadas de $\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_{k+1}}}{g^{(N)}_{i_{k+1}}}$ com $-\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_k}}{g^{(N)}_{i_k}}$. }

$(b, \beta) \leftarrow \text{SomaRenormalizada}(\dot{r}_{i_{k+1}} - r_{i_{k+1}}, \frac{\dot{\alpha}_{i_{k+1}}}{\alpha_{i_{k+1}}}, \dot{r}_{i_k} - r_{i_k}, \frac{\dot{\alpha}_{i_k}}{\alpha_{i_k}}, 2^N)$

{ Como veremos na seção 4.5, $m \to |\zeta_{i_{k+1}}|^2$ quando $N \to \infty$ }

$m \leftarrow \exp\left(2\frac{r_{i_{k+1}} - r_{i_k}}{d'}\right)$

$x \leftarrow -\frac{2^{-N}}{d'}\bar{\beta}\exp(-2^N b)m$

para $j \leftarrow 1$ a d' **faça**

$\tilde{\zeta}_{i_k+j} \leftarrow x$

retorne $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$

Lema 4.4 (Caso real). *Seja f um polinômio real livre de círculos com raízes $\zeta_1 \neq 0, \ldots, \zeta_d$ ordenadas como no teorema 1.5. Sejam $i_0 < \cdots < i_{l+1}$ os elementos de $I = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\}$. Então, se $k \in \{0, \ldots, l\}$, $d' = i_{k+1} - i_k$,*

$$\lim_{N\to\infty} -\frac{2^{-N}}{d'}\left(\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_{k+1}}}{g^{(N)}_{i_{k+1}}} - \frac{\dot{g}^{(N)}_{i_k}}{g^{(N)}_{i_k}}\right) = \frac{\operatorname{Re}\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}.$$

Além disso, se $N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}}$, o erro de aproximação não é em módulo maior que

$$2^{d+3}\frac{d}{d'}\frac{\rho^{-2^N}}{|\zeta_1|} \leq 2^{d+3}\frac{d}{d'}\frac{\tilde{\rho}^{-2^N}}{|\zeta_1|}.$$

As demonstrações dos lemas são postergadas para próxima seção. Para um dado N, os lemas 4.3 e 4.4 nos permitem estimar os valores completos das raízes através dos algoritmos 5 e 6.

4.4 Prova dos lemas 4.3 e 4.4

Demonstração (dos lemas 4.3 e 4.4). Seja $f + \varepsilon f'$ o 1-jato de f com raízes $\zeta_j + \varepsilon\dot{\zeta}_j$, onde ζ_j é solução de f. Como $\varepsilon^2 = 0$, temos que

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x),$$

Algoritmo 6 RecuperaReal $(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d, I)$

Entradas:

$r = r^{(N)}, \alpha = \alpha^{(N)}, \dot{r} = \dot{r}^{(N)}, \dot{\alpha} = \dot{\alpha}^{(N)}$ (as coordenadas renormalizadas de $TG^N(f + \varepsilon f'))$,

N (o nível de renormalização),

d (o grau do polinômio f),

$I = \{i_0, \ldots, i_{l+1}\} = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\}$.

Saída:

$\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$ (as raízes aproximadas de f)

para $k \leftarrow 0$ a l **faça**

$d' = i_{k+1} - i_k$

{ Calculamos a soma (em coordenadas renormalizadas) das coordenadas renormalizadas de $\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_{k+1}}}{g^{(N)}_{i_{k+1}}}$ com $-\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_k}}{g^{(N)}_{i_k}}$. }

$(b, \beta) \leftarrow \text{SomaRenormalizada}(\dot{r}_{i_{k+1}} - r_{i_{k+1}}, \frac{\dot{\alpha}_{i_{k+1}}}{\alpha_{i_{k+1}}}, \dot{r}_{i_k} - r_{i_k}, \frac{\dot{\alpha}_{i_k}}{\alpha_{i_k}}, 2^N)$

{ Como veremos na seção 4.5, $m \to |\zeta_{i_{k+1}}|^2$ quando $N \to \infty$ }

$m \leftarrow \exp\left(2\frac{r_{i_{k+1}} - r_{i_k}}{d'}\right)$

$x \leftarrow -\frac{2^{-N}}{d'}\beta \exp(-2^N b) m$

{ Se d' é ímpar, $\zeta_{i_k+1}, \ldots, \zeta_{i_k+d'}$ são reais. }

se d' é par e $|x| < \sqrt{m}$ **então**

$y \leftarrow \sqrt{m - |x|^2}$

senão

$x \leftarrow \sqrt{m}\frac{x}{|x|}$

$y \leftarrow 0$

para $j \leftarrow 1$ a d' **faça**

$\tilde{\zeta}_{i_k+j} \leftarrow x + i(-1)^{j+1} y$

retorne $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$

donde as raízes de $f + \varepsilon f'$ são $\zeta_j - \varepsilon$, isto é, $\dot{\zeta}_j = -1$. Como

$$(\zeta_j + \varepsilon\dot{\zeta}_j)^{2^N} = \zeta_j^{2^N} + \varepsilon 2^N \zeta_j^{2^N-1}\dot{\zeta}_j + O(\varepsilon^2),$$

as raízes $Z_j + \varepsilon\dot{Z}_j$ de $g^{(N)}(x) + \varepsilon\dot{g}^{(N)}(x) = TG^N(f(x) + \varepsilon f'(x))$ são tais que

$$\begin{cases} Z_j = \zeta_j^{2^N} \\ \dot{Z}_j = -2^N \zeta_j^{2^N-1}. \end{cases}$$

Notemos que $g_j^{(N)} + \varepsilon \dot{g}_j^{(N)} = (-1)^{d-j}\, \sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \ldots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right)$. Se $j \in I$ então

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \ldots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right) = \sum_{l=1}^{d} \dot{Z}_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)$$
$$= \sum_{l=1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)$$

Daí,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \ldots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)} = \sum_{l=1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)}$$
$$= \left(\sum_{l=0}^{j} + \sum_{l=j+1}^{d}\right) \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)}$$

Pelo lema 3.2,

$$\sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)} = \sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l \sum_{j_1 \neq l < \cdots < j_{d-j-1} \neq l} Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-j-1}}}{Z_{j+1} \ldots Z_d (1+c)}, \tag{4.3}$$

onde

$$|c| \leq \left(\binom{d}{j} - 1\right) \tilde{\rho}^{-2^N} < \binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N} < 2^d \tilde{\rho}^{-2^N} < 2^{-7d} < \frac{1}{2}$$

(a penúltima desigualdade foi obtida na seção 3.4). Como

$$\frac{|Z_{j+1}|}{|Z_k|} \geq \tilde{\rho}^{-2^N} \qquad k = 0, \ldots, j,$$

temos

$$\left| \frac{Z_l \sum_{j_1 \neq l < \cdots < j_{d-j-1} \neq l} Z_{j_1} \ldots Z_{j_{d-j-1}}}{Z_{j+1} \ldots Z_d (1+c)} \right| \leq \frac{1 + \binom{d-1}{d-j-1} \tilde{\rho}^{-2^N}}{1+c}$$
$$\leq \frac{1 + \binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}}{1 - \binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}}$$
$$= \left(1 + \binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^k$$
$$\leq \left(1 + \binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}\right) \left(1 + 2\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}\right)$$
$$= 1 + 3\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N} + 2\left(\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^2$$
$$\leq 1 + 4\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N},$$

onde nas duas últimas desigualdades usamos o fato que $\binom{d}{j} \tilde{\rho}^{-2^N} < \frac{1}{2}$. Concluímos da equação (4.3), então, que

$$\sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \ldots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \ldots, Z_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \ldots, Z_d\right)} = \sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} (1 + \eta_j),$$

com $|\eta_j| \leq 4\binom{d}{j}\tilde{\rho}^{-2^N}$.

Analogamente, temos que

$$\sum_{l=0}^{j} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l\, \sigma_{d-j-1}\left(Z_1, \dots, Z_{l-1}, Z_{l+1}, \dots, Z_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \dots, Z_d\right)} = \sum_{l=0}^{j} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l}{Z_{j+1}}(1+\eta_j).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \dots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \dots, Z_d\right)} - \sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| &\leq \left| \sum_{l=0}^{j} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \frac{Z_l}{Z_{j+1}}(1+\eta_j) + \sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l}(1+\eta_j) - \sum_{l=j+1}^{d} \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{j} \left| \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| \tilde{\rho}^{-2^N} |1+\eta_j| + \sum_{l=j+1}^{d} \left| \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| |\eta_j| \\
&\leq \max \left| \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| (j+1)\tilde{\rho}^{-2^N} \left(1 + 4\binom{d}{j}\tilde{\rho}^{-2^N}\right) \\
&\quad + \max \left| \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| (d-j)4\binom{d}{j}\tilde{\rho}^{-2^N} \\
&< \max \left| \frac{\dot{Z}_l}{Z_l} \right| d2^{d+2}\tilde{\rho}^{-2^N}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{g}_j^{(N)}}{g_j^{(N)}} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(g_j^{(N)} + \varepsilon \dot{g}_j^{(N)}) - g_j^{(N)}}{\varepsilon g_j^{(N)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \dots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right) - \sigma_{d-j}\left(Z_1, \dots, Z_d\right)}{\varepsilon \sigma_{d-j}\left(Z_1, \dots, Z_d\right)} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\sigma_{d-j}\left(Z_1 + \varepsilon \dot{Z}_1, \dots, Z_d + \varepsilon \dot{Z}_d\right)}{\sigma_{d-j}\left(Z_1, \dots, Z_d\right)} \qquad j = 0, \dots, d,
\end{aligned}$$

temos, se i_k, i_{k+1} são como no enunciado dos lemas,

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{\dot{g}_{i_k}^{(N)}}{g_{i_k}^{(N)}} - \frac{\dot{g}_{i_{k+1}}^{(N)}}{g_{i_{k+1}}^{(N)}} \right) + \sum_{i_k < l \leq i_{k+1}} 2^N \frac{1}{\zeta_l} \right| &\leq \left| \frac{\dot{g}_{i_{k+1}}^{(N)}}{g_{i_{k+1}}^{(N)}} + \sum_{l=i_{k+1}+1}^{d} 2^N \frac{1}{\zeta_l} \right| + \left| \frac{\dot{g}_{i_k}^{(N)}}{g_{i_k}^{(N)}} + \sum_{l=i_k+1}^{d} 2^N \frac{1}{\zeta_l} \right| \\
&\leq \max \left| \frac{1}{\zeta_l} \right| d2^{N+d+3}\tilde{\rho}^{-2^N}.
\end{aligned}$$

Assuma que estamos sob as hipóteses do lema 4.3. Como todas as raízes de mesmo módulo de um polinômio complexo livre de círculos são iguais,

$$\sum_{i_k < l \leq i_{k+1}} \frac{1}{\zeta_l} = \sum_{i_k < l \leq i_{k+1}} \frac{\overline{\zeta_l}}{|\zeta_l|^2} = d' \frac{\overline{\zeta_{i_{k+1}}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}$$

e, daí,

$$\left| \frac{2^{-N}}{d'} \left(\frac{\dot{g}_{i_{k+1}}^{(N)}}{g_{i_{k+1}}^{(N)}} - \frac{\dot{g}_{i_k}^{(N)}}{g_{i_k}^{(N)}} \right) - \frac{\overline{\zeta_{i_{k+1}}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2} \right| < 2^{d+3} \frac{d}{d'} \frac{\tilde{\rho}^{-2^N}}{|\zeta_1|}.$$

Agora, sob as hipóteses do 4.4,

$$\sum_{i_k<l\leq i_{k+1}} \frac{1}{\zeta_l} = d' \frac{\operatorname{Re}\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}.$$

Assim,

$$\left| \frac{2^{-N}}{d'} \left(\frac{\dot{g}^{(N)}_{i_{k+1}}}{g^{(N)}_{i_{k+1}}} - \frac{\dot{g}^{(N)}_{i_k}}{g^{(N)}_{i_k}} \right) - \frac{\operatorname{Re}\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2} \right| < 2^{d+3} \frac{d}{d'} \frac{\tilde{\rho}^{-2^N}}{|\zeta_1|}.$$

Isso conclui a demonstração.

4.5 O algoritmo de Graeffe tangente

Uma vez concebidos os algoritmos de aproximação das raízes de um polinômio, estamos prontos para estabelecer o algoritmo principal (algoritmo 7) e para provar o teorema 1.5.

Demonstração (do teorema 1.5)**.** Se

$$N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}},$$

o cálculo de I é correto pela proposição 3.1. A sua demonstração, feita na seção 3.4, nos diz, ainda, que para tais valores de N temos

$$2^d \tilde{\rho}^{2^N} < 2^{-7d}.$$

Nos algoritmos RecuperaReal e RecuperaComplexo, temos

$$m = \exp\left(2 \frac{r_{i_{k+1}} - r_{i_k}}{d'}\right)$$

donde, pela parte 1 do lema 3.5,

$$m = |\zeta_{i_{k+1}}|^2 \delta_1,$$

onde

$$\left(1 - 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^{2^{-N+2}} \leq \delta_1 \leq \left(1 + 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^{2^{-N+2}}.$$

Logo, $\delta_1 \to 1$ quando $N \to \infty$.

No caso de o polinômio ser complexo, temos pelo lema 4.3:

$$-\frac{2^{-N}}{d'} \bar{\beta} \exp(-2^N b) = \frac{\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}(1+\delta_2),$$

onde

$$|\delta_2| \leq 2^{d+3} \frac{d}{d'} \frac{\tilde{\rho}^{-2^N}}{|\zeta_1|}.$$

É claro que $\delta_2 \to 0$ quando $N \to \infty$. Daí,

$$\begin{aligned} |\zeta_{i_k+j} - x| &= \left| \left(\zeta_{i_k+j} - \frac{2^{-N}}{d'} \bar{\beta} \exp(-2^N b) m \right) \right| \\ &= \left| \left(\zeta_{i_k+j} - \frac{m}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2} \zeta_{i_{k+1}} (1+\delta_2) \right) \right| \\ &= |\zeta_{i_{k+j}}| \, |1 - \delta_1(1+\delta_2)| = \delta_3 \end{aligned}$$

e $\delta_3 \to 0$ quando $N \to \infty$.

Por outro lado, se o polinômio for real, o lema 4.4 nos diz que

$$-\frac{2^{-N}}{d'}\beta \exp(-2^N b) = \frac{\mathrm{Re}\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}(1+\delta_2).$$

Lembrando que, agora,

$$x = -\frac{2^{-N}}{d'}\beta \exp(-2^N b)m,$$

concluímos, através do mesmo raciocínio que acabamos de empregar, que

$$|\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j} - x| = \delta_3.$$

Temos que analisar os casos seguintes.
Caso 1: d' é ímpar. Nesse caso, as raízes em questão são, de fato, reais e, por conseguinte, o valor $y = 0$ designado para a parte imaginária das raízes pelo algoritmo é correto. O valor atribuído à parte real das raízes é $\sqrt{m}\frac{x}{|x|}$ e

$$\begin{aligned}|\zeta_{i_k+j} - \sqrt{m}\frac{x}{|x|}| = |\zeta_{i_k+j} - |\zeta_{i_k+j}|\sqrt{\delta_1}\frac{x}{|x|}| &= |\zeta_{i_k+j} - \zeta_{i_k+j}\sqrt{\delta_1}| \\ &= |\zeta_{i_k+j}||1-\sqrt{\delta_1}| \to 0 \text{ quando } N \to \infty,\end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos que, como N é grande, x e $\zeta_{i_k+j} = \mathrm{Re}\zeta_{i_k+j}$ têm o mesmo sinal.
Caso 2: d' é par e $|x| \geq \sqrt{m}$. Como $|x| \to |\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j}|$, $\sqrt{m} \to |\zeta_{i_k+j}|$ quando $N \to \infty$ e estamos supondo N grande, podemos assumir que essa desigualdade implica que

$$\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} = 0$$

e, portanto, o valor $y = 0$ designado para a parte imaginária da raiz é correto. Como no caso anterior, o valor $\sqrt{m}\frac{x}{|x|}$ atribuído a parte real da raiz é tal que

$$|\zeta_{i_k+j} - \sqrt{m}\frac{x}{|x|}| = |\zeta_{i_k+j}||1-\sqrt{\delta_1}| \to 0 \text{ quando } N \to \infty.$$

Caso 3: d' é par e $|x| < \sqrt{m}$. Nesse caso, o valor designado para a parte real da aproximação da raiz é x e já vimos que

$$|\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j} - x| = \delta_3.$$

Aqui, a parte imaginária da aproximação da raiz é $y = \sqrt{m - x^2}$. Se $\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} = 0$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} - y| = \sqrt{m-x^2} &= \sqrt{|\zeta_{i_{k+1}}|^2\delta_1 - \left(\frac{\mathrm{Re}\zeta_{i_{k+1}}}{|\zeta_{i_{k+1}}|^2}(1+\delta_2)|\zeta_{i_{k+1}}|^2\delta_1\right)^2} \\ &= \sqrt{|\zeta_{i_{k+1}}|^2\delta_1 - |\zeta_{i_{k+1}}|^2(1+\delta_2)^2\delta_1^2} \\ &= |\zeta_{i_{k+1}}|\sqrt{\delta_1 - \delta_1^2(1+\delta_2)^2} \to 0 \text{ quando } N \to \infty\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} > 0$,

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} - y| &= |\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j})^2} - \sqrt{m - x^2}| \, \frac{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j})^2} + \sqrt{m - x^2}}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j})^2} + \sqrt{m - x^2}} \\
&\leq \frac{|(|\zeta_{i_k+j}|^2 - m) + (x^2 - (\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j})^2)|}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j})^2}} \\
&\leq \frac{||\zeta_{i_k+j}|^2 - m| + |\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j} - x||\mathrm{Re}\zeta_{i_k+j} + x|}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (x \pm \delta_3)^2}} \\
&\leq \frac{|\zeta_{i_k+j}|^2|1 - \delta_1| + \delta_3(|\zeta_{i_k+j}| + \sqrt{m})}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (|x| + |\delta_3|)^2}} \\
&= \frac{|\zeta_{i_k+j}|^2|1 - \delta_1| + \delta_3|\zeta_{i_k+j}|(1 + \sqrt{\delta_1})}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (|x| + |\delta_3|)^2}} \to 0 \text{ quando } N \to \infty
\end{aligned}
$$

Finalmente, se $\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} < 0$ também vale

$$
|\mathrm{Im}\zeta_{i_k+j} - y| \leq \frac{|\zeta_{i_k+j}|^2|1 - \delta_1| + \delta_3|\zeta_{i_k+j}|(1 + \sqrt{\delta_1})}{\sqrt{|\zeta_{i_k+j}|^2 - (|x| + |\delta_3|)^2}} \to 0 \text{ quando } N \to \infty.
$$

Em qualquer caso, a convergência dos valores aproximados para os valores reais das raízes é dominada por $\tilde{\rho}^{-2^N}$. Como

$$
A\tilde{\rho}^{-2^N} = 2^{\log_2 A - 2^N \log_2 \tilde{\rho}} \leq 2^{-2^N C},
$$

onde C é uma constante que depende apenas das estimativas dos módulos e da separação das raízes. Isso prova o teorema.

Algoritmo 7 GraeffeTangente (f, d, e_real)

Entradas:

$f = \sum_{j=0}^{d} f_j x^j$ polinômio livre de círculos real ou complexo,

d (o grau de f),

e_real (variável booleana que indica se f é real ou complexo).

Saída:

Estimativas $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$ das raízes são produzidas a cada iteração do loop principal.

para $j \leftarrow 0$ a d **faça**
  se $f_j \neq 0$ **então**
    $\alpha_j \leftarrow f_j/|f_j|$
  senão
    $\alpha_j \leftarrow 1$
  $r_j \leftarrow -\ln|f_j|$
para $j \leftarrow 0$ a $d-1$ **faça**
  $f'_j \leftarrow (j+1) f_{j+1}$
  se $f'_j \neq 0$ **então**
    $\dot{\alpha}_j \leftarrow f'_j/|f'_j|$
  senão
    $\dot{\alpha}_j \leftarrow 1$
  $\dot{r}_j \leftarrow -\ln|f'_j|$
$N \leftarrow 0$
$\rho \leftarrow 2$
repita
  $(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}) \leftarrow \text{IteracaoTangente}(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d)$
  $N \leftarrow N + 1$
  $I \leftarrow \text{FechoEstritamenteConvexo}(r, d, N, \rho)$
  se e_real **então**
    $\tilde{\zeta} \leftarrow \text{RecuperaReal}(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d, I)$
  senão
    $\tilde{\zeta} \leftarrow \text{RecuperaComplexo}(r, \alpha, \dot{r}, \dot{\alpha}, N, d, I)$
  externe $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_d$
  se $N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \rho}$ **então**
    { A proposição 3.1 nos diz neste caso que I é correto para todos os polinômios com separação de raízes $\geq \rho$. Podemos, então, decrescer ρ. }
    $\rho \leftarrow \sqrt{\rho}$

Capítulo 5

Estimativas sobre o erro de aproximação do algoritmo de Graeffe tangente

O erro da aproximação das raízes calculada através do algoritmo 7 é função dos módulos e da separação das raízes do polinômio de entrada, que são desconhecidos. É de interesse, portanto, saber estimar tais parâmetros, pelo menos em alguns casos particulares, seja antes ou durante o cálculo: este capítulo é devotado a isto.

5.1 Estimativas da separação das raízes

Dentro do algoritmo de Graeffe tangente (algoritmo 7), os procedimentos RecuperaReal e RecuperaComplexo apenas provêem uma aproximação válida das raízes quando $I = \{j : |\zeta_j| < |\zeta_{j+1}|\} \cup \{0, d\}$, que é dado como entrada, é, de fato, correto. Pela proposição 3.1, isto ocorrerá quando

$$N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}},$$

onde $1 < \tilde{\rho} \leq \rho$ é uma estimativa de ρ.

Uma estimativa da separação das raízes, se dadas também estimativas dos módulos das raízes, permite calcularmos, analisando a demonstração do teorema 1.5, o erro da aproximação das raízes obtida através do algoritmo de Graeffe tangente numa dada iteração N. Essa informação nos possibilita, por conseguinte, estabelecer um critério de parada para o algoritmo: é fácil determinar um número de iterações a partir do qual obtemos valores dentro de uma precisão desejada.

Com essa motivação, apresentaremos agora resultados que permitem estimar a separação das raízes dentro de condições gerais sobre os coeficientes do polinômio de entrada.

Em [6] e [7], Ostrowski estuda as propriedades das raízes no caso geral das séries de Laurent. Com exceção do próximo lema, os resultados apresentados abaixo são adaptações de resultados de Ostrowski para o caso particular dos polinômios.

Lema 5.1. *Seja*

$$p(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j x^j$$

onde $p_0 = 1, |p_j| \leq 1 \quad \forall j < 0, |p_j| \leq \mu^j \quad \forall j > 0,$

$$\frac{1}{9} > \mu = \frac{1}{M} > 0$$

e sejam τ_1, τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$), as duas raízes da equação

$$\psi(\tau) := \tau^2 - \frac{3+M}{2}\tau + M = 0.$$

Então τ_1, τ_2 são reais, $p(x)$ não tem nenhuma raiz na coroa circular $\tau_1 < |x| < \tau_2$ e

$$2 < \tau_1 < \frac{2}{1-3\mu} < (2+9\mu) < 3 < \frac{M}{3} < \left(\frac{M}{2} - \frac{3}{2}\right) < \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{2} - 9\mu\right) < \tau_2 < \frac{M-1}{2}. \tag{5.1}$$

Demonstração. τ_1, τ_2 são reais já que $M > 9$ implica

$$\left(-\frac{3+M}{2}\right)^2 - 4M = \frac{(M-1)(M-9)}{4} > 0.$$

Como

$$\psi(2) = 1 > 0$$

e

$$\begin{aligned} \psi(2+9\mu) &= (2+9\mu)^2 - \left(\frac{3+M}{2}\right)(2+9\mu) + M \\ &= \frac{(9\mu-1)(18\mu+7)}{2} < 0, \end{aligned}$$

temos, pelo Teorema do Valor Intermediário e pelo fato que $\tau_1\tau_2 = M > 9$, que $2 < \tau_1 < 2+9\mu < \tau_2$. De $\tau_1 + \tau_2 = \frac{M+3}{2}$ segue que

$$\tau_1 < \frac{M}{2} - \frac{1}{2} - 9\mu < \tau_2 < \frac{M-1}{2}.$$

As relações

$$2 + 9\mu < 3 < \frac{M}{3} < \frac{M}{2} - \frac{3}{2} < \frac{M}{2} - \frac{1}{2} - 9\mu$$

resultam imediatamente de $\mu < \frac{1}{9}, M > 9$. Como $\tau_1 < \frac{M-3}{2} < \tau_2$, temos

$$\tau_1 < \frac{\tau_1\tau_2}{\frac{M-3}{2}} = \frac{M}{\frac{M-3}{2}} = \frac{2}{1-3\mu} < \tau_2.$$

Que $\frac{2}{1-3\mu} < 2 + 9\mu$ resulta de

$$2 < (2+9\mu)(1-3\mu) = 2 + 3\mu - 27\mu^2$$

e, com isso, demonstramos a equação (5.1).

Suponhamos, por absurdo, que exista uma raiz ζ de $p(x)$ tal que $\tau_1 < |\zeta| < \tau_2$. Então

$$1 = -\sum_{j=-\infty}^{-1} p_j\zeta^j - \sum_{j=1}^{\infty} p_j\zeta^j \leq \sum_{j=-\infty}^{-1} |p_j||\zeta|^j + \sum_{j=1}^{\infty} |p_j||\zeta|^j \leq \sum_{j=-\infty}^{-1} |\zeta|^j + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j|\zeta|^j = \frac{1}{|\zeta|-1} + \frac{|\zeta|}{M-|\zeta|}.$$

Multiplicando ambos os lados da inequação acima por $\frac{(|\zeta|-1)(M-|\zeta|)}{2}$, obtemos

$$|\zeta|^2 - \frac{3+M}{2}|\zeta| + M \geq 0,$$

o que implica $|\zeta| \leq \tau_1$ ou $|\zeta| \geq \tau_2$, uma contradição.

□

Note que, se $M \to \infty$, $\tau_1 \to 2$ e $\tau_2 \to \infty$.

Lema 5.2. *Seja*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d} f_j x^j$$

um polinômio de grau d sem raízes nulas e suponha que tenhamos

$$D_k = \frac{R_{k+1}}{R_k} = M > 9.$$

para $k \in \{0, \ldots, d-1\}$. Então $f(x)$ não possui raízes na coroa circular

$$R_k \tau_1 < |x| < \frac{R_{k+1}}{\tau_1},$$

onde τ_1 tem o mesmo significado do lema anterior e $\tau_1 = 2$ quando $D_k = \infty$.

Demonstração. Como k é um índice principal do diagrama de Newton de f, $|f_k| = T_k$. Se $k > 0$ (donde $R_k > 0$), considere a função

$$p(x) := \frac{f(R_k x)}{f_k R_k^k x^k} = \sum_{j=-k}^{d-k} p_j x^j.$$

Temos

$$|p_j| = \left| \frac{f_{k+j} R_k^{k+j}}{f_k R_k^k} \right| = \frac{|f_{k+j}||R_k^j|}{|f_k|} = \frac{|f_{k+j}| R_k^j}{T_k} \leq \frac{T_{k+j} R_k^j}{T_k} \qquad -k \leq j \leq d-k.$$

e, em particular,

$$p_0 = 1.$$

Se $0 < j \leq d-k$,

$$|p_j| = \frac{T_{k+1}}{T_k} \cdots \frac{T_{k+j}}{T_{k+j-1}} R_k^j = \frac{1}{R_{k+1} \ldots R_{k+j}} R_k^j \leq \frac{R_k^j}{R_{k+1}^j} = \left(\frac{1}{D_k} \right)^j$$

Se $-k \leq j < 0$,

$$|p_j| = \frac{T_{k-|j|}}{T_{k-|j|+1}} \cdots \frac{T_{k-1}}{T_k} R_k^{-|j|} = R_{k-|j|} \ldots R_k R_k^{-|j|} \leq R_k^{|j|} R_k^{-|j|} = 1.$$

Podemos, portanto, aplicar o lema 5.1 para p com $M = D_k$. Isso nos dá que p não tem raízes na coroa circular $\tau_1 < |x| < \tau_2$, o que implica que f não tem raízes na coroa

$$R_k \tau_1 < |x| < R_k \tau_2.$$

Como

$$R_k \tau_2 = R_k \frac{M}{\tau_1} = \frac{R_{k+1}}{\tau_1},$$

isso prova o lema para $k > 0$. Para o caso $k = 0$, temos $f_0 = T_0$, $R_0 = 0$ e $D_0 = \infty$. Considere a sequência $(R_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $R_0^n = \frac{1}{n}$ para todo n. Definamos

$$D_0^n := \frac{R_1}{R_0^n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$p(x) := \frac{f(R_0^n x)}{f_0}$$

Então, $p_0 = 1$ e, se $j > 0$,

$$|p_j| = \frac{|f_j(R_0^n)^j|}{|f_0|} = \frac{|f_j|(R_0^n)^j}{T_0} \leq \frac{T_j(R_0^n)^j}{T_0} = \frac{T_1}{T_0} \cdots \frac{T_j}{T_{j-1}}(R_0^n)^j = \frac{1}{R_1 \dots R_j} \leq \frac{(R_0^n)^j}{(R_1)^j} = \left(\frac{1}{D_0^n}\right)^j,$$

donde p satisfaz as hipóteses do lema 5.1 para $M = D_0^n$. Logo, $f(x)$ não possui raízes na coroa circular

$$R_0^n \tau_1^n < |x| < \frac{R_1}{\tau_1^n},$$

onde τ_1^n é a menor raiz real da equação

$$\tau^2 - \frac{3 + D_k^n}{2}\tau + D_k^n = 0.$$

Como $R_0^n \to 0$, $\tau_1^n \to 2$ quando $n \to \infty$, o caso $k = 0$ está demonstrado.

□

Teorema 5.3. *Seja*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d} f_j x^j$$

um polinômio de grau d sem raízes nulas e suponhamos que para $k, k' \in \{0, \dots, d-1\}$, $k < k'$,

$$M := \min(D_k, D_{k'}) > 9.$$

Então, $f(x)$ não possui raízes nas coroas circulares

$$\tau_1 R_k < |x| < \frac{R_{k+1}}{\tau_1}, \quad \tau_1 R_{k'} < |x| < \frac{R_{k'+1}}{\tau_1}$$

e possui exatamente $k' - k$ raízes na coroa circular

$$\frac{R_{k+1}}{\tau_1} \leq |x| \leq \tau_1 R_{k'},$$

onde τ_1 tem o mesmo significado que nos lemas.

Demonstração. Definamos

$$\begin{cases} f_1(x) := \sum_{j=0}^{k-1} f_j x^j \\ f_2(x) := \sum_{j=k}^{k'} f_j x^j \\ f_3(x) := \sum_{j=k'+1}^{d} f_j x^j \end{cases}$$

e consideremos o polinômio

$$f^{(t)}(x) = t f_1(x) + f_2(x) + t f_3(x) \qquad |t| \leq 1,$$

que é igual a $f(x)$ para $t = 1$.

Denotemos por $T_j^{(t)}$, $R_j^{(t)}$, $D_j^{(t)}$, respectivamente, os coeficientes do majorante normal minimal de $f^{(t)}(x)$, a j-ésima inclinação númerica de $f^{(t)}(x)$ e o j-ésimo desvio de $f^{(t)}(x)$. É claro que

$$T_k = T_k^{(t)}, T_{k+1} = T_{k+1}^{(t)}, \dots, T_{k'} = T_{k'}^{(t)}$$

e, como $|f_j^{(t)}| \leq |f_j|$, temos

$$T_j^{(t)} \leq T_j \qquad j < k, \quad j > k'.$$

Em particular, isso implica que

$$D_k^{(t)} \geq D_k > 9, \quad D_{k'}^{(t)} \geq D_{k'} > 9,$$

e podemos aplicar o lema 5.2 a $f^{(t)}(x)$ para k e para k'. A conclusão é que $f^{(t)}(x)$ não tem raízes nas coroas circulares

$$\tau_{1_k} R_k^{(t)} < |x| < \frac{R_{k+1}^{(t)}}{\tau_{1_k}} = \frac{R_{k+1}}{\tau_{1_k}}, \quad \tau_{1_{k'}} R_{k'} = \tau_{1_{k'}} R_{k'}^{(t)} < |x| < \frac{R_{k'+1}^{(t)}}{\tau_{1_{k'}}},$$

onde τ_{1_k} e $\tau_{1_{k'}}$ são raízes de, respectivamente,

$$\tau^2 - \frac{3 + D_k^{(t)}}{2}\tau + D_k^{(t)}, \quad \tau^2 - \frac{3 + D_{k'}^{(t)}}{2}\tau + D_{k'}^{(t)}.$$

Como τ_1 raiz de

$$\tau^2 - \frac{3 + M}{2}\tau + M$$

é tal que $\tau_1 = \max(\tau_{1_k}, \tau_{1_{k'}})$ (basta verificar que a derivada de $\omega(x) = \frac{3+x}{2} - \sqrt{\frac{(x-1)(x-9)}{4}}$ é negativa para $x > 9$), concluímos que $f^{(t)}$ não tem raízes nas coroas

$$\tau_1 R_k^{(t)} < |x| < \frac{R_{k+1}}{\tau_1}, \quad \tau_1 R_{k'} < |x| < \frac{R_{k'+1}^{(t)}}{\tau_1}. \tag{5.2}$$

Variando t continuamente de maneira que $|t|$ permaneça menor ou igual a 1, o número de raízes de $f^{(t)}(x)$ situadas na coroa circular

$$\frac{R_{k+1}}{\tau_1} \leq |x| \leq \tau_1 R_{k'} \tag{5.3}$$

não muda, já que as raízes de $f^{(t)}(x)$ não podem "atravessar" as coroas (5.2). Portanto, o número de raízes de $f^{(t)}(x)$ na coroa (5.3) é igual a esse número para $t = 0$, isto é, é igual ao número de raízes do polinômio $f_2(x)$ na coroa (5.3).

Como $R_k^{(0)} = 0$ e $R_{k'+1}^{(0)} = \infty$, como convencionado no capítulo 2, as coroas (5.2) preenchem todo o exterior da coroa (5.3), com exceção da origem. Como f_2 tem k raízes nulas, as $k' - k$ raízes restantes estão na coroa (5.3).

□

Corolário 5.4. *Seja*

$$g^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{d} g_j^{(N)} x^j$$

um polinômio sem raízes nulas e suponha que

$$M_k := \min(D_k^{(N)}, D_{k+1}^{(N)}) > 9 \qquad k = 0, \ldots, d-2.$$

Se τ_{1_k} é a menor raiz real de

$$\tau^2 - \frac{3 + M_k}{2}\tau + M_k = 0,$$

então

$$\rho^{2^N} \geq \min_{k \in \{0,\ldots,d-2\}} \min\left(\frac{\frac{R_{k+1}^{(N)}}{\tau_{1_k}}}{\tau_{1_k} R_k^{(N)}}, \frac{\frac{R_{k+2}^{(N)}}{\tau_{1_k}}}{\tau_{1_k} R_{k+1}^{(N)}} \right).$$

Demonstração. Aplicando o teorema 5.3 com $f(x) = g^{(N)}(x)$, $k' = k+1$, $k = 0, \ldots, d-2$, confinamos uma raiz em cada uma das $d-1$ coroas circulares

$$\frac{R_{k+1}}{\tau_{1_k}} \leq |x| \leq \tau_{1_k} R_{k+1}$$

e garantimos que não há raízes nas coroas

$$\tau_{1_k} R_k < |x| < \frac{R_{k+1}}{\tau_{1_k}}, \quad \tau_{1_k} R_{k+1} < |x| < \frac{R_{k+2}}{\tau_{1_k}},$$

as quais nos permitem obter uma cota inferior para a separação de raízes de $g^{(N)}$ conforme no enunciado do teorema.

□

Esta conseqüência do teorema anterior não havia sido explicitada em [7].

Se o polinômio de entrada f satisfizer as hipóteses do corolário, então podemos fazer uma estimativa *a priori* de ρ, como no exemplo a seguir.

Exemplo 5.5. Seja

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0,$$

cujas raízes são $2 \pm \sqrt{3}$ e cuja separação das raízes é

$$\rho = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \simeq 13.93.$$

Como

$$R_1 = \frac{1}{4}, R_2 = \frac{4}{1}$$

temos

$$D_1 = 16$$

donde, uma vez que $D_0 = \infty$,

$$\min(D_0, D_1) = 16 > 9.$$

Logo, podemos utilizar o corolário 5.4 para $N = 0$:

$$\begin{aligned} \tau_{1_0} &= \frac{\frac{19}{2} - \sqrt{\frac{19}{2}^2 - 4 \times 16}}{2} \\ &< 2.188 \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} \rho &\geq \min\left(\frac{\frac{0.25}{2.188}}{2.188 \times 0}, \frac{\frac{4}{2.188}}{2.188 \times 0.25}\right) \\ &> 3.342. \end{aligned}$$

Caso f não satisfizer as hipóteses do corolário, podemos também testar as iteradas de Graeffe de f: se algum desses polinômios satisfizer tais hipóteses, então uma estimativa *a posteriori* de ρ pode ser feita, já que as raízes das iteradas são potências das raízes do polinômio original.

Afirmamos que, se $|\zeta_1| < \cdots < |\zeta_d|$, então podemos aplicar o corolário 5.4 para estimar as raízes de $g^{(N)}$ (e, consequentemente, as de f) para N suficientemente grande. Com efeito, como vimos na seção

2.2, $T_j^{(N)} = |g_j^{(N)}|$ para N suficientemente grande nesse caso. Daí, se $j \in \{1, \ldots, d-1\}$,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} D_j^{(N)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{|g_j^{(N)}|}{|g_{j+1}^{(N)}|}}{\frac{|g_{j-1}^{(N)}|}{|g_j^{(N)}|}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{|\zeta_{j+1}|}{|\zeta_j|}\right)^{2^N} \\ &= \infty,\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da fórmula fundamental do método de Graeffe (1.6). Isso demonstra a afirmação.

Assim, uma classe de polinômios cujas separações das raízes podemos estimar utilizando o corolário 5.4 é o conjunto de todos os polinômios que não têm duas raízes de mesmos módulos.

Outro teorema útil para estimar ρ, que enunciamos sem demonstração, foi provado por Malajovich em [4]:

Teorema 5.6. *Se*

$$g^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{d} g_j^{(N)} x^j$$

é um polinômio com coeficientes inteiros então

$$\rho^{2^N} > 1 + \left(8 \max |g_j^{(N)}|\right)^{-2d}.$$

Como mostrou o exemplo 1.6 da seção 1.1, as estimativas obtidas através do corolário 5.4 são superiores às obtidas através do teorema 5.6.

5.2 Estimativas dos módulos das raízes

Conforme observado na seção anterior, dada uma estimativa $1 < \tilde{\rho} \leq \rho$ de ρ, podemos definir um critério de parada para o algoritmo de Graeffe tangente desde que tenhamos estimativas dos módulos das raízes.

O teorema 2.14 diz que

$$(3d)^{-2^{-N}} \leq \frac{|\zeta_j|}{{R_j^{(N)}}^{2^{-N}}} \leq (3d)^{2^{-N}} \qquad j = 1, \ldots, d,$$

e, portanto, nos fornece uma maneira de realizar estimativas *a priori* e *a posteriori* dos módulos das raízes. Para efetuar o referido cálculo na iteração N, precisamos determinar o diagrama de Newton renormalizado de f de nível N, isto é, precisamos executar o algoritmo 2 para a entrada $(r^{(N)}, d)$. Apesar de a conclusão de tal teorema dizer respeito a esta seção, esse resultado foi enunciado antes porque o seu corolário demonstra a convergência do diagrama de Newton renormalizado.

Por outro lado, se $N \geq 0$ e $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1} = d$ são como na definição 2.18, segue da parte 1 do lema 3.5 que

$$\frac{r^{(N)}(i_{k+1}) - r^{(N)}(i_k)}{i_{k+1} - i_k} = \ln|\zeta_{i_{k+1}}| + 2^{-N+1}\ln(1+c) \qquad k = 0, \ldots, l,$$

onde

$$|c| < 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}.$$

Daí, concluímos imediatamente o seguinte:

Corolário 5.7. *Se $N \geq 0$ e $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_l < i_{l+1} = d$ são como na definição 2.18, então*

$$\exp\left(\frac{r^{(N)}(i_{k+1}) - r^{(N)}(i_k)}{i_{k+1} - i_k}\right) = |\zeta_{i_{k+1}}|\delta \qquad k = 0, \ldots, l,$$

onde

$$\left(1 - 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^{2^{-N+1}} \leq \delta \leq \left(1 + 2^d \tilde{\rho}^{-2^N}\right)^{2^{-N+1}}$$

e, portanto, $\delta \to 1$ quando $N \to \infty$.

O corolário acima provê um método para aproximar os módulos das raízes de um polinômio supondo que uma estimativa de ρ e os índices principais $I \setminus \{0, d\}$ do polinômio sejam conhecidos. Para aplicar o resultado, na verdade, basta conhecer $\tilde{\rho}$, já que a proposição 3.1 diz que podemos calcular I executando o algoritmo 3 com entradas ($r^{(N)}$, d, N, $\tilde{\rho}$) desde que

$$N > 3 + \log_2 \frac{d \ln 2}{\ln \tilde{\rho}}.$$

Vale observar que se tivermos estimativas dos módulos das raízes cujos intervalos de indeterminação sejam dois a dois disjuntos, então podemos obter adicionalmente uma estimativa para a separação das raízes.

Referências Bibliográficas

[1] N. J. Higham, Accuracy and stability of numerical algorithms, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996

[2] A. S. Householder, Dandelin, Lobačevskiĭ, or Graeffe?, Amer. Math. Monthly, 66 (1959), pp. 464-466

[3] G. Malajovich, Condition number bounds for problems with integer coefficients, J. Complexity 16 (2000), pp. 529-551

[4] G. Malajovich, J. P. Zubelli, On the geometry of Graeffe iteration, J. Complexity 17 (2001), pp. 541-573

[5] G. Malajovich, J. P. Zubelli, Tangent Graeffe iteration, Numer. Math., 89 (2001), pp. 749-782

[6] A. Ostrowski, Recherches sur la méthode de Graffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent, Acta Math., 72 (1940), pp. 99-155

[7] A. Ostrowski, Recherches sur la méthode de Graffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent. Chapitres III et IV, Acta Math., 72 (1940), pp. 157-257

[8] V. Y. Pan, Solving a polynomial equation: some history and recent progress, SIAM Rev., 39 (1997), pp. 187-220

[9] J. H. Wilkinson, Rounding errors in algebraic processes, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ (1963)