¸OES LIPCHITZ2.3116Análise Convexateo.2.31

Uma aplicação do Transporte de Massa as desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

Agosto de 2007

Uma aplicação do Transporte de Massa para desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg

por

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Wladimir Neves

Rio de Janeiro

Agosto de 2007

.

Bazán Pacoricona, Aldo Amilcar

A663c Uma aplicação do Transporte de Massa para

2007 desigualdades precisas de Sobolev e

Gagliardo-Nirenberg/Aldo Amilcar Bazán Pacoricona.-

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2007.

v,89f.; 29 cm

Dissertação(Mestrado) - UFRJ/IM. Programa de

Pós-Graduação em Matemática, 2007.

Orientador: Wladimir A. das Neves

Bibliográfia: p.86.

1. Análise Funcional - tese. 2. Desigualdades funcionais. I. Neves, Wladimir Augusto das. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

Uma aplicação do Transporte de Massa para desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo Nirenberg

por

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Wladimir Neves - UFRJ-IM
(Presidente)

Prof. Dr. Helena Nussenzveig - UNICAMP

Prof. Dr. Hermano Frid - IMPA

Prof. Dr. Ângela Biazutti - UFRJ-IM

Rio de Janeiro

Agosto de 2007

Uma aplicação do Transporte de Massa para desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

Orientador: Wladimir A. das Neves

Resumo

Resumo da Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

O objetivo deste trabalho é obter desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg, identificando a forma de todos os minimizadores da desigualdade de Sobolev. Além disso, o trabalho é feito para uma norma arbitrária no $\mathbb{R}^n$, generalizando os resultados obtidos para uma norma euclidiana.

Rio de Janeiro

Agosto de 2007

Uma aplicação do Transporte de Massa para desigualdades precisas de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

Orientador: Wladimir A. das Neves

Abstract

Abstract da Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

The objective of this work is to get sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg Inequalities, identifying the form of all its minimizadores. Moreover, the work is made for an arbitrary norm on $\mathbb{R}^n$, generalizing the results gotten for an Euclidean norm.

Rio de Janeiro

Agosto de 2007

Agradecimentos

Agradeço a Deus e aos meus pais, Felix Bazán Olivo e Yolanda Pacoricona de Bazán, por seu apoio constante. Aos profesores Rafael Cabanillas Zannini, José Luyo Sánchez e Ricardo Fuentes Apolaya, por me ajudar a ter a oportunidade de estudar nesta universidade.

Ao apoio e incentivo de todas as pessoas que conheci nesta etapa da minha vida; em especial Dionicio Orlando Moreno Vega, Ivan Gonzales Gargate, Paul Nina Quispe, Maria Zegarra Garay, Leandro Tomaz de Araujo, Marcelo Rainha, Bruno Mintz, André Pereira. Finalmente, os meus cordiais agradecimentos aos professores do Instituto de Matemática da UFRJ.

Rio de Janeiro,

Aldo Amilcar Bazán Pacoricona

.

Para meus pais Felix e Yolanda

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja u uma função no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Então, para $1 \leq p < n$, $n \geq 2$, $p^* = np/(n-p)$ e uma constante $C > 0$ que depende de n e p, tem-se

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \,,$$

que é conhecida como uma desigualdade tipo Sobolev (as desigualdades tipo Sobolev, em geral são aquelas nas quais é possivel obter informação das derivadas menores de uma funçaõ, conhecendo as derivadas maiores dela, para mais detalhes ver ([17])). Já as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg tem a forma seguinte:

1. Para $0 < p < 2$, com $p = 2m/(2m-1)$, onde m é um inteiro tal que $m \geq 2$

$$\|u\|_p \leq A_p \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_{2(p-1)}^{1-\theta}$$

2. Para $2 < p \leq (2n)/(n-2)$, com $p = 2/(2m-1)$, m como no caso anterior e n um inteiro tal que $n \geq 3$

$$\|u\|_p \leq A_p \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_{\frac{p}{2}+1}^{1-\theta}$$

Nestas fórmulas, θ é um expoente tal que $0 \leq \theta \leq 1$. Observa-se que, para $p = (2n)/(n-2)$, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é exatamente a desigualdade de Sobolev para funções em $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. É possivel escrever estas duas desigualdades como

$$\|f\|_r \leq A_n(p,r,s) \|\nabla f\|_p^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$$

onde $n \geq 2$, $1 < p < n$, $s < r \leq p^*$ e $\theta = \theta(n,p,r,s) \in (0,1)$

São resultados conhecidos tanto as constantes óptimas como os minimizadores da desigualdade de Sobolev no caso em que a norma do espaço $\mathbb{R}^n$ seja a norma euclidiana. Além disso, também é conhecida a equivalência da desigualdade de Sobolev, no caso $p = 1$ com a desigualdade isoperimétrica (entre todos os compactos com fronteira suave dada, o conjunto com volume maior é a bola n-dimensional). No caso das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, o cálculo das constantes óptimas é ainda um problema aberto, mas, em casos particulares, foi obtido em [10] através do cálculo das variações. Mais exatamente, foi encontrada uma forma precisa para estas desigualdades no caso em que os parámetros verifiquem as relações

$$p(s-1) = r(p-1),$$

$$p(r-1) = s(p-1),$$

sendo no primeiro caso $r, s > p$, e no segundo caso $r, s < p$.

Nesta disertação, será considerada uma norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$ e encontraremos as desigualdades precisas tanto de Sobolev como de Gagliardo-Nirenberg e os minimizadores delas. Os resultados a utilizar serão alguns tópicos de Transporte de Massa, além de duas desigualdades importantes: a desigualdade aritmética-geométrica e a desigualdade de Holder (para funções convexas).

A dissertação esta dividida em cinco capítulos e um apêndice de notação.

No capítulo 2, enunciamos alguns dos resultados básicos da Teoria da Medida, Análise Funcional, Análise Convexa e Transporte de Massa que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

No capítulo 3, apresentaremos a desigualdade precisa de Sobolev, obtida a través de propriedades de Transporte de Massa, para normas arbitrárias e os seus minimizadores, os quais terão uma forma similar aos que se tem para o caso de normas euclidianas; mostrando também um resultado de isoperimetria, que também é feito para uma norma arbitrária.

No capítulo 4, mostramos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, no caso particular, encontrado em [10] por métodos diferentes, encontrando também os minimizadores dela. Será observado nas demonstrações que a desigualdade de Sobolev poderia ter sido incluida como um caso particular de Gagliardo-Nirenberg, sendo separada por ser de interese independente.

No capítulo 5 observamos que, tendo encontrado uma função extremal para a desigualdade de Sobolev, é possivel, a partir dela, obter uma forma geral para todos os minimizadores desta desigualdade.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e resultados , assim como exemplos a serem utilizados ao longo do trabalho. Admitiremos a notação do Apêndice A.

2.1 Espaços normados finito-dimensionais

Definição 2.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo K. Uma função real $\|\cdot\|$ é chamada uma norma se tem as seguintes propriedades*

1. *Se $x \in E$ então $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$;*

2. *Se $\lambda \in K$ e $x \in E$, então $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;*

3. *Se $x, y \in E$, então $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Um espaço vetorial E com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado um espaço vetorial normado, e será denotado por $(E, \|\cdot\|_E)$, onde $\|\cdot\|_E$ é a norma sobre o espaço E.

Nota 2.2. *Observa-se o seguinte:*

1. *Um corpo (ou campo) K é um conjunto, munido de duas operações, chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem certas condições. No nosso caso, o corpo K será $\mathbb{R}$, e o espaço vetorial será $\mathbb{R}^n$.*

2. *A dimensão de um espaço vetorial V é o cardinal de uma base qualquer de V. Neste trabalho só serão considerados espaços de dimensão finita, i.e., espaços que tem um número finito de elementos em alguma base dele.*

Definição 2.3. *Seja o espaço vetorial normado* $(E, \|\cdot\|_E)$. *Denotamos por* E^* *o espaço de todos os funcionais lineares contínuos definidos sobre* E *(i.e., as aplicações definidas sobre* E *com valores reais que sejam lineares e continuos) e definimos uma norma* $\|\cdot\|_*$ *sobre* E^* *como*

$$\|f\|_* = sup\left\{|f(x)|; x \in E, \|x\|_E \leq 1\right\},$$

então, o espaço vetorial normado $(E^*, \|\cdot\|_*)$ *será denominado o espaço dual de* E.

Nota 2.4. *É possivel definir* $\|\cdot\|_*$ *também como*

$$\|f\|_* = sup\left\{|f(x)|; x \in E, \|x\|_E = 1\right\}.$$

Assim, se temos um espaço vetorial V, é possivel obter um outro espaço vetorial V^* a partir dele. Nos dois teoremas a seguir, estabelecemos uma relação entre V e V^*.

Teorema 2.5. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* n, *e* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *uma base de* V, *então existe uma base* $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *determinada de forma unívoca en* V^*, *tal que* $x_i.y_j = \delta_{ij}$, *onde* δ_{ij} *representa os valores 0 (quando* $i \neq j$*) e 1 (quando* $i = j$*). Consequentemente,* $dimV = dimV^*$.

Demonstração. Ver [16] p.34. □

Teorema 2.6. *Dois espaços vetorias finito dimensionais* V *e* W *tem a mesma dimensão se e somente se são isomorfos (i.e., existe uma correspondência bijetiva entre* V *e* W, *que é linear e que é um homeomorfismo)*

Demonstração. Ver [4] p.216. □

Exemplo 2.7. *Seja o espaço vetorial normado* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, *onde* $\|\cdot\|$ *é uma norma arbitrária. O espaço dual dele será* $((\mathbb{R}^n)^* \|\cdot\|_*)$. *Como* $\mathbb{R}^n$ *tem dimensão finita, pelo teorema (*2.5*), o espaço dual* $(\mathbb{R}^n)^*$ *terá dimensão finita, e mais ainda, a dimensão dele será* n. *Assim, se* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *é a base usual em* $\mathbb{R}^n$, *existirá uma base* $\{f^1, f^2, ..., f^n\}$ *em* $(\mathbb{R}^n)^*$ *tal que*

$$f^i.e_j = \delta_{ij}.$$

Agora, se $y \in \mathbb{R}^n$ *e* $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, *tem-se*

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i,$$

onde $a_i, y_j \in \mathbb{R}$*. Então*

$$\|f\|_* = sup_{\|y\|\leq 1} f.y = sup_{\|y\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f^i \right) .y = sup_{\|y\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f^i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right),$$

onde

$$\|f\|_* = sup_{\|y\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i y_j \delta_{ij} = sup_{\|y\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i,$$

e se denotarmos $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*, tem-se*

$$\|f\|_* = sup_{\|y\|\leq 1} a.y.$$

*Também, do teorema (*2.6*), temos que* $\mathbb{R}^n$ *e* $(\mathbb{R}^n)^*$ *são isomorfos. Como*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i,$$

a correspondência $f \longmapsto a$ *é um homeomorfismo que preserva operações. Assim, é possível identificar* f *e* a*, ambos elementos de* $\mathbb{R}^n$*, e teremos*

$$||f||_* = sup_{||y||\leq 1} f.y.$$

2.2 A desigualdade Aritmética-Geométrica

Definição 2.8. *Sejam* $(x_1, x_2, ..., x_n)$,$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$*, tais que* $x_i \geq 0, \lambda_i \geq 0$ *para cada* $i \in I_n$*, e*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Então, com a convenção $0^0 = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

Esta desigualdade é conhecida como a Desigualdade Aritmética-Geométrica. A prova dela segue-se da concavidade da função logarítmo sobre $\mathbb{R}_+^n$*.*

Exemplo 2.9. *Seja* $M \in S_n^+(\mathbb{R})$*, então*

$$(detM)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{trM}{n}. \tag{2.1}$$

Com efeito, como a matriz M é simétrica, é diagonalizável, segue-se que o determinante de M é igual ao determinante de uma matriz diagonal, cujos elementos não nulos são os autovalores da matriz M; e como é não negativa, os seus autovalores $c_1, c_2, ..., c_n$ *são não negativos. Ainda,*

$$detM = c_1 c_2 ... c_n,$$

$$trM = c_1 + c_2 + ... + c_n,$$

e utilizando a desigualdade aritmética-geométrica, tem-se

$$(c_1 c_2 ... c_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_1 + c_2 + ... + c_n}{n},$$

i.e.

$$(detM)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{trM}{n}.$$

Exemplo 2.10. *Seja* $M \in S_n^+(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)(detM)^{1-\gamma} \leq \left(\frac{1}{1-\gamma}\right) + tr\,(M - I)\,, \tag{2.2}$$

com $1-\gamma \leq \frac{1}{n}$*. Se fizermos* $k = 1-\gamma$ *e lembrarmos que* $tr\,(M-I) = trM - trI = trM - n$*, então a desigualdade (2.2) será*

$$\frac{1}{k}(detM)^k \leq \left(\frac{1}{k} - n\right) + tr\,(M)\,,$$

onde $k \leq \frac{1}{n}$. *Consideramos primeiro o caso* $k \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ *(o caso* $k = \frac{1}{n}$ *já foi feito no exemplo anterior). Como* $nk < 1$, *se tem*

$$\frac{1}{k}(detM)^k = \frac{1}{k}(c_1c_2...c_n)^k = \frac{1}{k}\left(c_1^kc_2^k...c_n^k1^{1-nk}\right)$$

$$\leq \frac{1}{k}(kc_1 + kc_2 + ... + kc_n + (1-nk)\,1)$$

$$= (c_1 + c_2 + ... + c_n) + \frac{1}{k} - n = \frac{1}{k} + tr\,(M - I)\,,$$

i.e.

$$\frac{1}{k}(detM)^k \leq \left(\frac{1}{k} - n\right) + tr\,(M)\,.$$

Considerando o caso $k < 0$ *e trocando* k *por* $-k$, *então* $-k < 0$ *ou* $k > 0$, *e teriamos*

$$-\frac{1}{k}(detM)^{-k} \leq \left(-\frac{1}{k} - n\right) + tr\,(M)\,,$$

multiplicando ambos membros por $-k$

$$detM^{-k} \geq (1 + nk) - ktr\,(M)\,,$$

o qual provamos que é válido para todo $k > 0$. *Se fizermos* $c_i = \frac{1}{d_i}$, *o que é possivel se* $c_i > 0$, *para todo* $i \in I_n$, *a última desigualdade tem a forma*

$$(d_1d_2...d_n)^k + k\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_n}\right) \geq 1 + nk.$$

(i) Se $k \geq \frac{1}{n}$

$$(d_1d_2...d_n)^k + k\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_n}\right)$$

$$\geq \left[(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}\right]^{nk} + \frac{nk}{(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}},$$

onde foi aplicada a desigualdade aritmética geométrica aos valores $\left\{\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, ..., \frac{1}{d_n}\right\}$. *Lembrando que, para* $p \geq 1$ *e* $x > 0$

$$x^p \geq 1 + p\,(x - 1)\,,$$

e

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

obtemos

$$\left[(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}\right]^{nk} + \frac{nk}{(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}} \geq 1 + nk\left(\left[(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}\right] - 1\right) + \frac{nk}{(d_1d_2...d_n)}^{\frac{1}{n}}$$

$$= nk\,(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}} + \frac{nk}{(d_1d_2...d_n)^{\frac{1}{n}}} + 1 - nk \geq 1 + nk.$$

(ii) Se $k < \frac{1}{n}$, então

$$(d_1d_2...d_n)^k + k\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_n}\right)$$

$$\geq (d_1d_2...d_n)^k + \left(\frac{1}{(d_1d_2...d_n)^k} - (1 - nk)\right)$$

$$\geq 2 - (1 - nk) = 1 + nk,$$

onde foi utilizada a desigualdade aritmética geométrica da seguinte forma

$$k\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_n}\right) + (1 - nk)\,1 \geq \frac{1}{\left(d_1^k d_2^k ... d_n^k 1^{1-nk}\right)}$$

$$= \frac{1}{(d_1d_2...d_n)^k}.$$

Assim, para $k \in \left(-\infty, \frac{1}{n}\right] - \{0\}$ tem-se

$$(d_1d_2...d_n)^k + k\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_n}\right) \geq (1 + nk)\,.$$

Nota 2.11. *O caso k=0 ou $\lambda = 1$ que não é considerado aqui, aparece nas desigualdades de Sobolev Logarítmicas (para mais detalhes, ver [17]).*

2.3 Medida e Funções Mensuráveis

Seja X um conjunto. Denotamos por 2^X o conjunto de partes de X.

Definição 2.12. *Uma aplicação $\mu : 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$ é chamada uma medida sobre X se satisfaz*

1. $\mu(\varnothing) = 0$; *e*

2. $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *sempre que* $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Nota 2.13. *Na definição (2.12), μ é usualmente chamada de medida exterior, ver [14].*

Exemplo 2.14.

Seja o conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Se $A \subset X$ é tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, com $C_i \subset \mathbb{R}$, definimos o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diamC_i : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i; C_i \subset \mathbb{R} \right\},$$

onde $diamC_i$ representa o diâmetro do conjunto C_i. Observa-se que este conjunto é limitado inferiormente. Assim, definimos a medida do conjunto A como

$$inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diamC_i : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i; C_i \subset \mathbb{R} \right\},$$

onde o ínfimo é sobre os subconjuntos C_i. O conjunto A foi arbitrário, então a medida definida anteriormente será aplicada sobre o conjunto X, e será chamada a medida de Lebesgue (sobre X) unidimensional, denotada por $\mathscr{L}^1(A)$.

No caso de $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos a medida de Lebesgue n-dimensional como

$$\mathscr{L}^n := \mathscr{L}^{n-1} \times \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1 \times \cdots \times \mathscr{L}^1,$$

Usaremos a notação $\mathscr{L}^n(E)$ para a medida de Lebesgue de um conjunto qualquer $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.15. *Um conjunto $A \subset X$ é μ-mensurável se para cada $B \subset X$,*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Nota 2.16. *Seja un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$

1. *Se* $\mu(A) = 0$*, então* A *é* μ*-mensurável.*

2. *Se* $\mu(A) = 0$*, então dizemos que* $A \subset \mathbb{R}^n$ *tem* μ*-medida nula.*

3. *Se* A *é um conjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$*, então* A *é* $\mathscr{L}^n$*-mensurável.*

Exemplo 2.17. *Os exemplos dados a seguir são de conjuntos de medida nula, diferentes do vazio.*

1. *Seja um elemento* $a \in \mathbb{R}$*, e o conjunto* $A = \{a\}$*. Então, existem* $C_i \subset \mathbb{R}$ *tais que, para* $\epsilon > 0$ *arbitrário,* $diam C_i < \frac{\epsilon}{2^i}$*, se tem*

$$\sum_{i=1}^{\infty} diam C_i < \epsilon,$$

e, pela definição de $\mathscr{L}^1$

$$0 < \mathscr{L}^1 (A) < \epsilon.$$

Assim, $\mathscr{L}^1(A) = 0$ *e* $A = \{a\}$ *é* μ*-mesurável.*

2. *Seja* $A = Q \subset \mathbb{R}$*. Como* Q *é enumerável, é possivel escrever ele como* $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$*, i.e.*

$$Q = \cup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

onde $A_i = \{a_i\}$*. Então*

$$\mathscr{L}^1(Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (A_i) = 0.$$

Assim, $\mathscr{L}^1 (Q) = 0$*, então* Q *é* $\mathscr{L}^1$*-mensurável e tem medida nula.*

Definição 2.18. *Temos as seguintes definições.*

1. *Uma medida* μ *sobre* X *é regular se para cada conjunto* $A \subset X$*, existe um conjunto* μ*-mensuravel* B *tal que* $A \subset B$ *e* $\mu(A) = \mu(B)$*.*

2. *Uma medida* μ *sobre* $\mathbb{R}^n$ *é uma medida de Borel quando qualquer conjunto de Borel é* μ*-mensurável (um conjunto* B *é de Borel se é obtido de uma quantidade enumerável de operações de reunião, interseção ou complemento, de subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^n$*).*

3. *Uma medida μ sobre o $\mathbb{R}^n$ é Borel regular se μ é Borel e para cada $A \subset \mathbb{R}^n$, existe um conjunto de Borel B tal que $A \subset B$, $\mu(A) = \mu(B)$.*

4. *Uma medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon se μ é Borel regular e $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.19. *Se $X = \mathbb{R}^n$ temos que $\mathscr{L}^n$ é uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.20. *Tem-se*

1. *Uma medida μ sobre X é absolutamente contínua com respecto a uma medida ν sobre $\mathbb{R}^n$, e será denotada como $\mu << \nu$ se*

$$\nu(E) = 0$$

implica

$$\mu(E) = 0$$

para todo $E \subset X$.

2. *Duas medidas μ e ν são mutuamente singulares, o que será denotado por $\mu \perp \nu$, se existe um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ de Borel tal que*

$$\mu(\mathbb{R}^n - B) = \nu(B) = 0.$$

Teorema 2.21 (Teorema de descomposição de Lebesgue)**.** *Sejam μ, ν duas medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s,$$

onde ν_{ac} e ν_s são medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$, com $\nu_{ac} << \mu$ e $\nu_s \perp \mu$. A medida ν_{ac} será chamada a parte absolutamente continua e ν_s a parte singular de ν com respecto a μ.

Demonstração. Ver [14], p.42. □

Exemplo 2.22. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ uma função integrável com respecto à medida de Lebesgue (que neste caso será denotada como dx), e definimos uma medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ como*

$$\mu(E) = \int_E f(x)dx.$$

Então, se $\mathscr{L}^n(E) = 0$, teremos que $\mu(E) = 0$, o que implica $\mu << \mathscr{L}^n$.

Definição 2.23. *Uma medida μ sobre X será uma medida de probabilidade quando*

$$\mu(X) = 1.$$

O espaço de todas as medidas de probabilidade sobre X será denotado por $\mathscr{P}(X)$.

Exemplo 2.24. *Se $X = [0,1] \times [0,1]$, então $\mathscr{L}^2(X) = 1$, i.e. $\mathscr{L}^2 \in \mathscr{P}(X)$.*

Definição 2.25. *Seja X um conjunto e Y um espaço topológico. Assumimos que μ é uma medida sobre X. Uma função $f : X \to Y$ é μ-mensurável, se para cada conjunto aberto $U \subset Y$, tem-se que $f^{-1}(U)$ é μ-mensurável.*

Exemplo 2.26. *Seja a medida de Lesbesgue sobre $\mathbb{R}^n$, e a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}$ para valores de x tais que $|x| < 1$, e $f(x) = 0$ para $|x| \geq 1$. Esta função é continua e, se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, então $f^{-1}(A)$ é também um conjunto aberto, e pela terceira parte do exemplo (2.17), é $\mathscr{L}^n$-mensurável. Assim, f é $\mathscr{L}^n$-mensurável.*

2.4 Análise Convexa

Definição 2.27. *Um conjunto X é convexo se, dados $x, y \in X$, tem-se que todos os pontos da forma*

$$\alpha x + \beta y$$

para $\alpha + \beta = 1$, estão em X, onde α e β são números reais não negativos. Observa-se também que tem que estar definida a operação $+$ e o produto de um elemento de x com um número real. Se $X = \mathbb{R}^n$, todas estas condições são satisfeitas.

Nota 2.28. *Observamos o seguinte*

1. *Se X é convexo, então $int(X)$ e $\overline{X}$ são também convexos.*
2. *Se $a \in X$ e $b \in \overline{X}$, então todos os pontos da forma*

$$\alpha a + \beta b,$$

onde α e β são reais não negativos e $\alpha + \beta = 1$, estão em X salvo possivelmente pelo ponto b.

Definição 2.29. *Uma função convexa propria φ é uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, não identicamente $+\infty$, tal que*

$$\varphi\left(tx + (1-t)\, y\right) \leq t\varphi\left(x\right) + (1-t)\, \varphi\left(y\right),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0,1]$. Definimos também $Dom\left(\varphi\right)$ como o conjunto convexo de pontos onde φ é finito. Este conjunto pode ser aberto, fechado, ou nenhum deles.

Nota 2.30. *Observa-se o seguinte*

1. *Para os pontos x onde uma função convexa φ é diferenciável, se tem a relação*

$$\varphi\left(z\right) \geq \varphi\left(x\right) + \nabla\varphi\left(x\right).\left(z - x\right). \tag{2.3}$$

2. *Seja uma função φ convexa e diferenciável em Ω. Se existe uma sequencia $(x_k)_{k\geq 1}$ tal que x_k converge a x, e $\nabla\varphi(x_k)$ converge a y, então $y = \nabla\varphi(x)$.*

   De fato, sabemos que

$$\varphi\left(z\right) \geq \varphi\left(x_k\right) + \nabla\varphi\left(x_k\right).\left(z - x_k\right),$$

e como f é continua e x_k converge a x, então

$$\varphi(z) \geq \varphi(x) + (lim_{k\to\infty} \nabla\varphi(x_k)).(z-x).$$

Mas, como φ é diferenciável, o único vetor no $\mathbb{R}^n$ que verifica (2.3) é $\nabla\varphi(x)$, então

$$lim_{k\to\infty} \nabla\varphi(x_k) = \nabla\varphi(x).$$

3. *O gradiente de φ é localmente limitado, i.e., se B é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que é limitado, então $\nabla\varphi(B)$ é limitado.*
   Seja $x \in B$ e $s = \nabla\varphi(x)$ tal que

   $$\varphi(z) \geq \varphi(x) + s.(z-x).$$

   Fazendo $z = x + \frac{s}{\|s\|}$, temos

   $$\varphi(x + \frac{s}{\|s\|}) - \varphi(x) \geq \|s\|,$$

   e como uma função convexa é lipschitz sobre os compactos do interior de Ω ([19], p.174), e $x + \frac{s}{\|s\|}$ e x pertencem ao conjunto $B + B(0,1)$, então, temos que existe $L > 0$ tal que

   $$\|s\| \leq L,$$

   i.e.

   $$\|\nabla\varphi(x)\| \leq L.$$

4. *Seja φ uma função convexa. Se φ é diferenciável em Ω, então $\nabla\varphi$ é continua em Ω.*
   Vamos supor que existe $\epsilon_0 > 0$ e uma sequencia x_k tal que x_k converge a um valor x e $|\varphi(x_k) - \varphi(x)| \geq \epsilon_0$ para $k = 1, 2, ...$ Como o conjunto $\{x_k\}$ é um conjunto limitado, então $\{\nabla\varphi(x_k)\}$ também é limitado, o que implica que existe uma subsequencia $\nabla\varphi(x_{k_p})$ tal que converge a um valor y em $\mathbb{R}$. Mas, se isso é válido, então $y = \nabla\varphi(x)$, o qual é uma contradição, dado que a desigualdade

   $$|\varphi(x_k) - \varphi(x)| \geq \epsilon_0,$$

   é válida para todo $k \in \mathbb{N}$.

Nota 2.31. *Lembremos que uma função $f : A \to \mathbb{R}^m$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana, se para cada compacto $K \subset A$, existe uma constante $C_K > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K |x - y|,$$

para todo $x, y \in K$. Observa-se que, se temos uma sequencia $(f_m)_{m\geq 1}$ de funções localmente lipschitzianas tal que essa sequencia converge a uma função f, esta função f também é localmente lipschitziana. De fato, seja $(f_m)_{m\geq 1}$ tal que

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq L|x - y|,$$

onde $L > 0$ é uma constante, então

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \leq |f_m(x) - f_m(y)|.$$

Assim

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

i.e., f é localmente Lipschitz se f_m é localmente Lipschitz.

Se temos uma função localmente lipschitziana, ela não necessariamente é diferenciável. O seguinte teorema prova que o conjunto sobre o qual essa função não é diferenciável, na verdade tem medida nula. A relação de estas funções com as funções convexas é que uma função convexa f é localmente lipschitziana nos pontos interiores do seu dominio.

Teorema 2.32 (Rademacher)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função localmente Lipschitziana. Então f diferenciável quase sempre em $\mathbb{R}^n$, i.e., para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - Df(x)(x - y)|}{|x - y|} = 0$$

onde $Df(x)$ é a aplicação linear chamada a diferencial de f em x.

Demonstração. Veja [14], Teorema 2, p.81. □

Nota 2.33. *Uma função convexa f é localmente lipschitziana nos puntos interiores do seu dominio, então, nesse conjunto, a função f é diferenciável quase sempre em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.34. *A função* $\|\cdot\|$ *é convexa, então diferenciável quase sempre em* $\mathbb{R}^n$*. Se* $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *é um ponto de diferenciabilidade, o gradiente de* $\|\cdot\|$ *em* x *é o único vetor* $x^* = \nabla(\|\cdot\|)(x)$ *tal que*

$$x.x^* = \|x\|, \tag{2.4}$$

e

$$\|x^*\|_* = 1. \tag{2.5}$$

Para provar (2.4), seja um caminho $\lambda : (1-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R}^n$ *, onde* $\epsilon \in (0,1)$ *definido como*

$$\lambda(t) = tx.$$

Observa-se que λ *é diferenciável em* $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ *e que* $\lambda(1) = x$*. Então* $u = f \circ \lambda$*, onde* $f = \|\cdot\|$ *é diferenciável em 1, e se denotarmos* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$u^{'}(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.x_i = x^*.x$$

Também, como $u(t) = \|tx\| = t\|x\|$*, tem-se*

$$u^{'}(t) = \|x\|.$$

Em particular, para $t = 1$ *tem-se*

$$u^{'}(1) = \|x\|.$$

Assim

$$x^*.x = \|x\|.$$

Para provar (2.5), como $x^* \in (R^n)^*$*, tem-se*

$$\|x^*\|_* = sup_{\|y\|\leq 1} x^*.y,$$

então

$$\|x^*\|_* \geq x^*.y$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$ *com* $\|y\| \leq 1$*. Como* x *não é nulo, é possivel considerar* y *como* $\frac{x}{\|x\|}$*, o que implica*

$$\|x^*\|_* \geq x^*.\frac{x}{\|x\|},$$

e de (2.4) tem-se

$$\|x^*\|_* \geq 1.$$

Agora, como f é convexa e $x \in Domf$, então

$$f(y) - f(x) \geq x^*.(y - x),$$

e temos

$$\frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \geq \frac{x^*.(y - x)}{\|y - x\|},$$

e como

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq |\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|,$$

então

$$\frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|} \leq 1,$$

o que implica

$$\frac{x^*.(y - x)}{\|y - x\|} \leq 1.$$

Como y é arbitrário, é possivel trocar $(y - x)$ por $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, e teria-se

$$\frac{x^*.v}{\|v\|} \leq 1,$$

e se denotarmos $w = \frac{v}{\|v\|}$, então

$$x^*.w \leq 1$$

para todo $w \in \mathbb{R}^n$ e $\|w\| = 1$, o que implica

$$\|x^*\|_* \leq 1.$$

Assim

$$1 \leq \|x^*\|_* \leq 1,$$

i.e.

$$\|x^*\|_* = 1.$$

Nota 2.35. *No exemplo (2.34), se a norma $\|\cdot\|$ fosse a norma euclidiana, a qual denotaremos por $|\cdot|$, teria-se*

$$x^* = \nabla(|\cdot|)(x) = \left(\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, ..., \frac{x_3}{|x|}\right) = \frac{x}{|x|},$$

i.e.

$$x^* = \frac{x}{|x|}$$

então

$$x.x^* = x.\frac{x}{|x|} = |x|^2|x| = |x|\,,$$

e também

$$\|x^*\|_* = \left\| \frac{x}{|x|} \right\|_* = \frac{\|x\|_*}{|x|} = \frac{sup_{|y|\leq 1}x.y}{|x|} \leq \frac{|x|}{|x|} = 1,$$

onde foi utilizada a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Também

$$\|x^*\|_* = sup_{|y|\leq 1}x^*.y \geq x^*.\frac{x}{|x|} = 1,$$

então

$$\|x^*\|_* = 1.$$

A seguir, definimos a função conjugada de uma função convexa, a qual nos ajudará a obter uma desigualdade similar à desigualdade de Young.

Definição 2.36. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função convexa. Definimos a função conjugada de φ como*

$$\varphi^*(y) = sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{x.y - \varphi(x)\}\,.$$

Da definição, tem-se como consequencia que

$$x.y \leq \varphi(x) + \varphi^*(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Nota 2.37. *A função φ^* é também chamada a Transformada de Legendre-Fenchel de φ e tem a propriedade de ser também convexa.*

Exemplo 2.38. *Seja uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, com $p \geq 1$, então a sua função conjugada será*

$$\varphi^*(y) = \frac{|y|^q}{q}.$$

onde $q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (neste caso, a norma $|\cdot|$ é a norma euclidiana). Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Aplicando a desigualdade de Young a $|x|$ e $|y|$ se terá

$$|x|\,|y| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Como $x.y \leq |x|\,|y|$,

$$x.y - \frac{|x|^p}{p} \leq \frac{|y|^q}{q},$$

o que implica, para cada y *fixo, que* $\frac{|y|^q}{q}$ *é uma cota superior do conjunto*

$$\left\{ x.y - \frac{|x|^p}{p}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora, suponhamos que existe uma expressão $C(y)$ *tal que*

$$x.y - \frac{|x|^p}{p} \leq C(y).$$

Afirmamos que para cada y *fixo,* $\frac{|y|^q}{q} \leq C(y)$, *dado que, se existisse* y_0 *tal que*

$$C(y_0) < \frac{|y_0|^q}{q}$$

então, ao escolher $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x_0| = |y_0|^{\frac{1}{p-1}}$, *teria-se que*

$$|x_0 y_0| - \frac{|x_0|^p}{p} = |y_0|^{\frac{1}{p-1}} |y_0| - \frac{|y_0|^{\frac{p}{p-1}}}{p} = |y_0|^{\frac{p}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{|y_0|^q}{q},$$

o que implica

$$C(y_0) < |x_0 y_0| - \frac{|x_0|^p}{p},$$

o que é uma contradição, então

$$\frac{|y|^q}{q} \leq C(y)$$

para cada $y \in \mathbb{R}$,*i.e.,* $\frac{|y|^q}{q}$ *é a menor cota superior do conjunto*

$$\left\{ x.y - \frac{|x|^p}{p}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim

$$\varphi^*(y) = \frac{|y|^q}{q}.$$

Exemplo 2.39. *Se* $\lambda > 0$ *e* $p, q \geq 1$ *são tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então, para* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x.y \leq \frac{\lambda^{-p}}{p} \|x\|_*^p + \frac{\lambda^q}{q} \|y\|^q. \tag{2.6}$$

Com efeito, seja uma função convexa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$. *Utilizando [11], proposição (4.2), p.19., tem-se, para* $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi^*(\|v\|_*) = sup_{u \in \mathbb{R}^n} \{u.v - \varphi(\|u\|)\},$$

então

$$u.v \leq \varphi\left(\|u\|\right) + \varphi^{*}\left(\|v\|_{*}\right),$$

e se $\varphi\left(t\right) = \frac{|t|^{q}}{q}$,

$$u.v \leq \frac{\|u\|^{q}}{q} + \frac{\|v\|_{*}^{p}}{p}.$$

Agora, fazendo $u = \frac{1}{\lambda}y$ *e* $v = \lambda x$, *com* $\lambda > 0$, *tem-se*

$$x.y \leq \frac{\lambda^{-p}}{p}\|x\|_{*}^{p} + \frac{\lambda^{q}}{q}\|y\|^{q}.$$

Esta desigualdade é chamada "Desigualdade de Young para funções convexas conjugadas". Para o caso de igualdade definimos a função $f:(0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ *como*

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{-p}}{p}||x||_{*}^{p} + \frac{\lambda^{q}}{q}||y||^{q} - x.y.$$

Derivando esta função temos que

$$f^{'}(\lambda) = -\lambda^{-p-1}||x||_{*}^{p} + \lambda^{q-1}||y||^{q},$$

então, o valor crítico de f *será*

$$\lambda^{p+q}||y||^{q} = ||x||_{*}^{p} \tag{2.7}$$

e como neste caso

$$x.y = \frac{\lambda^{-p}}{p}\|x\|_{*}^{p} + \frac{\lambda^{q}}{q}\|y\|^{q},$$

ou

$$f(\lambda) = 0,$$

então o valor de λ *que verifica (*2.7*) será o valor mínimo de* f.

Do teorema de Rademacher, sabemos que toda função convexa é diferenciável quase sempre em $\mathbb{R}^{n}$. *Mas é possivel obter um resultado sobre a existência de uma segunda derivada de uma função convexa.*

Teorema 2.40 (Alexandrov). *Seja* $\varphi:\mathbb{R}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então* φ *tem uma segunda derivada quase sempre em* $\mathbb{R}^{n}$. *Mais precisamente, para quase todo ponto* $x \in \mathbb{R}^{n}$

$$\lim_{y \to x} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x) - D\varphi(x)(x-y) - \frac{1}{2}(y-x)^{T}D_{A}^{2}\varphi(x)(y-x)|}{|x-y|^{2}} = 0$$

onde $D_{A}^{2}\varphi$ *é uma matriz simétrica definida não negativa.*

Demonstração. Ver [14], teorema 1, p.242. □

O lema apresentado a seguir será utilizado neste trabalho como uma versão mais fraca da integração por partes, dado que teremos uma desigualdade e não uma igualdade, e além disso, uma das funções não precisa ter regularidade.

Lema 2.41. *Seja φ uma função convexa sobre $\mathbb{R}^n$ com dominio Ω. Então, para cada função suave f não negativa com suporte compacto em Ω, temos que*

$$\int f\Delta_A\varphi \leq -\int \nabla f.\nabla\varphi,$$

onde $\Delta_A\varphi$ é o traço de $D^2_A\varphi$.

Demonstração. Ver [8], p.268. □

2.5 Distribuições

Definição 2.42. *Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos o conjunto*

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Este conjunto será denominado o suporte da função f, e se for compacto, dizemos que f tem suporte compacto. Denotaremos o suporte de f como supp(f). Se a função f tem derivadas de todas as ordens e suporte compacto, diremos que pertence ao espaço C_c^∞.

Nota 2.43. *As funções no espaço C_c^∞ serão também denominadas funções teste.*

Definição 2.44. *Uma sequência (ϕ_j) em C_c^∞ converge a ϕ em C_c^∞ se $(\phi_j) \subset C_c^\infty(K)$ para algúm compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e $\partial^\alpha \phi_j \to \partial^\alpha \phi$ uniformemente para todo α.*

Definição 2.45. *Seja uma aplicação linear $T : C_c^\infty \to \mathbb{R}$. Diremos que T é continua em C_c^∞ se $T|C_c^\infty(K)$ é continua para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, i.e., $T\phi_j \to T\phi$ se $\phi_j \to \phi$ em $C_c^\infty(K)$ e K é compacto.*

Definição 2.46. *Uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ é um funcional linear continuo sobre C_c^∞. O espaço das distribuições sobre $\mathbb{R}^n$ será denotado como $\mathcal{D}'$. Duas funções definem uma mesma distribuição quando são iguais quase sempre em $\mathbb{R}^n$.*

Nota 2.47. *A distribuição T aplicada à função ϕ será denotada como $< T, \phi >$.*

Exemplo 2.48. *Temos*

1. *Cada função f sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_K |f| < \infty$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ define uma distribuição. Mais precisamente, o funcional $\phi \mapsto \int f\phi$, com $\phi \in C_c^\infty$, define uma distribuição.*
2. *Cada medida de Radon μ sobre $\mathbb{R}^n$ define uma distribuição, a qual é $\phi \mapsto \int_K \phi d\mu$.*
3. *A delta de Dirac (ou massa pontual na origem), denotada por δ_0, é definida como*

$$< \delta_0, \phi >= \phi(0)$$

onde ϕ é uma função teste.

Definição 2.49. *Definimos a derivada $\partial^\alpha T$ de uma distribuição T como*

$$< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$$

Exemplo 2.50. *Se $u \in \mathcal{D}'$, então, para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$*

$$\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u.$$

Com efeito, da definição (2.49) tem-se

$$< \partial_j \partial_k u, \phi >=< \partial_j \left(\partial_k u \right), \phi >= (-1) < \partial_j u, \partial_k \phi >=< u, \partial_j \partial_k \phi >$$

e

$$< \partial_k \partial_j u, \phi >=< \partial_k \left(\partial_j u \right), \phi >= (-1) < \partial_k u, \partial_j \phi >=< u, \partial_k \partial_j \phi > .$$

Como $\phi \in C_c^\infty$, então $\partial_j \partial_k \phi = \partial_k \partial_j \phi$ donde

$$\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u.$$

Exemplo 2.51. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. A Hessiana distribucional de φ está definida como*

$$< D^2_{\mathcal{D}'} \varphi, \phi >= \int_\Omega \phi D^2 \varphi$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, onde $\Omega = Int(Dom\varphi)$ e $D^2\varphi$ representa uma medida de Radon (ver [14], p.240). Se considerarmos uma distribuição T não negativa como $T(\phi) \geq 0$ para todo $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\phi \geq 0$, então, a Hessiana distribucional de uma função convexa é uma distribuição não negativa com valores matriciais, e isto implica que esta distribuição é uma medida de Radon não negativa com valores matriciais (ver [17], teorema 6.22, p.159). Assim, do teorema (2.21), tem-se que esta medida pode se descompor em uma soma de uma parte absolutamente continua e outra singular. A parte absolutamente continua é a que aparece como a segunda derivada de uma função convexa, sendo $D^2_A \varphi = \left[D^2_{\mathcal{D}\varphi} \right]_{ac}$ uma função mensurável com valores matriciais, localmente integrável, simétrica e não negativa, no sentido das matrizes (ver [22], p.58).

2.6 Espaços L^p

Definição 2.52. *Seja f uma função mensurável sobre* $\mathbb{R}^n$, $0 < p < \infty$ *e*

$$\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

no qual é possivel $\|f\|_p = \infty$. *Então, definimos* L^p *como o espaço de todas as funções mensuráveis tais que* $\|f\|_p < \infty$. *No caso* $p \geq 1$, $\|f\|_p$ *é uma norma. Assim, na maior parte do trabalho será considerado* $p \geq 1$ *(o caso* $0 < p < 1$ *aparecerá somente no Teorema* 4.1*).*

Nota 2.53. *Temos*

1. *Se considerarmos as funções mensuráveis* $f : \mathbb{R}^n \to B$, *onde* B *é um espaço de Banach(espaços vetoriais normados, onde toda sequencia de Cauchy é convergente), tal que*

$$\|f\|_p = \left[\int \|f(x)\|_B^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

é finita, então dizemos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n, X)$. *Se, em (*2.6*),* $X \in L^p(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*)$ *e* $Y \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int X.Y \leq \frac{\lambda^{-p}}{p} \int \|X\|_*^p + \frac{\lambda^q}{q} \int \|Y\|^q .$$

Agora, se $\lambda = \frac{\left(\int \|X\|_*^p\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int \|Y\|^q\right)^{\frac{1}{p}}}$, *teremos*

$$\int X.Y \leq \left(\int \|X\|_*^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \|Y\|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.8}$$

que é chamada a Desigualdade de Holder.

2. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável tal que* $\int_K |f| < \infty$, *então dizemos que* $f \in L^1_{loc}$, *ou que f é localmente integrável.*

3. *Se* $f \in L^1_{loc}$, *então f pode ser considerada uma distribuição.*

4. *Uma consequencia da desigualdade de Holder é a seguinte: se* $f \in L^p \cap L^q$, *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *então* $f \in L^r$, *para todo* $p \leq r \leq q$ *(ver [5], p.57).*

Lema 2.54 (Lema de Fatou)**.** *Sejam $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ funções mensuráveis $(k = 1, \dots)$. Então*

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k \; dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \; dx.$$

Demonstração. Ver [14], Teorema 1, p.19. □

Teorema 2.55 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $f,\; f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis (k=1,2,...). Se $|f_k| \leq g$ e $f_k \to f$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ quando $k \to \infty$,então*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \; dx = \int f \; dx.$$

Demonstração. Ver [14], Teorema 3, p.20. □

Nota 2.56. *Temos as seguintes observações*

1. *Se temos uma sequencia $(f_n)_{n\geq 1}$ em L^p, com $p > 1$ tal que f_n converge a uma função f em L^p, então existe uma subsequencia $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de f_n tal que $f^p_{n_k}$ converge a f^p em L^1. De fato, como f_n converge a f em L^p, existe uma subsequencia (f_{n_k}) de (f_n) tal que f_{n_k} converge a f quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Lembrando que a função $x \mapsto x^p$ é continua para $p > 1$, temos que $f^p_{n_k}$ converge a f^p quase sempre em $\mathbb{R}^n$, e como $|f_{n_k}|^p \leq |f|^p$, então, de teorema (2.55) tem-se que $f^p_{n_k}$ converge a f^p em L^1.*

2. *Se temos uma sequencia $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge a f , onde f_n e f são não negativas, em L^1, então $f_n^{\frac{1}{q}}$ converge a $f^{\frac{1}{q}}$ em L^q. De fato, sabemos que, se $a, b \geq 0$, então $|a-b|^p \leq |a^p - b^p|$ para $p > 1$. Então, se $a = f_n(x)$ e $b = f(x)$, tem-se que, para $q > 1$*

$$\int |f_n^{\frac{1}{q}}(x) - f^{\frac{1}{q}}(x)|^q dx \leq \int |f_n(x) - f(x)|\, dx$$

i.e.

$$||f_n^{\frac{1}{q}} - f^{\frac{1}{q}}||_q \leq \|f_n - f\|_1$$

Teorema 2.57. *Sejam (u_n) e (v_n) duas sequencias em L^p e L^q respectivamente, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se u_n converge (forte) a u e v_n converge fraco a v, então $(u_n v_n)$ converge (forte) a (uv) em L^1.*

Demonstração. Veja [20], p.56. □

Nota 2.58. *Se uma sequencia u_n converge (forte) a u em L^p, para $p \geq 1$, então existe uma subsequencia u_{n_k} de u_n tal que u_{n_k} converge a u quase sempre. Uma prova de este resultado é através da convergencia em medida de u_n. Para mais detalhes, ver [4], p. 79 e p.207.*

2.7 Regularização e Aproximação

Definição 2.59. *Uma sequencia de funções $(\rho_k)_{k\geq 1}$ é dita regularizante, quando*

1. $\rho_k \in C_c^{\infty}$; $\rho_k \geq 0$.
2. *supp*$(\rho_k)\subset B_{\frac{1}{k}}(0)$.
3. $\int \rho_k = 1$

Exemplo 2.60. *Seja uma função $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{∞}, definida por*

$$\rho(x) := \begin{cases} exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & se\ |x| < 1, \\ 0 & se\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

Observa-se que ρ é uma função não negativa com supp(ρ) compacto, e supp$(\rho) \subset B_1(0)$, e $\int \rho > 0$. Assim, se considerarmos

$$\rho_k(x) = Ck^n \rho(kx)$$

com $C = \left(\int \rho\right)^{-1}$, então, $(\rho_k)_{k\geq 1}$ é uma sequencia regularizante.

Teorema 2.61. *Sejam $f \in L^1$ e $g \in L^p$, onde $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a função $y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

então $f * g \in L^p$.

Demonstração. Ver [5], p.67. □

Teorema 2.62. *Seja $f \in L^p$, com $1 \leq p < \infty$. Então $\rho_k * f$ converge a f em L^p, onde (ρ_k) é uma sequencia regularizante.*

Demonstração. Ver [5], p.71. □

Corolário 2.63. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então $C_c^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [5], p.71. □

Nota 2.64. *Serão utilizadas no trabalho também as chamadas funções de corte, i.e., funções $\xi \in C^{\infty}$, com $0 \leq \xi \leq 1$ tais que $\xi(x) = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{2}$ e $\xi(x) = 0$ para $|x| \geq 1$.*

2.8 Espaços de Sobolev

Definição 2.65. *Assumimos* $f \in L^1_{loc}$ *e* $i \in I_n$. *Dizemos que* $g_i \in L^1_{loc}$ *é a derivada parcial fraca de* f *com respecto a* x_i *em* $\mathbb{R}^n$ *se*

$$\int f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int g_i \phi dx$$

para todo $\phi \in C_c^\infty$.

Nota 2.66. *Escrevemos* $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$, *para* $i \in I_n$ *e* $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ *sempre que as derivadas fracas* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *existam.*

Definição 2.67. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *A função* f *pertence ao espaço de Sobolev* $W^{1,p}$ *se* $f \in L^p$ *e as derivadas parciais fracas* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *existem e pertencem a* L^p *para* $i \in I_n$.

Nota 2.68. *Se* $f \in W^{1,p}$, *definimos*

$$\|f\|_{1,p} := \left(\int |f|^p + |\nabla f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$, *e*

$$\|f\|_{1,\infty} := ess \ \sup \left(|f| + |\nabla f|\right)$$

onde ess sup *significa o supremo essencial de um conjunto ou o supremo desse conjunto, a menos de um subconjunto dele de medida nula.*

Definição 2.69. *Dizemos que* f_k *converge a* f *em* $W^{1,p}$ *quando*

$$\|f_k - f\|_{1,p}$$

converge a zero.

Teorema 2.70. *Seja* $\Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^n$ *e* $u \in W^{1,p}$. *Então,* $\rho_k * u$ *converge a* u *em* $W^{1,p}(\Omega_0)$.

Demonstração. Ver [20], p.101. □

Teorema 2.71. *O espaço* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [20] p.105. □

Teorema 2.72 (Rellich-Kondrashov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e a fronteira de Ω de classe C^1. Se $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^r(\Omega)$$

para cada $1 \leq r < p^* = np/(n-p)$.

Demonstração. Ver [13], p.272. □

Nota 2.73. *Seja (f_k) uma sequencia em $W^{1,p}(\Omega)$ tal que converge fraco a uma função f. Então, do teorema anterior, existe uma subsequencia (f_{k_l}) de f_k que converge a f em $L^r(\Omega)$.*

2.8.1 As desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg

Definição 2.74. *Se $1 \leq p < n$, com $n \geq 2$ definimos a conjugada de Sobolev de p como*

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

Observa-se que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

donde $p^* > p$.

Teorema 2.75. *Assumimos $1 \leq p < n$ onde $n \geq 2$. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo de n e p tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \tag{2.9}$$

para todo $u \in W^{1,p}$.

Demonstração. Ver [13], p.263. □

Nota 2.76. *Temos*

1. *Como foi mencionado na introdução, tem-se que (2.9) para p=1, é equivalente à desigualdade isoperimétrica*

$$\mathscr{L}^n(\Omega) \leq \mathscr{L}^n(B_r(0))$$

ou

$$(\mathscr{L}^n(\Omega))^{\frac{n-1}{n}} \leq C_n \mathscr{L}^{n-1}(Fr\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é qualquer compacto com fronteira suave,* $Fr\Omega$ *representa a fronteira de* Ω*, e*

$$C_n = \frac{\left(\Gamma(\frac{n-1}{2})\right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\pi}n},$$

onde Γ *representa á função gamma. Ao ter a equivalência com a desigualdade de Sobolev, a constante* C_n *resulta ser óptima, i.e., é a menor constante possivel nesta desigualdade.*

2. *Se* $1 < p < n$*, tem-se que a constante óptima em (*2.9*) será*

$$C = C(n,p) = \left(\frac{p-1}{n-p}\right)\left(\frac{n-p}{n(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})w_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. *As funções* $h_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definidas por*

$$h_p(x) = (a + b\,|x-y|^q)^{\frac{p-n}{p}}$$

com $a, b > 0$*,* $y \in \mathbb{R}^n$ *são as funções extremais de (*2.9*) para* $1 < p < n$*.*

Existem resultados similares nos casos $p = n$ *e* $p > n$*, assim como para as derivadas de ordem superior, mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [21]. No caso das constantes optimas e funções extremais, ver [1], p. 39-43.*

2.9 Transporte de Massa

Antes de dar as definições e resultados referentes ao problema do transporte de massa, será dada a formulação dele a través de um problema prático.

Assumimos que temos um pilha de areia, e um recipiente no qual deverá ser colocada toda ela. A pilha e o recipiente terão o mesmo volume, e consideramos a massa da pilha igual a 1. Modelamos ambos, a pilha e o recipiente, com duas medidas de probabilidade μ *e* ν, *definidas sobre os espaços de medida* X *e* Y, *respectivamente. Se* A *e* B *são subconjuntos mensuráveis de* X *e* Y, *então* $\mu(A)$ *é a medida da quantidade de areia existente em* A, *e* $\nu(B)$ *a quantidade de areia que foi colocada em* B.

Como mover a areia precisa de algúm esforço, modelamos isto através de uma função de custo c *definida sobre* $X \times Y$.*Informalmente,* $c(x, y)$ *diz quanto será o custo de transportar uma unidade de massa do lugar* x *ao lugar* y. *Assumimos que* c *é mensurável e não negativa. Em principio, é possivel que* $c(x, y) = \infty$, *então* c *deverá ser considerada uma aplicação de* $X \times Y$ *a* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Agora, procuramos transportar a areia de um lugar para outro a um custo mínimo. Assim, modelamos este transporte como uma medida de probabilidade π *sobre o espaço* $X \times Y$. *Informalmente,* $d\pi(x, y)$ *mede a quantidade de massa transferida de* x *a* y. *Em principio, é possivel que alguma massa localizada no ponto* x *seja colocada em diferentes destinos* y. *Para que* $\pi \in \mathscr{P}(X \times Y)$ *faça sentido, é necessário que a massa total que sai de* x *seja igual a massa total que pode ser extraida de* x, *i.e., a* $d\mu(x)$, *e que a massa total transferida a* y *coincida com a massa total que pode ser colocada em* y. *i.e., com* $d\nu(y)$, *ou*

$$\int_Y d\pi(x, y) = d\mu(x)$$

e

$$\int_X d\pi(x, y) = d\nu(y)$$

Então, para todos os subconjuntos mensuráveis A de X e B de Y tem-se

$$\pi(A \times Y) = \mu(A) \quad e \quad \pi(X \times B) = \nu(B) \tag{2.10}$$

As medidas de probabilidade π que satisfazem (2.10), diz-se que tem marginais μ e ν, e serão as que realizam o transporte procurado. O conjunto destas medidas de probabilidade com marginais μ e ν será denotada por $\Pi(\mu, \nu)$.

Assim, o problema a ser resolvido será

$$min I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

onde

$$\pi \in \Pi(\mu, \nu)$$

conhecido como o problema de transporte optimo de Kantorovich. Então, neste problema é procurada uma medida de probabilidade π tal que o transporte de A a B seja feito a um custo mínimo.

Uma expressão equivalente a (2.10), com $\varphi \in L^1(\mu)$ e $\psi \in L^1(\nu)$ ($L^1(\mu)$ representa o espaço de funções mensuráveis que são integráveis com respecto à medida μ) será

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) \tag{2.11}$$

Se considerarmos o caso particular no qual a cada x corresponde uma única y, definimos uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x) = y$, então

$$d\pi(x, y) = d\pi_T(x, y) = d\mu(x)\delta[y = T(x)],$$

e se ζ é uma função não negativa mensurável sobre $X \times Y$, tem-se

$$\int_{X \times Y} \zeta(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X \zeta(x, T(x)) d\mu(x). \tag{2.12}$$

Em particular, o custo total do transporte associado é

$$I[\pi_T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Para que $\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$, π_T deve verificar (2.11). Mas, de (2.12), com $\zeta(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, tem-se

$$\int_X [\varphi(x) + \psi \circ T(x)] d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y),$$

então

$$\int_X (\psi \circ T) d\mu = \int_Y \psi d\nu, \tag{2.13}$$

onde $\psi \in L^1(\nu)$. *Se* $B \subset Y$ *(mensurável) e* $\psi = 1_B$, *tem-se*

$$\int_{T^{-1}(B)} (1_B \circ T)(y) d\mu(y) = \int_B 1_B(y) d\nu y$$

e como

$$\int_X 1_B(T(x)) d\mu(x) = \int_X 1_{T^{-1}(B)}(x) d\mu(x) = \mu(T^{-1}(B)),$$

então

$$\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B). \tag{2.14}$$

Quando T *verifica (*2.13*) ou (*2.14*), dizemos que* T *transporta* μ *sobre* ν. *Neste caso, é possivel formular uma versão particular de problema de Kantorovich, conhecido como o problema de transporte óptimo de Monge*

$$MinI[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

O mínimo é sobre todas as aplicações mensuráveis T *que transportam* μ *sobre* ν.

Exemplo 2.77. *Assumimos que* ν *é uma massa de Dirac, i.e.,* $\nu = \delta_0$. *Então toda a massa de* X *será transportada ao ponto 0, e teremos que existe um único elemento* $\pi_0 \in \Pi(\mu, \nu)$ *tal que*

$$I[\pi_0] = min_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \int_X c(x, 0) d\mu(x).$$

Definição 2.78. *Sejam* (X, μ) *e* (Y, ν) *dois espaços de probabilidade, e seja* c *uma função mensurável não negativa sobre* $X \times Y$. *O problema de transporte de massa consiste em minimizar o funcional linear*

$$\pi \longrightarrow \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

sobre o conjunto não vazio e convexo $\Pi(\mu, \nu)$, *definido como o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre* $X \times Y$ *com marginais* μ *sobre* X *e* ν *sobre* Y. *Mais explícitamente:* $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ *se e somente se* π *é uma medida não negativa, satisfazendo*

$$\pi(A \times Y) = \mu(A)$$

e

$$\pi(X \times B) = \nu(B)$$

para todos os subconjuntos mensuráveis A de X e B de Y. Se a cada $x \in X$ corresponde uma única $y \in Y$, então definimos uma aplicação mensurável $T : X \longrightarrow Y$, e teremos um caso particular do problema de transporte, que será minimizar o funcional I

$$I[\pi_T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

com a condição

$$\int_X (\psi \circ T) d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

Nota 2.79. *Temos*

1. *Dando mais condições aos espaços X e Y, podemos restringir o espaço ao qual pertence ψ. Por exemplo, se X e Y são espaços métricos completos separáveis (espaços de Polish), então é suficiente que $\psi \in C_b(Y)$, e se além disso, X e Y são localmente compactos, então é suficiente que $\psi \in C_0(Y)$ (ver [22], p. 18).*
2. *Se assumimos que μ e ν saõ duas medidas de probabilidade sobre $\mathbb{R}^n$, absolutamente contínuas com respecto à medida de Lebesgue, i.e.*

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx$$

e

$$\nu(A) = \int_A g(y) dy$$

e se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^1, então, fazendo uma mudança de variáveis em (2.13), tem-se

$$f(x) = g(T(x)) \left| det \nabla T(x) \right| \tag{2.15}$$

A existência e unicidade da aplicação $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ dependem das condições sobre μ e ν, e também sobre $c(x, y)$. Mas, é possivel dar uma formulação alternativa de um teorema de existencia e unicidade, impondo mais condições sobre as medidas μ e ν.

Teorema 2.80 (Resultado Principal). *Sejam μ e ν duas medidas de probabilidade tais que μ é absolutamente continua com respecto à medida de Lebesgue. Então existe uma única aplicação mensurável T tal que transporta μ sobre ν. Mais ainda, $T = \nabla\varphi$, para alguma função convexa φ.*

No nosso caso, serão considerados $X = Y = \mathbb{R}^n$. Se φ não fosse regular, tendo que é convexa e as duas medidas de probabilidade absolutamente contínuas com respecto à medida de Lebesgue, então φ ainda verifica (2.15), para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ (ver [22], p.133)

Conhecendo a existência e unicidade do aplicação T, damos informação da regularidade dela. Para isso, consideramos as funções no espaço de Holder $C^{k,\gamma}$,i.e., as funções de classe C^k limitadas tais que a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}$$

é finitá, onde

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} := sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|,$$

e

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}$$

com $\lambda > 0$. Assim, temos

Teorema 2.81. *Sejam f, g duas funções integráveis tais que $\mu = \int f$ e $\nu = \int g$ são duas medidas sobre $\mathbb{R}^n$. Se $f, g \in C^{0,\gamma}$, são duas funções positivas e limitadas sobre $\mathbb{R}^n$, então $\varphi \in C^{2,\gamma}$.*

Demonstração. Ver [6]. □

Tanto detalhes das definições e observações, assim como o teorema principal e a prova dele podem ser encontradas em [22].

Capítulo 3

Desigualdades precisas de Sobolev

Considerando os resultados de Transporte de Massa e as desigualdades aritmética-geométrica e de Holder, assim como o resultado principal, mostraremos que é possivel obter uma desigualdade precisa de Sobolev, no caso $1 < p < n$.

Para $1 \leq p < n$ com $n \geq 2$, definimos a função h_p da seguinte forma

$$h_p(x) := \begin{cases} \frac{1}{(\sigma_p + \|x\|^{q})^{\frac{n-p}{p}}} & \text{se } p > 1 \\ \frac{1_{B(x)}}{(\mathscr{L}^n(B))^{\frac{n-1}{n}}} & \text{se } p = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

com $\sigma_p > 0$ é determinada pela condição

$$\|h_p\|_{p^*} = 1 \tag{3.2}$$

e B denota a bola unitária no $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Esta função será extremal para a desigualdade de Sobolev, outra análoga será dada posteriormente no caso de Gagliardo-Nirenberg. No caso euclidiano, isto foi obtido em [1].

Além disso, será considerada também a norma dual de ∇u, i.e.

$$\|\nabla u\|_p := \left(\int \|\nabla u\|_*^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Teorema 3.1. *Seja $p \in (1,n)$, $n \geq 2$ e $q = p/(p-1)$. Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ são duas funções com $\|f\|_{L^{p^*}} = \|g\|_{L^{p^*}}$, então*

$$\frac{\int |g|^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\left(\int \|y\|^q |g(y)|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \|\nabla f\|_{L^p} \tag{3.4}$$

com a igualdade no caso $f = g = h_p$.

Nota 3.2. *Se seguem algumas observações*

1. *Como $g \in L^p \cap L^{p^*}$, então $g \in L^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$, dado que $p \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \leq p^*$.*
2. *O caso $p = 1$, para normas arbitrárias, pode ser encontrado em [18], p.126.*
3. *A propriedade fundamental de h_p a ser utilizada é que, para quase todo ponto x, existe uma igualdade na desigualdade de Holder, quando $X = -\nabla h_p(x)$, $Y = h_p^{\frac{p^*}{q}}(x)x$ e $\lambda = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}$. De fato*

$$-X = \nabla\left(\frac{1}{(\sigma_p + \|x\|^q)^{\frac{n-p}{p}}}\right) = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)\left(\frac{\|x\|^{q-1}}{(\sigma_p + \|x\|^q)^{\frac{n}{p}}}\right)x^*$$

$$Y = h_p^{\frac{p^*}{q}}(x)x = \left(\frac{1}{(\sigma_p + \|x\|^q)^{\frac{n-p}{p}}}\right)^{\frac{p^*}{q}} x = \frac{x}{(\sigma_p + \|x\|^q)^{\frac{n(p-1)}{p}}}.$$

Então, multiplicando ambas expressões e utilizando (2.5) temos

$$X.Y = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)\frac{\|x\|^q}{(\sigma_p + \|x\|^q)^n}.$$

Também, como $\lambda = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}$, tem-se

$$\frac{\lambda^{-p}}{p}|X|^{p^*} = \frac{1}{p}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)\frac{\|x\|^q}{(\sigma_p + \|x\|^q)^n},$$

$$\frac{\lambda^q}{q}|Y|^q = \frac{1}{q}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)\frac{\|x\|^q}{(\sigma_p + \|x\|^q)^n}$$

o que implica

$$\frac{\lambda^{-p}}{p}|X|^{p^*} + \frac{\lambda^q}{q}|Y|^q = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)\frac{\|x\|^q}{(\sigma_p + \|x\|^q)^n} = X.Y \tag{3.5}$$

Como

$$\frac{\lambda^{-p}}{p}|X|^{p^*} = \frac{\lambda^q}{p}|Y|^q,$$

então

$$\lambda = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{(\int \|X\|_*^p)^{\frac{1}{q}}}{(\int \|Y\|^q)^{\frac{1}{p}}}$$

e integrando (3.5)*, tem-se que*

$$\int X.Y = ((\int \|X\|_*^p)^{\frac{1}{p}})((\int \|Y\|^q)^{\frac{1}{q}})$$

ou

$$-\int \nabla h_p(x)(h_p^{\frac{p^*}{q}}(x)x)dx = \|\nabla h_p\|_p (\int \|x\|^q h_p^{p^*}(x)dx)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.6}$$

Demonstração. A prova é feita em 4 etapas.

1. Se $f \in W^{1,p}$, então $\nabla |f| = \pm \nabla f$. Assim

$$\| |f| \|_p = \|f\|_p ,$$

$$\|\nabla |f| \|_p = \|\nabla f\|_p ,$$

e como C_c^∞ é denso em $W^{1,p}$, na prova do teorema, só consideramos funções não negativas $f, g \in C_c^\infty$, e normalizando as normas de f e g tem-se $\|f\|_{p^*} = \|g\|_{p^*} = 1$. Também, consideramos as medidas μ e ν sobre $\mathbb{R}^n$ definidas como

$$\mu(E) = \int_E F(x)dx$$

e

$$\nu(E) = \int_E G(x)dx,$$

onde $F = f^{p^*}$ e $G = g^{p^*}$. Observa-se que μ e ν são duas medidas de probabilidade sobre $\mathbb{R}^n$, sendo ambas absolutamente contínuas com respecto à medida de Lebesgue. Assim, é possivel aplicar o resultado principal e obter uma única aplicação $\nabla\varphi$ que transporta μ sobre ν, onde φ é uma função convexa.

2. Provamos que

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \int F^{1-\frac{1}{n}} \Delta_A \varphi \tag{3.7}$$

onde $\Delta_A = Tr\,(D_A^2\varphi)$, sendo $D_A^2\varphi$ a derivada segunda no teorema (2.40).

De fato, como φ, é convexa e as medidas μ e ν são absolutamente continuas com respecto à medida de Lebesgue, então se verifica, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = G(\varphi(x)) det D_A^2 \varphi(x)$$

o que implica

$$G(\nabla\varphi(x))^{-\frac{1}{n}} = (F(x))^{-\frac{1}{n}}(detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}}. \tag{3.8}$$

Sabemos que $D_A^2\varphi$ é uma matriz simétrica definida não negativa sobre $\mathbb{R}^n$. Assim, os seus autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são não negativos e também

$$detD_A^2\varphi(x) = \lambda_1 ... \lambda_n,$$

$$trD_A^2\varphi(x) = \lambda_1 + ... + \lambda_n.$$

Então, da desigualdade aritmética geométrica

$$(detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{trD_A^2\varphi(x)}{n} = \frac{\Delta_A\varphi(x)}{n},$$

e, em (3.8)

$$G(\nabla\varphi(x))^{-\frac{1}{n}} \leq (F(x))^{-\frac{1}{n}}\frac{\Delta_A\varphi(x)}{n}.$$

Multiplicando por $F(x)$ e integrando com respecto à medida de Lebesgue, tem-se

$$\int G(\nabla\varphi(x))^{-\frac{1}{n}}F(x)dx \leq \int (F(x))^{1-\frac{1}{n}}\Delta_A\varphi(x).$$

Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Polish (espaço métrico completo separável) localmente compacto, em (2.13) é suficiente que $\psi \in C_c$, e se $\psi = G^{-\frac{1}{n}}$, então

$$\int G^{1-\frac{1}{n}}(y)dy \leq \frac{1}{n}\int F^{1-\frac{1}{n}}(x)\Delta_A\varphi(x)dx.$$

3. Se φ fosse suficientemente regular, seria possivel aplicar diretamente a integração por partes no segundo membro da última desigualdade. Mas, no nosso caso, φ é somente convexa, e F é suave não negativa, com suporte compacto em Ω. Então, do lema (2.41)

$$\frac{1}{n}\int F^{1-\frac{1}{n}}\Delta_A\varphi \leq -\frac{1}{n}\int \nabla(F^{1-\frac{1}{n}}).\nabla\varphi,$$

e de (3.7)

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} \leq -\frac{1}{n}\int \nabla(F^{1-\frac{1}{n}}).\nabla\varphi.$$

Como $F = f^{p^*}$ e $G = g^{p^*}$, então

$$\int g^{p^*(1-\frac{1}{n})} \leq -\frac{p(n-1)}{n(n-p)}\int f^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi.$$

Utilizando a desigualdade de Holder para $X = -\nabla f$ e $Y = f^{\frac{p^*}{q}} \nabla\varphi$, temos

$$-\int f^{\frac{p^*}{q}} \nabla f.\nabla\varphi \leq \|\nabla f\|_p \left(\int f^{p^*} \|\nabla\varphi\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e fazendo $\psi = \|\cdot\|^q$ em (2.13)

$$\int f^{p^*} \|\nabla\varphi\|^q = \int \|y\|^q g^{p^*}(y)dy.$$

Assim

$$\int g^{p^*(1-\frac{1}{n})} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla f\|_p \int \|y\|^q g^{p^*}(y)dy,$$

concluindo a prova de (3.4). Observa-se que, se f e g fossem estritamente positivas, seria possivel aplicar o teorema (2.81) e concluir que a aplicação φ é de classe C^2, e nesse caso, não seria necessario aplicar o lema (2.41).

4. Se $f = g = h_p$, tem-se que $\mu = \nu$, assim a aplicação $\nabla\varphi$ será a identidade, i.e., $\nabla\varphi(x) = x$. Assim, $F = G$, $\Delta\varphi(x) = n$ e tem-se

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \int F^{1-\frac{1}{n}} \Delta\varphi.$$

Como $\varphi \in C^2$, então

$$\int F^{1-\frac{1}{n}} \Delta\varphi = -\int \nabla\left(F^{1-\frac{1}{n}}\right).\nabla\varphi,$$

i.e.

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} = -\int \nabla\left(F^{1-\frac{1}{n}}\right).\nabla\varphi.$$

Retomando as notações originais, $F = G = h_p^{p^*}$, então

$$\int h_p^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} = -\frac{p\,(n-1)}{n\,(n-p)} \int \left(h_p^{\frac{p^*}{q}}\right) \nabla h_p.\nabla\varphi,$$

e de (3.6) temos

$$\int h_p^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{p\,(n-1)}{n\,(n-p)} \|\nabla h_p\|_p \left(\int \|x\|^q h_p^{p^*}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

o qual verifica a igualdade em (3.4).

□

Corolário 3.3. *Como consequencias do teorema (*3.1*) temos*

(i) O principio de dualidade

$$\sup_{\|g\|_{p^*}=1} \frac{\int |g|^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\left(\int \|y\|^q |g(y)|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \inf_{\|f\|_{p^*}=1} \|\nabla f\|_p . \tag{3.9}$$

(ii) A desigualdade optima de Sobolev: Se $f \neq 0$ é tal que $f \in L^{p^*}$ e $\nabla f \in L^p$, então

$$\frac{\|\nabla f\|_p}{\|f\|_{p^*}} \geq \|\nabla h_p\|_p . \tag{3.10}$$

Demonstração. Para provar (i), definimos os funcionais u e v como

$$u(g) = \frac{\int |g|^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\left(\int \|y\|^q |g(y)|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{3.11}$$

$$v(f) = \frac{p(n-1)}{n(n-p)} inf_{\|f\|^{p^*}=1} \|\nabla f\|_p \tag{3.12}$$

e também o conjunto

$$A = \left\{ w \in L^{p^*} : \nabla w \in L^p, \|w\|_{p^*} = 1 \right\}.$$

Do teorema (3.1), sabemos que

$$u(g) \leq v(f)$$

e

$$u(h_p) = v(h_p),$$

então

$$\sup_{g\in A} u(g) \leq \inf_{f\in A} v(f).$$

Se tivessemos somente a desigualdade estrita, então teria-se que

$$\sup_{f,g\in A} [u(g) - v(f)] < 0.$$

Como $h_p \in A$ tem-se

$$0 \leq u(h_p) - v(h_p) \leq \sup_{f,g\in A} [u(g) - v(f)] < 0,$$

o que é uma contradição.

Assim

$$\sup_{g\in A} u(g) = \inf_{f\in A} v(f)$$

o qual prova (i). Observa-se que

$$u(h_p) = \sup_{g\in A} u(g)$$

e

$$v(h_p) = \inf_{f\in A} v(f).$$

Para provar (ii), sabemos que $\|\nabla h_p\|_p = \inf_{u\in A}\|\nabla u\|_p \leq \|\nabla u\|_p$, e se definirmos $u = \frac{f}{\|f\|_{p^*}}$, para $f \in W^{1,p}$, então $u \in A$, o que implica

$$\|\nabla h_p\|_p \leq \left\|\nabla\left(\frac{f}{\|f\|_{p^*}}\right)\right\|_p = \frac{\|\nabla f\|_p}{\|f\|_{p^*}},$$

o qual prova (ii). □

Teorema 3.4 (isoperimetria)**.** *Se* $f \neq 0$ *é uma função suave com suporte compacto, então*

$$\frac{\|\nabla f\|_1}{\|f\|_{\frac{n}{n-1}}} \geq n(\mathscr{L}^n(B))^{\frac{1}{n}} \tag{3.13}$$

Demonstração. A prova será feita em 4 etapas

1. Consideramos uma função não negativa com $\|f\|_{\frac{n}{n-1}} = 1$. Assim, será provado que

$$\|\nabla f\|_1 \geq n(\mathscr{L}^n(B))^{\frac{1}{n}}$$

e definimos as medidas μ,ν,como na prova do teorema (3.1), onde $F = f^{\frac{n}{n-1}}$ e $G = h_1^{\frac{n}{n-1}}$. Tanto μ como ν são medidas de probabilidade sobre $\mathbb{R}^n$, dado que

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \int F = \int f^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \int G = \int h_1^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)}\int 1_B^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)}\mathscr{L}^n(B) = 1$$

e como ambas medidas são absolutamente continuas com respecto à medida de Lebesgue, então existe uma função convexa φ tal que $\nabla\varphi$ transporta μ sobre ν.

2. Utilizando o mesmo procedimento como na prova do teorema (3.1), obtemos a desigualdade (3.7)

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\int F^{1-\frac{1}{n}}\Delta_A\varphi,$$

mas

$$\int G^{1-\frac{1}{n}} = \int \frac{1_B}{\mathscr{L}^n(B)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)^{1-\frac{1}{n}}}\mathscr{L}^n(B) = \mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}},$$

então

$$\mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\int F^{1-\frac{1}{n}}\Delta_A\varphi.$$

Aplicando o lema (2.41), e lembrando que $F^{1-\frac{1}{n}} = f$, tem-se

$$(\mathscr{L}^n(B))^{\frac{1}{n}} \leq -\frac{1}{n}\int \nabla f.\nabla\varphi \tag{3.14}$$

3. Afirmamos que $\nabla\varphi(x)$ está na bola unitária no $\mathbb{R}^n$ para quase todo ponto no suporte de f. De fato, sabemos que a função f é suave, não negativa, de suporte compacto, e

$$f(x)^{\frac{n}{n-1}} = h_1^{\frac{n}{n-1}}(\nabla\varphi(x))\, det D_A^2\varphi(x) \tag{3.15}$$

quase sempre. Então, se x é um ponto do suporte de f, tal que verifica a igualdade anterior, temos

$$h_1^{\frac{n}{n-1}}(\nabla\varphi(x)) \neq 0,$$

e, da definição de h_1

$$1_B^{\frac{n}{n-1}}(\nabla\varphi(x)) \neq 0,$$

ou

$$1_B^{\frac{n}{n-1}}(\nabla\varphi(x)) = 1,$$

i.e. $\nabla\varphi(x)$ está na bola unitária no $\mathbb{R}^n$. Como (3.15) verfica-se para quase todo punto em $\mathbb{R}^n$, então

$$\nabla\varphi(x) \in B_1(0)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$.

4. Da definição de $\|\cdot\|_*$, tem-se que $-\nabla f.\nabla\varphi \leq \|\nabla f\|_*$, e, em (3.14)

$$\mathscr{L}^n (B)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\int \|\nabla f\|_* = \frac{1}{n}\|\nabla f\|_1\,,$$

ou

$$n\mathscr{L}^n (B)^{\frac{1}{n}} \leq \|\nabla f\|_1$$

o qual prova (3.13).

$\square$

Capítulo 4

Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg

Neste capítulo será obtida a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg na sua forma óptima. Este resultado foi obtido no caso euclidiano em [10]. Como no caso da desigualdade precisa de Sobolev, também aqui será feita a análise para uma norma arbitrária no $\mathbb{R}^n$.

Definimos, para $\alpha \geq 0$

$$h_{\alpha,p}(x) = \left(\sigma_{\alpha,p} + (\alpha - 1)\|x\|^q\right)_+^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{4.1}$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$ *e* $\sigma_{\alpha,p} > 0$ *é escolhida de tal forma que* $\|h_{\alpha,p}\|_{\alpha p} = 1$.

Teorema 4.1. *Seja* $n \geq 2$, $p \in (1, n)$ *e* $\alpha \in \left(0, \frac{n}{n-p}\right]$, $\alpha \neq 1$. *Se* f *e* g *são tais que* $\|f\|_{L^{\alpha p}} = \|g\|_{L^{\alpha p}} = 1$, *então, para toda* $\mu > 0$

$$\frac{\alpha p}{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))} \int |g|^{\alpha(p-1)+1} - \frac{\mu^q}{q} \int \|y\|^q |g(y)|^{\alpha p} dy$$

$$\leq \frac{1}{p\mu^p} \int \|\nabla f\|_*^p + \frac{\alpha p - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))} \int |f|^{\alpha(p-1)+1}. \tag{4.2}$$

Nota 4.2. *Temos*

1. *Como* $0 < \alpha \leq \frac{n}{n-p}$ *e* $1 < p < n$, *se fazermos* $n = 3$, $p = \frac{3}{2}$ *e* $\alpha = \frac{2}{9}$, *então* $\alpha p = \frac{1}{3}$. *Em geral, temos que* (αp) *pode ser menor do que 1, e* $\|f\|_{\alpha p}$ *não seria mais uma norma.*

2. *A desigualdade (4.2) se reduz à desigualdade (3.4) quando* $\alpha = \frac{n}{n-p}$.

Demonstração. A demonstração é feita em três etapas.

1. Assumimos que f e g são duas funções suaves não negativas, de suporte compacto, $F = f^{\alpha p}$ e $G = g^{\alpha p}$. Definimos duas medidas como $\mu = \int F$ e $\nu = \int G$ e observamos que ambas são medidas de probabilidade e absolutamente contínuas com respecto à medida de Lebesgue, então do resultado principal, tem-se que existe uma função convexa φ tal que $\nabla\varphi$ transporta μ sobre ν.

2. Na demonstração do teorema (3.1) foi utilizada (3.7) como desigualdade básica. Neste caso será provado que se verifica a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{1-\gamma}\int G^{\gamma} \leq \frac{1-n\left(1-\gamma\right)}{1-\gamma}\int F^{\gamma} + \int F^{\gamma}\Delta\varphi. \tag{4.3}$$

De fato, sabemos que

$$G^{\gamma-1}\left(\nabla\varphi\left(x\right)\right) = F^{\gamma-1}\left(detD_A^2\varphi\left(x\right)\right)^{1-\gamma} \tag{4.4}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Como $D_A^2\varphi\left(x\right)$ é uma matriz simétrica definida não negativa, do exemplo (2.2) tem-se

$$\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left(detD_A^2\left(x\right)\right)^{1-\gamma} \leq \left(\frac{1}{1-\gamma}\right) + tr\left(D_A^2\left(x\right) - I\right),$$

ou

$$\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left(detD_A^2\left(x\right)\right)^{1-\gamma} \leq \frac{1}{1-\gamma}\left(1-n\left(1-\gamma\right)\right) + \Delta_A\varphi\left(x\right),$$

então, em (4.4) tem-se

$$\frac{1}{1-\gamma}G^{\gamma-1}\left(\nabla\varphi\left(x\right)\right) \leq \frac{1}{1-\gamma}\left(1-n\left(1-\gamma\right)\right)F^{\gamma-1} + \Delta_A\varphi\left(x\right)F^{\gamma-1}.$$

Multiplicando esta desigualdade por $F(x)$ e integrando com respecto à medida de Lebesgue temos

$$\frac{1}{1-\gamma}\int G^{\gamma-1}\left(\nabla\varphi\left(x\right)\right)F\left(x\right)dx \leq \frac{1}{1-\gamma}\left(1-n\left(1-\gamma\right)\right)\int F^{\gamma} + \int \Delta_A\varphi\left(x\right)F^{\gamma},$$

e utilizando (2.13) no caso em que $\psi = G^{\gamma-1}$ se tem

$$\frac{1}{1-\gamma}\int G^{\gamma} \leq \frac{1-n\left(1-\gamma\right)}{1-\gamma}\int F^{\gamma} + \int F^{\gamma}\Delta_A\varphi.$$

3. Definimos
$$\gamma := \frac{\alpha\left(p-1\right)+1}{\alpha p} = 1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha p}\right).$$
Observa-se que, se $0<\alpha\leq\frac{n}{n-p}$, então
$$\gamma = 1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha p}\right) = 1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha p}\right) \geq 1-\frac{n}{np}-\frac{p-n}{np} = 1-\frac{1}{n},$$
i.e., $\gamma\geq 1-\frac{1}{n}$. Utilizando (4.2) e o lema (2.41) se tem
$$\frac{\alpha p}{\alpha-1}\int G^{\gamma} \leq \frac{\alpha p-n\left(\alpha-1\right)}{\alpha-1}\int F^{\gamma}-\int\nabla F^{\gamma}.\nabla\varphi$$
Retomando as notações $F=f^{\alpha p}$ e $G=g^{\alpha p}$ tem-se
$$\frac{\alpha p}{\alpha-1}\int g^{\alpha(p-1)+1} \leq \frac{\alpha p-n\left(\alpha-1\right)}{\alpha-1}\int f^{\alpha(p-1)+1}-\left(\alpha\left(p-1\right)+1\right)\int f^{\alpha(p-1)}\nabla f.\nabla\varphi.$$
Aplicando a desigualdade de Young (2.6), com $X=-\nabla f\left(x\right)$ e $Y=f^{\alpha(p-1)}\nabla f.\nabla\varphi$ temos
$$\frac{\alpha p}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha p-\left(\alpha-1\right)\right)}\int g^{\alpha(p-1)+1} \leq \frac{\alpha p-n\left(\alpha-1\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha p-\left(\alpha-1\right)\right)}\int f^{\alpha(p-1)+1}+$$
$$\frac{1}{p\mu^{p}}\int\left\|\nabla f\right\|_{*}^{p}+\frac{\mu^{q}}{q}\int f^{\alpha p}\left\|\nabla\varphi\right\|^{q},$$
e, de (2.13), fazendo $\psi=\left\|\cdot\right\|^{q}$ na última integral, tem-se
$$\int f^{\alpha p}\left\|\nabla\varphi\right\|^{q} = \int\left\|y\right\|^{q}g^{\alpha p}\left(y\right)dy,$$
então
$$\frac{\alpha p}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha p-\left(\alpha-1\right)\right)}\int g^{\alpha(p-1)+1}-\frac{\mu^{q}}{q}\int\left\|y\right\|^{q}g^{\alpha p}\left(y\right)dy \leq$$
$$\frac{1}{p\mu^{p}}\int\left\|\nabla f\right\|_{*}^{p}+\frac{\alpha p-n\left(\alpha-1\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha p-\left(\alpha-1\right)\right)}\int f^{\alpha(p-1)+1},$$
o qual termina a demonstração de (4.2).

Observa-se que, se $\gamma=1-\frac{1}{n}$ obtemos (3.4).

$\square$

Corolário 4.3. *Se em (4.2) temos que*

$$\mu = q^{\frac{1}{q}},$$

então

(i) Quando $f = g = h_{\alpha,p}$ tem-se a igualdade e também temos o principio de dualidade

$$\sup_{\|g\|_{\alpha p}=1}\left[\frac{\alpha p}{(\alpha-1)(\alpha p-(\alpha-1))}\int |g|^{\alpha(p-1)+1}-\frac{\mu^q}{q}\int \|y\|^q\, |g|^{\alpha p}(y)\, dy\right] =$$

$$\inf_{\|f\|_{\alpha p}=1}\left[\frac{1}{p\mu^p}\int \|\nabla f\|_*^p+\frac{\alpha p-n(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha p-(\alpha-1))}\int |f|^{\alpha(p-1)+1}\right], \tag{4.5}$$

e $h_{\alpha,p}$ é extremal ambos problemas variacionais.

(ii) (Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg) Se $f \neq 0$ está em $W^{1,p}$, então, para $\theta > 0$

(a) Para $\alpha > 1$

$$\frac{\|\nabla f\|_p^{\theta}\, \|f\|_{\alpha(p-1)+1}^{1-\theta}}{\|f\|_{\alpha p}} \geq \|\nabla h_{\alpha,p}\|_p^{\theta}\, \|h_{\alpha,p}\|_{\alpha(p-1)+1}^{1-\theta}. \tag{4.6}$$

onde

$$\theta = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha(np-(\alpha p+1-\alpha)(n-p))}.$$

(b) Para $\alpha < 1$

$$\frac{\|\nabla f\|_p^{\theta}\, \|f\|_{\alpha p}^{\theta}}{\|f\|_{\alpha(p-1)+1}} \geq \frac{\|\nabla h_{\alpha,p}\|_p^{\theta}}{\|h_{\alpha,p}\|_{\alpha(p-1)+1}}. \tag{4.7}$$

onde

$$\theta = \frac{n(1-\alpha)}{(\alpha p+1-\alpha)(n-\alpha(n-p))}.$$

Nota 4.4. *Temos as seguintes observações*

1. *Análogamente com (3.6), temos que $h_{\alpha,p}$ verifica a seguinte igualdade*

$$-\nabla h_{\alpha,p}(x)[h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x] = \frac{1}{p\mu^p}\|\nabla h_{\alpha,p}(x)\|_*^p+\frac{\mu^q}{q}\left\|h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x\right\|^q. \tag{4.8}$$

De fato, da definição de $h_{\alpha,p}$ sabemos que

$$-\nabla h_{\alpha,p}(x)[h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x] = qh_{\alpha,p}^{\alpha p}\|x\|^q, \tag{4.9}$$

e

$$\|\nabla h_{\alpha,p}(x)\|_*^p = q^p h_{\alpha,p}^{\alpha p}(x)\,\|x\|^q$$

$$\left\| h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x \right\|^q = h_{\alpha,p}^{\alpha p} \left\| x \right\|^q .$$

Das duas últimas igualdades, temos

$$\frac{1}{p\mu^p} \left\| \nabla h_{\alpha,p}(x) \right\|_*^p + \frac{\mu^q}{q} \left\| h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x \right\|^q = \left(\frac{q^p}{p\mu^p} + \frac{\mu^q}{q} \right) h_{\alpha,p}^{\alpha p}(x) \left\| x \right\|^q . \tag{4.10}$$

Como $\mu^q = q$, tem-se

$$\frac{q^p}{p\mu^p} + \frac{\mu^q}{q} = \frac{\mu^{pq}}{p\mu^p} + \frac{\mu^q}{q} = \frac{\mu^q}{p} + \frac{\mu^q}{q} = \mu^q = q$$

*Então, em (*4.10*)*

$$\left(\frac{q^p}{p\mu^p} + \frac{\mu^q}{q} \right) h_{\alpha,p}^{\alpha p}(x) \left\| x \right\|^q = q h_{\alpha,p}^{\alpha p}(x) \left\| x \right\|^q ,$$

*e de (*4.9*) e (*4.10*), temos (*4.8*).*

2. *Observa-se que, para $\alpha < 1$, $h_{\alpha,p}$ tem suporte compacto e para $\alpha > 1$, esta função é estritamente positiva e com decaimento polinomial no infinito.*

   De fato, se $\alpha < 1$, então

   $$(\alpha - 1) \left\| x \right\|^q < 0,$$

   o que implica

   $$0 \leq \left(\sigma_{\alpha,p} + (\alpha - 1) \left\| x \right\|^q \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\sigma_{\alpha,p} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

   Assim, se tomarmos um ponto x no suporte de $h_{\alpha,p}$, então $h_{\alpha,p}(x) \neq 0$, ou

   $$\left(\sigma_{\alpha,p} + (\alpha - 1) \left\| x \right\|^q \right) > 0,$$

   e se tem

   $$\left\| x \right\|^q < \frac{\sigma_{\alpha,p}}{1 - \alpha},$$

   então o suporte de $h_{\alpha,p}$ é limitado, e como este conjunto é fechado, temos que o suporte de $h_{\alpha,p}$ é compacto.

   Se $\alpha > 1$, então $h_{\alpha,p} > 0$ e se $y = \left\| x \right\|$, o qual implica

   $$h_{\alpha,p}(x) = h_{\alpha,p}(y) = \left(\sigma_{\alpha,p} + (\alpha - 1) y^q \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(c + y)^r},$$

   onde $c = \frac{\sigma_{\alpha,p}}{\alpha - 1}$ e $r = \frac{1}{\alpha - 1}$, e temos que $h_{\alpha,p}$ decae polinomialmente no infinito.

Demonstração. A prova será feita em três etapas

1. Como $f = g = h_{\alpha,p}$, então temos que as medidas de probabilidade consideradas na prova do teorema (4.1) são iguais, o que implica $\nabla(x) = x$. Assim $\Delta(x) = n$, e

$$\frac{1}{1-\gamma}\int G^{\gamma} = \frac{1-n(1-\gamma)+n(1-\gamma)}{1-\gamma}\int G^{\gamma} = \left(\frac{1-n(1-\gamma)}{1-\gamma}\right)\int G^{\gamma} + n\int G^{\gamma},$$

i.e.

$$\frac{1}{1-\gamma}\int G^{\gamma} = \frac{1-n(1-\gamma)}{1-\gamma}\int F^{\gamma} + \int F^{\gamma}\Delta\varphi.$$

Como na prova do teorema (4.1), fazemos $\gamma = 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha p}$ e temos que

$$\left(\frac{\alpha p}{\alpha-1}\right)\int G^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}} = \frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{\alpha-1}\int F^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}} - \int \nabla(F^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}}).\nabla\varphi$$

Como $F = G = h_{\alpha,p}$, temos

$$\left(\frac{\alpha p}{\alpha-1}\right)\int h_{\alpha,p}^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}} = \frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{\alpha-1}\int h_{\alpha,p}^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}} - \int \nabla(h_{\alpha,p}^{1-\frac{\alpha-1}{\alpha p}}).\nabla\varphi =$$

$$\frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{\alpha-1}\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1} - (\alpha(p-1)+1)\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}\nabla h_{\alpha,p}(x),$$

então, de (4.8)

$$\frac{\alpha p}{(\alpha-1)(\alpha(p-1)+1)}\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1} =$$

$$\frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha(p-1)+1)}\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1} + \frac{1}{p\mu^p}\int \|\nabla h_{\alpha,p}(x)\|_*^p + \frac{\mu^q}{q}\int \left\|h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x\right\|^q,$$

i.e.

$$\frac{\alpha p}{(\alpha-1)(\alpha(p-1)+1)}\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1} - \frac{\mu^q}{q}\int \left\|h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x\right\|^q =$$

$$\frac{1}{p\mu^p}\int \|\nabla h_{\alpha,p}(x)\|_*^p + \frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha(p-1)+1)}\int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1}.$$

2. Definimos os funcionais u e v como

$$u(g) = \frac{\alpha p}{(\alpha-1)(\alpha p-(\alpha-1))}\int |g|^{\alpha(p-1)+1} - \frac{\mu^q}{q}\int \|y\|^q\,|g(y)|^{\alpha p}\,dy,$$

$$v(f) = \frac{1}{p\mu^p}\int \|\nabla f\|_*^p + \frac{\alpha p - n(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha p-(\alpha-1))}\int |f|^{\alpha(p-1)+1},$$

Provamos que

$$\sup_{g\in A} u(g) = \inf_{f\in A} v(f) \tag{4.11}$$

onde $A = \left\{f \in W^{1,p} : \|f\|_{\alpha p} = 1\right\}$. Do teorema (4.1), temos

$$\sup_{g\in A} u(g) \le \inf_{f\in A} v(f),$$

e da parte anterior

$$u(h_{\alpha,p}) = v(h_{\alpha,p}),$$

i.e., $h_{\alpha,p}$ é extremal. Se tivessemos

$$\sup_{g\in A} u(g) < \inf_{f\in A} v(f),$$

então

$$\sup_{f,g\in A} (u(g) - v(f)) < 0.$$

Como $u(h_{\alpha,p}) = v(h_{\alpha,p})$, então

$$0 = u(h_{\alpha,p}) - v(h_{\alpha,p}) \leq sup_{f,g\in A}(u(g) - v(f)) < 0,$$

o que é uma contradição. Assim

$$\sup_{g\in A} u(g) = \inf_{f\in A} v(f).$$

3. Como $f \neq 0$, então $\|f\|_{\alpha(p-1)+1} \neq 0$ e $\|f\|_{\alpha p} \neq 0$. Utilizando (4.11) temos

$$\frac{1}{p\mu^p} \int \|\nabla f\|_*^p + \frac{\alpha p - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))} \int |f|^{\alpha(p-1)+1} \geq K$$

onde

$$K := \frac{\alpha p}{(\alpha-1)(\alpha(p-1)+1)} \int h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)+1} - \frac{\mu^q}{q} \int \left\| h_{\alpha,p}^{\alpha(p-1)}(x)x \right\|^q$$

Então, teremos

$$\frac{1}{p\mu^p} \|\nabla f\|_p^p + \frac{\alpha p - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))} \|f\|_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} \geq K$$

ou

$$\frac{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))}{p\mu^p(\alpha p - n(\alpha-1))} \|\nabla f\|_p^p + \|f\|_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} \geq K \frac{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))}{(\alpha p - n(\alpha-1))}$$

Denotando

$$C_1 := \frac{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))}{p\mu^p(\alpha p - n(\alpha-1))}$$

$$C_2 := K \frac{(\alpha - 1)(\alpha p - (\alpha - 1))}{(\alpha p - n(\alpha-1))}$$

então

$$C_1 \left\|\nabla f\right\|_p^p + \left\|f\right\|_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} \geq C_2$$

Agora, trocando f por $f_\lambda = \lambda^{-\frac{n}{\alpha p}} f(\cdot/\lambda)$ temos

$$\lambda^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}} ||f||_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} + C_1 \lambda^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}-p} ||\nabla f||_p^p \geq C_2 \tag{4.12}$$

dado que

$$||f_\lambda||_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} = \lambda^{n-\frac{n(\alpha(p-1)+1)}{\alpha p}} ||f||_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1}$$

e

$$||\nabla f_\lambda||_p^p = \lambda^{n-\frac{n}{\alpha}-p} ||\nabla f||_p^p.$$

Considerando a função w definida por

$$w(\lambda) = \lambda^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}} ||f||_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1} + C_1 \lambda^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}-p} ||\nabla f||_p^p \geq C_2$$

derivamos esta função, achando que valor mínimo é

$$\lambda^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}+p-\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}} = -C_1 \left(\frac{n(\alpha-1)p - \alpha p^2}{n(\alpha-1)} \right) \frac{||\nabla f||_p^p}{||f||_{\alpha(p-1)+1}^{\alpha(p-1)+1}}.$$

Se denotarmos

$$a := \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$$

$$b := p - \frac{n(\alpha-1)}{\alpha}$$

$$R := \frac{n(\alpha-1)p - \alpha p^2}{n(\alpha-1)}$$

$$u := \alpha(p-1)+1$$

$$v := p$$

então, teremos

$$\lambda^{a+b} = -C_1 R \frac{B^v}{A^u}$$

e observamos que, se $\alpha > 1$, então $R < 0$ e $C_1 > 0$, e se $\alpha < 1$, então $R > 0$ e $C_1 < 0$. Assim, se $\alpha > 1$, obtem-se em (4.12)

$$A^{\frac{ub}{a+b}} B^{\frac{va}{a+b}} \geq C_3$$

onde C_3 é uma constante. Se fazermos $\theta := \frac{av}{av+bu}$, e trocamos pelos valores correspondentes, teremos

$$\theta = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha(np-(\alpha p+1-\alpha)(n-p))},$$

e também,

$$\frac{\|\nabla f\|_p^{\theta}\,\|f\|_{\alpha(p-1)+1}^{1-\theta}}{\|f\|_{\alpha p}} \geq \|\nabla h_{\alpha,p}\|_p^{\theta}\,\|h_{\alpha,p}\|_{\alpha(p-1)+1}^{1-\theta}.$$

O procedimento é análogo para $\alpha < 1$.

$\square$

Capítulo 5

Minimizadores no caso das desigualdades precisas de Sobolev

No capítulo 3 foi obtida uma função extremal para a desigualdade de Sobolev. Neste capítulo veremos que se temos uma função f que também é extremal, então tem que ser uma dilatação-traslação de h_p, i.e., tem que ser da forma

$$f(x) = Ch_p(\lambda(x - x_0)),$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$, onde C e λ são números reais constantes, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um valor fixo. Suponhamos que temos duas medidas de probabilidade $\mu = \int f^{p^*}$ e $\nu = \int h_p^{p^*}$, então existe uma função φ convexa, tal que $\nabla\varphi$ transporta μ a ν. Se φ fosse de classe C^2 então se verifica a equação de Monge-Ampere

$$f^{p^*}(x) = h_p^{p^*}(\varphi(x)) det D^2\varphi.$$

Então, para o caso de igualdade no teorema (3.1), teriamos que, da prova deste teorema,

$$f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left[(det D^2\varphi)^{\frac{1}{n}} - \frac{\Delta\varphi}{n}\right] = 0,$$

o que implica que a matriz $D^2\varphi$ é um múltiplo da identidade (considerando f estritamente positivo) do qual temos que

$$\nabla\varphi(x) = \lambda(x - x_0),$$

e, da equação de Monge-Ampere teriamos que

$$f(x) = Ch_p(\lambda(x - x_0)).$$

Os problemas neste caso são: a função h_p não é suave, φ não é necessariamente regular, e a aplicação do lema (2.41) no caso de funções de Sobolev em geral não foi estudada até agora.

Assim, o primeiro passo será provar que é possivel fazer o procedimento do lema (2.41) para funções de Sobolev não negativas, depois será provar que duas funções extremais no teorema (3.1) são na verdade uma dilatação-traslação da outra. Finalmente, considerando uma delas como h_p, obtemos o resultado procurado.

Lema 5.1. *Sejam $f \in W^{1,p}$ e $g \in L^{p^*}$, com $f, g \geq 0$, $\|f\|_{p^*} = \|g\|_{p^*} = 1$, e*

$$\int g^{p^*}(y) \|y\|^q \, dy < \infty.$$

Seja $\nabla\varphi$ a aplicação de Brenier que transporta $\int f^{p*}$ sobre $\int g^{p^*}$. Então $f^{\frac{p^*}{q}} \nabla\varphi \in L^q$ e

$$\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} \Delta_A \varphi \leq -\frac{p(n-1)}{n-p} \int f^{\frac{p^*}{q}} \nabla f . \nabla\varphi \tag{5.1}$$

Demonstração. A prova será feita em 6 etapas.

1. De (2.13), com $\psi = \|\cdot\|^q$, temos

$$\int f(x)^{p^*} \|\nabla\varphi(x)\|^q \, dx = \int g^{p^*}(y) \|y\|^q \, dy$$

o que implica $f^{\frac{p^*}{q}} \nabla\varphi \in L^q$. É possivel escolher $\psi = \|\cdot\|^q$ devido à condição $\int g^{p^*}(y) \|y\|^q \, dy < \infty$, o que implica $\|\cdot\|^q \in L^1(\nu)$, onde $\nu = \int g^{p^*}$.

2. Seja $\Omega = int(Dom\varphi)$, onde Ω é convexo. Considerando $f \neq 0$ temos que o suporte de f está contido em $\overline{\Omega}$. De fato, como as medidas $\mu = \int f^{p^*}$ e $\nu = \int g^{p^*}$ são absolutamente continuas com respecto à medida de lebesgue, temos que, para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) det D_A^2 \varphi(x).$$

Se tomarmos um ponto x que esteja no suporte de f, então $g(\nabla\varphi)(x) \in \mathbb{R}$ ou $\nabla\varphi(x) \in \mathbb{R}$, i.e., $\nabla\varphi(x) < \infty$, o que implica $x \in \overline{Dom\varphi} = \overline{\Omega}$ o que é válido, desde que Ω é convexo.

3. Assumimos que $0 \in \Omega$. Se $\epsilon > 0$, definimos, para ϵ suficientemente pequeno

$$f_\epsilon(x) = min\left\{ f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right), f(x)\chi(\epsilon x) \right\},$$

onde χ é a função de corte que aparece na nota (2.64). Observamos as seguintes propriedades de f_ϵ.

(a) O suporte de f_ϵ é compacto e está contido em Ω. De fato, se $f_\epsilon(x) = f(x)\chi(\epsilon x)$, teriamos que, para $\|x\| \geq \frac{1}{\epsilon}$, $\chi(\epsilon x) = 0$ ou $f_\epsilon(x) = 0$. Então, se $\|x\| \geq \frac{1}{\epsilon}$, $f_\epsilon(x) = 0$ o que implica que x não pertence ao suporte de f_ϵ, ou que, se x pertence ao suporte de f_ϵ, então $\|x\| < \frac{1}{\epsilon}$. Se $f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$, então, da definição de f_ϵ temos $f_\epsilon(x) \leq f(x)\chi(\epsilon x)$ e seguimos o raciocínio anterior para deduzir que o suporte de f_ϵ é compacto. Além disso, por definição, o suporte de uma função é um conjunto fechado, então, o suporte de f_ϵ é compacto.

    Para provar que o suporte de f_ϵ está contido em Ω, podemos supor que $f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$. Se tomarmos um ponto x do suporte de f_ϵ, então $\frac{x}{1-\epsilon}$ estará no suporte de f, o que implica $\frac{x}{1-\epsilon} \in \overline{\Omega}$. Como $0 \in \Omega$, e Ω é convexo, então os pontos da forma

$$\alpha 0 + \beta\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right),$$

    com α, β não negativos e $\alpha + \beta = 1$ estão em $\overline{\Omega}$. Então, para $\beta = (1-\epsilon)$, da nota (2.28) temos que $(1-\epsilon)\left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)x = x$ está em Ω, i.e., $x \in \Omega$. Se $f_\epsilon(x) = f(x)\chi(\epsilon x)$, então $f_\epsilon(x) \leq f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$, e segue-se o raciocínio anterior. Como o ponto x foi arbitrário, temos que o suporte de f_ϵ está contido em Ω.

(b) As funções $f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$ e $f(x)\chi(\epsilon x)$ são limitadas em $W^{1,p}$, uniformemente em ϵ. Para provar isto, denotamos

$$f_1(x) = f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$$

    e

$$f_2(x) = f(x)\chi(\epsilon x).$$

    No caso da função f_1, fazendo uma mudança de variáveis, tem-se

$$\|f_1\| = (1-\epsilon)^{\frac{n}{p}}\|f\|_p$$

$$\|\nabla f_1\| = (1-\epsilon)^{\frac{n-p}{p}}\|\nabla f\|_p\,.$$

    No caso da função f_2, temos

$$\|f_2\|_p \leq \|f\|_p\,.$$

Para a derivada de f_2, temos

$$\nabla f_2(x) = \nabla f(x)\chi(\epsilon x) + f(x)\nabla\chi(\epsilon x).$$

Denotando

$$f_2^1(x) = \nabla f(x)\chi(\epsilon x)$$

e

$$f_2^2(x) = f(x)\nabla\chi(\epsilon x),$$

temos

$$\left\|f_2^1\right\| \leq \|\nabla f\|_p$$

$$\left\|f_2^2\right\| = \int f^p(x)\left|\nabla(\chi(\epsilon x))\right|^p dx = \epsilon^p \int f^p(x)\left|\nabla\chi(\epsilon x)\right|^p dx,$$

e como $f \in L^{p^*}$, $f^p \in L^{\frac{p^*}{p}}$, $\frac{p^*}{p} = 1 - \frac{p}{n}$, utilizando a desigualdade de Holder

$$\int f^p\left|\nabla(\chi(\epsilon x))\right|^p dx \leq \epsilon^p \left(\int f^{p^*}\right)^{1-\frac{p}{n}} \left(\epsilon^n \int \left|\nabla\chi(\epsilon x)\right|^n dx\right)^{\frac{p}{n}}$$

$$= \left(\int f^{p^*}\right)^{1-\frac{p}{n}} \left(\int \left|\nabla\chi(\epsilon x)\right|^n dx\right)^{\frac{p}{n}},$$

então

$$\left\|f_2^2\right\|_p \leq \|f\|_{p^*}\|\nabla\chi\|_n,$$

e utilizando a fórmula

$$min(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

tem-se que $f_\epsilon \in W^{1,p}$ e ∇f_ϵ é limitada, quando $\epsilon \to 0$, em L^p.

4. Fixamos $\epsilon > 0$ e seja Ω_ϵ um aberto limitado tal que $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ e o suporte de f_ϵ está em Ω_ϵ (por exemplo, podemos definir

$$\Omega_\epsilon = \left\{x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > \epsilon, |x| < \frac{1}{\epsilon}\right\}$$

e verificar as condições pedidas). Definimos as funções f_ϵ^k como

$$f_\epsilon^k = \rho_k * f_\epsilon,$$

onde $(\rho_k)_{k\geq 1}$ é uma sequencia regularizante. Observa-se que $f_\epsilon^k \geq 0$ e $f_\epsilon^k \in C^\infty$. Além disso, o suporte de f_ϵ^k está contido em Ω_ϵ para k suficientemente grande. De fato, se fazermos

$$d = \frac{1}{2} min[d(x, Fr\Omega_\epsilon)],$$

com x no suporte de f_ϵ, definimos o cobrimento $\left\{B_{\frac{d}{2}(x)}\right\}$, então teremos que o suporte de f_ϵ está contido em $\cup B_{\frac{d}{2}}(x)$ (a união é feita sobre os x no suporte de f_ϵ, e também

$$\cup B_{\frac{d}{2}}(x) \subset \Omega_\epsilon.$$

Como o suporte de f_ϵ é compacto, então ele estará contido em $\cup_{i=1}^n B_{\frac{d}{2}}(x_i)$. Agora, seja x um elemento do suporte de f_ϵ^k, e lembrando que, se f e g são duas funções com suporte compacto tais que é possivel definir $f * g$, e denotando o suporte de f por $supp(f)$, implica

$$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g),$$

então $x = a + b$, onde $a \in supp(f_\epsilon)$ e $b \in supp(\rho_k)$. Como $a \in supp(f_\epsilon)$, $a \in B_{\frac{d}{2}}(x_i)$, e como $supp(\rho_k) \subset B_{\frac{1}{k}}(0)$. Então

$$|x - x_i| = |a + b - x_i| \leq |a - x_i| + |b| < \frac{d}{2} + \frac{1}{k} < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d,$$

o que implica $x \in B_{\frac{d}{2}}(x_i)$, e como $B_{\frac{d}{2}}(x_i) \subset \Omega_\epsilon$, então $supp(f_\epsilon^k) \subset \Omega_\epsilon$ para $k > \frac{2}{d}$. Como Ω_ϵ é limitado, o suporte de f_ϵ^k é limitado, donde é compacto para k suficientemente grande.

5. Pelo teorema (2.70), temos que, como $\Omega_\epsilon \subset\subset \mathbb{R}^n$,

$$f_\epsilon^k \to f_\epsilon$$

em $W^{1,p}(\Omega_\epsilon)$. Mas, os suportes de f_ϵ^k e f_ϵ(ambos compactos) estão contidos em Ω_ϵ, então é possivel estender ambas funções de forma que

$$f_\epsilon^k \to f_\epsilon$$

em $W^{1,p}$, e pelo lema (2.41)

$$\int (f_\epsilon^k)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} \Delta_A \varphi \leq -\int \nabla \left((f_\epsilon^k)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} \right) .\nabla \varphi,$$

ou

$$\int (f_\epsilon^k)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int \left(f_\epsilon^k\right)^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon^k.\nabla\varphi,$$

onde $c_{n,p} = p(n-1)/(n-p) > 0$. Também, da nota (2.56), temos que, como $f_\epsilon^k \to f_\epsilon$ em L^{p^*} e $\nabla\varphi$ é essencialmente limitada em Ω_ϵ(dado que Ω_ϵ), então

$$(f_\epsilon^k)^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi \to (f_\epsilon)^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi$$

em L^q.

Por outro lado, sabemos que $f_\epsilon^k \to f_\epsilon$ em $W^{1,p}$, então

$$\nabla f_\epsilon^k \to \nabla f_\epsilon$$

em L^p. Assim

$$\int [(f_\epsilon^{k_n})^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi][\nabla f_\epsilon^{k_n}] \to \int [f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi][\nabla f_\epsilon] \tag{5.2}$$

dado que $(f_\epsilon^{k_n})^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi$ converge a $f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi$ em L^q e $\nabla f_\epsilon^{k_n}$ converge a ∇f_ϵ em L^p, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e $(f_\epsilon^{k_n})$ uma subsequencia de f_ϵ^k, e do lema (2.57) tem-se (5.2). Também, como $D_A^2\varphi$ é uma função mensurável com valores matriciais, então $\Delta_A\varphi$ é uma função mensurável com valores reais. Além disso

$$\left|(f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi\right| \leq \left|(f_\epsilon^{k_n})^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right|\Delta_A\varphi$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Como $(f_\epsilon^{k_n})^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$ é integrável (pelo lema (2.41)) e $(f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$ é mensurável, então $(f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$ é integrável (neste caso foi utilizado um resultado que diz que, se f e g são duas funções tais que f é mensurável, g é integrável, e $|f| \leq |g|$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$, então f é integrável).

Também, como $(f_\epsilon^{k_n})^{\frac{p^*}{q}}\Delta_A\varphi \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ e $\int (f_\epsilon^{k_n})^{\frac{p^*}{q}}\Delta_A\varphi < \infty$ para todo n dado que

$$\int g_n\Delta_A\varphi \leq -\int \nabla g_n.\nabla\varphi \leq -\int \nabla g.\nabla\varphi.$$

para todo n ($g_n = (f_\epsilon^{k_n})^{\frac{p^*}{q}}$ e $g = f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}$); do lema de Fatou, tem-se que

$$\liminf_{n\to\infty} g_n\Delta_A\varphi$$

está em L^1, e

$$\int \liminf_{n\to\infty} g_n\Delta_A\varphi \leq \liminf_{n\to\infty}\int g_n\Delta_A\varphi. \tag{5.3}$$

Sabemos que $g_n \to g$ em $L^{\frac{n}{n-1}}$ e g_{n_r} converge a g quase sempre em $\mathbb{R}^n$, então

$$g \leq g_{n_r}$$

para r suficientemente grande, e como $\Delta_A\varphi \geq 0$, então

$$g\Delta_A\varphi \leq g_{n_r}\Delta_A\varphi,$$

o que implica

$$g\Delta_A\varphi \leq \liminf_{r\to\infty} g_{n_r}\Delta_A\varphi,$$

então, de (5.3)

$$\int g\Delta_A\varphi \leq \int \liminf_{r\to\infty} g_{n_r}\Delta_A\varphi \leq \liminf_{r\to\infty} \int g_{k_r}\Delta_A\varphi,$$

i.e.

$$\int (f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int (f_\epsilon)^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon.\nabla\varphi,$$

onde $c_{n,p} = p(n-1)/(n-p)$.

6. A seguir, analizamos a convergência de f_ϵ, de sua derivada fraca, e de o produto com $\nabla\varphi$, onde φ é a função convexa tal que o seu gradiente trasnporta μ a ν.

   (a) A função f_ϵ converge a f quase sempre em $\mathbb{R}^n$ quando $\epsilon \to 0$. De fato, sabemos que

   $$f_\epsilon(x) = min\left\{f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right), f(x)\chi(\epsilon x)\right\}.$$

   Como $\chi \in C^\infty$, se $\epsilon \to 0$, então $\chi(\epsilon x) \to \chi(0) = 1$. Assim, se $f_\epsilon(x) = f(x)\chi(\epsilon x)$, então

   $$f_\epsilon(x) \to f(x).$$

   Seja $g_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)$, tem-se

   $$||g_\epsilon||_{1,p}^p = |g_\epsilon|_p^p + |\nabla g_\epsilon|_p^p = \int |g_\epsilon(x)|^p dx + \int |\nabla g_\epsilon(x)|^p dx$$

   $$= \int \left|f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)\right|^p dx + \int \left|\nabla\left(f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)\right)\right|^p dx.$$

   Se $y = \frac{x}{1-\epsilon}$, então $dy = \frac{1}{(1-\epsilon)^n}dx$, e temos que

   $$\int |f(y)|^p(1-\epsilon)^n dy = (1-\epsilon)^n \int |f(y)|^p dy = (1-\epsilon)^n |f|_p^p$$

$$(1-\epsilon)^n \int |\nabla(f(y))|^p dy = \frac{(1-\epsilon)^n}{(1-\epsilon)^p} \int |\nabla f(y)|^p dy = (1-\epsilon)^{n-p} |\nabla f|_p^p,$$

i.e.

$$||g_\epsilon||_{1,p}^p \leq (1-\epsilon)^n ||f||_{1,p}^p,$$

e quando $\epsilon \to 0$, g_ϵ é limitado em $W^{1,p}$. Também, para $\phi \in C_c^\infty$

$$\int g_\epsilon \phi = \int f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) \phi(x)dx = (1-\epsilon)^n \int f(y)\phi((1-\epsilon)y)dy$$

$$= (1-\epsilon)^n \int f(y)\phi((1-\epsilon)y)dy,$$

i.e.

$$\int g_\epsilon \phi = (1-\epsilon)^n \int f(y)\phi((1-\epsilon)y)dy$$

Como $(1-\epsilon)^n \phi((1-\epsilon)y) \to \phi(y)$ em $\mathbb{R}^n$, então $\phi_\epsilon \to \phi$ em L^q, e como

$$||f\phi_\epsilon - f\phi||_1 \leq ||f||_{p^*} ||\phi_\epsilon - \phi||_q,$$

onde $\phi_\epsilon = (1-\epsilon)^n \phi((1-\epsilon)y)$, então

$$\int g_\epsilon \phi \to \int f\phi$$

para todo $\phi \in C_c^\infty$, o que implica que g_ϵ converge fraco a f em $W^{1,p}$, então, do teorema de Rellich-Kondrashov

$$g_\epsilon \to f$$

em $L^r(V_j)$, para $1 < r < p^*$ com $V_j \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com $Fr(V_j)$ de classe C^1. Assim

$$g_\epsilon \to f$$

quase sempre em V_j. Então, temos que

$$f_\epsilon \to f$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$(podemos considerar $V_j = B_j(0)$ e $\mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^\infty V_j$).

(b) A sequencia f_ϵ converge a f em L^p (o que foi provado anteriormente foi que $f_\epsilon^k \to f_\epsilon$ em $W^{1,p}$, com $k \to \infty$). Do item anterior, temos que $f_\epsilon \leq f$, com

$f \in L^{p^*}$. Como $f_\epsilon^p \to f^p$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ e $f_\epsilon^p \leq f^p$ com $f^p \in L^1$. Então, do teorema da Convergência Dominada temos

$$f_\epsilon^p \to f^p$$

em L^1. Agora, como

$$|f_k(x) - f(x)|^p \leq |f_k^p(x) - f^p(x)|,$$

tem-se

$$||f_k - f||_p^p = \int |f_k(x) - f(x)|^p dx \leq \int |f_k^p(x) - f^p(x)| dx = ||f_k^p - f^p||_1,$$

ou

$$||f_k - f||_p \leq ||f_k^p - f^p||_1.$$

Assim, como $f_\epsilon^p \to f^p$ em L^1, então

$$f_\epsilon \to f$$

em L^p.

(c) A sequencia ∇f_ϵ converge fraco a ∇f em L^p. De fato, como f_ϵ e f estão em $W^{1,p}$, então, para todo C_c^∞,

$$\left| \int \nabla_\epsilon \phi - \int \nabla f \phi \right| = \left| \int f_\epsilon \nabla \phi - \int f \nabla \phi \right|$$
$$= \left| \int (f_\epsilon - f) \nabla \phi \right| \leq \|f_\epsilon - f\|_p \|\nabla \phi\|_q ,$$

i.e.

$$\left| \int \nabla_\epsilon \phi - \int \nabla f \phi \right| \leq \|f_\epsilon - f\|_p \|\nabla \phi\|_q ,$$

então

$$\int \nabla f_\epsilon \phi \to \int \phi \nabla f.$$

(d) Temos que

$$(f_\epsilon)^{\frac{p^*}{q}} \nabla \varphi \to f^{\frac{p^*}{q}} \nabla \varphi$$

em L^q. De fato, como $f_\epsilon \to f$ em L^p, $f_{\epsilon_m} \to f$ converge quase sempre em $\mathbb{R}^n$, então $f_\epsilon \leq f$, o que implica $(f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}) |\nabla \varphi| \leq f^{\frac{p^*}{q}} |\nabla \varphi|$, ou

$$\left| (f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}) \nabla \varphi \right| \leq \left| f^{\frac{p^*}{q}} \nabla \varphi \right|,$$

e como
$$(f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}})\,|\nabla\varphi| \to f^{\frac{p^*}{q}}\,|\nabla\varphi|$$
quase sempre em $\mathbb{R}^n$, então
$$(f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}})\nabla\varphi \to f^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi$$
em L^q.

(e) Sabemos que
$$\int (f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int (f_\epsilon)^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon.\nabla\varphi$$
então
$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int (f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int (f)^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi$$
Como $f_\epsilon \to f$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$, $f \leq f_\epsilon$ e $\Delta_A\varphi \geq 0$, então
$$f\Delta_A\varphi \leq f_\epsilon\Delta_A\varphi.$$
Como $f_\epsilon\Delta_A\varphi \in L^1$ e $f\Delta_A\varphi$ é mensurável, então $f\Delta_A\varphi \in L^1$, o que implica
$$\int f\Delta_A\varphi \leq \int \liminf_{\epsilon\to 0} f_\epsilon\Delta_A\varphi \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\int f_\epsilon\Delta_A\varphi.$$
Assim
$$\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int f^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi.$$
□

Proposição 5.2. *Seja $p \in (1,n)$, e sejam f e g duas funções não negativas satisfazendo as hipóteses do teorema (3.1). Se a igualdade se verifica em (3.4), então f é uma dilatação-traslação de g em Ω.*

Demonstração. A prova será feita em 3 etapas.

1. Sejam $f,g \geq 0$ tais que tem-se a igualdade em (3.4). Seja $\nabla\varphi$ que transporta $\int f^{p^*}$ a $\int g^{p^*}$, onde φ é convexa. Seja $\Omega = int(Dom\varphi)$ e o suporte de f contido em $\overline{\Omega}$. Temos que, se $K \subset \Omega$ é um compacto, existe $\alpha_K > 0$ uma constante tal que para todo $x \in K$
$$f(x) \geq \alpha_K > 0.$$

Neste caso, "para todo"é utilizado como um equivalente de "para quase todo". Com efeito, observamos que, se

$$-\int f^{\frac{p^*}{q}} \nabla f.\nabla\varphi = ||\nabla\varphi||_p(\int f^{p^*}||\nabla\varphi||^q)^{\frac{1}{q}},$$

(onde foi utilizada a desigualdade de Holder (2.8) com $X = -\nabla f$ e $Y = f^{\frac{p^*}{q}}\nabla\varphi$), então

$$||X||_*^p = k||Y||^q,$$

com $k > 0$ uma constante, ou

$$||\nabla f(x)||_*^p = kf^{p^*}(x)||\nabla\varphi(x)||^q \tag{5.4}$$

quase sempre em Ω.

Agora, seja a sequencia

$$f_m(x) = max(f(x), \frac{1}{m}).$$

Observa-se que $\nabla f_m \in L^p$ com $\nabla f_m = \nabla f 1_{f>\frac{1}{m}}$. Então

$$||\nabla f_m(x)||_*^p \leq ||\nabla f(x)||_*^p = kf^{p^*}(x)||\nabla\varphi(x)||^q \leq kf_m^{p^*}(x)||\nabla\varphi(x)||^q,$$

i.e.

$$||\nabla f_m(x)||_*^p \leq kf_m^{p^*}(x)||\nabla\varphi(x)||^q.$$

Assim

$$||\nabla(f_m^{-\frac{p}{n-p}}(x))||_* = ||\left(-\frac{p}{n-p}\right) f_m^{-\frac{n}{n-p}}\nabla f_m(x)||_*$$

$$= \left(\frac{p}{n-p}\right) f_m^{-\frac{p^*}{p}}(x)||\nabla f_m(x)||_* \leq \left(\frac{p}{n-p}\right) f_m^{-\frac{p^*}{p}}(x)k^{\frac{1}{p}} f_m^{\frac{p^*}{p}}(x)||\nabla\varphi||^{\frac{q}{p}}$$

$$= \left(\frac{p}{n-p}\right) k^{\frac{1}{p}}||\nabla\varphi||^{\frac{1}{p-1}}$$

ou

$$||\nabla(f_m^{-\frac{p}{n-p}}(x))||_* \leq \left(\frac{p}{n-p}\right) k^{\frac{1}{p}}||\nabla\varphi||^{\frac{1}{p-1}} \tag{5.5}$$

Como $\nabla\varphi$ é localmente limitada sobre Ω, então $\nabla(f_m^{-\frac{p}{n-p}})$ é localmente limitada em Ω_0(que é o conjunto onde φ é diferenciável), então as funções $f_m^{-\frac{p}{n-p}}$ são uniformemente localmente Lipschitz sobre Ω_0 em m, i.e.

$$|f_m^r(x) - f_m^r(y)| \leq L|x-y|.$$

Também, sabemos que

$$max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|,$$

então

$$f_m^r(x) = \frac{1}{2}(f^r(x) + \frac{1}{m}) + \frac{1}{2}|f^r - \frac{1}{m}|.$$

Se $m \to \infty$, tem-se

$$f_m^r(x) \to f^r(x)$$

em $\mathbb{R}^n$ e como $(f_m^r)_{m\geq 1}$ é uma sequencia de funções localmente lipschitz, f^r também é localmente lipschitz. Como f^r é localmente lipschitz, f^r é localmente limitada em Ω. Seja um subconjunto $K \subset \Omega_0$ compacto, o que implica f^r é lipschitz em K, então f^r é continua em K, e como esta função está definida sobre um compacto, existem x_K e y_K tal que

$$\alpha_K = f(x_K) \leq f(x) \leq f(y_K),$$

i.e.

$$f(x) \geq \alpha_K.$$

Para m suficientemente grande, $f_m(x_K) \leq f(x_K)$ e $\frac{1}{m} \leq f_m(x_K)$, o que implica $\frac{1}{m} \leq f(x_K) = \alpha_K$. Então

$$0 < \alpha_K \leq f(x)$$

.

2. A Hessiana distribucional de φ ou $D^2_{\mathcal{D}'}\varphi$, considerada como uma medida, não tem parte singular, i.e.

$$D^2_{\mathcal{D}'}\varphi = D^2_A\varphi$$

Provamos que $\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi$ como medida de Radon, é absolutamente continua em Ω com respecto à medida $\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi$. Seja $\Delta_s\varphi$ a parte singular de $\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi$, lembrando que $\Delta_s\varphi$ é uma medida não negativa e que $\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi = \Delta_{ac}\varphi + \Delta_s\varphi$. Como devemos ter a igualdade em (5.1), se tem

$$\lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{m\to 0} < (f_\epsilon^m)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}, \Delta_s\varphi >= 0. \tag{5.6}$$

De fato, sabemos que

$$\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq -c_{n,p}\int (f_\epsilon^m)^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon^m.\nabla\varphi,$$

i.e.

$$\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq \int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi,$$

(foi aplicado o lema principal, mais detalhes ver [8]) o que implica

$$\int (f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq \liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$$

$$\leq \liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi = -c_{n,p}\int f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon.\nabla\varphi,$$

e também

$$\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi \leq \lim_{\epsilon\to 0}\int (f_\epsilon)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi\right] \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-c_{n,p}\int f_\epsilon^{\frac{p^*}{q}}\nabla f_\epsilon.\nabla\varphi\right] = -c_{n,p}\int f^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi.$$

Como

$$\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi = -c_{n,p}\int f^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi$$

tem-se

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi\right] = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\liminf_{m\to 0}\int (f_\epsilon^m)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_{\mathcal{D}'}\varphi\right],$$

i.e.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{m\to 0} < (f_\epsilon^m)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}, \Delta_s\varphi >= 0.$$

Agora, suponhamos que $0\in\Omega$ e $K\subset\Omega$ tal que K é convexo compacto arbitrário, com $0\in K$. Para $d_K := d(K,\Omega^c)$, seja

$$K_0 = \left\{x\in\Omega; d(x,K)\leq \frac{1}{2}d_K\right\}.$$

Da sua definição, $K_0\subset\Omega$ é convexo compacto tal que

$$K\subset int(K_0).$$

Sabemos que existe $\alpha = \alpha_{K_0} > 0$ tal que

$$f\geq \alpha 1_{K_0}.$$

Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, é possivel

$$\frac{1}{(1-\epsilon)^2}K \subset K_0$$

e afirmamos que

$$f_\epsilon(x) \geq \alpha 1_{\frac{K}{1-\epsilon}}(x).$$

Com efeito, sabemos que

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) + f(x)\chi(\epsilon x)\right] + \frac{1}{2}|f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) - f(x)\chi(\epsilon x)|. \tag{5.7}$$

Como $f(x) \geq \alpha_K > 0$, então

$$f(x) \geq \alpha 1_K(x),$$

o que implica

$$f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) \geq \alpha 1_{\frac{K}{1-\epsilon}}(\frac{x}{1-\epsilon}),$$

e como

$$f_\epsilon(x) \geq \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) + \frac{1}{2}f(x)\chi(\epsilon x) + \frac{1}{2}|f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right)| - \frac{1}{2}|f(x)\chi(\epsilon x)|,$$

então, do fato de ser $f \geq 0$ e $\chi \geq 0$

$$f_\epsilon(x) \geq f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right),$$

o que implica

$$f_\epsilon(x) \geq \alpha 1_{\frac{K}{1-\epsilon}(\frac{x}{1-\epsilon})}.$$

Assim, para δ suficientemente grande tem-se

$$f_\epsilon^m(x) \geq \alpha 1_{\frac{K}{1-\epsilon}}(x) \geq \alpha 1_K(x)$$

i.e.

$$f_\epsilon^m(x) \geq \alpha 1_K$$

Então, temos

$$\int f_\epsilon^m \Delta_s\varphi \geq \alpha \int 1_K \Delta_s\varphi = \alpha\Delta_s\varphi(K)$$

i.e.

$$< \Delta_s\varphi, (f_\epsilon^\delta)^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} > \geq \alpha^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_s\varphi(K)$$

então, como $\alpha_K > 0$

$$\Delta_s\varphi\,[K] = 0$$

Como K é arbitrário, de $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$, com $K_i \subset int(K_{i+1})$ (por exemplo $K_i = \overline{B_i(0)}$) e utilizando a propriedade para uma medida μ que diz

$$\lim_{i\to\infty} \mu(K_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} K_i) = \mu(\mathbb{R}^n),$$

tem-se $\Delta_s\varphi \equiv 0$. Agora, como $D_s^2\varphi$ é uma matriz simétrica não negativa, então

$$\left[det(D_s^2\varphi)\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\Delta_s\varphi}{n} = 0,$$

o que implica $det(D_s^2\varphi) = 0$, e todos os seus autovalores serão nulos (dado que são não negativos), então $D_{ac}^2\varphi = D_{\mathcal{D}'}^2\varphi$.

3. Como se tem a igualdade no teorema (3.1), então

$$\int g^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} \leq -\frac{p(n-1)}{n(n-p)} \int f^{\frac{n(p-1)}{n-p}} \nabla f.\nabla\varphi$$

$$= c_{n,p}\left(\int f^{\frac{p^*}{q}} |\nabla f|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \int g^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)},$$

onde $c_{n,p} = p(n-1)/(n-p)$. Assim

$$\int g^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} \leq \int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} (detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi$$

$$\leq -\frac{1}{n}\int \nabla(f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}).\nabla\varphi \leq -\frac{p(n-1)}{n(n-p)}\int f^{\frac{p^*}{q}}\nabla f.\nabla\varphi$$

$$\leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)}||\nabla f||_p \int ||y||^q g^{p^*}(y)dy = \int g^{p^*(1-\frac{1}{n})}$$

o que implica

$$\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} (detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi,$$

i.e.

$$\int \left[f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} (detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\int f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi\right] = 0$$

e como

$$f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} (detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\Delta_A\varphi,$$

então

$$f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)} (detD_A^2\varphi(x))^{\frac{1}{n}} - f^{p^*\left(1-\frac{1}{n}\right)}\frac{\Delta_A\varphi}{n} = 0$$

quase sempre em Ω. Como f é estritamente positivo para quase todo ponto de então, todos os autovalores da matriz $\Delta_A \varphi(x)$ são iguais, i.e.

$$D_A^2 \varphi = \lambda I_d$$

quase sempre em Ω, onde I_d é a matriz identidade e temos que $D^2_{\mathcal{D}'} \varphi$ é também um múltiplo constante da identidade quase sempre em Ω. Se tomarmos uma sequencia regularizante $(\rho_k)_{k \geq 1}$, então teremos que $D^2_{\mathcal{D}'}(\varphi * \rho_k) = D^2_{\mathcal{D}'} \varphi * \rho_k$ é um múltiplo da identidade em Ω_k, onde

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega; d(x, \Omega^c) > \frac{1}{k} \right\},$$

então $D^2_{\mathcal{D}'}(\varphi * \rho_k)$ é um múltiplo da identidade em Ω (dado que se $x \in \Omega$, como Ω é aberto, existe $\delta > 0$ com $d(x, \Omega) \geq \delta > \frac{1}{k}$, para algum $k > 0$ inteiro). Assim, como ρ_k converge à massa de Dirac quando $k \to \infty$ tem-se que $D^2_{\mathcal{D}'} \varphi$ é um múltiplo da identidade. Finalmente, isso implica que, como $\nabla \varphi$ é a aplicação que transporta f em g, da equação de Monge-Ampere

$$f(x) = C g(\lambda(x - x_0)),$$

i.e., f é uma dilatação-traslação de g em Ω.

$\square$

Teorema 5.3. *Uma função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é optima na desigualdade de Sobolev se e somente se existe $C \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = C h_p(\lambda(x - x_0)), \tag{5.8}$$

em Ω.

Demonstração. Considerando as duas funções f e h_p, da proposição anterior, tem-se que f é uma dilatação-traslação de h_p em Ω. $\square$

Apêndice A

Notação

A.1 Notação de conjuntos e números reais

1. *O conjunto* I_n *representa o conjunto dos números naturais desde 1 até n inclusive.*
2. *O vetor* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, *onde* $\alpha_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots,$ *é denominado um multi-índice de ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
3. *Seja* $r > 0$. *Dizemos que* $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ *é a bola fechada do* $\mathbb{R}^n$. *E escreveremos* $\alpha(n)$ *para o volume da bola unitária do* $\mathbb{R}^n$.
4. *Seja* $r > 0$. *Dizemos que* $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$ *é a esfera do* $\mathbb{R}^n$. *Escrevemos* w_{n-1} *para a área da esfera unitária do* $\mathbb{R}^n$.

A.2 Notação para integrais, funções e convergência

1. *Ao longo do trabalho, salvo menção explícita, as integrais serão sobre* $\mathbb{R}^n$ *com respecto à medida de Lebesque, i.e.,* $\int f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
2. *Escrevemos* 1_E *para denotar a função característica de* E, *isto é,*

$$1_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x \notin E. \end{cases}$$

3. *Escrevemos* $g(x) = (f(x))_+$ *para indicar que a função* g *é igual a parte não negativa de* f.

4. A expressão "quase sempre em $\mathbb{R}^n$"significa que a afirmação feita é válida em todo o dominio, salvo um conjunto de medida nula.

5. Seja o espaço L^p, e uma sequência de funções $(f_k)_{k\geq 1}$. Dizemos que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge fraco a uma função $f \in L^p$, o qual também se denota como $f_k \rightharpoonup f$ se

$$\int f_k \phi \longrightarrow \int f \phi$$

onde ϕ é uma função teste.

A.3 Espaços vetoriais e espaços de funções

(a) Todos os espaços de funções considerados neste trabalho, salvo menção explícita, estão definidos sobre $\mathbb{R}^n$,i.e., $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, etc.

(b) $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos.

(c) $M_n(\mathbb{R})$ é o espaço de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais.

(d) $M_n^+(\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ que são definidas não negativas.

(e) $S_n^+(\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes em $M_n^+(\mathbb{R})$ que são simétricas.

(f) Sejam U, V, conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que V esta compactamente contido em U, e denotamos por $V \subset\subset U$, se $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.

(g) $C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ é contínua$\}$

(h) $C^k = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ é k-vezes continuamente diferenciável$\}$

(i) C_b é o espaço das funções continuas limitadas sobre $\mathbb{R}^n$ e C_0 é o espaço das funções continuas com suporte compacto.

Referências Bibliográficas

[1] Aubin, T., Nonlinear Analysis on Manifolds.Monge-Ampère Equations. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.*

[2] Adams, R. A., Sobolev Spaces. *Academic Press, New York - San Franscico - London, 1975.*

[3] Beckenbach, Bellman, Inequalities. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.*

[4] Berenzansky, Y. M., Sheftel, Z. G., Us, G. F. Functional Analysis. *Vol 1. BIrkhauser Verlag - Germany, 1996.*

[5] Brezis, H., Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. *Alianza Editorial - Madrid - España, 1984.*

[6] Caffarelli, L., Boundary Regularity of maps with convex potential. *Comm. on Pure and Applied Mathematics (1992), 1141-1151.*

[7] Caffarelli, L., The regularity of mappings with a convex potential. *J.A.M.S. (1992), 99-104.*

[8] Cordero-Erausquin, D., Some apliccations of mass transport to Gaussian-Type Inequalities. *Arch. Rational Mech. Anal. (2002), 257-269.*

[9] Cordero-Erausquin, D., Nazaret,B. ,Villani, C. A Mass Transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Adv. Math., 182, 2(2004), 307-332.*

[10] Del Pino, M., Dolbeault, J, The optimal euclidean L^p Sobolev Logarithmic inequality. *A.M.S. (2000),*

[11] Ekeland, I., Teman, R., Convex Analysis and variational problems, *North-Holland, Amsterdam, 1976.*

[12] *Lima, E.L.,* Curso de Análise*, Vol. 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.*

[13] *Evans, L.C.,* Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, v.19, 1999.*

[14] *Evans, L.C., Gariepy, R.F.,* Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press: Boca Raton, FL, 1992.*

[15] *Folland, G.,* Real Analysis *John Wiley and Sons, New York, 1999.*

[16] *Halmos, P.R.,* Finite Dimensional Vector Spaces*. Compañia Editorial Continental, México, 1965.*

[17] *Lieb and Loss,* Analysis*. American Mathematical Society, Providence-Rodhe Island , 2001.*

[18] *Milman, Schechtman,* Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.*

[19] *Hiriart-Urruty, J.B., Lemaréchal, C.,* Convex analysis and minimization algorithms*, Vol. 1. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.*

[20] *Muñoz Rivera, J.,* Introdução as distribuições e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2004.*

[21] *Saloff-Coste, L.* Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society, United Kingdom, 2003.*

[22] *Villani, C.* Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, Providence-Rodhe Island, 2003.*