INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Dinâmica Topológica de Folheações

Luana Segantim Gimenes

Rio de Janeiro, Brasil

11 de março de 2022

Dinâmica Topológica de Folheações

Luana Segantim Gimenes

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientadores: Alexander Eduardo Arbieto, Jaqueline Siqueira Rocha

Rio de Janeiro, Brasil
11 de março de 2022

Agradecimentos

Não há outra forma de começar este breve texto sem primeiramente agradecer a inesgotável fonte de misericórdia do Pai. Foi à mim uma fonte de luz e de esperança.

Agradeço aos meus pais, Josemar e Solange, por terem me incentivado nos meus estudos e terem dado o suporte que eu precisava, especialmente na palavras de amor e de coragem. Agradeço aos meus avós Teresa, Pedro, Olívio e Dolores por à mim, serem inspiração.

Aos meus amigos da UFRJ por terem sempre sido muito solícitos, pela amizade, e pelas boas conversas. Ao Padre Paulo, meu amigo e conselheiro que me ajudou e tem ajudado em meus passos.

Pela amizade, ensinanentos e aprendizados dos meus orientadores Alexander e Jaqueline. Houveram momentos de dificuldades em que foram eles que me ampararam.

Agradeço a Capes e a Faperj pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideremos uma ação $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(X)$ de Γ um grupo isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$, com X e B sendo variedades Riemannianas compactas e conexas. Construiremos a partir de Φ uma folheação $\mathcal{F}_\Phi$ chamada folheação suspensão. Analisaremos propriedades de sombreamento, expansividade e semiestabilidade para Φ e $\mathcal{F}_\Phi$. Como um dos resultados principais veremos que Φ tem a Propriedade Tracejante de Pseudo-órbita se, e somente se, $\mathcal{F}_\Phi$ tem a Propredade Tracejante de Pseudofolha.

Palavras-chave: Folheação, Sombreamento, Holonomia

Abstract

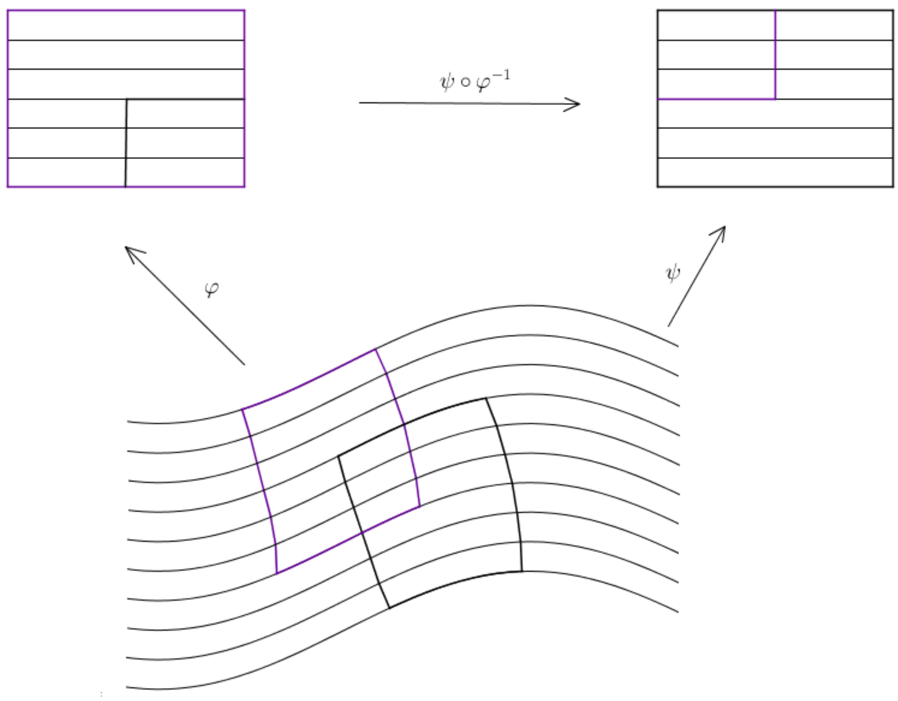
Consider an action $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(X)$ of Γ an isomorphic group to $\pi_1(B, b_0)$, with X and B compact and connected Riemannian manifolds. We will define from Φ a foliation $\mathcal{F}_\Phi$ called suspension foliation. We will analyze shadowing, expansiveness and semi-stability properties for Φ and $\mathcal{F}_\Phi$. One of the main results presented states that Φ has the Pseudo-orbit Tracing Property if and only if $\mathcal{F}_\Phi$ has the Pseudoleaf Tracing Property.

Keywords: Foliation, Shadowing, Holonomy

Sumário

1 Introdução

Grosso modo, uma folheação representa uma decomposição de uma variedade em subvariedades conexas e disjuntas de mesma dimensão, que localmente se comportam como um baralho de cartas, onde cada carta representa uma folha.



A Teoria de Folheações teve seus primeiros resultados desenvolvidos na década de 40, pelos matemáticos Charles Ehresmann e Georges Reeb e desde então tem se desenvolvido se tornando atualmente um campo de estudo vasto, podendo ter ênfase em diversas outras áreas, tais como Sistemas Dinâmicos e Geometria. Neste trabalho iremos introduzir o conceito de folheação estudando algumas de suas propriedades geométricas e dinâmicas.

Com respeito a propriedades geométricas, analisaremos o comportamento das folhas próximas a uma folha fixada. Umas das ferramentas fundamentais nesta parte é a holonomia de uma folha, definida como sendo a imagem de um homomorfismo de grupos $\phi : \pi_1(F, p_0) \longrightarrow G(\Sigma_0, p_0)$ entre o grupo fundamental da folha e o grupo de germes de difeomorfismos de uma seção transversal a folha, com p_0 fixo. Tal homomorfismo é definido por meio de aplicações holonomias associadas a caminhos na folha F. Intuitivamente, a aplicação holonomia realiza o papel de associar dois pontos da folha através de placas.

No âmbito dinâmico, que é o enfoque deste trabalho, relacionamos propriedades já conhecidas mas agora caracterizadas para folheações. Por exemplo, a definição de sombreamento para ações, que aqui chamaremos de propriedade tracejante de pseudo-órbita, estabelece que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda $\delta-$pseudo-órbita é $\varepsilon-$tracejada por alguma órbita da ação. Analogamente a esta propriedade de sombreamento para ação, diremos que uma folheação $\mathcal{F}$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda $\delta-$pseudofolha é $\varepsilon-$tracejada por alguma folha de $\mathcal{F}$.

Surpreendentemente existe um tipo especial de folheação, a folheação suspensão $\mathcal{F}_\Phi$, que relaciona tais propriedades e este é o resultado central desta dissertação. Mais formalmente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *A ação Φ tem a propriedade tracejante de pseudo-órbita se, e somente se, $\mathcal{F}_\Phi$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha.*

De maneira geral, os resultados aqui apresentados se dividem em 5 capítulos dispostos como segue.

No Capítulo 2, apresentamos resultados que são ferramentas básicas para a compreensão do texto. Referimos por exemplo a seção 2.4 que trata de espaços de recobrimento que é fortemente utilizado para definir a folheação suspensão, onde este por sua vez é um dos principais objetos de estudo deste trabalho.

No Capítulo 3 tratamos do conceito de folheações e holonomia de uma folha com a finalidade de apresentar os Teoremas de Estabilidade de Reeb [7]. Resultados que ditam, de maneira geral, propriedades das folhas de uma folheação em âmbito local e global.

Tendo visto folheações e algumas propriedades, apresentamos no Capítulo 4 algumas construções envolvendo folheações. Em especial, neste capítulo introduzimos a folheação suspensão, que será estudada com mais detalhes no Capítulo 6.

Assim como foi introduzido a holonomia de uma folha no Capítulo 3, analogamente o fazemos no Capítulo 5 apresentando primeiramente o conceito de pseudogrupo e então a holonomia de um pseudogrupo.

No Capítulo 6 estudamos com mais detalhes a folheação suspensão $\mathcal{F}_\Phi$. Analisamos propriedades de sombreamento, semiestabilidadee expansividade a folheação $\mathcal{F}_\Phi$ e para ação de grupos Φ, resultados estes provados por Takashi Inaba [9]. Nos três casos há a equivalência destas propriedades para Φ e $\mathcal{F}_\Phi$.

Encerramos esta dissertação com um Capítulo dedicado a problemas de interesse na área.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos uma série de conceitos e resultados com o objetivo de tornar o texto auto contido. As provas dos resultados aqui apresentados são, a menos de referência explícita, referidas a [1].

2.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção iremos definir variedades diferenciáveis, objetos fundamentais para os fins deste trabalho.

Definição 2.1. *Um espaço topológico segundo enumerável e Hausdorff M é dito ser localmente euclidiano ao $\mathbb{R}^n$ se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança aberta U de x tal que existe um homeomorfismo $\varphi : U \subset\!\longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso, diremos que M tem dimensão n.*

Chamamos o par (U, φ) de carta, U de vizinhança coordenada e φ de sistemas de coordenadas.

Definição 2.2. *Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico localmente euclidiano ao $\mathbb{R}^n$.*

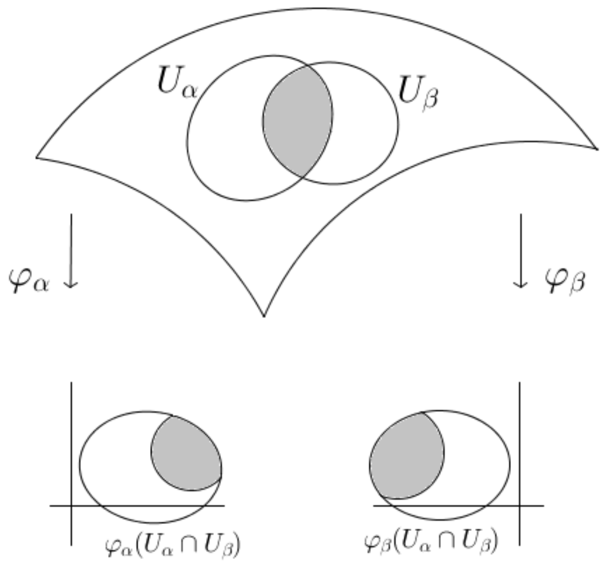
Introduziremos agora, o conceito de compatibilidade entres cartas de um mesmo atlas.

Definição 2.3. *Duas cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) de um espaço topológico são ditas C^r-compatíveis se as funções transição, definidas como segue*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são de classe C^r.



Com isto diremos que que um atlas de classe C^r em M é uma coleção $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartas C^r-compatíveis que cobrem M, ou seja, $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Além disso, diremos que uma atlas é maximal se ele não está contido propriamente em um atlas maior.

Definição 2.4. *Uma variedade diferenciável M de classe C^r e dimensão n é uma variedade topológica com um atlas maximal $\mathcal{U}$ de classe C^r.*

Tal atlas maximal $\mathcal{U}$ é chamado estrutura diferenciável de classe C^r de M.

Observação. Da mesma forma que definimos uma variedade diferenciável de classe C^r, podemos definir uma variedade diferenciável de classe C^∞, chamada variedade diferenciável suave, onde neste caso as funções de transição são de classe C^∞.

Observação. Neste texto, a expressão Variedade Diferenciável irá se referir a uma variedade diferenciável de classe C^r, para $r \geqslant 1$.

Exemplo 2.5. Conside que $S^1 = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Tome $(a_1, a_2) \in S^1$.

Seja agora $U_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1; x_1 > 0\}$. Assim, temos que U_1 é aberto de S^1 com a topologia induzida, portanto U_1 é vizinhança aberta de (a_1, a_2).

Defina $I_1 := \{x_2;\ (x_1, x_2) \in U_1\} = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : U_1 & \longrightarrow & I \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \phi_1(x_1, x_2) = x_2 \end{array}$$

temos que ϕ_1 é bijeção de U_1 em I, é contínua e aberta pois é projeção. Logo, ϕ_1 é um homeomorfismo de um aberto de S^1 em um aberto I de $\mathbb{R}$ e assim (U_1, ϕ_1) é uma carta.

Para os outros casos procedemos como segue.

Se $a_1 < 0$, tome $U_2 = \{(x_1, x_2) \in S_1;\ x_1 < 0\},\ I_2 = (-1, 1),\ \phi_2(x_1, x_2) = x_2$.

Se $a_2 > 0$, tome $U_3 = \{(x_1, x_2) \in S_1;\ x_2 > 0\},\ I_3 = (-1, 1),\ \phi_3(x_1, x_2) = x_1$.

Se $a_2 < 0$, tome $U_4 = \{(x_1, x_2) \in S_1;\ x_2 < 0\},\ I_4 = (-1, 1),\ \phi_4(x_1, x_2) = x_1$.

Consideremos o atlas $\{(U_1, \phi_1),\ (U_2, \phi_2),\ (U_3, \phi_3),\ (U_4, \phi_4)\}$.

Além disso, note que as funções de transição são suaves. De fato, como $U_1 \cap U_2 = U_3 \cap U_4 = \emptyset$, então estas interseções não temos que analisar.

$$U_1 \cap U_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1;\ x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$$

Tome $\phi_3(x),\ x \in U_1 \cap U_3$. Como $x \in U_1 \cap U_3$, então $x = (x_1, x_2) \in S^1;\ x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Assim, temos $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$.

Logo, $z = \phi_3(x) = \phi_3(x_1, x_2) = x_1 \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_3^{-1}(z) &= \phi_1 \circ \phi_3^{-1}(\phi_3(x)) \\ &= \sqrt{1 - x_1^2} \\ &= \sqrt{1 - \phi_3(x_1, x_2)^2} \\ &= \sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

mostrando que $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(z) = \sqrt{1 - z^2}$, para todo $z \in \phi_3(U_1 \cap U_3)$. Portanto, $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ é contínua em $\phi_3(U_1 \cap U_3)$. Analogamente se demonstra as outras funções transições. Concluímos portanto que S^1 é uma variedade diferenciável de dimensão 1.

Exemplo 2.6. Consideremos M_1 e M_2 variedades com estruturas diferenciáveis $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de dimensões m e n respectivamente.

Tome o espaço topológico $M_1 \times M_2$. Temos uma estrutura diferenciável natural para este espaço, que o torna variedade diferenciável.

Tal estrututra é dada por

$$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \times (V_\beta, \psi_\beta) := (U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$$

onde $\varphi_\alpha \times \psi_\beta(x, y) := (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y))$ e $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_1$, $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{F}_2$.

Assim, $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ é um atlas, pois $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ é um sistema de coordenadas locais já que

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta(x; y) := (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

e também, $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ cobrem $M_1 \times M_2$, pois $\{U_\alpha\}$ cobre M_1 e $\{V_\beta\}$ cobre M_2, isto é,

$$\begin{aligned} \bigcup U_\alpha \times V_\beta &= \bigcup U_\alpha \times \bigcup V_\beta \\ &= M_1 \times M_2. \end{aligned}$$

Além disso, as cartas são suavemente compatíveis, pois

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\theta \times \psi_\eta)^{-1} &= (\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\theta^{-1} \times \psi_\eta^{-1}) \\ &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\theta^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\eta^{-1})\end{aligned}$$

logo $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ é atlas.

A seguir introduziremos a noção de diferenciabilidade de uma aplicação entre variedades.

Definição 2.7. *Considere M_1 e M_2 variedades diferenciáveis com estruturas diferenciáveis $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ e dimensões m_1 e m_2 respectivamente, e seja uma $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em $x \in M_1$ se existem cartas*

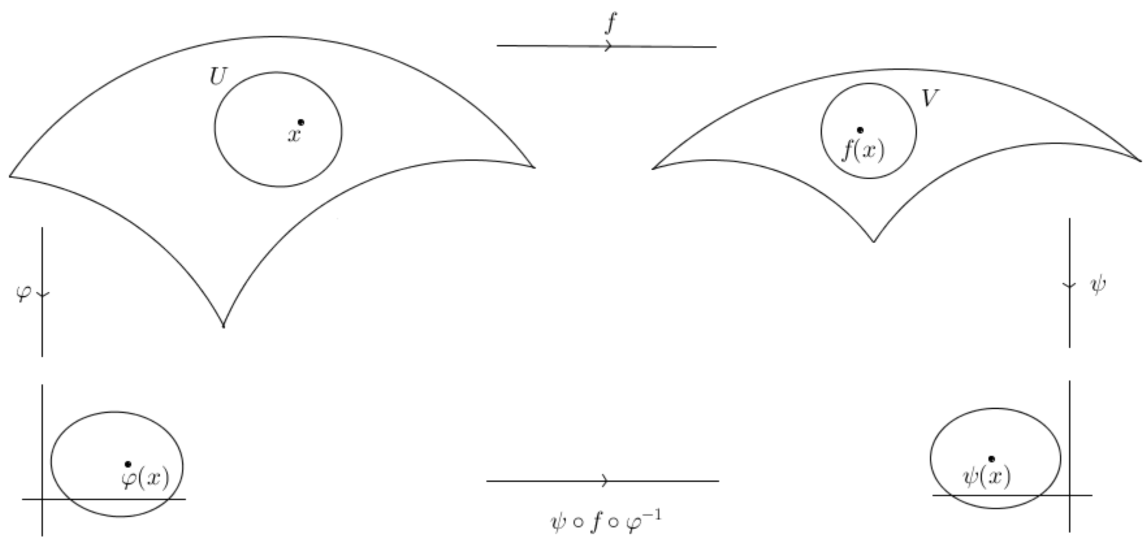
$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m_1} \ \textit{em } \mathcal{F}_1$$

$$\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{m_2} \ \textit{em } \mathcal{F}_2$$

com $x \in U$ e $f(U) \in V$ tal que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

seja diferenciável em $\varphi(x)$.



Definição 2.8. *Sejam X e Y espaços topológicos e $x \in X$. Definimos uma relação de equivalência em $D_x = \{f : V \subset X \longrightarrow Y;\ V \text{ vizinhança de } x\}$ da seguinte forma*

$$f \sim g \iff \textit{existe um aberto } U \textit{ de } x \textit{ tal que } f|_U = g|_U$$

Cada classe de equivalência dessa relação é chamada de germe de f em x e será denotada por $\widetilde{f}$.

Se $X = Y$ definimos o conjunto $G(X,x)$ como sendo o conjunto dos germes de homeomorfismos que tem x como ponto fixo.

Observação. Consideremos a operação

$$\begin{array}{rccl} \circ: & G(X,x)\times G(X,x) & \longrightarrow & G(X,x) \\ & (\widetilde{f},\widetilde{g}) & \longmapsto & \widetilde{f}\circ\widetilde{g} = \widetilde{f\circ g}. \end{array}$$

Afirmamos que $(G(X,x),\circ)$ é um grupo.

De fato,

- Se $f,g,h \in G(X,x)$ então

$$(\widetilde{f}\circ\widetilde{g})\circ\widetilde{h} = (\widetilde{f\circ g})\circ\widetilde{h} = \widetilde{f\circ g\circ h} = \widetilde{f}\circ(\widetilde{g\circ h}) = \widetilde{f}\circ(\widetilde{g}\circ\widetilde{h});$$

- Tome o germe $\widetilde{i}$ da função identidade $i : X \longrightarrow X$, $i(x) = x$ para todo $x \in X$

$$\widetilde{f}\circ\widetilde{i} = \widetilde{f\circ i} = \widetilde{f} = \widetilde{i\circ f} = \widetilde{i}\circ\widetilde{f},$$

  para todo $\widetilde{f} \in G(X,x)$;

- Dado $\widetilde{f} \in G(X,x)$, como este é o germe de um homeomorfismo tome $\widetilde{f}^{-1} = \widetilde{f^{-1}}$, assim

$$\widetilde{f}\circ\widetilde{f}^{-1} = \widetilde{f}\circ\widetilde{f^{-1}} = \widetilde{f\circ f^{-1}} = \widetilde{i}$$

  e

$$\widetilde{f}^{-1}\circ\widetilde{f} = \widetilde{f^{-1}}\circ\widetilde{f} = \widetilde{f^{-1}\circ f} = \widetilde{i}.$$

Consideremos M uma variedade suave e denotemos por $C_x^\infty(M)$ o conjunto de todos os germes de funções suaves x.

Definição 2.9. *Uma derivação em $C_x^\infty(M)$ é uma aplicação linear*

$$v : C_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo

$$v(\widetilde{f}\widetilde{g})(x) = f(x)v(\widetilde{g}) + g(x)v(\widetilde{f}).$$

Definimos o espaço tangente T_xM como sendo o espaço vetorial de todas as derivações de $C_x^\infty(M)$.

Tendo definido conceito de diferenciabilidade de uma aplicação entre variedades, agora iremos definir o diferencial de uma aplicação entre variedades.

Definição 2.10. *Sejam M e N variedades suaves e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave. Para cada $x \in M$ definimos a diferencial de F em x por*

$$\begin{array}{rccl} dF_x : & T_xM & \longrightarrow & T_{F(x)}N \\ & v & \longmapsto & dF_x(v) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} dF_x(v) : & C^\infty_{F(x)}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & dF_x(v)(f) = v(f \circ F). \end{array}$$

A diferencial de f em x também é denotado por $f_{*,x}$.

Teorema 2.11 (Forma Local das Submersões)**.** *Sejam M e N variedade de dimensões m e n, respectivamente e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação de classe C^r. Se $f_{*,p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é sobrejetora, então existem cartas $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $p \in U$ e $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $f(p) \in V$ e uma decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tais que $f(U) \subset V$ e*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x.$$

Definição 2.12. *Um subconjunto $N \subset M$ de uma variedade diferenciável de classe C^r de dimensão m é dito ser uma subvariedade de M de dimensão n e classe C^s, $s < r$ se para todo $p \in N$ existe vizinhança aberta $U \subset M$ de p e um difeomorfismo C^s, $\varphi : U \longrightarrow V \times W$, com $V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ abertos e*

$$\varphi(N \cap U) = V \times \{0\}.$$

Neste caso, dizemos que a codimensão de N é $dim(M) - dim(N) = m - n$.

Seja $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m;\ x_m \geq 0\}$ o semi-espaço superior e $\partial\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m;\ x_m = 0\}$ seu bordo.

Definição 2.13. *Uma variedade com bordo, de classe C^r é um espaço topológico M, Hausdorff, com base enumerável de abertos, munido de um atlas $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{H}^m\}$ com funções de transição de classe C^r. O bordo ∂M de M é o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que existe uma carta $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ no atlas, de modo que $\varphi_i(x) \in \partial\mathbb{H}^m$.*

Para demonstração deste Teorema o leitor pode consultar seção 4.1 de [2].

Teorema 2.14 (Vizinhança Colar de Bordo)**.** *Seja M uma variedade suave e com bordo ∂M compacto. Então existe uma vizinhança V de ∂M em M e um difeomorfismo de classe C^∞, $\phi : \partial M \times [0, 1) \longrightarrow V$ tal que*

$$\phi(x, 0) = x,$$

para todo $x \in \partial M$.

Definição 2.15. *Seja M uma variedade suave. Uma métrica Riemanniana g em M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno*

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

e que satisfaz que para quaisquer campos de vetores suaves X, Y a aplicação $p \longmapsto g_p(X(p), Y(p))$ seja diferenciável.

Uma variedade Riemanniana (M, g) é uma variedade suave M munida de uma métrica Riemanniana g.

Proposição 2.16. *Toda variedade suave admite uma métrica Riemanniana.*

Definição 2.17. *Seja $F : M \longrightarrow N$ aplicação suave entre variedades Riemannianas e g uma métrica em N. O pullback F^*g da métrica g é a métrica em M dada por*

$$(F^*g)(p)(v_1, v_2) = g(F(p))(dF(p)v_1, dF(p)v_2).$$

Definição 2.18. *Sejam (M, g) e (N, f) variedade Riemannianas. Uma imersão*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

é uma imersão isométrica se $\varphi^* f = g$.

Proposição 2.19. *Seja $F : M \longrightarrow N$ aplicação suave e g uma métrica Riemanniana em N. Então F^*g é uma métrica Riemanniana em M se, e somente se, F é uma imersão suave.*

2.2 Homotopia

Definição 2.20. *Dois caminhos $f, g : [0, 1] = I \longrightarrow X$ são ditos homotópicos por caminho se eles começam no mesmo ponto x_0 e terminam no mesmo ponto x_1 e se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$H(t, 0) = f(t) \quad e \quad H(t, 1) = g(t)$$

$$H(0, s) = x_0 \quad e \quad H(1, s) = x_1$$

para cada $s, t \in I$. A aplicação H é chamada homotopia de caminho entre f e g.

Notação: $f \simeq_p g$

O seguinte Lema é conhecido como Lema de Colagem e pode ser encontrado no livro [3].

Lema 2.21. *Seja $X = A \cup B$, onde A e B são fechados em X. Seja $f : A \longrightarrow Y$ e $g : B \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então a aplicação dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

é contínua.

Proposição 2.22. *A relação $\simeq_p$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. De fato, sejam $f,\ g,\ h : [0,1] \longrightarrow X$ caminhos que começam em x_0 e terminam x_1.

- $f \simeq_p f$.
  Basta tomarmos $H(t,s) = f(t)$ e portanto
  $$H(t,0) = f(t) = H(t,1)$$
  $$H(0,s) = f(0) = x_0 \ \text{ e } \ H(1,s) = f(1) = x_1,$$
  mostrando que f é homotópico por caminhos a si mesmo.

- Se $f \simeq_p g$ então $g \simeq_p f$.
  Tome H homotopia de caminhos entre f e g e defina $G(t,x) = H(t, 1-s)$ então
  $$G(t,0) = H(t,1) = g(t) \ \text{ e } \ G(t,1) = H(t,0) = f(t)$$
  $$G(0,s) = H(0,1-s) = x_0 \ \text{ e } \ G(1,s) = H(1,1-s) = x_1,$$
  portanto $g \simeq_p f$.

- Se $f \simeq_p g$ e $g \simeq_p h$ então $f \simeq_p h$.
  Seja H a homotopia de caminhos entre f e g e F a homotopia de caminhos entre g e h. Defina
  $$G(t,s) = \begin{cases} H(t,2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ F(t, 2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
  que está bem definida pois se $s = \frac{1}{2}$ então $H(t,1) = g(t) = F(t,0)$. Assim, como G é contínua nos subconjuntos fechados $I \times [0, \frac{1}{2}]$ e $I \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $I \times I$ segue que G é contínua em $I \times I$ pelo Lema da Colagem 2.21. Assim, temos que
  $$G(t,0) = H(t,0) = f(t) \ \text{ e } \ G(t,1) = F(t,1) = h(t)$$
  $$G(0,s) = x_0 \ \text{ e } \ G(1,s) = x_1,$$
  concluindo que $f \simeq_p h$.

□

Definição 2.23. *Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 e g é um caminho em X de x_1 a x_2 então definimos a operação $*$ entre f e g como sendo o caminho h dado por*

$$(f * g)(s) = h(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Note que, esta aplicação está bem definida e é contínua pelo Lema de Colagem, Lema 2.21.

Esta operação nos caminhos induz uma operação bem definida nas classes de homotopia de caminhos dada por

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Definição 2.24. *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$ um ponto. Um caminho de X que começa e termina em x_0 é chamado laço com base em x_0. O conjunto de classes de homotopia de laços com base em x_0, com a operação $*$ é chamado o grupo fundamental de X no ponto base x_0 e denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

2.3 Ação de Grupos

Definição 2.25. *Seja $(\Gamma, \odot)$ um grupo com operação $\odot$ e elemento neutro e. Uma ação de grupo à esquerda de Γ em um conjunto X é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \Gamma \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & \alpha(g, x) \end{array}$$

que satisfaz as condições

1. *$\alpha(g, \cdot)$ é um difeomorfismo de X para todo $g \in \Gamma$,*
2. *$\alpha(e, x) = x$,*
3. *$\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(g \odot h, x)$,*

para todo $g, h \in \Gamma$ e todo $x \in X$. De maneira ánalogo se define a ação á direita. Usualmente, denota-se $\alpha(g, x)$ por $g \cdot x$. Chamaremos de $\Gamma-$órbita de um ponto $x \in X$ o conjunto

$$\Gamma \cdot x = \{g \cdot x; g \in \Gamma\}.$$

Note que se $\Gamma \times X \longrightarrow X$ é uma ação de Γ em X, esta induz a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(X) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) \end{array}$$

que é um homomorfismo de grupos, onde $\phi(g) \in \mathrm{Diff}(X)$ é a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi(g): & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \phi(g)(x) := g \cdot x \end{array}$$

De fato, sabendo que Diff(X) é um grupo com a operação de composição de funções $\circ$, dados $g, h \in \Gamma$ e $x \in X$ temos

$$\begin{array}{rcl} \phi(g \odot h)(x) & = & (g \odot h) \cdot x \\ & = & g \cdot (h \cdot x) \\ & = & \phi(g)(h \cdot x) \\ & = & \phi(g)(\phi(h)(x)) \\ & = & (\phi(g) \circ \phi(h))(x), \end{array}$$

mostrando ser um homomorfismo de grupos.

Definição 2.26. *Para cada $x \in X$ o grupo estabilizador de x em Γ é definido como sendo o conjunto*

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma; g \cdot x = x\},$$

e a ação é dita ser livre se $\Gamma_x = \{e\}$, para todo $x \in X$.

Definição 2.27. *Um grupo de Lie Γ é uma variedade suave com estrutura de grupo e com a propriedade de que as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ (g, h) & \longrightarrow & gh \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

são suaves.

2.4 Espaços de Recobrimento

Definição 2.28. *Sejam B um espaço conexo por caminhos e $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Diremos que p é uma aplicação de recobrimento se todo ponto $b \in B$ tem uma vizinhança aberta U tal que $p^{-1}(U)$ é a união de conjuntos abertos disjuntos V_α em E tais que para cada α, a restrição de p a V_α é um homemorfismo de V_α em U. Neste caso, E é dito ser um espaço de recobrimento de B. Além disso, dizemos que $p : E \longrightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento suave se p é suave e sobrejetora, e para cada α a restrição de p a V_α é um difeomorfismo de V_α em U.*

Definição 2.29. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Dizemos que um homeomorfismo $f : E \longrightarrow E$ é uma transformação de recobrimento de p se $p \circ f = p$.*

Note que o conjunto das transformações de recobrimento com a operação de composição é um grupo e que será denotado por $\text{Deck}(E)$.

De fato, se $f, g \in \text{Deck}(E)$ então $p \circ (f \circ g) = p$ e se $p \circ f = p$ temos $p \circ f \circ f^{-1} = p \circ f^{-1}$ e portanto $p = p \circ f^{-1}$.

Definição 2.30. *Um espaço topológico X é dito ser simplesmente conexo se é conexo por caminhos e se o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ consiste apenas do elemento neutro, para algum $x_0 \in X$.*

Definição 2.31. *Um espaço de recobrimento universal E de B é um espaço de recobrimento de B que é simplesmente conexo.*

Definição 2.32. *Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $g : X \longrightarrow B$ aplicações, então $f : X \longrightarrow E$ é dita ser um levantamento de g ao longo de p se $p \circ f = g$.*

O seguinte resultado garante a unicidade de levantamentos e sua prova pode ser encontrada em [11], bem como a prova da proposição que o segue.

Proposição 2.33. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Sejam $f_1, \ f_2 : X \longrightarrow E$ levantamentos de $g : X \longrightarrow B$. Suponha que $f_1(x) = f_2(x)$ para algum $x \in X$. Se X é conexo então $f_1 = f_2$.*

Proposição 2.34. *Sejam $p : E \longrightarrow B$ um recobrimento universal e o grupo fundamental $\pi_1(B, b_0)$. Dois caminhos que começando em um ponto $y_0 \in p^{-1}(b_0)$ tem o mesmo ponto final se, e somente se, suas imagens em B são homotópicas.*

Proposição 2.35. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Se E é simplesmente conexo então Deck(E) é isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$.*

Demonstração. Seja $y_0 \in E$ tal que $p(y_0) = b_0$. Defina

$$\varphi : \text{Deck}(E) \longrightarrow \pi_1(B, b_0),$$

da seguinte forma. Seja $f \in \text{Deck}(E)$ e tome $\alpha : [0, 1] \longrightarrow E$ uma curva em E com $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = f(y_0)$. Como E é simplesmente conexo, existe um única classe de homotopia de caminhos de y_0 a $f(y_0)$.

A curva $p \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow B$ é um laço em b_0, pois

$$p \circ \alpha(0) = p(y_0) = b_0$$

e como $f \in \mathrm{Deck}(E)$

$$p \circ \alpha(1) = p(f(y_0)) = p(y_0) = b_0.$$

Definimos então $\varphi(f)$ como sendo a classe de homotopia de $p \circ \alpha$.

Vamos mostrar que φ é um isomorfismo.

- φ é um homorfismo de grupos.

Sejam $f, g \in \mathrm{Deck}(E)$, $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow E$ com $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = f(y_0)$, $\beta(0) = y_0$ e $\beta(1) = g(y_0)$.

Então, $f \circ \beta : [0,1] \longrightarrow E$ é uma cuvva com $f \circ \beta(0) = f(y_0)$ e $f \circ \beta(1) = f(g(y_0))$ e note que $p \circ (f \circ \beta) = p \circ \beta$.

A curva $\alpha * (f \circ \beta) : [0,1] \longrightarrow E$ é tal que $\alpha * (f \circ \beta)(0) = y_0$ e $\alpha * (f \circ \beta)(1) = f(g(y_0))$.

Logo,

$$\varphi(f \circ g) = [p \circ (\alpha * (f \circ \beta))] = [p \circ \alpha] * [p \circ (f \circ \beta)] = [p \circ \alpha] * [p \circ \beta] = \varphi(f) * \varphi(g).$$

- φ é sobrejetora.

Seja $\beta \in \pi_1(B, b_0)$ e tome o levantamento de β a um caminho α começando em y_0, então existe $f \in Deck(E)$ tal que $f(y_0) = \alpha(1)$, pois f é um homeomorfismo.

- φ é injetora.

Sejam $f_1,\ f_2 \in \mathrm{Deck}(E)$ e suponha que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, ou seja, existem curvas $\alpha_1,\ \alpha_2 : I \longrightarrow E$ tais que $\alpha_1(0) = y_0 = \alpha_2(0)$, $\alpha_1(1) = f_1(y_0)$ e $\alpha_2(1) = f_2(y_0)$.

Como $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ temos que $[p \circ \alpha_1] = [p \circ \alpha_2]$, pela Proposição 2.34 temos que $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$, ou seja, $f_1(y_0) = f_2(y_0)$ e como $f_1 e f_2$ são levantamentos de p pela Proposição 2.33 segue que $f_1 = f_2$, mostrando que φ é injetora.

□

Note então que se E é o recobrimento universal de B então o grupo de transformações de recobrimento $\mathrm{Deck}(E)$ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(B, b_0)$.

Proposição 2.36. *Se B é uma variedade diferenciável conexa, existem uma variedade suave simplesmente conexa $\widetilde{B}$ e uma aplicação de recobrimento suave $\pi : \widetilde{B} \longrightarrow B$.*

Definição 2.37. *Um Grupo Discreto é um grupo com a topologia discreta. Além disso, se o grupo é enumerável então é um grupo de Lie 0-dimensional chamado Grupo de Lie Discreto.*

Proposição 2.38. *Sejam E, B variedades suaves e $p : E \longrightarrow B$ aplicação de recobrimento suave. Então, com a topologia discreta, o grupo de transformações de recobrimento $Deck(E)$ é um grupo de Lie $0-$dimensional que age livremente e suavemente em E.*

Definição 2.39. *Seja Γ um grupo de Lie discreto que age continuamente e livremente em uma variedade E. A ação é dita ser própria se as seguintes condições são satisfeitas:*

- *Para todo $x \in E$, existe U vizinhança de x tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma - \{e\}$;*
- *Se $x, x' \in E$ não estão na mesma $\Gamma-$órbita, existem vizinhanças V de x e V' de x' tal que $(g \cdot V) \cap V' = \emptyset$, para todo $g \in \Gamma$.*

Proposição 2.40. *Sejam B variedade suave e $p : E \longrightarrow B$ aplicação de recobrimento. A ação de Deck(E) em E é própria.*

A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em [13].

Proposição 2.41. *Toda variedade suave compacta tem grupo fundamental finitamente gerado.*

Teorema 2.42 (Teorema da Variedade Quociente)**.** *Seja Γ um grupo de Lie agindo em uma variedade suave M, com a ação sendo suave, livre e própria. Então, o espaço M/Γ é uma variedade topológica de dimensão dim $M -$ dim Γ e tem uma única estrutura suave com a propriedade de que a aplicação quociente $q : M \longrightarrow M/\Gamma$ é uma submersão.*

Teorema 2.43. *Seja M uma variedade suave conexa e Γ um grupo de Lie discreto agindo suavemente, livremente e propriamente em M, então M/Γ é uma variedade topológica e tem uma única estrututa suave tal que $q : M \longrightarrow M/\Gamma$ é uma aplicação de recobimento suave.*

3 Folheações e Holonomia

Neste capítulo estudaremos mais profundamente o comportantento das folhas de uma foheação, tais como os Teoremas de Estabilidade. Para tal começaremos introduzindo o conceito de folheação.

3.1 Folheações

De modo a motivar o conceito de folheação, começaremos com um exemplo.

Grosso modo, uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M de dimensão m é uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n, chamadas de folhas. Um exemplo de uma folheação de dimensão n é a folheação de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ onde as folhas são $n-$planos da forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ com $c \in \mathbb{R}^{m-n}$. Os difeomorfismos locais $h : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preservam as folhas desta folheação são tais que para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ temos

$$h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{z\}),\ z \in \mathbb{R}^{m-n}$$

para $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$. Tais difeomorfismos são expressos da forma

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),\ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

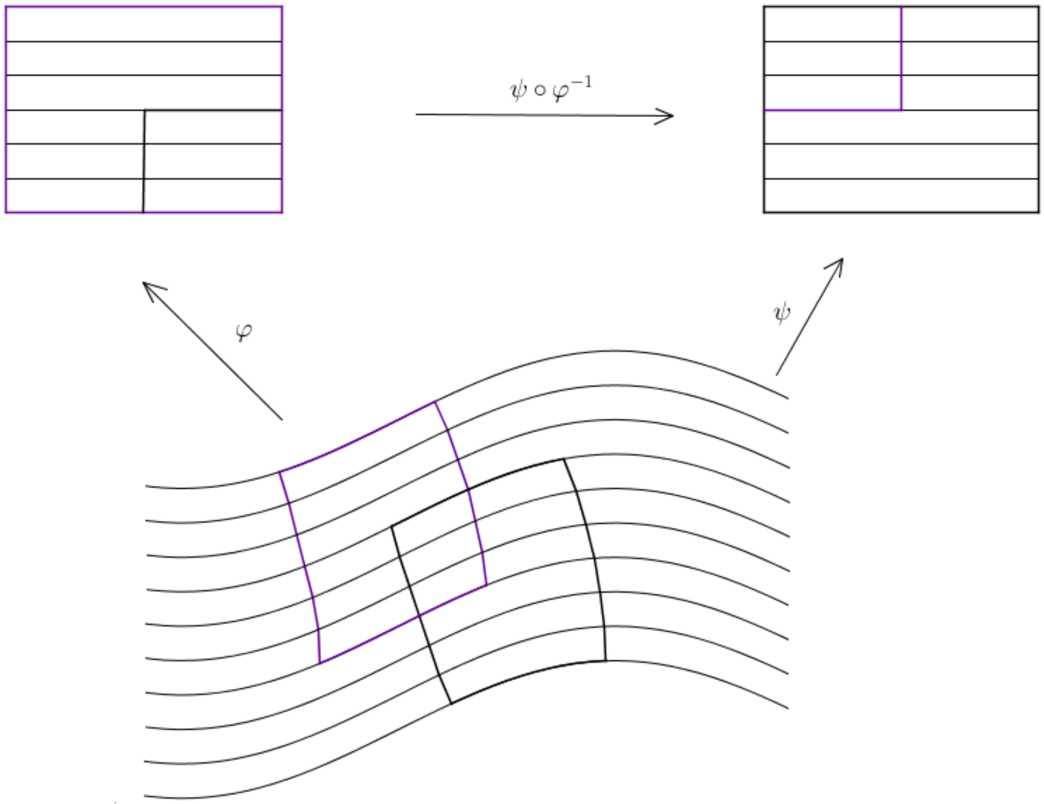
Definição 3.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e de classe C^∞. Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M é um atlas $\mathcal{F}$ em M de classe C^r que é maximal com respeito às seguintes propriedades:*

1. *Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então*
$$\varphi : U \subset M \longrightarrow \varphi(U) = U_1 \times U_2,$$
onde U_1 e U_2 são bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente.

2. *Se $(U, \varphi),\ (V, \psi) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$ então a função transição*
$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$
é tal que
$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Dizemos que M é folheada por $\mathcal{F}$ e as cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ são chamadas de cartas da folheação. O número $m - n$ é chamado codimensão de $\mathcal{F}$.

A seguir ilustramos o comportamento local de uma folheação.



Observação. Dizer que M é uma variedade de classe C^∞ com um atlas $\mathcal{F}$ definido como acima significa que M tem um atlas $\mathcal{U}$ com funções de transição C^∞, mas se $(U,\varphi) \in \mathcal{U}$ e $(V,\psi) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$ então $\varphi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \varphi^{-1}$ são de classe C^r.

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M. Então existe uma cobertura $\mathcal{Q} = \{U_i\}_{i\in I}$ de M por vizinhanças coordenadas de cartas de $\mathcal{F}$ tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido na vizinhança coordenada de alguma carta de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja $\{K_n\}$ uma cobertura por compactos de M satisfazendo $K_n \subset int(K_{n+1})$.

Como K_n é compacto existe uma cobertura $\mathcal{A}^n = \{A_i^n, i = 1,\ldots,r_n\}$ de K_n onde A_i^n é vizinhança coordenada de uma carta em $\mathcal{F}$. Seja $\delta_n > 0$ o número de Lebesgue dessa cobertura e suponha sem perda de generalidade que (δ_n) é uma sequência decrescente. Consideremos $\{U_j^n; j = 1,\ldots,l_n\}$ uma cobertura de K_n por vizinhanças coordenadas de cartas em $\mathcal{F}$ tal que para cada j o diâmetro de U_j^n é menor que $\frac{\delta_n}{2}$.

Então, se para cada n tivermos que $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$ tem diâmetro menor que $\frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_n}{2} = \delta$ e portanto $U_i^n \cup U_j^n \subset A_s^n$ para algum s, pois $\mathcal{A}$ tem número de lebesgue δ_n. Logo, $\mathcal{Q} = \{U_j^n; j = 1,\ldots,l_n\}$.

□

Neste trabalho, usaremos somente cartas em $\mathcal{Q}$, como no Lema anterior.

Definição 3.3. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão n da varidedade M^m e $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$, isto é, $\varphi(U) = U_1 \times U_2$. Para cada $c \in U_2$ o conjunto*

$$\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$$

é chamado placa de U.

Observação. Como uma observação direta da definição, temos que se A e B são placas de U então $A \cap B = \emptyset$ ou $A = B$.

Proposição 3.4. *As placas de $\mathcal{F}$ são subconjuntos conexos por caminhos de M.*

Demonstração. Seja $c \in U_2$ e consideremos a aplicação $\varphi^{-1}|_{(U_1 \times \{c\})} : U_1 \times \{c\} \longrightarrow U$ que é contínua pela definição de folheação, logo como $U_1 \times \{c\}$ é um subconjunto conexo por caminhos segue que $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ é um subconjunto conexo por caminhos.

$\square$

Definição 3.5. *Um caminho de placas de $\mathcal{F}$ é uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de placas de $\mathcal{F}$ onde $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k-1$. Dados dois pontos $x, y \in M$, definimos a seguinte relação de equivalência*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe um caminho de placas } A_1, \ldots, A_k \text{ com } x \in A_1 \text{ e } y \in A_k.$$

Cada classe de equivalência dessa relação é chamada de folha da folheação $\mathcal{F}$.

Proposição 3.6. *Toda folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ é um subconjunto conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $p, q \in F$ quaisquer. Por definição existe um caminho de placas $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tal que $p \in A_1$ e $q \in A_k$.

Como as placas A_i são conexas por caminho e $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, temos que $A_1 \cup \ldots \cup A_k \subset F$ é também conexa por caminhos, segue que existe um caminho em F que começa em p e termina em q, logo F é conexo por caminhos.

$\square$

Exemplo 3.7. Seja $f : M \longrightarrow N$ uma submersão de classe C^r onde M e N são variedades de dimensões m e n, respectivamente. Pelo Teorema da Forma Local de Submersões 2.11, dado $p \in M$ existem cartas (U, φ) de M e (V, ψ) de N tais que $p \in U$, $f(p) \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, onde $\psi(V) = \overline{V} \supset U_2$ satisfazendo que a aplicação

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2$$

é a projeção na segunda coordenada. Assim, essas cartas (U, φ) tem estrutura onde as folhas são as componentes conexas dos conjuntos da forma $f^{-1}(c), c \in N$.

Exemplo 3.8. Um fibrado (E, p, B, F) consiste de variedades diferenciáveis E, B, F e uma submersão $p : E \longrightarrow B$ tal que para todo $b \in B$ existe uma vizinhança U de b e um difeomorfismo $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & U \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

ou seja, $p = p_1 \circ \varphi$, onde p_1 é a projeção na primeira coordenada. Para cada $b \in B$, chamamos a variedade $p^{-1}(b)$ de fibra do fibrado. Assim, as fibras de (E, p, B, F) definem uma folheação em E cujas folhas são difeomorfas às componentes conexas de F.

Uma aplicação do exemplo acima é o seguinte teorema que o leitor pode encontrar a prova em [26].

Teorema 3.9 (Teorema da Vizinhança Tubular)**.** *Seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^r, $r \geq 1$. Existem $T(N) \supset N$ uma vizinhança de N e uma submersão C^r $\pi : T(N) \longrightarrow N$ tais que $\pi(q) = q$, para todo $q \in N$. Se a codimensão de N é k, então $T(N)$ pode ser obtido de modo que $(T(N), \pi, N, \mathbb{R}^k)$ seja um fibrado.*

Proposição 3.10. *Uma folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r tem uma estrutura de variedade induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Sejam $p \in F$ e $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ com $p \in U$ e
$(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) = U_1 \times U_2$, onde U_1 e U_2 são bolas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^s$ respectivamente.
Tome A a placa de U que contém p e defina a aplicação

$$\varphi_{1|_A} =: \overline{\varphi} : A \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Temos que $\overline{\varphi} : A \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo pois como A é uma placa então $\varphi(A) = (U_1 \times \{a\})$ para algum $a \in U_2$, e assim $\varphi_1(A) = U_1$.

Consideramos

$$\mathcal{U} = \{(A, \overline{\varphi});\ A \ \subset \ F \text{ é } \textit{placa de } U \textit{ com } (U, \varphi) \in \mathcal{F}\},$$

e tome duas cartas $(A, \overline{\varphi})$ e $(B, \overline{\psi}) \in \mathcal{U}$ com $A \cap B \neq \emptyset$. Considerando assim as cartas $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, tais que $\overline{\varphi} = \varphi_{1|_A}$ e $\overline{\psi} = \psi_{1|_B}$, temos que

$$\begin{array}{rccl} \psi \circ \varphi^{-1} : & \varphi(U \cap V) & \longrightarrow & \psi(U \cap V) \\ & (x, y) & \longmapsto & \psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \end{array}$$

pela Definição 3.1. Seja $z \in A \cap B$, em particular $z \in A = \varphi^{-1}(U_1 \times \{a\})$, ou seja, $\varphi(z) = (x, a)$ e assim temos

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \psi \circ \varphi^{-1}(x, a) = (h_1(x, a), h_2(a)).$$

Mas $(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(z)) = \psi(z)$ e como z também está em $B = \psi^{-1}(V_1 \times \{b\})$ segue que $\psi(z) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x, a) = (h_1(x, a), b)$, ou seja, $h_2(a) = b$, logo se $z \in A \cap V$ temos que $\varphi(z) = (x, a)$ para algum $x \in U_1$ e consequentemente

$$\psi(z) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(z)) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x, a) = (h_1(x, a), b).$$

Portanto, $A \cap V \subset B$, mas $A \subset U$ então $A \cap V = (A \cap V \cap U) \subset (B \cap U)$. De modo análogo, temos que $(B \cap U) \subset (A \cap V)$, logo $A \cap B$ é aberto em A e em B.

Então, $\overline{\varphi}(A \cap B)$ e $\overline{\psi}(A \cap B)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. E como $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}(x) = h_1(x, b)$, segue que as funções de transição de $\mathcal{U}$ são difeomorfismos de classe C^r, concluindo que este tem um estrutura diferenciável para a folha F.

□

Obetemos o seguinte corolário como um resultado direto da demonstração acima.

Corolário 3.11. *Se A é placa de (U, φ) e B é placa de (V, ψ) com $A \cap B \neq \emptyset$ então $A \cap V \subset B$.*

Como duas placas distintas de uma mesma vizinhança coordenada não se intersectam, este corolário nos diz que cada placa de uma vizinhança coordenada intersecta no máximo uma única placa de outra vizinhança coordenada.

Equivalentemente podemos definir folheações como segue.

Definição 3.12. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r e codimensão s é uma coleção maximal $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ onde U_i é um subconjunto aberto de M e $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^s$ são submersões que satisfazem*

1. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = M$,

2. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um difeomorfismo local h_{ij} de classe C^r tal que*

$$f_i = h_{ij} \circ f_j \text{ em } U_i \cap U_j.$$

Definição 3.13. *Se um espaço M é compacto e uma cobertura aberta de M é dada, então existe um número $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de M tendo diâmetro menor que δ está contido em algum membro da cobertura. O número δ é chamado número de Lebesgue desta cobertura.*

Proposição 3.14. *As definições 3.1 e 3.12 são equivalentes.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{F}$ como na definição 3.1 e $\mathcal{Q} = \{V_i\}_{i \in I}$ cobertura de acordo com o Lema 3.2. Se $V_i \in \mathcal{Q}$ então temos bem definida a aplicação

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s,$$

com $\varphi_i(V_i) = V_i^1 \times V_i^2$ como na definição 3.1 de folheação.

Tome $p_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ a projeção na segunda coordenada, assim temos que

$$f_i = p_2 \circ \varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^s,$$

é uma submersão e note que $\varphi_i^{-1}(V_i^1 \times \{c\}) = f_i^{-1}(p_2(V_i^1 \times \{c\})) = f_i^{-1}(c)$, isto é, para todo $c \in V_i^2$, $f_i^{-1}(c)$ é uma placa de V_i. Se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ então pelo Lema 3.2 $V_i \cup V_j$ está contido na vizinhança coordenada de alguma carta $(W, \psi) \in \mathcal{F}$, com $\psi(W) = W_1 \times W_2$.

Assim, segue que se A e B são placas de V_i e V_j com $A \cap B \neq \emptyset$ então $B \cap V_i \subset A = f_i^{-1}(c)$ e assim $f_i(B \cap V_i) \subset \{c\}$, ou seja, a aplicação

$$f_i \circ f_j^{-1} : f_j(V_i \cap V_j) \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

está bem definida, pois para cada $y \in f_j(V_i \cap V_j)$ temos que $f_i \circ f_j^{-1}(y)$ corresponde a um único ponto que definiremos como $h_{ij}(y)$. Isto é, temos bem definida a aplicação h_{ij} de modo que

$$f_i = h_{ij} \circ f_j,$$

em $V_i \cap V_j$. Além disso temos que h_{ij} é um difeomorfismo de classe C^r.

Reciprocamente suponha que exista uma coleção maximal na definição 3.12, ou seja, para cada i $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^s$ é uma submersão, logo pelo Teorema da Forma Local de Submersões, dado $p \in V_i$, existem discos abertos V_1 e V_2 de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^s$, com $V_2 \subset f_i(U_i)$ e uma carta (V, φ), $\varphi : V \longrightarrow V_1 \times V_2$, com $V \subset U_i$ tal que

$$f_i \circ \varphi^{-1} : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2$$

é a projeção p_2 na segunda coordenada.

Note que se (V, φ) e (W, ψ) são duas cartas como na construção acima e são tais que se $V \cap W \neq \emptyset$ então temos que $V \subset U_i$ e $W \subset U_j$. Mas

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \longrightarrow \varphi(V \cap W)$$

pode ser escrito da forma $\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$.

Assim,

$$h_2(x, y) = p_2 \circ (\varphi \circ \psi^{-1})(x, y),$$

mas $f_i \circ \varphi^{-1} = p_2$, então

$$\begin{array}{rcl} h_2(x, y) & = & f_i \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})(x, y) \\ & = & f_i \circ \psi^{-1}(x, y) \end{array}$$

e desde que pela hipótese temos que $f_i = h_{ij} \circ f_j$ e também que $f_j \circ \psi^{-1} = p_2$ então

$$\begin{array}{rcl} h_2(x, y) & = & h_{ij} \circ f_j \circ \psi^{-1}(x, y) \\ & = & h_{ij} \circ p_2(x, y) \\ & = & h_{ij}(y) \end{array}$$

assim temos que $h_2(x, y)$ depende apenas de y, mostrando então a equivalência com a definição 3.1.

$\square$

3.2 Orientação

A seguir iremos introduzir o conceito de orientação em folheações.

Definição 3.15. *Um campo de $k-planos$ em uma variedade M é uma aplicação P que a cada ponto $x \in M$ associa um subespaço vetorial de dimensão k de T_xM.*

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, diremos que duas bases ordenadas de E, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2., \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ definem a mesma orientação em E se a matriz de mudança de bases (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, definida por $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$ tem determinante positivo.

Se B é o conjunto das bases ordenadas de E, definimos uma relação de equivalência em B dada por

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Longleftrightarrow \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{B}' \text{ definem a mesma orientação em } E$$

que tem duas classes de equivalência, chamadas orientações de E.

Seja P um campo de $k-planos$ contínuo em M. Diremos que P é orientável se para cada $x \in M$ é possível escolher uma orientação $O(x)$ em $P(x)$, que é um espaço vetorial de dimensão k, tal que a aplicação $x \longmapsto O(x)$ seja contínua no sentido descrito abaixo.

Consideremos uma cobertura aberta de M por abertos $\{U_i\}$ tal que para cada $i \in I$, a restrição $P|_{U_i}$ é definido por k campos de vetores contínuos $X^1, X^2, \ldots, X^k$, isto é, $P|_{U_i}(x) = \langle X^1(x), X_2(x), \ldots, X^k(x) \rangle$ subespaço de dimensão k de T_xM. Para cada $x \in U_i$, as bases

$$\mathcal{B}(x) = \{X^1(x), X^2(x), \ldots, X^k(x)\} \; e \; \mathcal{B}'(x) = \{-X^1(x), X^2(x), \ldots, X^k(x)\}$$

definem duas orientações distintas de $P(x)$, digamos O_i^+ e O_i^-.

Dizemos que a escolha de O é contínua se tivermos que $O|_{U_i} = O_i^+$ para todo i e se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $O_i^+ = O_j^+$ na interseção.

A seguir definiremos o conceito de recobrimento duplo orientável de um campo de $k-planos$, que é dado da seguinte forma.

Seja $\widetilde{M} = \{(x, O); x \in M$ e O uma das orientações de $P(x)\}$ e $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ a projeção $\pi(x, O) = x$. Para cada $x \in \widetilde{M}$, $\pi^{-1}(x) = \{(x, O), (x, -O)\}$, onde O é uma orientação e $-O$ é a outra.

Em $\widetilde{M}$ consideramos a topologia cuja base de vizinhanças é construída como segue.

Dado $(x_0, O_0) \in \widetilde{M}$, seja U a vizinhança aberta de x_0 em M onde existe uma orientação contínua O de $P|_U$. Podemos supor que $O(x_0) = O_0$. Definimos uma vizinhança aberta V de (x_0, O_0) como $V = \{(x, O(x));\ x \in U\}$.

Com esta topologia, $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ é um recobrimento de 2 folhas, ou seja, $\pi^{-1}(x)$ é um conjunto de dois elementos para todo $x \in M$.

Note que π é um homeomorfismo local e portanto podemos definir uma estrutura diferenciável C^∞ em $\widetilde{M}$, compatível com a topologia co-induzida por π e tal que π é um difeomorfismo local C^∞ [7].

O recobrimento duplo orientável de P é por definição o campo de $k-planos$ $\pi^*(P)$ dado por $\pi^*(P)(x) = D\pi(x)^{-1}P(\pi(x))$.

A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.16. *Suponha que M é uma variedade conexa e seja P um campo de $k-$planos contínuo em M. Seja $(\widetilde{M}, \pi, \pi^*(P))$ o recobrimento duplo orientável de P. Então, $\widetilde{M}$ é conexa se, e somente se, P é não orientável.*

Introduziremos agora o conceito de orientabilidade transversal de uma folheação.

Seja P um campo de $k-$planos em M. Dizemos que $\widetilde{P}$ é um campo transversal a P se para todo $x \in M$ temos que $P(x) + \widetilde{P}(x) = T_xM$ e $P(x) \cap \widetilde{P}(x) = \{0\}$.

Definição 3.17. *Seja P um campo contínuo de $k-$planos. Dizemos que P é transversalmente orientável se existe um campo transversal a P contínuo e orientável.*

Definição 3.18. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r é orientável se o campo de planos tangente à $\mathcal{F}$ é orientável. Similarmente, dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se o campo de planos tangente à $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Denotamos o campo de planos tangente à $\mathcal{F}$ por $T\mathcal{F}$.*

O seguinte resultado garante a existência do campo de planos $T\mathcal{F}$, o leitor pode encontrar sua prova em [7].

Proposição 3.19. *Toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r de uma variedade M define um campo de $k-$planos $T\mathcal{F}$ em M.*

A seguir definiremos transversalidade entre subvariedades e entre uma subvariedade e uma folheação.

Definição 3.20. *Sejam A e B subvariedades de M^m de dimensões a e b, respectivamente. Se $x \in A \cap B$ dizemos que A e B são transversais em x se*

$$T_xA + T_xB = T_xM.$$

Definição 3.21. *Uma subvariedade Σ de M é dita transversal a $\mathcal{F}$ se é transversal a toda folha F que intersecta Σ.*

Dizemos que Σ é uma seção transversal de $\mathcal{F}$ quando

$$dim(\Sigma) + dim(\mathcal{F}) = dim(M).$$

Observação. Dado $p \in M$ existe uma seção transversal a $\mathcal{F}$ passando por p.

De fato, seja $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ com $p \in U$ e considere $\varphi(p) = (c_1, c_2)$ pois por definição $\varphi(U) = U_1 \times U_2$, então basta tomar $\Sigma = \varphi^{-1}(\{c_1\} \times U_2)$ que é seção transversal a $\mathcal{F}$.

3.3 Holonomia de uma folha

Para esta seção, consideremos M variedade suave de dimensão m e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão n.

Sejam F uma folha de $\mathcal{F}$ e $\gamma : [0,1] \longrightarrow F$ um caminho. Sejam também Σ_0 e Σ_1 seções transversais de $\mathcal{F}$ e que intersectam $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$. Consideremos uma sequência de vizinhanças coordenadas $\{U_i\}_{i=0}^{k}$ e uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = 1$ do intervalo $[0,1]$. Dizemos que $\{U_i\}_{i=0}^{k}$ é uma cadeia subordinada a γ se as seguintes propriedades forem satisfeitas

1. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido em alguma vizinhança coordenada de uma carta de $\mathcal{F}$;
2. $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i,$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Observação. A existência de tal cadeia subordinada definida acima fica assegurada pelo Lema 3.2.

Assim, para cada i seja $D(t_i)$ uma seção transversal a $\mathcal{F}$ passando por $\gamma(t_i)$ e homeomorfa a um disco de dimensão n e tal que $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$. Convenciona-se que $D_{t_0} = \Sigma_0$ e $D(t_{k+1}) = \Sigma_1$.

Para cada $x \in D(t_i)$ tão próximo de $\gamma(t_i)$ quanto se queira, consideremos a placa de U_i passando por x e intersectando $D(t_{i+1})$ em um único ponto que iremos denotar por $f_i(x)$. Sendo assim, considerando a aplicação f_i cujo domínio contém um conjunto D_i onde $\gamma(t_i) \in D_i$ definimos a holonomia f_γ associada ao caminho γ como sendo a aplicação

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_1 \circ f_0$$

em uma vizinhança aberta de $p_0 \in \Sigma_0$.

Observação 3.22. Se p_0 e p_1 são pontos definidos como acima, por definição de f_γ temos que $f_\gamma(p_0) = p_1$.

Além disso, se γ^{-1} denota o caminho inverso de γ então temos que $f_{\gamma^{-1}} = (f_\gamma)^{-1}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
(f_\gamma)^{-1} &= (f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_1 \circ f_0)^{-1} \\
&= f_0^{-1} \circ f_1^{-1} \circ \ldots \circ f_{k-1}^{-1} \circ f_k^{-1} \\
&= f_{\gamma^{-1}}.
\end{aligned}$$

Proposição 3.23. *Se γ e $\overline{\gamma}$ são dois caminhos próximos então existe cadeia que é simultaneamente subordinada a γ e $\overline{\gamma}$, e consequentemente suas holonomias coincidem*

$$f_{\overline{\gamma}} = f_\gamma.$$

Demonstração. Seja $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ a cadeia subordinada a γ. Por definição, cada U_i é homeomorfo a um disco, consideramos

$$\varepsilon = \ min\ \{r_i;\ r_i \text{ é } raio\ de\ U_i\}.$$

Assim, como por hipótese γ e $\overline{\gamma}$ são próximos podemos tomar $\overline{\gamma}$ de modo que $dist(\gamma(t), \overline{\gamma}(t)) < \varepsilon$, para todo $t \in I$. Assim, temos que $\overline{\gamma}([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, para cada i, como desejado.

□

Teorema 3.24. *Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : I \longrightarrow F$ caminhos em F uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $\gamma_0(0) = p_0 = \gamma_1(0)$ e $\gamma_0(1) = p_1 = \gamma_1(1)$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a F em p_0 e p_1, respectivamente. Consideremos as holonomias associadas a γ_0 e γ_1*

$$f_{\gamma_0} : C_0 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1, \quad f_{\gamma_1} : C_1 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1.$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas

1. *Se $\gamma_0 \simeq_p \gamma_1$ então $\widetilde{f_{\gamma_0}} = \widetilde{f_{\gamma_1}}$;*
2. *Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$ então*

$$\begin{array}{ccccc} \phi & : & \pi_1(F, p_0) & \longrightarrow & G(\Sigma_0, p_0) \\ & & [\gamma] & \longmapsto & \widetilde{f_{\gamma^{-1}}} \end{array}$$

é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Seja $H : I \times I \longrightarrow F$ uma homotopia entre γ_0 e γ_1, ou seja,

$$H(t, 0) = \gamma_0(t) \quad e \quad H(t, 1) = \gamma_1(t),$$

$$H(0, s) = p_0 \quad e \quad H(1, s) = p_1,$$

para todo $s, t \in I$. Para todo caminho

$$\begin{array}{cccc} \gamma_s : & I & \longrightarrow & F \\ & t & \longmapsto & \gamma_s(t) = H(t, s), \end{array}$$

existe uma cadeia subordinada a γ_s. Logo, se $\overline{s}$ está próximo de s então a cadeia subordinada a γ_s é também subordinada a $\gamma_{\overline{s}}$. Então existe uma coleção $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ e $\{0 = s_0, s_1, s_2, \ldots, s_m = 1\}$ uma partição de I tal que para cada i, A_i é subordinada a todos γ_s para $s_{i-1} \leq s \leq s_i$. Portanto, por 3.23 segue que

$$\widetilde{f_{\gamma_{s_{i-1}}}} = \widetilde{f_{\gamma_{s_i}}},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$, isto é,

$$\widetilde{f_{\gamma_{s_0}}} = \widetilde{f_{\gamma_0}} = \widetilde{f_{\gamma_1}} = \widetilde{f_{\gamma_{s_m}}}$$

concluindo a primeira parte do teorema.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ (\pi_1(F,p_0),*) & \longrightarrow & (G(\Sigma_0,p_0),\circ) \\ [\gamma] & \longmapsto & \widetilde{f_{\gamma^{-1}}} \end{array}$$

e consideremos A_λ e A_α cadeias subordinadas a λ^{-1} e α^{-1}. Assim, se $\lambda^{-1}([t_i,t_{i+1}]) \subset U_i$ e $\alpha^{-1}([t_i,t_{i+1}]) \subset V_i$ segue da definição da operação $*$ que $\lambda^{-1} * \alpha^{-1}([t_i,t_{i+1}]) \subset U_i \cup V_i$, e então obtemos que $A_\lambda \cup A_\alpha$ é uma cadeia subordinada a $\lambda^{-1} * \alpha^{-1}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \phi([\alpha]*[\lambda]) & = & \phi([\alpha*\lambda]) \\ & = & \widetilde{f_{(\alpha*\lambda)^{-1}}} \\ & = & \widetilde{f_{\lambda^{-1}*\alpha^{-1}}} \\ & = & \widetilde{f_{\alpha^{-1}}} \circ \widetilde{f_{\lambda^{-1}}} \\ & = & \phi([\alpha]) \circ \phi([\lambda]) \end{array}$$

ϕ é um homomorfismo de grupos.

□

Definição 3.25. *Definimos o grupo de holonomia de F em p_0 como sendo o subgrupo $Hol(F,p_0) = \phi(\pi_1(F,p_0))$ de $G(\Sigma_0,p_0)$.*

Observação. Se p_0, $p_1 \in F$ e $\alpha : I \longrightarrow F$ é um caminho qualquer começando em p_0 e terminando em p_1 então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \alpha^* : \ Hol(F,p_0) & \longrightarrow & Hol(F,p_1) \\ \phi([\lambda]) & \longmapsto & \widetilde{f_\alpha} \circ \phi([\lambda]) \circ \widetilde{f_{\alpha^{-1}}} \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos.

Portanto, independe da escolha do ponto base p_0 e então definimos o grupo de holonomia de F como sendo $Hol(F,p_0)$, para algum $p_0 \in F$.

Definição 3.26. *Dado um subconjunto $A \subset X$, uma retração de X em A é uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow A$ tal que $f|_A$ é a aplicação identidade de A.*

Lema 3.27. *Seja F uma folha de $\mathcal{F}$. Dado $K \subset F$ compacto, existem vizinhanças $W \subset U$ de K, com U aberto de M, W aberto de F e uma retração de classe C^r $\pi : U \longrightarrow W$ tal que para todo $w \in W$, $\pi^{-1}(w)$ é transversal a $\mathcal{F}|_U$.*

Demonstração. Pela compacidade de K existe um número finito de placas que cobrem K, denotaremos esta união por W.

Seja $\pi : \widetilde{W} \longrightarrow W$ uma vizinhança tubular de classe C^r de W, então como cada fibra $\pi^{-1}(w)$, $w \in W$, é transversal a W em w segue que se $x \in \pi^{-1}(w)$ é suficientemente próximo de w, temos que $\pi^{-1}(w)$ intercepta a folha F_x que passa por x.

Assim, obtém-se uma vizinhança aberta $U \subset \widetilde{W}$ tal que $\pi : U \longrightarrow W$ é uma retração e se $w \in U \cap F$ então $\pi^{-1}(w)$ é transversal a $\mathcal{F}|_U$.

$\square$

Definição 3.28. *Sejam N uma variedade e $f : N \longrightarrow M$ uma aplicação de classe C^1. Se*

$$T_{f(p)}(\mathcal{F}) + f_{*,p}(T_pN) = T_{f(p)}M, \ \forall p \in N$$

dizemos que f é transversal a $\mathcal{F}$.

Definição 3.29. *Seja $\mathcal{F}$ folheação de classe C^r de M e $f : N \longrightarrow M$ aplicação transversal a $\mathcal{F}$. Definimos o pullback de $\mathcal{F}$ por f como sendo a folheação $f^*\mathcal{F}$ em N cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $f^{-1}(F)$, F folha de $\mathcal{F}$ e com $cod(\mathcal{F}) = cod(f^*\mathcal{F})$.*

O leitor pode encontrar a prova do seguinte teorema em [7].

Teorema 3.30. *Se $f : N \longrightarrow M$ é uma submersão C^r, então $f^*\mathcal{F}$ está bem definida para qualquer folheação $\mathcal{F}$ de M.*

Definição 3.31. *Definimos o espaço de folhas de $\mathcal{F}$, $M/\mathcal{F}$ como sendo o espaço quociente de M pela seguinte relação de equivalência*

$$p, q \in M, \ p \sim_F q \Longleftrightarrow p \ e \ q \ pertencem \ a \ mesma \ folha \ de \ \mathcal{F}.$$

Definição 3.32. *Seja $A \subset M$. A saturação de A em $\mathcal{F}$ é o conjunto*

$$\mathcal{F}(A) = \{p \in M; p \sim_F q \ para \ algum \ q \in A\}.$$

Definição 3.33. *Um conjunto $A \subset M$ é dito ser saturado por $\mathcal{F}$ quando $\mathcal{F}(A) = A$.*

Lema 3.34 (Lema da Trivialização Global)**.** *Sejam M variedade de dimensão m, $\mathcal{F}$ folheação de codimensão n e $\gamma : I \longrightarrow M$ um caminho simples com $\gamma(I)$ contido em uma folha F de $\mathcal{F}$. Existe uma vizinhança V de $\gamma(I)$ e um difeomorfismo de classe C^r*

$$h : D^{m-n} \times D^n \longrightarrow V,$$

de modo que $h^*\mathcal{F}$ é a folheação tal que as folhas são da forma $P^{-1}(y)$, onde $P : D^{m-n} \times D^n \longrightarrow D^n$ é a projeção na segunda coordenada.

Demonstração. Como γ é uma aplicação contínua e I é compacto então $\gamma(I)$ é compacto, logo existe uma cobertura finita $\{U_i\}_{i=0}^k$ de vizinhanças coordenadas, $U = \bigcup\limits_{i=0}^{k} U_i \supset \gamma(I)$, tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cap U_j$ é uma vizinhança coordenada de uma carta que está em $\mathcal{F}$.

Seja $\pi : U \longrightarrow W$ uma retração como no Lema 3.27. Como γ é simples então não há auto-interseções assim podemos supor que para cada i, U_i intercepta no máximo U_{i-1} e U_{i+1} e que $U_0 \cap U_k = \emptyset$.

Seja $p_0 = \gamma(0)$, $p_1 = \gamma(1)$, $\Sigma_0 = \pi^{-1}(p_0)$ e $\Sigma_1 = \pi^{-1}(p_1)$. Consideremos a holonomia subordinada a γ

$$f_\gamma : D_0 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1,$$

onde $p_0 \in D_0$. Consideremos também $f : V \longrightarrow D_0$ a aplicação que associa cada a $x \in V$ a interseção da folha $\mathcal{F}|_V$ passando por x com o conjunto D_0, onde $V = \mathcal{F}|_U(D_0)$ é saturação de D_0 por folhas de $\mathcal{F}|_U$. Verifica-se que f é uma submersão.

Seja $L \subset W \subset F$ a folha de $\mathcal{F}|_V$ contendo $\gamma(I)$. Sejam $k_1 : D^{m-n} \longrightarrow L$ e $k_2 : D^n \longrightarrow D_0$ difeomorfismos tal que $k_2(0) = p_0$ e defina

$$\begin{array}{rccl} h: & D^{m-n} \times D^n & \longrightarrow & V \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = \pi^{-1}(k_1(x)) \cap f^{-1}(k_2(y)), \end{array}$$

e como k_1 e k_2 são difeomorfismos e pela definição de retração $(\pi|_W)^{-1} = id$, temos que h é bijetora.

A inversa de h é dada pela aplicação

$$\begin{array}{rccl} h^{-1}: & V & \longrightarrow & D^{m-n} \times D^n \\ & z & \longmapsto & h^{-1}(z) = (k_1^{-1}(\pi(z)), k_2^{-1}(f(z))). \end{array}$$

Portanto h é um difeomorfismo de classe C^r.

Se $P : D^{m-n} \times D^n \longrightarrow D^n$ é a projeção na segunda coordenada então como $P^{-1}(y) = D^{m-n} \times \{y\}$ concluímos que

$$h(D^{m-n} \times \{y\}) = f^{-1}(k_2(y)),$$

onde esta é uma folha de $\mathcal{F}|_V$, ou seja, $P^{-1}(y)$ são as folhas da folheação $h^*\mathcal{F}$.

$\square$

3.4 Estabilidade Local

Teorema 3.35 (Teorema da Estabilidade local). *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^1 e codimensão n da variedade M e F é uma folha compacta com grupo de holonomia finito, então existe uma vizinhança aberta U de F, saturada em $\mathcal{F}$, na qual todas as folhas são compactas com grupos de holonomia finitos. Além disso existe uma retração $\pi : U \longrightarrow F$ tal que para toda folha $F' \subset U$, $\pi|_{F'} : F' \longrightarrow F$ é uma aplicação de recobrimento com um número finito de folhas de recobrimento e, para cada $y \in F$, $\pi^{-1}(y)$ é homeomorfo a um subconjunto de dimensão n e é transversal a $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Por hipótese F é uma folha compacta, então existe uma cobertura finita por vizinhanças coordenadas $\{U_i\}_{i=0}^{k}$. Assim, pelo Lema 3.27, podemos definir uma retração

$$\pi : V = \bigcup_{i=0}^{k} U_i \longrightarrow F,$$

tal que se $p \in F$ então $\pi^{-1}(p)$ é transversal a $\mathcal{F}|_V$. Para cada U_i seja $D_i = \pi^{-1}(p_i)$ onde $p_i \in U_i \cap F$. Como F tem grupo de holonomia finito escrevemos

$$Hol(F, p_0) = \{\widetilde{f_0} = \widetilde{id}, \widetilde{f_{\gamma_1}}, \dots, \widetilde{f_{\gamma_m}}\},$$

onde $\widetilde{id}$ é o germe da identidade, pois já que é um grupo, existe um elemento neutro, e $f_{\gamma_j} : \widetilde{W_j} \subset D_0 \longrightarrow D_0$ é a holonomia associada a γ_j, onde $\gamma_j : I \longrightarrow F$ com $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) = p_0$, para $j = 1, \dots, m$.

Consideremos $W = \bigcap_{j=1}^{m} \widetilde{W_j}$. Se $y \in W$ então $\widetilde{F_y} \cap D_0 \subset \{\widetilde{f_j}(y); j = 0, \dots, m\}$, onde $\widetilde{F_y}$ é a folha da restrição $\mathcal{F}|_V$ que passa por y.

De fato, suponha por contradição que existe $z \in \widetilde{F_y} \cap D_0$ tal que $z \notin \{\widetilde{f_j}(y); j = 0, \dots, m\}$, isto é, $z \neq f_j(y)$ para todo $j = 0, \dots, m$. No entanto, como $z \in \widetilde{F_y}$ e $\widetilde{F_y}$ é conexa por caminho, então existe uma curva $\alpha : I \longrightarrow \widetilde{F_y}$ com $\alpha(0) = y$ e $\alpha(1) = z$ com $\alpha(I) \subset V$. Como $y, z \in D_0$, e $D_i = \pi^{-1}(p_i)$ segue que $D_0 = \pi^{-1}(p_0)$ e logo $\pi(y) = \pi(z) = p_0$.

Definindo $\gamma = \pi \circ \alpha : I \longrightarrow F$, $\gamma(0) = \pi(\alpha(0)) = p_0$ e $\gamma(1) = \pi(\alpha(1)) = p_0$ temos que γ é um laço com base em p_0 e portanto temos definido o germe $\widetilde{f_\gamma} \in Hol(F, p_0)$ de modo que $f_\gamma(y) = z$ por definição, mas $z \neq f_j(y)$, para todo j, chegando a uma contradição. Logo, $D_0 \cap \widetilde{F_y} \subset \{f_j(y); j = 0, \dots, m\}$.

Pelo Lema da Trivialização Global,para todo $i = 0, \dots, k$ existe uma vizinhança W_i de p_0 em $D_0 = \pi^{-1}(p_0)$ tal que para todo $y \in W_i$, $\#(\widetilde{F_y} \cap D_i) \leq m + 1$. Seja $W_0' = W \cap W_1 \cap \ldots \cap W_k \subset D_0$. Se $y \in W_0'$, então $\widetilde{F_y} \cap D_i = \{q(i, j, y); 1 \leq j \leq l_i\}$ onde $l_i \leq m + 1$.

Sejam $P(i, j, y)$ a placa de U_i por $q(i, j, y) \in \widetilde{F_y} \cap D_i$ e d uma métrica em M. Temos que $d(\partial V, F) = \delta > 0$, pois como V é uma cobertura de F por abertos então devemos ter que $\partial V \cap F = \emptyset$.

Seja $\delta_i(y) = \max\limits_{1 \leq j \leq l_i} d(p_i, P(i, j, y))$, $1 \leq i \leq k$. Se $i = 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{y \to p_0} \delta_0(y) &= \lim_{y \to p_0} \max_{1 \leq j \leq l_0} d(p_0, q(0, j, y)) \\ &\leq \lim_{y \to p_0} \max_{0 \leq j \leq m} d(p_0, f_j(y)), \end{aligned}$$

já que $D_0 \cap \widetilde{F_y} \subset \{f_j(y); j = 0, \dots, m\}$. Assim, como $\lim\limits_{y \to p_0} \max\limits_{0 \leq j \leq m} d(p_0, f_j(y)) = 0$, pois $f_j(p_0) = p_0$, então segue que $\lim\limits_{y \to p_0} \delta_0(y) = 0$. Analogamente $\lim\limits_{y \to p_0} \delta_i(y) = 0$, $1 \leq i \leq k$, ou seja, existe uma vizinhança aberta $X \subset W_0'$ de p_0 tal que se $y \in X$ temos que $\delta_i(y) \leq \frac{\delta}{2}$, $i = 0, \dots, k$.

Logo, temos que para todo $y \in X$, as placas de $\widetilde{F_y} \cap U_i$ não intersectam ∂V, então $\widetilde{F_y} \subset V$.

Assim, como $\widetilde{F_y}$ é a folha da restrição $\mathcal{F}|_V$ que passa por y e F_y é a folha de $\mathcal{F}$ que passa por y, e $F_y \subset V$ temos que $\widetilde{F_y} = F_y$. Como para cada $y \in X$, F_y é coberta por um número finito de placas $P(i, j, y)$, $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l_i \leq m + 1$ então F_y é compacta.

Agora, consideremos $U = \mathcal{F}(X) \subset V$ a saturação de X, que por sua vez é uma vizinhança de F e então

$$\pi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow F$$

é uma retração, pois $\pi : V \longrightarrow F$ é uma retração, e para toda folha $F' \subset \mathcal{F}(X)$ temos $\pi|_{F'} : F' \longrightarrow F$ é uma aplicação de recobrimento com um número finito de folhas de recobrimento.

Note que para todo $j = 0, \ldots, m$, $f_{\gamma_j} : X \longrightarrow X$ está definida e portanto $Hol(F') \subset \{f_0, f_{\gamma_1}, f_{\gamma_2}, \ldots, f_{\gamma_m}\}$, já que toda curva fechada em F' é o levantamento de uma curva fechada em F. Logo, o grupo de holonomia de cada folha $F' \subset U$ é finito.

□

Lema 3.36. *Seja $Hom(\mathbb{R}, 0)$ o grupo de germes em $0 \in \mathbb{R}$ de homeomorfismos que fixam $0 \in \mathbb{R}$. Se H é um subgrupo finito de $Hom(\mathbb{R}, 0)$, então H tem no máximo dois elementos.*

Demonstração. Dado $f \in H$, temos $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ com $f(0) = 0$. Seja $id \in Hom(\mathbb{R}, 0)$ o elemento neutro.

- **Afirmação:** Temos que $f^2 = id$.

Suponha que $f(0, b) \subset (0, \infty)$. Se existe $y \in (0, b)$ tal que $f(y) < y$, então para todo $k > 0$, temos que $0 < f^k(y) < f^{k-1}(y) < \ldots < f(y) < y$, logo $f^k \neq f^j$ se $k \neq j$, e portanto H não seria finito. O mesmo ocorre para $f(y) > y$. Portanto, $f(y) = y$, para todo $y \in (0, b)$.

Agora, se $y \in (a, 0)$ e $f(a, 0) \subset (0, \infty)$, temos de modo análogo ao feito que $f(y) = y$, para todo $y \in (a, 0)$. Concluímos portanto que $f = id$ quando a imagem está compreendida em $(0, \infty)$.

Por outro lado, se $f(0, b) \subset (-\infty, 0)$, então f inverte a orientação e assim $f^2(0, b) \subset (0, \infty)$, e para este caso já vimos que $f^2 = id$.

Assim, concluímos que se $f \in H$ então f tem ordem no máximo 2.

Agora, note que se $f, g \in H$ são tais que $f, g \neq id$, então tomando (a, b) a interseção dos domínios de f e g, já vimos que $g(0, b) \subset (a, 0)$ e $f \circ g(0, b) \subset (0, \infty)$, logo $f \circ g = id$ implicando que $f = g^{-1}$. Mas sabemos que $g \circ f = id$, logo $f = g = g^{-1}$, ou seja, se $f, g \neq id$ então $f = g$, mostrando que H tem no máximo 2 elementos.

□

Corolário 3.37. *Se F é uma folha compacta de $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e $\pi(F)$ é finito então $Hol(F, x_0)$, $x_0 \in F$, contém no máximo dois elementos. Além disso, se $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável, então $Hol(F, x_0) = \{id\}$.*

Demonstração. Como $Hol(F, x_0)$ é um subgrupo finito do grupo dos germes $G(\Sigma_0, x_0)$ então pelo lema anterior temos que $Hol(F, x_0)$ contém no máximo dois elementos.

Agora, suponha que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Logo, existe um campo de vetores X em M que não se anula e é transversal a $\mathcal{F}$.

Dado $x \in F$, tome um pequeno segmento Σ_x da órbita de X que passa por x como sendo um segmento transversal a $\mathcal{F}$ através de x.

Dessa forma, se $f : \Sigma'_{x_0} \subset \Sigma_{x_0} \longrightarrow \Sigma_{x_0}$ em $Hol(F, x_0)$, temos por definição que $f(x_0) = x_0$ e pelo lema anterior segue que $f = id$ se , e somente se, f preserva a orientação Σ_{x_0} o que equivale a dizer que $Df(x_0)X(x_0) = \lambda_1 X(x_0)$, onde $\lambda_1 > 0$, e é isto que iremos mostrar.

Para isso, tome $\gamma : [0,1] \longrightarrow F$ uma curva fechada tal que $f \in Hol(F, x_0)$ é o correspondente a $[\gamma]$. Para cada $t \in [0,1]$, existe uma holonomia $f_t : \Sigma'_t \subset \Sigma_{x_0} \longrightarrow \Sigma_{\gamma(t)}$ tal que $Df_t(x_0)X(x_0) = \lambda(t)X(\gamma(t))$, onde $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que não se anula em ponto algum, assim em $t = 0$ temos que $Df(x_0)X(x_0) = \lambda(0)X(x_0)$ e portanto pela continuidade de λ temos que $\lambda(0) = 1$ e $\lambda_1 = \lambda(1)$ tem o mesmo sinal, ou seja, $\lambda_1 > 0$ mostrando o desejado.

$\square$

Lema 3.38. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^r de codimensão 1. Suponha que F é uma folha compacta de $\mathcal{F}$ tal que $\#(Hol(F, x_0)) = 1$. Então existe uma vizinhança aberta U de F em M, saturada por $\mathcal{F}$ e um difeomorfismo C^r, $h : (-1,1) \times F \longrightarrow U$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ em U são da forma $h(\{t\} \times F)$, $t \in (-1,1)$.*

Demonstração. Como F é uma folha compacta e tem grupo de holonomia finito, segue pelo Teorema da Estabilidade Local que existe uma vizinhança U de F, saturada por $\mathcal{F}$, e uma retração $\pi : U \longrightarrow F$ tal que para todo $x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ é homeomorfo a um disco de dimensão 1, neste caso, e é transversal a folheação $\mathcal{F}$.

E ainda, se $F' \subset U$ é uma folha, e como $\pi^{-1}(x)$ é transversal a folheação temos que

$$1 \leq \#(F' \cap \pi^{-1}(x)),$$

e pelo Teorema da Estabilidade Local segue

$$\#(F' \cap \pi^{-1}(x)) \leq \#(Hol(F, x_0)) = 1$$

logo, $1 \leq \#(F' \cap \pi^{-1}(x)) \leq 1$, ou seja, $\#(F' \cap \pi^{-1}(x)) = 1$.

Consideremos uma parametrização de classe C^r, $\alpha : (-1,1) \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in (-1,1)$ e tome F_t a folha de $\mathcal{F}$ em U que passa por $\pi^{-1}(x_0)$ no ponto $\alpha(t)$.

Como já vimos que se $F' \subset U$ é uma folha de $\mathcal{F}$ então $\#(F' \cap \pi^{-1}(x)) = 1$ então temos que a aplicação que a cada t associa a folha F_t é uma aplicação bijetora. Assim, definamos

$$\begin{array}{rccl} g: & U & \longrightarrow & (-1,1) \times F \\ & y & \longmapsto & g(y) = (g_1(y), \pi(y)), \end{array}$$

onde $g_1(y)$ é o único ponto de $(-1,1)$ tal que $y \in F_{g_1(y)}$.

Dessa forma, temos que $g(F_t) = (\{t\}, F) = \{t\} \times F$, pois pelo Teorema da Estabilidade Local $\pi(F_t) = F$, já que F_t é uma folha contida em U.

Além disso, se $g(y_1) = g(y_2)$, então $(g_1(y_1), \pi(y_1)) = (g_1(y_2), \pi(y_2))$, ou seja, $g_1(y_1) = g(y_2)$ o que implica que $y_1, y_2 \in F_t$ para $t = g_1(y_1) = g_1(y_2)$ e como $\pi : F_t \longrightarrow F$ é um difeomorfismo então $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ implica que $y_1 = y_2$, e como g é sobrejetora segue que g é bijetora.

Assim, definimos

$$h = g^{-1} : (-1, 1) \times F \longrightarrow U$$

e por construção temos que $g^{-1}(t, x)$ é o único ponto de $\pi^{-1}(x) \cap F_t$. Concluindo o desejado.

□

Segue diretamente do lema acima o seguinte corolário.

Corolário 3.39. *Seja F uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com $\#(Hol(F, x_0)) = 1$. Se V é uma vizinhança de F como no lema anterior e l é um segmento transversal a $\mathcal{F}$ tal que $l \subset V$ então toda folha $L \subset V$ é tal que $\#(l \cap L) \leq 1$. Além disso, se os extremos de l estão em ∂V então $\#(l \cap L) = 1$.*

Teorema 3.40 (Uniformidade Transversal de $\mathcal{F}$)**.** *Seja F uma folha de $\mathcal{F}$. Dados $p_1, p_2 \in F$ existem seções transversais de $\mathcal{F}$, $\Sigma_1 \ni p_1$, $\Sigma_2 \ni p_2$ e um difeomorfismo de classe C^r, $f : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ tal que para qualquer folha L de $\mathcal{F}$ temos que*

$$f(L \cap \Sigma_1) = L \cap \Sigma_2.$$

Demonstração. Seja $A_1, A_2, \ldots, A_k$ um caminho de placas de p_1 a p_2 com $p_1 \in A_1$ e $p_2 \in A_k$. Suponha que para cada j, A_j é uma placa respectiva a carta $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$, e por ser uma carta folheada pode ser escrita como $\varphi_j(U_j) = U_1^j \times U_2^j \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$.

Tome $x_j \in A_j \cap A_{j+1}$ para $1 \leq j \leq k-1$ então $x_0 = p_1$ e $x_k = p_2$. Defina $\varphi_j(x_j) = (w_j, y_j)$ e tome o disco transversal $D_j = \varphi_j^{-1}(\{w_j\} \times U_2^j)$.

Para $j = 0$, seja $\varphi_1(x_0) = (w_0, y_0)$ e $D_0 = \varphi_1^{-1}(\{w_0\}, U_2^j)$. Como para cada $j = 0, \ldots, k-1$, $U_j \cup U_{j+1}$ está contido em alguma vizinhança de uma carta folheada, existe um disco B_j, de dimensão s, tal que $x_j \in B_j \subset D_j \cap U_{j+1}$.

- **Afirmação:** cada placa de U_{j+1} intersecta B_j no máximo em um ponto.

De fato, se A é uma placa de U_{j+1}, o corolário 3.11 diz que se A' é uma placa de U_j então $A \cap U_j \subset A'$, e assim teremos que $A \cap B_j \subset A' \cap B_j$ e então $\#(A \cap B_j) \leq 1$, pois $\#(A' \cap B_j) \leq 1$.

Diante disso, podemos definir a seguinte aplicação injetora

$$\begin{array}{rccl} f_j : & B_j & \longrightarrow & D_{j+1} \\ & x & \longmapsto & f_j(x), \end{array}$$

em que $f_j(x)$ é o ponto de interseção da placa de U_{j+1} que passa por x e D_{j+1}.

Dessa forma $f_j(x_j) = x_{j+1}$ e f_j é um difeomorfismo de classe C^r e note que $f_j(L \cap B_j) = L \cap f_j(B_j)$ para toda folha L de $\mathcal{F}$.

Tome Σ_1 um disco tal que $p_0 \in \Sigma_1 \subset B_0 \cap f_0^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_0^{-1}(f_1^{-1}(\ldots f_{k-1}^{-1}(D_k)\ldots))$ e defina

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma_1 & \longrightarrow & D_k \\ & x & \longmapsto & f(x) = f_{k-1}(f_{k-2}(\ldots f_1(f_0(x))\ldots)), \end{array}$$

e note que pela construção de cada f_j temos que f é um difeomorfismo em $\Sigma_2 = f(\Sigma_1) \subset D_k$ e que $f(L \cap \Sigma_1) = L \cap \Sigma_2$ para toda folha L de $\mathcal{F}$.

□

3.5 Estabilidade Global: caso transversalmente orientável

Nesta seção $\mathcal{F}$ denotará uma folheação de classe $C^r, r \geq 1$, codimensão um e transversalmente orientável de uma variedade compacta e conexa M. Iremos estudar o caso transversalmente orientável de $\mathcal{F}$ do Teorema de Estabilidade Global, para tal, iremos antes apresentar alguns resultados.

Lema 3.41. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M de codimensão 1. Então, as seguintes sentenças são verificadas:*

1. *Existe uma curva $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ transversal a $\mathcal{F}$;*
2. *Se $\tilde{\gamma} : S^1 \longrightarrow M$ é transversal a $\mathcal{F}$ e $\tilde{\gamma}(S^1) \cap F_0 \neq \emptyset$, onde F_0 é uma folha compacta de $\mathcal{F}$, então existe uma curva $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(S^1) \cap F_0$ contém um único ponto.*

Demonstração. Por hipótese temos que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Considere X um campo de vetores transversal a $\mathcal{F}$. Suponha que $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma curva integral de X, ou seja , $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\alpha(t_1), \alpha(t_2) \in F$ uma folha de $\mathcal{F}$, onde $t_1 < t_2$. Se $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ então α é fechada em M, e já temos o desejado.

Podemos supor que $\alpha(t_1) = p_1 \neq p_2 = \alpha(t_2)$ e definir uma curva simples $\beta : [0,1] \longrightarrow F$ tal que $\beta(0) = p_1$, $\beta(1) = p_2$. Logo, pelo Lema da Trivialização Local existe uma vizinhança V de $\alpha(I)$ e um difeomorfismo

$$h : D^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V,$$

tal que $h^*\mathcal{F}$ é uma folheação cujas folhas são da forma $D^{m-1} \times \{t\}$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

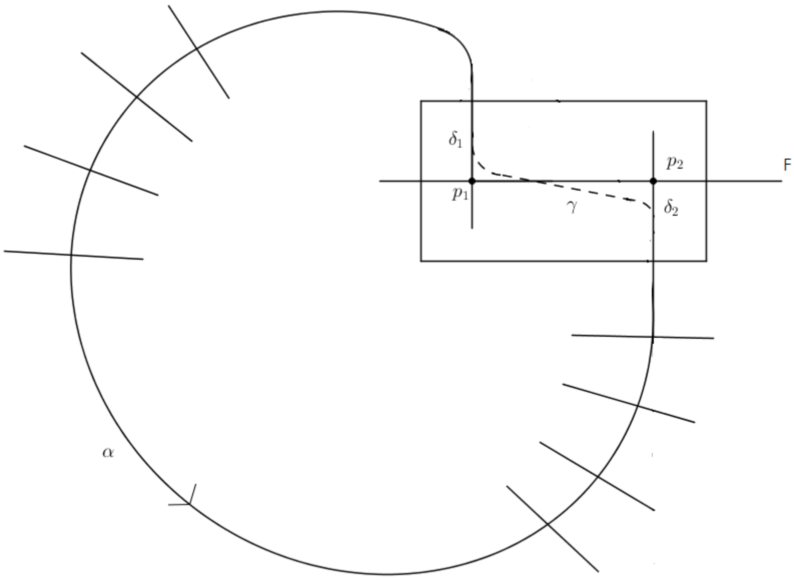
Definimos $X^* := h^*X$ um campo de vetores na variedade $D^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ pondo

$$X^*(q) = (Dh(q))^{-1} \cdot (X(h(q))).$$

Assim X^* é um campo de vetores transversal a $h^*\mathcal{F}$ e portanto podemos supor que sua última componente em $D^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ é positiva.

Sejam δ_1 e δ_2 os segmentos de $\gamma([t_1, t_2]) \subset V$ que contêm p_1 e p_2, respectivamente. Como $t_1 < t_2$ temos que $h^{-1}(\delta_1) \subset D^{m-1} \times [0, \varepsilon)$ e $h^{-1}(\delta_2) \subset D^{m-1} \times (-\varepsilon, 0]$. Definimos uma curva $\gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow M$ a partir da modificação da curva $\alpha|_{[t_1,t_2]}$ como indicado na seguinte forma. A curva γ será definida como sendo a curva α em $[t_1 + \delta, t_2 - \delta]$ e em

$[t_1, t_1 + \delta]$ e $[t_2 - \delta, t_2]$ ligue os pontos $\alpha(t_1 + \delta)$ e $\alpha(t_2 - \delta)$, onde δ é um número que é menor que os comprimentos dos sementos δ_1 e δ_2.



Isto é, α é modificada nos intervalos $[t_1, t_1 + \delta]$ e $[t_2 - \delta, t_2]$ de modo que $\gamma|_{[t_1+\delta, t_2-\delta]}$, $\gamma|_{t_1, t_1+\delta}$ e $\gamma|_{[t_2-\delta, t_2]}$ sejam transversais a $\mathcal{F}$, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Mostraremos agora a sentença 2. Seja $\widetilde{\gamma} : S^1 \longrightarrow M$ uma curva transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\widetilde{\gamma}(S^1) \cap F_0 \neq \emptyset$, onde F_0 é uma folha compacta. Então, $\widetilde{\gamma}(S^1) \cap F_0$ é finito. Se $\widetilde{\gamma}(S^1) \cap F_0$ contém mais de um ponto e escolhemos $w_1, w_2 \in S^1$ tal que $\widetilde{\gamma}(w_1), \widetilde{\gamma}(w_2) \in F_0$ e $\widetilde{\gamma}((w_1, w_2)) \cap F_0 = \emptyset$, onde (w_1, w_2) é um dos segmentos de $S^1 - \{w_1, w_2\}$. Basta agora, repetir o primeiro argumento, já que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável.

□

Lema 3.42. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1, transversalmente orientável de uma variedade compacta e conexa M. Se $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ é uma curva fechada transversal a $\mathcal{F}$ tal que toda folha na saturação $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é compacta e tem grupo fundamental finito, então $\mathcal{F}(\gamma(S^1)) = M$. Além disso, o número de pontos na interseção das folhas de $\mathcal{F}$ com $\gamma(S^1)$ é constante.*

Demonstração. Iremos demonstrar que $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é aberto e fechado em M e como M é conexa teremos que $\mathcal{F}(\gamma(S^1)) = M$.

Mostremos incialmente que a saturação $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é aberta.

De fato, dado $x \in \mathcal{F}(\gamma(S^1))$, $F_x \cap \gamma(S^1) \neq \emptyset$. Se $y \in F_x \cap \gamma(S^1)$, consideremos uma curva simples

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow F_x,$$

tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Pelo Lema da Trivialização Global existe uma vizinhança A de $\alpha([0, 1])$ tal que para todo $z \in A$, $F_z \cap \gamma(S^1) \neq \emptyset$, ou seja, $F_z \in \mathcal{F}(\gamma(S^1))$ e daí $A \subset \mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é um aberto que contém x e está contido em $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$, como queríamos.

Por outro lado $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é fechado.

De fato, dado $x \in \gamma(S^1)$, pelo Lema 3.38 existe uma vizinhança V de F_x, saturada por $\mathcal{F}$ e um difeomorfismo

$$h : (-1,1) \times F_x \longrightarrow V,$$

tal que as folhas de $\mathcal{F}$ em V são os conjuntos da forma $h(\{t\} \times F_x),\ t \in (-1,1)$.

Denotemos $V_x := h([\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] \times F_x)$ a vizinhança compacta de F_x. Temos então que $V_x \cap \gamma(S^1)$ contém um intervalo aberto que contém x, digamos I_x. Logo,

$$\bigcup_x I_x = \gamma(S^1)$$

e como $\gamma(S^1)$ é compacto existe uma subcobertura finita de $\gamma(S^1)$ por intervalos $\{I_{x_i}\}_{i=1}^{l}$. Assim, $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é a união $V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots V_{x_l}$, que são compactas, logo $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é compacto, e portanto fechado.

Concluímos do fato de $\mathcal{F}(\gamma(S^1)))$ ser aberto e fechado e M conexo que $M = \mathcal{F}(\gamma(S^1))$.

Para cada $x \in \gamma(S^1)$ pomos $k(x) = \#(\gamma(S^1) \cap F_x)$. Queremos mostrar que $k(x)$ é constante para todo $x \in \gamma(S^1)$. Para isso, consideremos

$$\gamma_j = \{x \in \gamma(S^1); \#(\gamma(S^1) \cap F_x) = j\}.$$

- **Afirmação:** O cojunto γ_j é aberto em $\gamma(S^1)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

De fato, dado $x \in \gamma_j$, seja V uma vizinhança de F_x como no Lema 3.38. Então, $\gamma(S^1) \cap V$ tem um número finito de componentes $l_1, \ldots, l_r$. Para todo $i = 1, \ldots, r$, os extremos de l_i estão contidos em ∂V, então pelo Corolário 3.39, temos que $\#(l_i \cap F) = 1$, para toda folha $F \subset V$.

Em particular, como $F_x \subset V$ já que V é uma vizinhança de F_x, temos que $\#(l_i \cap F_x) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, r$, então $r = j$. Além disso, para toda folha $F \subset V$, $\#(l(S^1) \cap F) = j$, então γ_j é aberto em $\gamma(S^1)$.

Logo $\gamma(S^1) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \gamma_j$ e assim $\gamma(S^1) = \gamma_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, pois $\gamma(S^1)$ é conexo.

$\square$

Teorema 3.43 (Teorema da Estabilidade Global)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r, de codimensão 1, transversalmente orientável de uma variedade conexa e compacta M. Se $\mathcal{F}$ tem uma folha compacta F com grupo fundamental finito então todas as folhas são difeomorfas a F. Além disso, existe uma submersão $f : M \longrightarrow S^1$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são os conjuntos $f^{-1}(y)$, $y \in S^1$.*

Demonstração. Inicialmente, definamos o conjunto

$$U = \{x \in M; F_x \text{ é } compacta\ e\ tem\ grupo\ fundamental\ finito\}.$$

Como F é uma folha compacta com grupo fundamental finito temos que $U \neq \emptyset$ e pelo Lema 3.38 Ué aberto.

- **Passo 1:** Mostraremos que $\partial U = \emptyset$.

  Como U é saturado por $\mathcal{F}$ então ∂U também é saturado por $\mathcal{F}$, ou seja, podemos falar de folhas em ∂U.

  Suponha por contradição que $\partial U \neq \emptyset$.

  Afirmação 1: Se $F \subset \partial U$ é uma folha, então F não é compacta.

  De fato, suponha por contradição que exista uma folha compacta $F \subset \partial U$. Assim, pelo Lema 3.27 existe uma vizinhança V de F em M e uma retração $\pi : V \longrightarrow F$ tal que para todo $x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ é um segmento transversal a $\mathcal{F}$.

  Como $F \subset \partial U$ e V é uma vizinhança de F então temos que existe alguma folha $F' \subset V \cap U$. Daí temos que

$$g = \pi|_{F'} : F' \longrightarrow F$$

  é um difeomorfismo local.

  Então, como F' é compacta, segue que $g : F' \longrightarrow F$ é um recobrimento com um número finito de folhas de recobrimento, pois π é um difeomorfismo local próprio. Sendo, $k = \#g^{-1}(x),\ x \in F$ então $\#(\pi_1(F)) = k \cdot \#(\pi_1(F'))$. Logo, F tem um grupo fundamental finito, e como é compacta por hipótese, segue que $F \subset U$.

  Mas, U é aberto, ou seja, $U \cap \partial U = \emptyset$, contradiçao. Portanto, se $F \subset \partial U$ então F não é compacta, concluindo a afirmação 1.

  Agora, tome $p \in \partial U$ e consideremos l um segmento transversal a $\mathcal{F}$ tal que $p \in l$. Como $p \in \partial U$ existe $q \in l \cap U$. Sendo, $[p,q] \subset l$ o segmento fechado de extremos p e q temos que $[p,q] \cap U = \bigcup\limits_{n \in A} I_n$, onde I_n é um intervalo aberto em $(p,q]$ tal que $I_n \cap I_m = \emptyset$, se $m \neq n$.

  Seja $x \neq q$ a extremidade de um destes segmentos, suponhamos $I_1 = (x,y) \subset [p,q] \cap U$.

  Seja $\widetilde{U}$ a componente conexa de U que contém (x,y). Pelo uniformidade transversal, para todo $x' \in F_x$ e todo segmento Σ transversal a $\mathcal{F}$ com $x' \in \Sigma$, existe um segmento $(x',y') \subset \Sigma \cap \widetilde{U}$.

  Como F_x não é compacta e M é compacta, F_x se acumula em algum ponto $\widetilde{p} \in M - F_x$. Tome V uma vizinhança trivializadora de $\mathcal{F}$ que contém $\widetilde{p}$ e seja $J \subset V$ um segmento compacto e transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\widetilde{p} \in J$.

  Como $\widetilde{p} \notin F_x$ é ponto de acumulação de F_x, então F_x intersecta V em uma infinidade de placas que se acumulam na placa que contém $\widetilde{p}$, isto é, F_x intersecta J em uma infinidade de pontos, digamos

$$F_x \cap J = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

  e tome $J \cap \widetilde{U} = \bigcup\limits_{r \in B} J_r$, onde J_r é um segmento aberto e $J_r \cap J_s = \emptyset$, se $r \neq s$.

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um segmento $(x_n, y_n) \subset \widetilde{U} \cap J$ com $x_n \neq y_n$, e temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que x_n é extremo de algum intervalo J_r, $r \in B$. Portanto, B é infinito.

Assim, como o número de componentes conexas de $J \cap \widetilde{U}$ é infinito, pois para cada $r \in B$, J_r é um segmento aberto e B é infinito, e como no máximo duas destas componentes conexas podem ter algum dos extremos em $\widetilde{U}$, podemos supor que para todo $r \in B$ os extremos de J_r estão contidos em $\partial \widetilde{U}$ retirando de $\{J_r\}_{r \in B}$ as componentes que não satisfazem tal propriedade.

Afirmação 2: A saturação de J_r em $\mathcal{F}$ é igual a $\widetilde{U}$.

De fato, pelo Lema 3.38, $\mathcal{F}(J_r)$ a saturação de J_r em $\mathcal{F}$ é aberta em $\widetilde{U}$.

Mostraremos que $\mathcal{F}(J_r)$ é fechado em $\widetilde{U}$.

Seja $y \in \overline{\mathcal{F}(J_r)}$, então existe $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos em $\mathcal{F}(J_r)$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = y \in \widetilde{U}.$$

Como $y \in \widetilde{U}$ e $\widetilde{U}$ é uma componente conexa então $F_y \subset \widetilde{U}$ e pelo Lema 3.38 existe uam vizinhança $W \subset \widetilde{U}$ de F_y, saturado por $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F}|_W$ é equivalente a folheação produto $(-1, 1) \times F_y$.

Uma vez que $y_n \in W$ para n sufiecientemente grande, segue então que $J_r \cap W \neq \emptyset$, pois $y_n \in \mathcal{F}(J_r)$ e W é saturado por $\mathcal{F}$. Além disso, como os extremos de $J_r \cap W$ estão contidos em ∂W, então J_r intersecta todas as folhas de W e então $y \in \mathcal{F}(J_r)$.

Portanto, $\mathcal{F}(J_r)$ é aberto e fechado em $\widetilde{U}$, que é um conexo, ou seja, $\mathcal{F}(J_r) = \widetilde{U}$. Concluindo a Afirmação 2.

Dessa forma, vimos que toda folha F' em $\widetilde{U}$ intersecta J em uma infinidade de pontos, no entanto, J e F' são compactos e J é transversal a $\mathcal{F}$, temos assim uma contradição. Portanto, $\partial U = \emptyset$, concluindo o Passo 1.

Assim, como $\partial U = \emptyset$ e M é conexo, segue que $U = M$.

- **Passo 2**: Todas as folhas de $\mathcal{F}$ são difeomorfas.

  De fato, seja L uma folha de $\mathcal{F}$, e definamos

  $$U_L = \{x \in M;\ F_x \text{ é difeomorfa a } L\}.$$

  Pelo Lema 3.38, U_L e $M - U_L$ são abertos em M. Como M é conexa segue que $U_L = M$.

- **Passo 3:** Existe uma submersão C^r, $f : M \longrightarrow S^1$ de modo que as folhas de $\mathcal{F}$ são da forma $f^{-1}(w)$, $w \in S^1$.

  De fato, pelos Lemas 3.41 e 3.42 existe uma curva fechada $\gamma : S^1 \longrightarrow M$ transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(S^1)$ intersecta cada folha de $\mathcal{F}$ em um único ponto.

  Assim, definimos

  $$\begin{array}{rccl} f: & M & \longrightarrow & S^1 \\ & p & \longmapsto & f(p) = \gamma^{-1}(F_p \cap \gamma(S^1)), \end{array}$$

que é uma submersão e como M é conexa temos que as folhas de $\mathcal{F}$ são os conjuntos $f^{-1}(w)$, $w \in S^1$.

Concluindo, portanto a demonstração do teorema.

□

3.6 Estabilidade Global: Caso Geral

Traremos agora o Teorema de Estabilidade Global para o caso geral, ou seja, a folheação $\mathcal{F}$ aqui considerada será de classe C^1, codimensão um e não necessariamente transversalmente orientável, como estudado no teorema anterior.

Teorema 3.44. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^1 e codimensão um de uma variedade compacta conexa M e F é uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com grupo fundamental finito, então todas as folhas também são compactas com grupo fundamental finito.*

Demonstração. Podemos começar supondo que $\mathcal{F}$ não é transversalmente orientável, pois se fosse o Teorema 3.43 já garantiria o resultado.

Assim, seja P um campo de linhas, ou seja, um campo de $k-planos$ com $k = 1$, e tal que P é transversal ao campo de planos de codimensão 1, tangente as folhas $\mathcal{F}$.

Tome $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ o recobrimento duplo orientável de P. Como P não é orientável, pois $\mathcal{F}$ não é transversalmente orientável, segue que $\widetilde{M}$ é conexo. Consideremos a folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ em $\widetilde{M}$ e como π leva as folhas de $\pi^*(\mathcal{F})$ em folhas de $\mathcal{F}$, temos que $\pi^*(\mathcal{F})$ tem dois tipos de folhas, o primeiro tipo são folhas F^* de $\pi^*(\mathcal{F})$ tais que $\pi|_{F^*} : F^* \longrightarrow \pi(F^*)$ é um difeomorfismo e o segundo tipo são folhas F^* tais que $\pi|_{F^*} : F^* \longrightarrow \pi(F^*)$ é um recobrimento de 2 folhas . Em qualquer um dos casos as folhas de $\mathcal{F}$ serão compactas e com grupo fundamental finito.

□

4 Exemplos e Construções Básicas

Neste capítulo apresentaremos algumas construções básicas de variedades e que envolvem folheações.

4.1 Colagem de Variedades com Bordo

Sejam M uma variedade suave de dimensão n e (U, φ) uma carta folheada, ou seja, U é um conjunto aberto em M e $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) = U_1 \times U_2$, U_1 e U_2 são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^{n-m}$, respectivamente.

Definição 4.1. *Para cada $x \in U_1$ definimos uma transversal da carta (U, φ) como sendo o conjunto*

$$S_x = \varphi^{-1}(\{x\} \times U_2).$$

Além disso, aos seguintes conjuntos

$$\partial_\tau U := \varphi^{-1}(U_1 \times (\partial U_2))$$

e

$$\partial_\pitchfork U := \varphi^{-1}((\partial U_1) \times U_2),$$

chamamos de fronteira tangencial e fronteira transversal de U, respectivamente.

Definição 4.2. *Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ uma folheação. Definimos a fronteira tangencial de M como sendo*

$$\partial_\tau M := \bigcup_{\alpha \in I} \partial_\tau U_\alpha$$

e a fronteira transversal de M por

$$\partial_\pitchfork M := \bigcup_{\alpha \in I} \partial_\pitchfork U_\alpha.$$

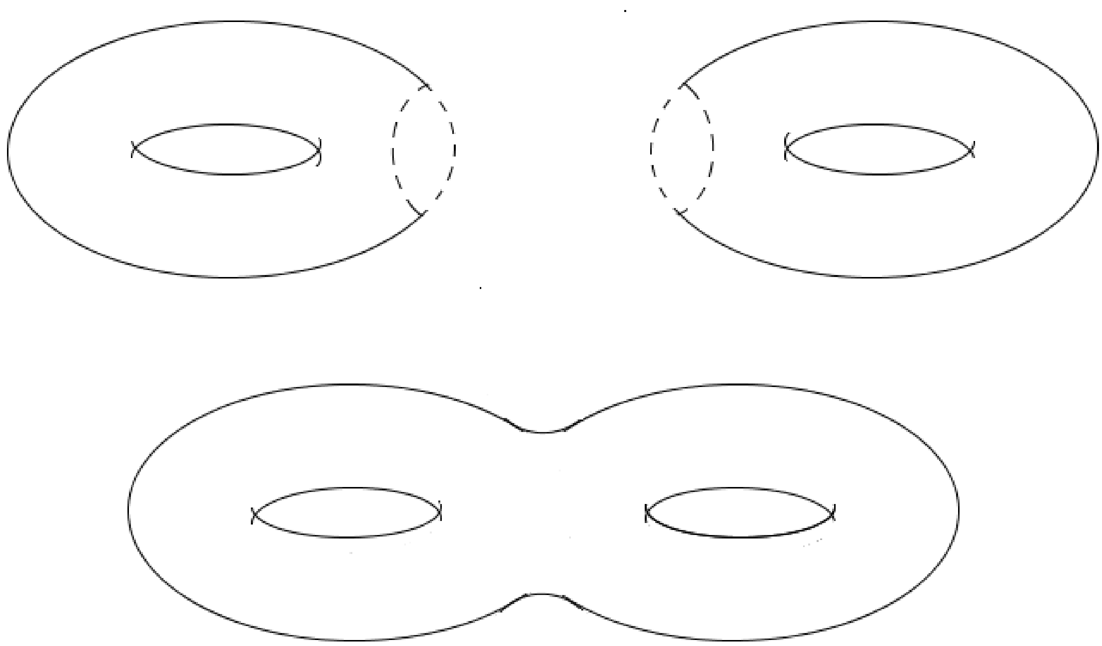
Sejam M_1 e M_2 duas variedades com bordos compactos e de mesma dimensão n e $f : \partial M_1 \longrightarrow \partial M_2$ um difeomorfismo de classe C^∞.

Consideremos a seguinte relação de equivalência na união disjunta $M_1 \sqcup M_2$:

$$x \sim y \iff \begin{array}{l} x = y \text{ ou} \\ x \in \partial M_1 \text{ e } y = f(x) \text{ ou} \\ x \in \partial M_2 \text{ e } y = f^{-1}(x), \end{array}$$

em outras palavras, cada ponto é associado a sua imagem ou pré-imagem por f. Definimos o espaço adjunto

$$M = M_1 \cup_f M_2 := M_1 \sqcup M_2 / \sim .$$



Teorema 4.3 (Colagem do Bordo). *O espaço adjunto $M_1 \cup_f M_2$ é uma variedade.*

Demonstração. Sejam $q : M_1 \sqcup M_2 \longrightarrow M_1 \cup_f M_2$ a aplicação quociente e tome $\phi_{M_1} : \partial M_1 \times [0,1) \longrightarrow V_1$ e $\phi_{M_2} : \partial M_2 \times [0,1) \longrightarrow V_2$ vizinhanças colares dos respectivos bordos, como no Teorema da Vizinhança Colar de Bordo, Teorema 2.14.

Tome $V = q(V_1 \cup V_2)$ que é uma vizinhança de $q(\partial M_1)$. Consideremos

$$\begin{array}{rccl} i_1 : & M_1 & \longrightarrow & M_1 \cup_f M_2 \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} i_2 : & M_2 & \longrightarrow & M_1 \cup_f M_2 \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

e defina a aplicação

$$\psi : \partial M_1 \times (-1,1) \longrightarrow V \subset M_1 \cup_f M_2$$

pondo

$$\psi(x,t) = \begin{cases} i_1(\phi_{M_1}(x,-t)), & t \leq 0 \\ \\ i_2(\phi_{M_2}(f(x),t)), & t \geq 0, \end{cases}$$

claramente ψ é um homeomorfismo sobre V. Portanto, $M_1 \cup_f M_2$ é uma variedade.

□

Sejam M_1 e M_2 variedades com folheações respectivas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de classe C^r e ambas de codimensão 1.

Tome $S_1 \subset \partial_\tau M_1$ e $S_2 \subset \partial_\tau M_2$ uniões de componentes da fronteira tangencial. Consideremos o difeomorfismo $f : S_2 \longrightarrow S_1$ e $M = M_1 \cup_f M_2$.

Definição 4.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade suave M, de classe C^r e de codimensão 1. Seja L uma folha em $\partial_\tau M$, $x \in L$ e consideremos $\widetilde{f_\sigma} \in H(L,x)$ como germe em $0 \in [0,\infty)$ de difeomorfismos locais C^r, f_σ. Se para cada $\widetilde{f_\sigma} \in H(L,x)$ tivermos $f'_\sigma(0) = 1$ e $f_\sigma^{(m)}(0) = 0$, para todo $1 \leq m \leq r$, dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é infinitesimalmente C^r-trivial na folha L.*

A seguinte proposição garante que tal estrutura diferenciável será de classe C^r, mesma classe das estruturas diferenciáveis de M_1 e M_2 e o leitor pode encontrar sua prova em [5].

Proposição 4.5. *Se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são folheações infinitesimalmente C^r-triviais ao longo de cada compomente de S_1 e S_2, então existe uma estrutura diferenciável C^r concordando em M_1 e M_2 com as respectivas estruturas, tal que a folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup_f \mathcal{F}_2$ de $M_1 \cup_f M_2$ é de classe C^r.*

4.2 Transversais Fechadas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q de uma variedade M.

Definição 4.6. *Uma transversal fechada a $\mathcal{F}$ é uma subvariedade compacta, conexa, suavemente mergulhada $S \hookrightarrow M$ de dimensão q, sem fronteira e transversal a $\mathcal{F}$ em toda a interseção.*

Teorema 4.7. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente orientável de codimensão 1 e $J \subset M$ um arco compacto, suavemente mergulhado, transversal a $\mathcal{F}$ em toda interseção e tal que $\partial J \subset F$, F folha de $\mathcal{F}$. Então existe uma transversal fechada a $\mathcal{F}$ intersectando exatamente as mesmas folhas que J.*

Demonstração. Seja $\partial J = \{x_0, x_1\}$ e suponha que $x_1 < x_0$. Cosidere $\lambda : [0,1] \longrightarrow F$ um mergulho C^1 com $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$.

Assim, $\lambda * J$ forma um laço, isto é, um caminho fechado em M, que é C^1 por partes, transversal a $\mathcal{F}$ ao longo de J e tangente a $\mathcal{F}$ ao longo de λ, já que $\lambda([0,1]) \subset F$, que é uma folha de $\mathcal{F}$.

Tome uma vizinhança simplesmente conexa P_λ de $\lambda([0,1])$ em F. Tome também uma vizinhança coordenada fechada $W = P \times [-2,2]$ tal que P_λ é a placa $P \times \{0\}$.

Consideremos J decomposto em dois subarcos compactos $J = J_1 * J_0$, onde $J_0 \subset W$, o ponto inicial de J_1 sendo x_1, o ponto final de J_0 sendo x_0 e $J_0 \cap J_1 = \{w\}$.

Escolhemos coordenadas (x, y) em $W = P \times [-2, 2]$ de modo que

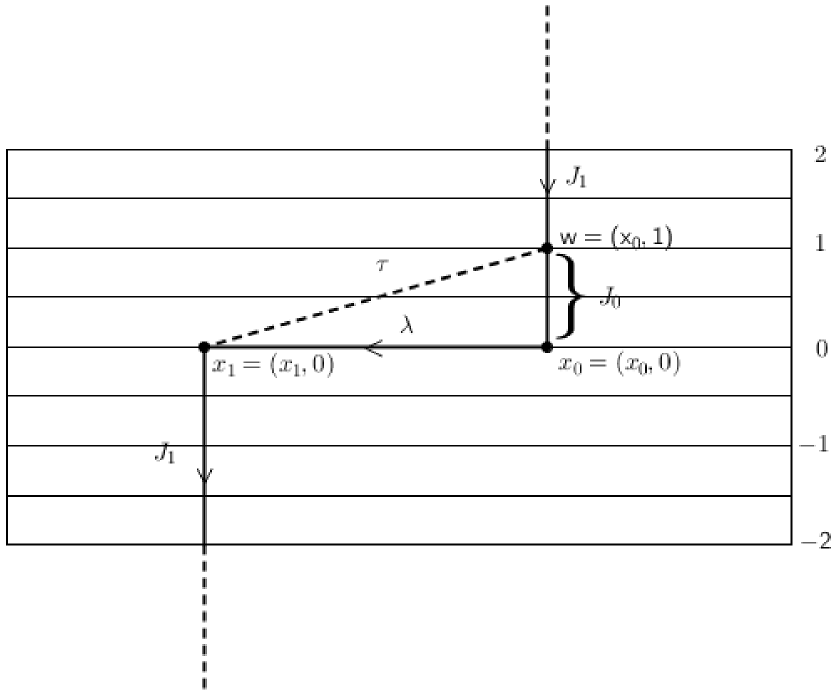
$$J_0 = \{(x_0, y);\ 0 \leq y \leq 1\},$$

ou seja, $w = (x_0, 1)$ e $x_0 = (x_0, 0)$.

Seja $l : [0, 1] \longrightarrow P$ um caminho tal que $\lambda(t) = (l(t), 0)$. Assim, definimos

$$\begin{array}{rccl} \tau : & [0,1] & \longrightarrow & W \\ & t & \longmapsto & \tau(t) = (l(t), 1-t) \end{array}$$

como sendo um arco transversal a $\mathcal{F}$ que começa em $\tau(0) = w$ e termina em $\tau(1) = x_1$.



Portanto, tomando $\sigma = J_1 * \tau$ é uma transversal fechada. Fazendo uma arredondamento em w e x_1 de forma a torná-los pontos onde há diferenciabilidade, teremos um laço cuja resultante é uma circunferência S suavemente mergulhada e transversal a $\mathcal{F}$. Note também, que da construção temos que S intersecta as mesmas folhas que J intersecta.

□

4.3 Folheação Suspensão

Nesta seção iremos definir a folheação suspensão, que irá ser estudada com mais detalhes no Capítulo 6 deste trabalho.

Sejam X e B variedades suaves conexas compactas e $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(X)$ uma ação de Γ em X, onde Γ é um grupo isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$, com $b_0 \in B$.

Logo, como Γ é isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$ e pela Proposição 2.35 $\pi_1(B, b_0)$ é isomorfo ao grupo de transformação de recobrimento $\mathrm{Deck}(\widetilde{B})$, onde $\widetilde{B}$ é o recobrimento universal de B, segue então que Γ age em $\widetilde{B}$ através de transformações de recobrimento.

Definindo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times (\widetilde{B} \times X) & \longrightarrow & \widetilde{B} \times X \\ (g, (b, x)) & \longmapsto & (g \cdot b,\ \Phi(g)x), \end{array}$$

temos uma ação de Γ em $\widetilde{B} \times X$.

De fato,

- $id \cdot (b, x) = (b, x)$;
- $g \cdot (h \cdot (b, x)) = g \cdot (h(b), \Phi(h)x) = (g(h(b)), \Phi(g)(\Phi(h)x)) = g \circ h \cdot (b, x)$.

Além disso, pela Proposição 2.38 a ação de Γ em $\widetilde{B}$ é livre e pela Proposição 2.40 Γ age propriamente em $\widetilde{B}$. Então a ação de Γ em $\widetilde{B} \times X$ também é livre e própria.

De fato,

- A ação é livre:

  Imediato que $\Gamma_{(b,x)} = \{g \in \Gamma;\ g \cdot (b, x) = (b, x)\} = \{e\}$ para todo $(b, x) \in \widetilde{B} \times X$, uma vez que $\Gamma_b = \{g \in \Gamma; g \cdot b = b\} = \{e\}$, para todo $b \in \widetilde{B}$.

- A ação é própria:

  Pela Proposição 2.40 temos que a ação de Γ em $\widetilde{B}$ é própria, ou seja, dado $b \in \widetilde{B}$ existe U vizinhança de b tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$, para todo $g \in \Gamma - \{e\}$ e para $b,\ b' \in \widetilde{B}$ não estando na mesma $\Gamma-$órbita, existem vizinhanças V de b e V' de b' tal que $(g \cdot V) \cap V' = \emptyset$, para todo $g \in \Gamma$.

  Assim, para cada $(b, x) \in \widetilde{B} \times X$ basta tomar a vizinhança $U \times X$ de (b, x) que o resultado segue.

Portanto, como a ação de Γ, que é um grupo de Lie, em $\widetilde{B} \times X$ é livre, própria e suave, segue pelo Teorema da Variedade Quociente 2.42 que

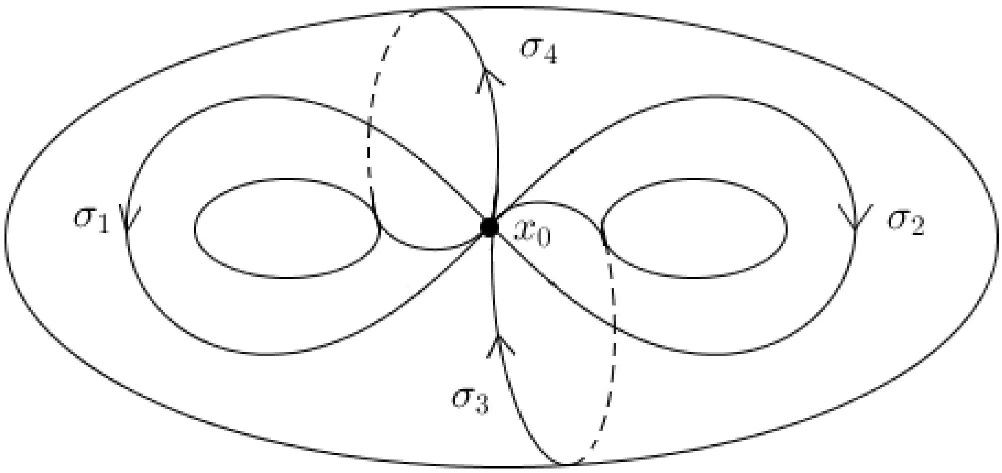
$$M_\Phi = (\widetilde{B} \times X)/\Gamma = \{\Gamma \cdot (b, x);\ (b, x) \in \widetilde{B} \times X\}$$

é uma variedade.

Assim, a folheação produto $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{B} \times \{x\}\}_{x \in X}$ induz através da aplicação quociente $q : \widetilde{B} \times X \longrightarrow M_\Phi$ uma folheação $\mathcal{F}_\Phi$ em M_Φ que é a folheação que chamaremos de folheação suspensão.

A seguir veremos um exemplo de folheação suspensão para fixar ideias.

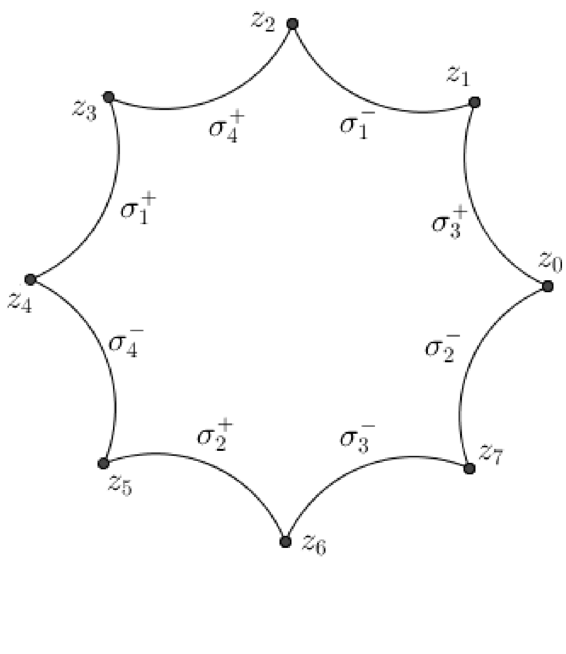
Exemplo. Consideremos Σ_2 o bitoro e $\pi_1(\Sigma_1, x_0)$ seu grupo com ponto base em x_0 e com a operação $[\sigma] * [\tau] = [\tau + \sigma]$, ou seja, caminha-se primeiro por τ e depois por σ.



Além disso, $\pi_1(\Sigma_2, b_0)$ é gerado por laços $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e σ_4, que satisfazem a seguinte relação

$$\sigma_1 * \sigma_4^{-1} * \sigma_1^{-1} * \sigma_4 = \sigma_3 * \sigma_2^{-1} * \sigma_3^{-1} * \sigma_2. \tag{4.1}$$

Ao cortarmos Σ_2 ao longo destes 4 laços, a figura resultante é um octágono **O**, pois ao fazer o corte, cada laço dará origem a duas ramificações que são segmentos de reta, ou seja, teremos 8 segmentos de reta e 8 pontos, e que neste caso iremos considerar no plano hiperbólico.



Quando um ponto $z \in \sigma_i$ denotaremos as duas pré imagens de z em $\sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ por $z^\pm \in \sigma_i^\pm$.

Sejam $f_1, f_2 \in \text{Diff}_+^r(S^1)$ o espaço de difeormorfismos de classe C^r em S^1 que preservam orientação, e definimos uma identificação em $\mathbb{O} \times S^1$ por

$$\text{Se } z \in \sigma_4 \text{ então } (z^-, y) \equiv (z^+, f_1(y));$$

$$\text{Se } z \in \sigma_3 \text{ então } (z^-, y) \equiv (z^+, f_2(y));$$

$$\text{Se } z \in \sigma_1 \cup \sigma_2 \text{ então } (z^-, y) \equiv (z^+, y).$$

Seja $p : H \longrightarrow \Sigma_2$ o recobrimento universal do bitoro, onde H é o plano hiperbólico e seja Γ o grupo de transformações de recobrimento de H.

Já sabemos que Γ é isomorfo a $\pi_1(\Sigma_2, b_0)$ e sabemos também que Γ age em H através de transformações de recobrimento.

Defina

$$\Phi : \pi_1(\Sigma_2, x_0) \longrightarrow \text{Diff}_+^r(S^1)$$

da seguinte forma

$$\begin{aligned} h(\sigma_1) &= f_1 \\ h(\sigma_2) &= f_2 \\ h(\sigma_3) &= id \\ h(\sigma_4) &= id \end{aligned}$$

que é um homomorfismo de grupos, pois respeita a relação 4.1.

Defina em $H \times S^1$ a relação

$$(z, y) \sim (z', y') \Longleftrightarrow z' = g \cdot z \text{ e } y' = \Phi(g)(y),$$

para algum $g \in \Gamma$.

Definimos então uma ação de Γ em S^1 dada por

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ (g, y) & \longmapsto & g \cdot y = \Phi(g)(y), \end{array}$$

e assim temos bem definida a ação

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times H \times S^1 & \longrightarrow & H \times S^1 \\ (g, (z, y)) & \longmapsto & (g \cdot z, \Phi(g)(y)), \end{array}$$

e note que $\sim$ é uma é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são as $\Gamma-$órbitas, pois

$$\begin{aligned}
[(z,y)] &= \{(z',y');\ (z',y') \sim (z,y)\}\\
&= \{(z',y');\ z' = g\cdot z \text{ e } y' = \Phi(g)(y),\ g\in\Gamma\}\\
&= \{g\cdot(z,y); g\in\Gamma\}\\
&= \Gamma\cdot(z,y).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a variedade

$$M_\Phi = (H\times S^1)/\Gamma.$$

Além disso, note que a folheação produto $\{H\times\{y\}\}_{y\in S^1}$ de $H\times S^1$ é invariante sob a ação de Γ, e então induz uma folheação de M_Φ

O seguinte resultado será uma ferramenta útil para compreendermos a construção que será apresentada no capítulo 6. Não obstante, nos absteremos de sua prova por não fazer parte do escopo do trabalho. O leitor pode encontrar sua demonstração em [5].

Proposição 4.8. *Existe uma projeção de fibrado $p : M_\Phi \longrightarrow B$ que torna (M_Φ, p, B, X) um fibrado.*

5 O Pseudogrupo de holonomia

Neste capítulo X denotará um espaço topológico e denotaremos por Homeo(X) a família de todos os homeomorfismos entre conjuntos abertos de X. Iremos também supor que M é paracompacto.

5.1 Pseudogrupos

Se $g \in$ Homeo(X), então D_g denotará seu domínio e $R_g = g(D_g)$.

Definição 5.1. *Um subconjunto $\mathcal{G}$ de Homeo(X) é dito ser um pseudogrupo se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $g, h \in \mathcal{G}$ e $R_h \subset D_g$ então $g \circ h \in \mathcal{G}$;*
2. *Se $g \in G$ então $g^{-1} \in \mathcal{G}$;*
3. *$g|_U \in \mathcal{G}$ se $g \in \mathcal{G}$ e $U \subset D_g$ é aberto;*
4. *Se $g \in$ Homeo(X), $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de D_g e $g|_U \in \mathcal{G}$ para qualquer $U \in \mathcal{U}$, então $g \in \mathcal{G}$;*
5. *$id_X \in \mathcal{G}$.*

Se dois pseudogrupos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}' \in$ Homeo(X) são tais que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, então $\mathcal{G}$ é dito um subpseudogrupo de $\mathcal{G}'$.

Para qualquer conjunto $\Gamma \subset$ Homeo(X) satisfazendo

$$\bigcup \{D_g \cup R_g;\ g \in \Gamma\} = X$$

existe um único menor pseudogrupo $\mathcal{G}(\Gamma)$ contendo Γ: $g \in \mathcal{G}(\Gamma)$ se, e somente se, $g \in$ Homeo(X) e para qualquer $x \in D_g$ existem $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \Gamma$, expoentes $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \{\pm 1\}$ e uma vizinhança aberta U de x tal que $U \subset D_g$ e

$$g|_U = (g_1^{e_1} \circ g_2^{e_2} \circ \ldots \circ g_n^{e_n})|_U.$$

Definição 5.2. *O pseudogrupo $G(\Gamma)$ é dito ser gerado por Γ e se Γ é finito então $G(\Gamma)$ é dito finitamente gerado.*

Seja Homeo(X, Y) o conjunto de todos os homeomorfismos $\phi : D_\phi \longrightarrow R_\phi$ entre abertos $D_\phi \subset X$ e $R_\phi \subset Y$.

Definição 5.3. *Um conjunto $\Phi \subset$ Homeo(X, Y) é um morfismo de $\mathcal{G}$ um pseudogrupo de Homeo(X) em $\mathcal{H}$ um pseudogrupo de Homeo(Y) denotado por $\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ se*

1. *$\displaystyle\bigcup_{\phi \in \Phi} D_\phi = X$;*

2. $\phi \circ g \circ \psi^{-1} \in \mathcal{H}$, *para todo* $g \in \mathcal{G}$, *e todos* $\phi, \psi \in \Phi$.

Dizemos que Φ *é um isomorfismo se* $\Phi^{-1} := \{\phi^{-1};\ \phi \in \Phi\}$ *é um morfismo de* $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{G}$.

Definição 5.4. *Seja* M *uma variedade diferenciável de classe* C^r *e de dimensão* n. *Um atlas folheado de dimensão* p *em* M *é um atlas maximal* $\mathcal{A}$ *de classe* C^r *que decompõe* M *em subvariedades conexas tal que para qualquer* $x \in M$ *existe uma carta diferenciável de classe* C^r $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) = U_1 \times U_2$, *onde* U *é vizinhança de* x, U_1, U_2 *são bolas abertas de* $\mathbb{R}^p$ *e* $\mathbb{R}^{n-p}$, *respectivamente e satisfaz a seguinte condição:*

- *para qualquer* L *de* $\mathcal{A}$ *as componentes conexas de* $L \cap U$ *são da forma* $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$.

Definição 5.5. *Um atlas folheado* $\mathcal{A}$ *de dimensão* p *de uma variedade* M *de dimensão* n, *é dita ser nice se tivermos que*

1. *A cobertura* $\{D_\phi;\ \phi \in \mathcal{A}\}$ *é localmente finito;*
2. *Se* $\phi \in \mathcal{A}$ *então* $R_\phi = \phi(D_\phi) \subset \mathbb{R}^n$ *é um cubo aberto;*
3. *Se* ϕ, $\psi \in \mathcal{A}$ *e* $D_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset$, *então existe* $(D_\varphi, \varphi) \in \mathcal{A}$ *tal que* R_φ *é um cubo aberto,* $D_\varphi \supset \overline{D_\phi \cup D_\psi}$ *e* $\phi = \varphi|_{D_\phi}$.

Se as condições acima são satisfeitas, também dizemos que a cobertura de M *por domínios* D_ϕ, *é nice.*

Lema 5.6. *Toda folheação* $\mathcal{F}$ *de uma variedade* M *admite uma cobertura nice.*

Demonstração. Podemos supor que para cada sistema de coordenadas ϕ, R_ϕ é um cubo. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M por todas as vizinhanças coordenadas de cartas em $\mathcal{F}$. Por hipótese M é paracompacto, então existe cobertura aberta localmente finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de M tal que para todo $V \subset \mathcal{U}'$ existe $U \in \mathcal{U}$ satisfazendo que $\bigcup\{W \in \mathcal{U}';\ W \cap V \neq \emptyset\} \subset U$. Tome $V \in \mathcal{U}'$ e $U \in \mathcal{U}$ que satisfazem esta condição e consideremos também $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ a folheação de todas as cartas da forma $\phi|_V$.

Se $\phi|_V \in \mathcal{F}'$ podemos encontrar uma cobertura localmente finita de $R_{\phi|_V}$ por cubos abertos $Q \subset R_{\phi|_V}$ juntamente com os fechos e tome $\mathcal{F}''$ o atlas de todas as restrições das cartas $\phi|_V$ a conjuntos da forma $(\phi|_V)^{-1}(Q)$. Assim, $\mathcal{F}''$ e $\mathcal{U}'' = \{D_\psi;\ \psi \in \mathcal{F}''\}$ são nice.

□

5.2 Pseudogrupo de Holonomia

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura nice de uma variedade M com folheação $\mathcal{F}$.

Para $U \in \mathcal{U}$, seja T_U o espaço das placas de $\mathcal{F}$ contidas em U e munido com a topologia quociente: dois pontos u_1, $u_2 \in U$ são equivalentes se, e somente se, pertencem a mesma placa.

Definição 5.7. *A união disjunta*

$$T = \bigsqcup \{T_U;\ U \in \mathcal{U}\}$$

é dita ser uma transversal completa para $\mathcal{F}$.

Definição 5.8. *Dados dois conjuntos $U,\ V \in \mathcal{U}$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$ seja D_{VU} o subconjunto aberto de T_U de todas as placas P de U tais que $P \cap V \neq \emptyset$. Definimos a holonomia entre U e V*

$$h_{VU} : D_{VU} \longrightarrow T_V$$

por

$$h_{VU}(P) = P' \Longleftrightarrow \textit{ as placas } P \subset U \textit{ e } P' \subset V \textit{ se intersectam.}$$

Pela condição 3 da definição de cobertura nice, esta aplicação está bem definida. De fato, qualquer placa de U intersecta no máximo uma placa de V. E mais, todas as holonomias h_{UV}, $U,\ V \in \mathcal{U}$ geram um pseudogrupo H em T, chamado pseudogrupo de holonomia de $\mathcal{F}$.

Proposição 5.9. *Os pseudogrupos de holonomia H e H' correspondentes as coberturas nice $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ de uma variedade M com folheação $\mathcal{F}$ são isomorfos.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{U}'$ é subordinada a $\mathcal{U}$ e tome $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$, que é nice. Seja

$$\Phi = \{h \circ h''_{UU'} \circ h';\ h \in H,\ h' \in H',\ U \in \mathcal{U},\ U' \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U' \subset U \text{ e } h''_{UU'} \in H''\}$$

onde H'' é um pseudogrupo de holonomia associado a cobertura $\mathcal{U}''$. Temos que Φ é um isomorfismo ente H' e H. De fato, dados quaisquer dois pontos em $T = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} T_U$ que pertencem a mesma folha, existe uma holonolia $h \in H$ que liga estes pontos, e portanto os domínios das aplicações de Φ cobrem $T' = \bigsqcup_{U' \in \mathcal{U}'} T_{U'}$ e as imagens das aplicações de Φ cobrem T.

De maneira geral, se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ são duas coberturas nice quaisquer, existe $\mathcal{U}''$ cobertura nice subordinada a $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$, então H e H' são isomorfos a H'' e portanto isomorfos entre si.

□

6 Suspensões

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com métrica e folheação $\mathcal{F}$.

Fixamos as seguintes notações:

- $P_{\mathcal{F}}(x,r) = \{\gamma : I \longrightarrow F_x;\ \gamma$ suave por partes com comprimento menor ou igual a r e $\gamma(0) = x\}$;

- $P_{\mathcal{F}}(x) = \bigcup\limits_{r\geq 0} P_{\mathcal{F}}(x,r)$;

- $(T_x^{\perp}\mathcal{F})(r) = \{v \in T_x^{\perp}\mathcal{F}; ||v|| \leq r\}$;

- $D_{\perp}(x,r) = exp((T_x^{\perp}\mathcal{F})(r))$,

onde $T_x^{\perp}\mathcal{F}$ é o complemento ortogonal de $T_x\mathcal{F}$ em T_xM. Fixamos também uma constante $k > 0$ que seja suficiente pequena de modo a satisfazer que para todo
$x \in M,\ exp|_{((T_x^{\perp}\mathcal{F})(k))}$ é transversal a $\mathcal{F}$.

Definição 6.1. *Seja $Fol_q(M)$ o conjunto de todas as folheações suaves de mesma codimensão q em M e munido com a distância*

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \max_{x\in M}\ \rho(T_x\mathcal{F}, T_x\mathcal{G}),$$

para $\mathcal{F},\mathcal{G} \in Fol_q(M)$, onde ρ é a distância entre dois subespaços V_1 e V_2 de T_xM definida por

$$\rho(V_1,V_2) = max\{min\{||v-w||; w \in V_2, ||w|| = 1\}; v \in V_1, ||v|| = 1\}.$$

Definição 6.2. *Seja L uma variedade Riemanniana conexa tal que $dim(L) = dim(\mathcal{F})$ e $\varphi : L \longrightarrow M$ uma imersão isométrica. Para $\delta > 0$, dizemos que $\varphi(L)$ é uma $\delta-$pseudofolha de $\mathcal{F}$ se para todo $x \in L$*

$$\rho(T_{\phi(x)}\mathcal{F},\ \varphi_{*,x}(T_xL)) < \delta,$$

onde $T_{\varphi(x)}\mathcal{F}$ é o espaço tangente à folha de $\mathcal{F}$ que contém o ponto $\varphi(x)$, no ponto $\varphi(x)$, ou seja, $T_{\varphi(x)}\mathcal{F} = T_{\varphi(x)}F_{\varphi(x)}$.

Observação. Denotaremos $\varphi(L)$ apenas por L.

Seja $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que se $\varphi(L)$ é uma δ_0-pseudofolha então $exp|_{(T_x^{\perp}F)(k)}$ é transversal a $\varphi(L)$, para todo $x \in M$.

Definição 6.3. *Sejam* $0 < \delta < \delta_0$ *e* $0 < \varepsilon < k$. *Uma* $\delta-$*pseudofolha* L *de* $\mathcal{F}$ *com ponto base em* x_0 *é dita ser* $\varepsilon-$*tracejada por uma folha* F *de* $\mathcal{F}$ *com ponto base* y_0 *se* $x_0 \in D_{\perp}(y_0, k) \cap L$ *e se para toda curva* $\gamma \in P_{\mathcal{F}}(y_0)$ *existe uma curva* $\overline{\gamma} : [0,1] \longrightarrow L$ *com* $\overline{\gamma}(0) = x_0$ *tal que* $\overline{\gamma}(t) \in D_{\perp}(\gamma(t), \varepsilon)$ *para todo* $0 \leq t \leq 1$.

Definição 6.4. *Uma folheação* $\mathcal{F}$ *é dita ter a propriedade tracejante de pseudofolha se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que toda* $\delta-$*pseudofolha é* $\varepsilon-$*tracejada por alguma folha de* $\mathcal{F}$.

Analogamente, definiremos a propriedade tracejante para uma pseudo-órbita. Para tal, sejam X e B variedades Riemannianas compactas e conexas, Γ um grupo isomorfo a $\pi_1(B, b_0)$ e $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Diff}(X)$ uma ação de Γ em X, ou seja, Φ é um homomorfismo de grupos.

Pela Proposição 2.41 existe $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ um conjunto finito de geradores de Γ.

Definição 6.5. *Uma família* $\{x_g\}_{g\in\Gamma}$ *de pontos em* X *é uma* $\delta-$*pseudo-órbita de* Φ *se*

$$d(\Phi(g_i)(x_g), x_{g_i g}) < \delta,$$

para todo $g \in \Gamma$ *e* $1 \leq i \leq r$.

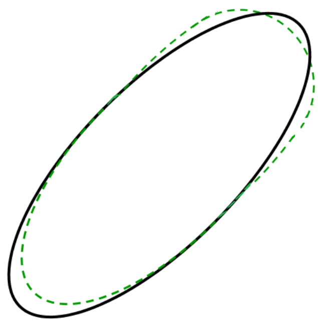


Figura 1 – Exemplo de uma pseudo-órbita

Definição 6.6. *Uma* $\delta-$*pseudo-órbita* $\{x_g\}_{g\in\Gamma}$ *é dita ser* $\varepsilon-$*tracejada por uma órbita* $\Gamma \cdot y = \{\Phi(g)(y)\}_{g\in\Gamma}$ *de* Φ *passando por* $y \in X$ *se*

$$d(x_g, \Phi(g)(y)) < \varepsilon,$$

para todo $g \in \Gamma$.

Definição 6.7. *Uma ação* Φ *é dita ter a propriedade tracejante de pseudo-órbita se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que toda* $\delta-$*pseudo-órbita é* $\varepsilon-$*tracejada por alguma órbita de* Φ.

Consideremos a folheação suspensão $\mathcal{F}_{\Phi}$ definida na seção 4.3. Seja $\pi : \widetilde{B} \longrightarrow B$ a aplicação de recobrimento do recobrimento universal $\widetilde{B}$ em B e fixe um ponto base $b(e) \in \widetilde{B}$ tal que $\pi(b(e)) = b_0$ e para $g \in \Gamma$ denotaremos $b(g) = g(b(e))$.

Identificamos $p^{-1}(b_0)$ com X por $p_2 \circ f^{-1}$, onde $p_1 : \widetilde{B} \times X \longrightarrow \widetilde{B}$, $p_2 : \widetilde{B} \times X \longrightarrow X$, $f = q|_{\{b(e)\}\times X}$ e $p : M_\Phi \longrightarrow B$ é a projeção do fibrado tal que $p \circ q = \pi \circ p_1$.

6.1 Sombreamento

O nome desta seção se deve ao fato da propriedade tracejante de pseudo-órbita também ser conhecida como a propriedade de sombreamento e por estarmos definindo uma propriedade análoga para pseudofolhas.

Com as notações fixadas neste capítulo, temos o seguinte resultado que relaciona a folheação suspensão $\mathcal{F}_\Phi$ e a ação Φ.

Teorema 6.8. *A ação Φ tem a propriedade tracejante de pseudo-órbita se, e somente se, $\mathcal{F}_\Phi$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha.*

Demonstração. Inicialmente, note que por $\pi : \widetilde{B} \longrightarrow B$ ser uma aplicação de recobimento suave segue que π é uma imersão suave, logo pela Proposição 2.19 temos a existência de uma distância $d_{\widetilde{B}}$ em $\widetilde{B}$ induzida pelo pullback da métrica Riemanniana de B por π.

Defina $V_g = \{b \in \widetilde{B};\ d_{\widetilde{B}}(b, b(g)) \leq d_{\widetilde{B}}(b, b(h)),\ \text{para todo } h \in \Gamma\}$ e seja U_g uma vizinhança aberta de raio $\eta > 0$ de V_g. Logo, $\{U_g;\ g \in \Gamma\}$ é uma cobertura aberta localmente finita de $\widetilde{B}$.

Tome $\eta > 0$ suficientemente pequeno para que $b(e)$ pertença somente a U_e e seja $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}$ uma partição de unidade subordinada a $\{U_g;\ g \in \Gamma\}$, que de fato existe pois $\widetilde{B}$ é variedade suave.

Suponha que $\mathcal{F}_\Phi$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que toda $\delta'-$pseudofolha é $\varepsilon-$tracejada por alguma folha de $\mathcal{F}_\Phi$.

Tome uma $\delta-$pseudo-órbita $\{x_g; g \in \Gamma\}$ de Φ e defina a seguinte função

$$\mu : \widetilde{B} \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde $\mu(b, x) = \sum_{g\in\Gamma} \lambda_{g^{-1}}(b)\{d_b((b, x), (b, \Phi(g^{-1})x_g))\}^2$ e d_b distância em $\{b\} \times X$.

Fazendo δ suficientemente pequeno, para cada $b \in \widetilde{B}$ temos que $\mu(b, x)$ é estritamente convexa em x e tem um mínimo em um único ponto que denotaremos por $s(b)$, que depende suavemente de b e assim definimos a função suave

$$\begin{array}{rccc} s: & \widetilde{B} & \longrightarrow & \widetilde{B} \times X \\ & b & \longmapsto & s(b). \end{array}$$

Por construção, temos que $s(\widetilde{B})$ contém os pontos $(b(g^{-1}), \Phi(g^{-1})x_g)$, para todo $g \in \Gamma$, pois se $g' \in \Gamma$ com $g \neq g'$ e como $\{\lambda_g\}_{g\in\Gamma}$ é uma partição de unidade, então $\text{supp}\lambda_{g'^{-1}} \subset U_{g'^{-1}}$ mas $b(g^{-1}) \notin U_{g'^{-1}}$ logo $\lambda_{g'^{-1}}(b(g^{-1})) = 0$, implicando que $\mu(b(g^{-1}), \Phi(g^{-1})x_g) = 0$. E ainda, note que $s(\widetilde{B})$ é conexo pois s é suave e $\widetilde{B}$ é conexo.

Pelo Teorema 2.43 temos que a aplicação quociente $q : \widetilde{B} \times X \longrightarrow M_\Phi$ é uma aplicação de recobrimento suave, logo é uma imersão, assim temos que a imagem $q(s(\widetilde{B}))$ é uma subvariedade imersa de M_Φ e podemos também supor que se $\{x_g\}$ é uma $\delta-$pseudo-órbita de Φ então $q(s(\widetilde{B}))$ é uma $\delta'-$pseudofolha de $\mathcal{F}_\Phi$.

Assim, pela propriedade tracejante da pseudofolha de $\mathcal{F}_\Phi$ e por $\delta' > 0$ temos que existe uma folha F de $\mathcal{F}_\Phi$ que $\varepsilon-$traceja $q(s(\widetilde{B}))$ e portanto, a $\Phi-$órbita $F \cap p^{-1}(b_0)$ $\varepsilon-$traceja $q(s(\widetilde{B})) \cap p^{-1}(b_0)$. Note que $F \cap p^{-1}(b_0)$ de fato é uma $\Phi-$órbita pois $F = \Gamma \cdot (\widetilde{B} \times \{x_0\})$ para algum $x_0 \in X$, logo

$$F \cap p^{-1}(b_0) = \Gamma \cdot (\widetilde{B} \times \{x_0\}) \cap \Gamma \cdot (\{b(e)\} \times X) = \Gamma \cdot (\{b(e)\} \times \Gamma \cdot x_0).$$

No entanto, note que pela sua identificação com X, os pontos de $p^{-1}(b_0)$ são da forma $q(b(e), x)$ para algum $x \in X$. Logo, devemos ter que $b(g^{-1}) = b(e)$ e assim $g^{-1} = e$, pois tínhamos que $\eta > 0$ foi tomado de forma que $b(e)$ estivesse somente em U_e, logo

$$q(s(\widetilde{B})) \cap p^{-1}(b_0) = \{q(b(e), x_g)\}_{g\in\Gamma} = \{x_g\}_{g\in\Gamma},$$

onde a última igualdade segue da própria identificação $p^{-1}(b_0)$ com X por $p_2 \circ (q|_{\{b(e)\}\times X})^{-1}$. Portanto, Φ tem a propriedade tracejante de pseudo-órbita.

Suponha que Φ tem a propriedade tracejante de pseudo-órbita e seja $\varepsilon > 0$ dado. Tome $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ de modo que para todo $x, y \in X$ com $d(x, y) < 2\varepsilon'$ e para todo $b \in U_e$, a curva de menor comprimento em $\widetilde{B} \times X$ começando em (b, x), perpendicular a $U_e \times \{x\}$ em (b, x) e terminando em um ponto de $\widetilde{B} \times \{y\}$ tenha comprimento menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Como Φ tem a propriedade tracejante de pseudo-órbita, então em particular para este ε' existe $\delta_{PO} > 0$ tal que toda $\delta_{PO}-$pseudo-órbita de Φ é $\varepsilon'-$tracejada por alguma órbita de Φ. Assim, tome δ_{PF} de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas.

1. Se L é uma $\delta_{PF}-$pseudofolha de F_Φ, então L é transversal as fibras de p e $L \cap p^{-1}(b_0)$ é uma $\delta_{PO}-$pseudo-órbita de Φ.
2. Seja L uma $\delta_{PF}-$pseudofolha e $\widetilde{L}$ uma componente conexa de $q^{-1}(L)$. Então, para todo $x \in X$ com $d((b(e), x), (\{b(e)\} \times X) \cap \widetilde{L}) < \varepsilon'$ e para todo $b \in U_e$, a curva de menor comprimento começando em (b, x), perpendicular a $U_e \times \{x\}$ em (b, x) e chegando em um ponto de $\widetilde{L}$ tenha comprimento menor que ε.

Assim, tome L uma $\delta_{PF}-$pseudofolha de $\mathcal{F}_\Phi$. Então por 1 temos que $L \cap p^{-1}(b_0) = \{x_g\}_{g\in\Gamma}$ e como Φ tem a Propriedade Tracejante de Pseudo-órbita existe uma órbita $O = \{\Phi(g)(x)\}_{g\in\Gamma}$ de Φ tal que

$$d(\Phi(g)x, x_g) < \varepsilon',$$

para todo $g \in \Gamma$.

Sejam F a folha de F_Φ correspondente com O e $\widetilde{L}$ a componente conexa de $q^{-1}(L)$ que contém $(b(e), x_e)$. Como $(\{b(e)\} \times X) \cap g(\widetilde{L}) = (b(e), x_g)$ para cada $g \in \Gamma$ então segue que

$$\begin{aligned} d((b(e), \Phi(g)x), (\{b(e)\} \times X) \cap g(\widetilde{L})) &= d((b(e), \Phi(g)x), (b(e), x_g)) \\ &\leq d(\Phi(g)x, x_g) \\ &< \varepsilon' \end{aligned}$$

então por 2, para todo $g \in \Gamma$ e $b \in U_e$, a curva de menor comprimento começando em $(b, \Phi(g)x)$ perpendicular a $U_e \times \{\Phi(g)x\}$ em $(b, \Phi(g)x)$ e chegando em um ponto de $g(\widetilde{L})$ tem comprimento menor que ε.

Como a ação de Γ em $\widetilde{B} \times X$ é uma isometria e como $\{g^{-1}(U_e \times \{\Phi(g)x\})\}_{g\in\Gamma}$ é uma cobertura aberta de $\widetilde{B} \times \{x\}$ segue então que L é $\varepsilon-$tracejada por F. Portanto, $\mathcal{F}_\Phi$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha.

□

6.2 Semiestabilidade

Definição 6.9. *Uma folheação $\mathcal{F} \in Fol_q(M)$ é dita ser semiestável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer folheação $\mathcal{G} \in Fol_q(M)$ com $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \delta$ existe uma aplicação contínua $f : M \longrightarrow M$ tal que*

1. *Se G é uma folha de $\mathcal{G}$ então $f(G) = F$ é uma folha de $\mathcal{F}$.*
2. *$d_{C^0}(f, id_M) = \max\limits_{x\in M} d_M(f(x), x) < \varepsilon$.*

Definição 6.10. *Uma ação $\Phi : \Gamma \longrightarrow Diff(X)$ é semiestável se para todo $\varepsilon > 0$ existem vizinhanças U_i de $\Phi(g_i)$, $1 \leq i \leq r$, satisfazendo que para qualquer ação $\Psi : \Gamma \longrightarrow Diff(X)$ com $\Psi(g_i) \in U_i$, $1 \leq i \leq r$, existe uma aplicação contínua $h : X \longrightarrow X$ tal que*

$$h \circ \Psi(g) = \Phi(g) \circ h,$$

para todo $g \in \Gamma$ e $d_X(h, id_X) < \varepsilon$. Neste caso, h é chamada semiconjugação.

O seguinte resultado será utilizado para demonstrarmos a propriedade de semiestabilidade, o leitor pode encontrar sua prova em [9].

Lema 6.11. *Seja $\Phi : \Gamma \longrightarrow Diff(X)$ uma ação suave. Então para qualquer vizinhança V de $\mathcal{F}_\Phi$ em $Fol_q(M_\Phi)$ existem vizinhanças U_i de $\Phi(g_i)$ em $Diff(X)$ para todo $1 \leq i \leq r$ com a propriedade que para qualquer ação $\Psi : \Gamma \longrightarrow Diff(X)$ com $\Psi(g_i) \in U_i$ para todo $1 \leq i \leq r$ existe um difeormorfismo que preserva fibras $\varphi : M_\Phi \longrightarrow M_\Psi$ tal que $\varphi^*\mathcal{F}_\Psi \in V$.*

Teorema 6.12. *A ação Φ é semiestável se, e somente se, a folheação $\mathcal{F}_\Phi$ é semiestável.*

Demonstração. Suponha que Φ é semiestável e tome $\mathcal{G}$ folheação obtida por uma perturbação da suspensão, de forma que $\mathcal{G}$ é transversal às fibras e então $\mathcal{G}$ determina unicamente uma ação Ψ de Γ em $X = p^{-1}(b_0)$.

Como Ψ está próxima de Φ, segue da semiestabilidade de Φ que existe $h : p^{-1}(b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$, próximo à identidade tal que

$$h \circ \Psi(g) = \Phi(g) \circ h,$$

para todo $g \in \Gamma$.

Para cada $b \in B$ consideremos um caminho qualquer

$$\gamma : I \longrightarrow B,$$

tal que $\gamma(0) = b_0$ e $\gamma(1) = b$.

Para cada $z \in p^{-1}(b)$ tome γ_1 o levantamento de γ a uma curva em $\mathcal{G}$

$$\gamma_1 : I \longrightarrow F_{\mathcal{G}},$$

com $\gamma_1(1) = z$, onde $F_{\mathcal{G}}$ é uma folha de $\mathcal{G}$. Consideremos também o levantamento de γ, a uma curva γ_2 em $\mathcal{F}_\Phi$

$$\gamma_2 : I \longrightarrow F_{\mathcal{F}_\Phi},$$

com $\gamma_2(0) = h(\gamma_1(0))$, onde $F_{\mathcal{F}_\Phi}$ é uma folha de $\mathcal{F}_\Phi$. Note que a semiconjugação garante que $\gamma_2(0)$ está em uma folha de $\mathcal{F}_\Phi$.

Definindo

$$\begin{array}{rccl} H: & M_\Phi & \longrightarrow & M_\Phi \\ & z & \longmapsto & H(z) = \gamma_2(1) \end{array}$$

temos que H é contínua, próxima à identidade e tal que $H(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_\Phi$, portanto $\mathcal{F}_\Phi$ é semiestável.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}_\Phi$ é semiestável. Tome Ψ uma perturbação de Φ. Então, pelo Lema 6.11 existe um difeomorfismo que preserva as fibras

$$\varphi : M_\Phi \longrightarrow M_\Psi,$$

tal que $\varphi^*\mathcal{F}_\Psi$ está próximo a $\mathcal{F}_\Phi$.

Mas como $\mathcal{F}_\Phi$ é semiestável existe uma aplicação contínua $H : M_\Phi \longrightarrow M_\Phi$ próxima da identidade tal que $H(\varphi^*\mathcal{F}_\Psi) = \mathcal{F}_\Phi$, pois ambas são folheações em M_Φ e que possuem mesma codimensão.

Tome U uma vizinhança de $b_0 \in B$ de forma que $\varphi^*\mathcal{F}_\Psi|_{p^{-1}(U)}$ e $\mathcal{F}_\Phi|_{p^{-1}(U)}$ são folheações produto e que se $x \in p^{-1}(b_0) = X$ então $H(x) \in p^{-1}(U)$.

Então, para todo $x \in p^{-1}(b_0)$ existe um único ponto digamos $h(x)$, em $p^{-1}(b_0)$ tal que $H(x)$ e $h(x)$ estão na mesma folha de $\mathcal{F}_\Phi|_{p^{-1}(U)}$. Logo, temos que $h : X \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua que satisfaz a composição.

□

6.3 Expansividade

Definição 6.13. *Uma folheação $\mathcal{F}$ é expansiva se existe uma constante $0 < e_{\mathcal{F}} < k$ com a propriedade que para quaisquer $x \in M$ e $y \in D_\perp(x, e_{\mathcal{F}}) - \{x\}$ existe uma curva $\gamma \in P_{\mathcal{F}}(x)$*

que é levantada a uma curva $\overline{\gamma} \in P_{\mathcal{F}}(y)$ tal que $\overline{\gamma}(1) \notin D_{\perp}(\gamma(1), e_{\mathcal{F}})$.

Definição 6.14. *Uma ação $\Phi : \Gamma \longrightarrow Diff(X)$ é expansiva se existe uma constante $e_{\Phi} > 0$ com a propriedade que para qualquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existe $g \in \Gamma$ tal que*

$$d(\Phi(g)(x), \Phi(g)(y)) > e_{\Phi}.$$

Teorema 6.15. *A ação Φ é expansiva se, e somente se, a folheação $\mathcal{F}_{\Phi}$ é expansiva.*

Demonstração. Suponha que a folheação suspensão $\mathcal{F}_{\Phi}$ é expansiva com constante de expoansividade $e < k$. Sejam x, y quaisquer dois pontos distintos em $X = p^{-1}(b_0)$. Vamos apenas considerar o caso onde $d_X(x, y) \leq e$, pois caso contrário bastaria tomar $g = id$ e teríamos a expansividade Φ verificada.

Pela expansividade de $\mathcal{F}_{\Phi}$, existe $\gamma \in P_{\mathcal{F}_{\Phi}}(x)$ tal que o levantamento $\overline{\gamma} \in P_{\mathcal{F}_{\Phi}}(y)$ de γ satisfaz $\overline{\gamma}(1) \notin D_{\perp}(\gamma(1), e)$.

Defina

$$T = sup\{t_0;\ \overline{\gamma}(t) \in D_{\perp}(\gamma(t), e),\ \text{para todo } 0 \leq t \leq t_0\},$$

e note que por hipótese $0 \leq T < 1$.

Tome F um domínio fundamental compacto em $\widetilde{B}$ para a ação Γ tal que $b(e) \in F$ e que o diâmetro de F não seja maior que o diâmetro de B. Levantamos γ a uma curva $(\widetilde{\gamma}, x) : I \longrightarrow \widetilde{B} \times X$ de modo que $\widetilde{\gamma}(0) = b(e)$.

Afirmação: existe uma constante $\eta > 0$ tal que para qualquer $g \in \Gamma$, $x, y \in X$ e $b \in g(F)$ se $\widetilde{B} \times \{y\}$ intersecta $\partial D_{\perp}((b, x), e)$ então

$$d_{b(g)\times X}((b(g), x), (b(g), y)) > \eta.$$

De fato, por hipótese $\widetilde{B} \times \{y\}$ intersecta $\partial D_{\perp}((b, x), e)$ então a distância de qualquer de (b, x) a (b, y) para qualquer $b \in g(F)$, deve ser maior que η para algum $\eta < e$. Em particular, para $b = b(g) = gb(e)$.

Assim, como $\widetilde{\gamma}(T) \in g(F)$ segue que

$$d_{b(g)\times X}((b(g), x), (b(g), y)) > \eta$$

e uma vez que a ação de Γ em $\widetilde{B} \times X$ é isométrica, temos

$$\begin{aligned} & d_{b(g)\times X}((b(g), x), (b(g), y)) > \eta \\ \Longrightarrow\ & d_{b(e)\times X}(g^{-1}(b(g), x), g^{-1}(b(g), y)) > \eta \\ \Longrightarrow\ & d_{b(e)\times X}((g^{-1}gb(e), \Phi(g^{-1})(x)), (g^{-1}gb(e), \Phi(g^{-1})(y))) > \eta \\ \Longrightarrow\ & d_{b(e)\times X}((b(e), \Phi(g^{-1})(x)), (b(e), \Phi(g^{-1})(y))) > \eta \end{aligned}$$

e identificando X com $\{b(e)\} \times X$ temos que

$$d_X(\Phi(g^{-1})(x), \Phi(g^{-1})(y)) > \eta$$

mostrando que Φ é expansiva com constante de expansividade η.

Reciprocamente, suponha que Φ é expansiva com constante $e < k$. Mostraremos que a suspensão é expansiva com a mesma constante e.

Sejam x, y dois pontos distintos de M_Φ com $y \in D_\perp(x, e)$. Tome um caminho qualquer $\gamma \in P_{\mathcal{F}_\Phi}(x)$ tal que $\gamma(1) \in X = p^{-1}(b_0)$.

Se $\overline{\gamma}(t) \notin D_\perp(\gamma(t), e)$ para algum $t \in [0, 1]$, onde $\overline{\gamma} \in P_{\mathcal{F}_\Phi}(y)$ é o levantamento de γ, obtemos o desejado.

Por outro lado, se existe t tal que $\overline{\gamma}(t) \in D_\perp(\gamma(t), e)$, defina

$$x' = \gamma(1) \;\, e \;\, y' = \overline{\gamma}(1)$$

ambos em X.

Pela expansividade de Φ existe $g \in \Gamma$ tal que

$$d_X(\Phi(g)(x'), \Phi(g)(y')) > e. \tag{6.1}$$

Seja τ_g um laço em B com ponto base em b_0 representando g, pois identificamos $\pi_1(B, b_0)$ a Γ. Seja também $\gamma_g \in P_{\mathcal{F}_\Phi}(x')$ tal que

$$p \circ \gamma_g = \tau_g$$

e dessa forma $\gamma_g(1) = \Phi(g)(x')$ e $\overline{\gamma_g}(1) = \Phi(g)(y')$, onde $\overline{\gamma_g}$ é o levantamento de γ_g a $P_{\mathcal{F}_\Phi}(y')$.

Logo, por 6.1 temos que $d_X(\gamma_g(1), \overline{\gamma_g}(1)) > e$ implicando que $\overline{\gamma_g}(t) \notin D_\perp(\gamma_g(t), e)$, para algum $0 \leq t \leq 1$.

Assim, temos que a curva $\gamma * \gamma_g \in P_{\mathcal{F}_\Phi}(x)$ é tal que não pode ser levantada a uma curva em $P_{\mathcal{F}_\Phi}(y)$ dentro do disco ortogonal, isto é

$$\begin{aligned}
& \overline{\gamma} * \overline{\gamma_g}(t) \notin D_\perp((\gamma * \gamma_g)(t), e), \;\; para \; algum \; t \\
\Longrightarrow \;\; & \overline{\gamma}(t) \notin D_\perp(\gamma(t), e), \;\; para \; algum \; t \\
\Longrightarrow \;\; & \overline{\gamma}(1) \notin D_\perp(\gamma(1), e),
\end{aligned}$$

como queríamos.

$\square$

7 Projetos Futuros

Vimos que a expansividade, semiestabilidade e sombreamento da folheação suspensão $\mathcal{F}_\Phi$ implicam na existência destas mesmas propriedades na ação Φ e vice-versa, ou seja, as propriedades aqui foram analisadas apenas para um tipo de folheação, a folheação suspensão. Com isso, nos perguntamos se alguma destas propriedades também pode ser verificada em outros tipos de folheação.

1. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 e orientável onde há a existência de uma transversal fechada então $\mathcal{F}$ possui a propriedade tracejante de pseudofolha?

2. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 e orientável onde há a existência de uma transversal fechada então $\mathcal{F}$ é expansiva?

3. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação obtida por uma colagem transversal então $\mathcal{F}$ tem a propriedade tracejante de pseudofolha?

8 Referências

[1] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Science e Business Media New York 2003, 2013.

[2] WELINGTON DE MELO. *Topologia das Variedades.*

[3] MUNKRES, J. *Topology*. Pearson, 2014.

[4] LIMA , E. *Fundamental Groups and Covering Spaces*. A. K. Peters, 2003.

[5] CANDEL, A. CONLON, L. *Foliations 1*. American Mathematical Society, 2000.

[6] WALCAK, P. *Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups*. Springer Basel AG, 2004.

[7] CAMACHO, C. NETO, A. *Geometric Theory of Foliations*. Springer Science e Business Media New York, 1985. Originalmente publicado por Birkhäuser Boston, Inc., 1985.

[8] CAMACHO, C. NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides, 1979.

[9] INABA, T. *Expansivity, Pseudoleaf Tracing Property and Semistability of Foliations*. Tokyo Journal of Mathematics, 2000.

[10] HIRSH, M. *Differential Geometry*. Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[11] DIECK, T. *Algebraic Topology*. European Mathematical Society, 2008.

[12] LIMA, E. *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, 2011.

[13] GALLOT, S. HULIN, D. LAFONTAINE, J. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[14] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[15] TU, L. *An Introduction to Manifolds*. Springer Science e Business Media, LLC 2011.

[16] LEE, J. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.

[17] BREDON, G. *Topology and Geometry*. Springer Science and Business Media New York, 1993.

[18] BORWEIN, J. LEWIS, A. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples*. Springer Science and Business Media New York, 2000.

[19] LIMA, E. *Curso de Análise, Volume 2*. IMPA, 1999.

[20] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*. Springer Science and Business Media, LLC, 2006.

[21] CHAVEL, I. *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Cambridge University Press 1994, 2006.

[22] LIMA, E. *Análise Real, volume 2*. IMPA, 2004.

[23] SOUZA, V. *Teoremas de Estabilidade de Reeb*. UFF, 2019.

[24] FORSTER, O. GILLIGAN, B. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag New York Inc., 1981.

[25] FINAMORE, D. *Entropy of Pseudogroups and Foliations*. Unicamp, 2018.

[26] HIRSCH, M. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.