Sobre um problema de valor inicial e de contorno que aproxima a solução da equação de Koterweg-de Vries na semi-reta positiva

por

Oscar Alfredo Sierra Fonseca

UFRJ

10 de Novembro de 2016

Sobre um problema de valor inicial e de contorno que aproxima a solução da equação de Koterweg-de Vries na semi-reta positiva

por

Oscar Alfredo Sierra Fonseca

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Ademir Fernando Pazoto

IM - UFRJ - Orientador

José Felipe Linares Ramirez

IMPA

Adán José Corcho Fernandez

IM-UFRJ

César Javier Niche Mazzeo

IM-UFRJ - Suplente

Abstract

We consider the following initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries (KdV) equation:

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, && x \in [0, L], \quad t \in [0, T[,\\
&u(0, t) = g(t), && t \in [0, T[,\\
&u_x(L, t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u_{xx}(L, t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u(x, 0) = u_0, && x \in [0, L],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where $L > 0$, $T > 0$. Local existence of a solution to the above problem with regular data has been established by T.Colin and J.-M. Ghidaglia. The main result of this work shows that this local existence resut is uniform with respect to the interval length L in the following sense: if u^L are the solutions of (1), with a family of initial data u_0^L $(L > 0)$, satisfying some uniform boundedness condition and converging, as $L \to \infty$, to some function $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$, then, as $L \to \infty$, u^L approximate the solution u of the quarter-plane KdV equation with initial data u_0.

Keywords: Korteweg-de Vries, boundary conditions, positive half-line, smoothing effects.

Resumo

Consideramos o seguinte problema de valor inicial e de contorno para a equação de Korteweg-de Vries (KdV):

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, && x \in [0, L], \quad t \in [0, T[,\\
&u(0,t) = g(t), && t \in [0, T[,\\
&u_x(L,t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u_{xx}(L,t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u(x,0) = u_0, && x \in [0, L],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde $L > 0$, e $T > 0$. A existência local de solução do problema acima foi provada por T. Colin e J.-M. Ghidaglia considerando dados regulares. O resultado principal deste trabalho mostra que a existência local da solução é uniforme com respeito ao comprimento do intervalo L no seguinte sentido: se u^L são as soluções de (1), com uma família de dados iniciais u_0^L $(L > 0)$, satisfazendo algumas condições de limitação uniforme e convergindo, quando $L \to \infty$, para alguma função $u_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$, então, quando $L \to \infty$, u^L se aproxima da solução u da KdV na semi-reta positiva com dado inicial u_0.

Palavras chaves: Korteweg-de Vries; Condições de contorno; semi-reta positiva; efeitos regularizantes.

Conteúdo

Introdução

A equação de Korteweg-de Vries (KdV) foi inicialmente introduzida em [16] para descrever a propagação de ondas longas em um canal de águas rasas. Se $u(x,t)$ denota a elevação da superfície do fluido com respeito ao equilíbrio no tempo t e na posição x, esta função satisfaz

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{para} \quad t > 0 \quad e \quad x \in \mathbb{R}.$$

O problema de Cauchy para esta equação foi estudado extensivamente, considerando dados iniciais regulares, dados em L^2 e também em espaços de Sobolev de ordens negativas e espaços de Bourgain [18].

Em experimentos de laboratório, a onda é obtida através de uma fonte (Wave Maker) que atua em uma extremidade do canal. Para descrever esta situação, Bona e Winter [3, 4] consideraram a equação de Koterweg-de Vries na semi-reta positiva, com uma condição de contorno não homogênea:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0, & x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

Do ponto de vista da análise matemática, um dos primeiros resultados envolvendo o modelo (1) também foi obtido pelos mesmos autores:

TEOREMA 1. (Bona e Winther [3, 4]). Seja $u_0 \in H^4(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo as condições de compatibilidade

$$u_0 = g(0) \quad e \quad g'(0) + (\partial_x u_0 + u_0 \partial_x u_0 + \partial_x^2 u_0)(0) = 0.$$

Então, existe uma única função u_∞ em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, H^4(\mathbb{R}^+))$ solução de (1).

Em [8, 10], um problema de valor inicial e de contorno para a equação de Korteweg-de Vries também foi estudado:

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, && x \in [0, L], \quad t \in [0, T[,\\
&u(0,t) = g(t), && t \in [0, T[,\\
&u_x(L,t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u_{xx}(L,t) = 0, && t \in [0, T[,\\
&u(x,0) = u_0, && x \in [0, L],
\end{aligned} \tag{2}
$$

onde $L > 0$ e $T > 0$. Mais precisamente, o seguinte teorema de existência local foi estabelecido.

TEOREMA 2.(Colin and Ghidaglia [8-10]). Sejam $u_0 \in H^1(0, L)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo a condição de compatibilidade $u_0(0) = g(0)$. Então, existe $T_L > 0$ e uma função $u^L \in L^\infty(0, T_L; H^1(0, L)) \cap \mathcal{C}([0, T_L]; L^2(0, L))$ solução de (2). Além disso, se $|u_0|_{L^2((1+x^2)dx)}$ e $|g|_{H^1(\mathbb{R}^+)}$ são suficientemente pequenos, então $T_L = +\infty$.

Em [11], alguns efeitos regularizantes do tipo parabólico são provados para (2), o que permite provar um teorema de existência local em L^2 para o problema não linear. Esses efeitos regularizantes são obtidos multiplicando a equação por xu e nenhum dos resultados obtidos em [11] são uniformes em relação ao comprimento do intervalo. Os mesmos resultados de ganho de regularidade também foram provados para a semi-reta positiva por Bona e Winther [4].
O objetivo deste trabalho é obter um resultado similar, mas uniforme com respeito a L. Mais precisamente, queremos provar o seguinte resultado:

TEOREMA. Consideremos a família de dados iniciais $u_0^L \in L^2(0, L)$, tais que

$$
\sup_{L \geq 1} \int_0^L |u_0^L|^2(x)(1 + x^2)dx < \infty,
$$

e $u_0^L \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$, fortemente. Então, para todo $T > 0$, se L é suficientemente grande, a solução $u^L(x, t)$ de (2), com dado inicial u_0^L, está definida em $[0, T]$ e a sequência $(u^L)_{L \geq 1}$, tende para u em $L^p(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^+))$, fortemente, para todo $1 \leq p < \infty$, onde $u(x, t)$ é a solução de (1) com dado inicial u_0.

O resultado é provado, obtendo estimativas de energia em espaços com peso e argumentos de ponto fixo. Mais precisamente, essa análise está organizada da seguinte forma:
No primeiro capítulo, daremos os resultados preliminares clássicos necessários para o desenvolvimento do trabalho.
No segundo capítulo, vamos provar o resultado de existência e unicidade para o problema linear e estimativas a priori uniformes com respeito a L.
No terceiro capítulo, vamos mostrar a existência e unicidade de solução local fraca do problema (2) nos casos $L < \infty$ e $L = \infty$. Mostraremos também a existência de um tempo T_{min}, dependendo unicamente de $|g|_{H^1}$ e $|u_0|_{L^2((1+x^2)dx)}$, mas não de L, tal que a solução

esteja definida em $[0, T_{min}]$. Esta construção também nos dará cotas uniformes sobre u_L que permitirão tomar o limite $L \to \infty$. Também mostraremos que o tempo de existência tende para infinito quando $L \to \infty$, o que provará que o problema é globalmente bem-posto no espaço $L^2((1 + x^2)dx)$.

Os resultados obtidos nesse trabalho também nos dão ferramentas que permitem realizar uma análise numérica do problema em questão [8]. No entanto, devido ao caráter introdutório dessa dissertação, decidimos não abordar esse aspecto mais aplicado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaço das Distribuições

Definição: Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função contínua, onde Ω é um aberto. Definimos suporte de φ como o fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde φ não se anula. Vamos denotar o suporte de φ por $supp(\varphi)$. Logo, temos

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definição: Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω, que possuem suporte compacto em Ω.

Dizemos que uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tal que $supp(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in \mathbb{N}$, e $supp(\varphi) \subset K$;

ii) $\varphi_n^{(j)} \to \varphi^{(j)}$, uniformemente, para todo $j \in \mathbb{N}$, quando $n \to \infty$.

Definição: O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes. Denomina-se distribuição sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, se (φ_n) é uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

onde $\langle T, \varphi \rangle$ representa o valor da distribuição T na função teste φ.

Exemplo: Seja ϕ definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} e \cdot e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } \ x \geq 1 \end{cases}$$

esta função está em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ e notamos que $\phi(0) = 1$ e $\phi(x) = 0 \ \forall x \geq 1$.

Definição: O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado espaço das distribuições escalares sobre Ω.

Dizemos que uma sequência de distribuições escalares (T_n) converge para a distribuição

T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ quando } n \to \infty.$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico.
Definição: Dada uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denominamos derivada distribucional de ordem $|\alpha| \in \mathbb{N}$ de T, como sendo a distribuição $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

1.2 Espaços de Sobolev

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Denotamos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.
No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ quase sempre em } \Omega,$$

que, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|u(x)|,$$

é um espaço de Banach. Em particular, se $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Dizemos que uma sequência (φ_n) em $L^p(\Omega)$ converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, quando $n \to \infty$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Definição: Se p e q são índices conjugados, isto é, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então temos que o dual topológico de $L^p(\Omega)$, denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$.
Além disso, se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável e se $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.2.1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: ver [6]. □

Lema 1.2.2. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [6]. □

Lema 1.2.3. ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam $r \geq 2$ $p_1, ..., p_r > 1$, tais que $\frac{1}{p_1} +, ..., + \frac{1}{p_r} = 1$ e $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ $1 \leq k \leq r$.*
Então, $f_1 ... f_r \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f_1 ... f_r|\, dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} ... \|f_r\|_{L^{p_r}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [1]. □
Definição: Sejam $m \in \mathbb{N}^*$, e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem m, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$, para as quais suas derivadas de ordem $|\alpha|$, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ denota a derivada fraca ou distribucional. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

é um espaço de Banach e, quando $p = \infty$, definindo a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

temos que $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach.
Temos ainda que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \leq p < \infty$, e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, se $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável e reflexivo, que é denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Com a estrutura topológica acima, temos $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.
Definição: Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.
O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$ com p

e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. No caso $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

1.3 Espaços $L^p(0,T;X)$

Definição: Sejam X espaço de Banach e $T > 0$. Denotamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0,T)$, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach. No caso $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é, também, um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt.$$

Se $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(0,T;X)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertença a $L^\infty(0,T)$, que, munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.
Além disso, quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, temos que $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados e X' é o dual de X.

Teorema 1.3.1. ***(Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1, espaços de Banach tais que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

onde B_0 e B_1 são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e $\hookrightarrow_c$, imersão compacta. Defina $W = \{u \in L^p(0,T;B_0); u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, onde $1 < p, q < \infty$ e $T < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach e $W \hookrightarrow_c L^p(0,T;B)$.

Demonstração: Ver [19]. □

Observação. 1.3.1. *Note que, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos o seguinte resultado: Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em W, donde existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{n_k} \to u$, forte em $L^2(0,T;B)$, quando $k \to \infty$.*

1.4 Alguns Resultados Importantes

Teorema 1.4.1. ***(Ponto Fixo de Banach)*** *Sejam E um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço fechado de E. Se $f : F \to F$ é uma contração, então existe um único $z \in F$, tal que $f(z) = z$.*

Demonstração: Ver [21]. $\square$

Teorema 1.4.2. *Seja X um espaço normado e $\overline{B_1(0)} \subset X$, a bola fechada unitária. Então, $\overline{B_1(0)}$ é compacta se, e somente se, X possui dimensão finita.*

Demonstração: Ver [6]. $\square$

Teorema 1.4.3. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em X, $f : \Omega \to X$ e $g \in L^1(\Omega)$. Se*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{quase sempre em} \quad \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \textit{quase sempre em} \quad \Omega,$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demonstração: Ver [12]. $\square$

Lema 1.4.4. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [7]. $\square$

Lema 1.4.5. ***(Desigualdade de Gronwall)***

i) *Seja $G(\cdot)$ função não negativa e absolutamente contínua sobre $[0, T]$, que satisfaz para quase todo t a desigualdade diferencial*

$$G'(t) \leq \varphi(t)G(t) + \phi(t),$$

onde φ e ϕ são funções integráveis não negativas sobre $[0, T]$. Então

$$G(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \left[G(0) + \int_0^t \phi(s)ds \right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) *Em particular, se $G' \leq \varphi G$, sobre $[0, T]$ e $G(0) = 0$, então $G \equiv 0$ sobre $[0, T]$.*

Demonstração: Ver [17]. $\square$

1.5 Teoria de Semigrupos

Definição: Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, se

i) $S(0) = I,$ onde I é a aplicação identidade do espaço X;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que S é de classe C_0, ou fortemente contínuo, se

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)x\|_X = 0, \ \ \forall x \in X.$

Dizemos que S é uniformemente contínuo se

iv) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t)-I\| = 0.$

Teorema 1.5.1. *Se $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Corolário 1.5.2. *Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então, para cada $x \in X$, a aplicação*

$$t \mapsto S(t)x$$

é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,

$$\lim_{t\to s} S(t)x = S(s)x, \ \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Definição: Se $\|S(t)\| \leq 1, \ \ \forall t \geq 0$, dizemos que S é um semigrupo de contrações.

Definição: O operador A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo S.

Observação. 1.5.1. *Note que A é um operador linear e $D(A)$ é um subespaço de X.*

Teorema 1.5.3. *Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então,*

i) *Para $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x;$$

ii) *Para* $x \in X$,

$$\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A), \quad e\ A\left(\int_0^t S(s)x\,ds\right) = S(t)x - x;$$

iii) *Para todo* $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ *e* $\dfrac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax;$

iv) *Para todo* $x \in D(A)$, $S(t)x - S(s)x = \displaystyle\int_0^t AS(\tau)x\,d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax\,d\tau.$

Demonstração: Ver [20]. □

Corolário 1.5.4. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, então A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: Ver [20]. □

Proposição 1.5.2. *Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.*

Demonstração: Ver [13]. □

Definição: Sejam X espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, defina

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Note que, pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Definição: Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X^*$, tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, ou seja, $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.

Definição: Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, tal que $Im(\lambda I - A) = X$, então dizemos que A é m-dissipativo.

Observação: Se X é um espaço de Hilbert, então dizemos que $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se

$$Re\langle Ax, x \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Notação: Dizemos que $A \in G(M, \omega)$, quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, S, que satisfaz

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Teorema 1.5.5. ***(Lumer - Phillips)***
$A \in G(1, 0)$ se, e somente se, A é m-dissipativo e possui domínio denso em X.

Demonstração: Ver em [20]. □

Proposição 1.5.3. *Seja A um operador de X espaço de Banach densamente definido, então A é fechado se, e somente se, A^* é densamente definido e $A^{**} = A$*

Demonstração: Ver [14]. $\square$

Proposição 1.5.4. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear de X, espaço de Banach. Se $\overline{D(A)} = X$, A e A^* são dissipativos e A é fechado, então $A \in G(1,0)$.*

Demonstração: Ver [20]. $\square$

Problema de Cauchy Abstrato

Sejam X espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $(S(t))_{t\geq 0}$, e $f \in L^1(0,T;X)$.
Dado $u_0 \in D(A)$, o problema de Cauchy Abstrato consiste em determinar uma função $u(t)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \;\; t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definição: Dizemos que u é solução clássica (ou forte) de (1.1) em $[0,+\infty)$, se u satisfaz (1.1) e $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.

Teorema 1.5.6. *Se $A \in G(M,\omega)$ e $u_0 \in D(A)$, o problema (1.1) possui uma única solução clássica.*

Demonstração: Ver [13]. $\square$
Considere, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t,u(t)), \;\; t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição: Uma função $u : [0,+\infty) \to X$ é uma solução clássica de (1.2) em $[0,+\infty)$ se u satisfaz (1.2) em $[0,+\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Uma função $u \in C([0,T];X)$, dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,ds,$$

é chamada de mild solution ou solução generalizada de (1.2) em $[0,T]$.
Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in X$, é a mild solution de (1.1).

Teorema 1.5.7. *Seja $f : [0,+\infty) \times X \to X$ uma função contínua em t. Suponha que, para cada $\tau > 0$, existe uma constante $L = L(\tau)$, tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|,$$

$\forall x, y \in X$ e $\forall t \in [0,\tau]$. Então, para cada $u_0 \in X$, (1.2) possui uma única mild solution $u \in C([0,\tau];X)$. Além disso, a aplicação $u_0 \mapsto u$ é contínua de X em $C([0,\tau];X)$.

Demonstração: Ver [13]. $\square$

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução

Neste capítulo mostraremos a existência e unicidade de solução do sistema não linear (2). Inicialmente, vamos mostrar a existência e unicidade do problema linear correspondente estabelecendo algumas estimativas fundamentais para a demonstração do resultado principal.
Vamos denotar por $|\cdot|$ a norma do espaço $L^2((1+x^2)dx)$; ou seja;

$$|u| = |u|_{L^2((1+x^2)dx)} = \sqrt{\int_0^L (1+x^2)u^2 dx}.$$

Com a notação acima, para cada $T > 0$, introduzimos os espaços

$$E := \left\{ f \in L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)), \quad \sqrt{t}f \in L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)) \right\},$$

com a norma

$$|f|_E = \int_0^T \sqrt{\int_0^L (1+x^2)f^2(x,t)dxdt} \; + \; \int_0^T \int_0^L t(1+x^2)f^2(x,t)dxdt,$$

e

$$X_T := \{w \in \mathcal{C}([0,T];L^2((1+x^2)dx)), w_x \in L^2(0,T;L^2((1+x)dx)),$$

$$\sqrt{t}w_x \in L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx)), \sqrt{t}w_{xx} \in L^2(0,T;L^2)\},$$

com a norma

$$|w|_X := |w|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))} + |w_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))}$$

$$|\sqrt{t}w_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))} + |\sqrt{t}w_{xx}|_{L^2(0,T;L^2)}.$$

Com a notação acima, apresentamos a definição de solução fraca para o sistema (2):

Definição: Uma solução fraca de (2) é uma função $u(x,t) \in X_T$, tal que

$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \phi(x)g(t)$ satisfaz

$$\tilde{u}(x,t) = S(t)\tilde{u}_0(x) - \int_0^t S(t-s)\{(\tilde{u}(x) + \phi(x)g(s))(\tilde{u}_x(x,t) + \phi'(x)g(s)) \\ + g(s)(\phi'(x) + \phi'''(x)) + \phi(x)g'(s)\}ds, \tag{2.1}$$

onde $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) - \phi(x)g(0)$, e ϕ é uma função suave definida em $\mathbb{R}^+$, com $\phi(0) = 1$ e $\phi(x) = 0$, para todo $x \geq 1$.

2.1 Existência e unicidade para um problema homogêneo em $[0, L]$.

Utilizando a teoria de semigrupos, vamos provar a existência e unicidade do seguinte problema linear homogêneo:

$$\begin{aligned} &u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in [0,L], && t \in [0,T], \\ &u(0,t) = u_x(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0, && t \in [0,T], \\ &u(x,0) = u_0, && x \in [0,L]. \end{aligned} \tag{3}$$

Inicialmente, introduzimos o operador A, definido por

$$\begin{cases} Au := -(\partial_x + \partial_{xxx})u \\ A : D(A) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L) \\ D(A) := \{u \in H^3(0,L) : \; u(0) = u_x(L) = u_{xx}(L) = 0\}. \end{cases}$$

Assim, o problema (3) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

e a seguinte proposição é estabelecida:

Proposição 2.1.1. *O operador A gera um semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 em $L^2(0,L)$.*

Demonstração: Inicialmente, provaremos que os operadores A e A^* são densamente definidos e que $A = A^{**}$. Assim, pela Proposição 1.5.3 teremos que A é fechado. Posteriormente, mostraremos que A e A^* são dissipativos e pela Proposição 1.5.4 concluiremos o resultado.

i) $\overline{D(A)} = L^2(I)$, onde $I = (0,L)$.

Segue do Teorema 1.2.1 que $\overline{\mathcal{D}(I)} = L^2(I)$. Como $\mathcal{D}(I) \subset D(A) \subset L^2(I)$, obtemos ***i)***.

ii) $\overline{D(A^*)} = L^2(I)$,

Observe que, para $u \in D(A)$ e v a ser determinada, temos

$$\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle_{L^2(I)} &= -\int_0^L (u_x + u_{xxx})v dx \\
&= -uv\Big|_0^L - u_{xx}v\Big|_0^L + \int_0^L uv_x dx + \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= -uv\Big|_0^L - u_{xx}v\Big|_0^L + u_x v_x\Big|_0^L + \int_0^L uv_x dx - \int_0^L u_x v_{xx} dx \\
&= -u_{xx}v\Big|_0^L + u_x v_x\Big|_0^L - u(v + v_{xx})\Big|_0^L + \int_0^L uv_x dx + \int_0^L uv_{xxx} dx,
\end{aligned}$$

donde concluímos que o operador adjunto A^* é definido por

$$\begin{cases}
A^*u := (\partial_x + \partial_{xxx})u \\
A^* : D(A^*) \subset L^2(I) \to L^2(I) \\
D(A^*) = \{u \in H^3(I) : u(0) = u_x(0) = (u(L) + u_{xx}(L)) = 0\}.
\end{cases}$$

Como $\mathcal{D}(I) \subset D(A^*) \subset L^2(I)$, obtém-se ***ii)***.

iii) $A = A^{**}$.

Sejam $u \in D(A^*)$ e $v \in L^2(I)$ a determinar. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle A^*u, v\rangle_{L^2(I)} &= \int_0^L (u_x + u_{xxx})v dx \\
&= uv\Big|_0^L + u_{xx}v\Big|_0^L - \int_0^L uv_x dx - \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= uv\Big|_0^L + u_{xx}v\Big|_0^L - u_x v_x\Big|_0^L - \int_0^L uv_x dx + \int_0^L u_x v_{xx} dx \\
&= (u + u_{xx})v\Big|_0^L - u_x v_x\Big|_0^L + uv_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L uv_x dx - \int_0^L uv_{xxx} dx.
\end{aligned}$$

Portanto, o operador A^{**} é definido por

$$\begin{cases} A^{**}u := -(\partial_x + \partial_{xxx})u \\ A^{**} : D(A^{**}) \subset L^2(I) \to L^2(I) \\ D(A^{**}) = \{u \in H^3(I) : u(0) = u_x(L) = u_{xx}(L) = 0\}, \end{cases}$$

o que mostra que $D(A) = D(A^{**})$. Portanto, $A = A^{**}$ e, consequentemente, A é fechado.

iv) A e A^* são dissipativos.

Seja $u \in D(A)$. Então,

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle_{L^2(I)} &= -\int_0^L (u_x + u_{xxx})u dx \\ &= -\frac{1}{2}u^2\Big|_0^L - u_{xx}u\Big|_0^L + \int_0^L u_{xx}u_x dx \\ &= -\frac{1}{2}u^2(L) + \frac{1}{2}\int_0^L (u_x^2)_x dx \\ &= -\frac{1}{2}u^2(L) - \frac{1}{2}u_x^2(0) \leq 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que, se $u \in D(A^*)$,

$$\begin{aligned} \langle A^*u, u\rangle_{L^2(I)} &= \frac{1}{2}u^2(L) + u_{xx}(L)u(L) - \frac{1}{2}u_x^2(L) \\ &= -\frac{1}{2}u^2(L) - \frac{1}{2}u_x^2(L) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, A e A^* são dissipativos.
Portanto, segue de ***i)-iv)*** que o operador A gera um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de contrações de classe C_0 em $L^2(I)$. Como consequência da Proposição 2.1.1, obtemos o resultado de existência e unicidade de solução:

Corolário 2.1.1. *Para cada $u_0 \in D(A)$ o problema (3) possui uma única solução clássica $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); L^2(I))$. Se $u_0 \in L^2(I)$ então, o problema 2.1 possui uma única mild solution $u \in C([0,\infty); L^2(I))$.*

Demonstração: A Proposição 2.1.1 e o Teorema 1.5.6 garantem que

$$u(t) = S(t)u_0$$

é solução clássica de (3). Além disso,

$$u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); L^2(I)).$$

Se $u_0 \in L^2(I)$, pelo Teorema 1.5.7 com $f \equiv 0$ tem-se que

$$u \in C([0,\infty); L^2(I)).$$

O teorema de existência sobre $[0, T_{min}]$, onde T_{min} é independente de L, e dependente unicamente de $|g|_{H^1}$ e $|u_0|$ diz o seguinte:

TEOREMA 3. Sejam $u_0 \in L^2((1+x^2)dx)$, $g \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ e $0 < L < \infty$. Então, existe uma única solução fraca maximal de (2) definida em $[0, T_L]$. Além disso, existe $T_{min} > 0$, independente de L, e dependendo unicamente de $|u_0|$ e $|g|_{H^1}$, tal que $T_L \geq T_{min}$ e a solução u depende continuamente de u_0 e g.

Para provar esse resultado, estabeleceremos algumas estimativas a priori para o modelo (3) que, posteriormente, serão combinadas com um argumento de ponto de fixo para estudar o problema não linear.

2.1.1 Estimativas uniformes da solução com relação a L.

Nesta seção consideramos o problema linear (3). A seguinte proposição nos dá resultados mais precisos que aqueles obtidos em [10]:

Proposição 2.1.2. *Seja u_0 em $L^2((1+x^2)dx)$. Então, existe uma função contínua $t \longmapsto c(t)$ tal que*

$$|u|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx)} \leq c(T)|u_0|, \tag{4}$$

$$|u_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} \leq c(T)|u_0|, \tag{5}$$

$$|u_x(0,t)|_{L^2(0,T)} \leq c(T)|u_0|, \tag{6}$$

$$|\sqrt{t}u_x|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq c(T)|u_0|, \tag{7}$$

$$|\sqrt{t}u_x(0,t)|_{L^2(0,T)} + |\sqrt{t}u_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)} \leq c(T)|u_0|, \tag{8}$$

$$|\sqrt{t}u_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx)} \leq c(T)|u_0|, \tag{9}$$

$$|\sqrt{t}u_{xx}|_{L^2(0,T;L^2)} \leq c(T)|u_0|. \tag{10}$$

Demonstração: Para provar (4) e (5) multiplicamos (3) por u e integramos por partes em $[0, L]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \left(u^2\right)_x dx + uu_{xx}|_0^L - \frac{1}{2}\int_0^L (u_x^2)_x dx = 0.$$

Multiplicando a identidade acima por 2 e usando as condições de contorno obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx + u^2(L,t) + u_x^2(0,t) = 0;$$

(11)

ou seja;

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2(x,t)dx \leq 0.$$

Integrando a identidade acima na variável temporal sobre $(0,t)$ obtemos

$$\int_0^L u^2(x,t)dx \leq \int_0^L u_0^2(x)dx. \tag{11b}$$

Multiplicamos (3) por xu, e integramos sobre $[0,L]$:

$$\int_0^L xuu_t dx + \int_0^L xuu_x dx + \int_0^L xuu_{xxx} dx = 0.$$

Para a primeira integral acima, tem-se

$$\int_0^L xuu_t dx = \frac{1}{2}\int_0^L x\frac{d}{dt}\left(u^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L xu^2 dx. \tag{12}$$

Para os demais termos integramos por partes e usamos as condições de contorno obtendo

$$\begin{aligned}\int_0^L xuu_x dx &= \frac{1}{2}\int_0^L x\frac{d}{dx}\left(u^2\right)dx = \frac{1}{2}L\,u^2(L,t) - \frac{1}{2}\int_0^L u^2 dx \\ &= \frac{1}{2}L\,u^2(L,t) - \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx \end{aligned} \tag{13}$$

e

$$\int_0^L xuu_{xxx} dx = xuu_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L xu_x u_{xx} dx - \int_0^L uu_{xx} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^L x\frac{d}{dx}\left(u_x^2\right)dx - \int_0^L uu_{xx} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^L u_x^2 dx. \tag{14}$$

Somando $(12), (13)$ e (14) e multiplicando por 2 segue que

$$3\int_0^L u_x^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^L xu^2dx = \int_0^L u^2(x,t)dx - L\,u^2(L,t).$$

Integrando na variável temporal sobre $(0,t)$, notando que $-L\,u^2(L,t) \le 0$ e usando (11b) obtém-se

$$3\int_0^t\int_0^L u_x^2(x,s)dxds + \int_0^L xu^2(x,t)dx \le \int_0^L xu_0^2dx + t\int_0^L u_0^2dx$$

$$\le m(t)\int_0^L (1+x)u_0^2dx, \qquad (14b)$$

onde $m(t) = \max\{1,t\}$.

Agora, multiplicamos (3) por x^2u e integramos sobre $[0,L]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L x^2u^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L x^2\frac{d}{dx}(u^2)dx + \int_0^L x^2uu_{xxx}dx = 0.$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L x^2u^2dx - \int_0^L xu^2dx$$

$$-\int_0^L u_{xx}\left(2xu + x^2u_x\right)dx \le 0;$$

ou seja;

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L x^2u^2dx - \int_0^L xu^2dx$$

$$+2\int_0^L u_x(xu_x+u)dx + \int_0^L xu_x^2dx \le 0,$$

de onde concluímos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L x^2u^2dx + 6\int_0^L xu_x^2dx \le 2\int_0^L xu^2dx.$$

usando (14b) e integrando na variável temporal sobre $(0,t)$ obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\int_0^L x^2u^2dx+6\int_0^t\int_0^L xu_x^2dxds\\ &\leq 2tm(t)\int_0^L xu_0^2dx+\int_0^L x^2u_0^2dx\\ &\leq 2tm(t)\int_0^L (1+x)u_0^2dx+\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx\\ &\leq (6tm(t)+1)\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx,\end{aligned} \tag{14c}$$

onde usamos também que $(1+x)\leq 3(1+x^2)$. Somando (11b) e (14c) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L (1+x^2)u^2dx &\leq \int_0^L u_0^2dx+(6tm(t)+1)\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx\\ &\leq (6tm(t)+2)\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx,\end{aligned}$$

de onde concluímos a desigualdade (4), com $c_1(T):=(6Tm(T)+2)^{1/2}$.

Para provar a desigualdade (5), dividimos (14c) por 2, e somamos com (14b):

$$\begin{aligned}3\int_0^t\int_0^L (1+x)u_x^2dxds\\ &\leq m(t)\int_0^L (1+x)u_0^2dx+\left(3tm(t)+\frac{1}{2}\right)\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx,\\ &\leq \left(3(t+1)m(t)+\frac{1}{2}\right)\int_0^L (1+x^2)u_0^2dx,\end{aligned}$$

de onde concluímos a desigualdade (5):

$$|u_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)}\leq c_2(T)|u_0|,$$

com $c_2(t):=\left((t+1)m(t)+\dfrac{1}{6}\right)^{1/2}$.

Para provar a desigualdade (6), integramos (11) na variável temporal sobre $(0,t)$, obtendo a seguinte identidade:

$$\int_0^t u_x^2(0,s)ds = \int_0^L u_0^2 dx - \int_0^L u^2(x,t)dx - \int_0^t u^2(L,s)ds.$$

Como os dois últimos termos são não positivos, concluímos que

$$\int_0^t u_x^2(0,s)ds \leq \int_0^L u_0^2 dx.$$

Assim, obtemos (6):

$$|u_x^2(0,t)|_{L^2(0,T)} \leq c_3(T)|u_0|, \quad \text{onde } c_3(T) = 1.$$

Para provar (7) e (8) multiplicamos (3) por u_{xx} e integramos sobre $(0,L)$:

$$\int_0^L u_{xx}u_t dx + \int_0^L u_{xx}u_x dx + \int_0^L u_{xx}u_{xxx}dx = 0;$$

ou seja;

$$\int_0^L u_{xx}u_t dx + \frac{1}{2}\int_0^L (u_x)_x^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^L (u_{xx})_x^2\, dx = 0.$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L u_x^2 dx + u_x^2(0,t) + u_{xx}^2(0,t) = 0. \tag{15}$$

Multiplicando (15) por s e integrando na variável temporal sobre $(0,t)$ tem-se

$$t\int_0^L u_x^2(x,t)dx + \int_0^t s u_x^2(0,s)ds + \int_0^t s u_{xx}^2(0,s)ds$$

$$= \int_0^t \int_0^L u_x^2(x,s)dxds \leq |u_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))}.$$

A desigualdade acima e a desigualdade (5) garantem que

$$t\int_0^L u_x^2(x,t)dx + \int_0^t s u_x^2(0,s)ds + \int_0^t s u_{xx}^2(0,s)ds$$

$$\leq \left(c_2(T)|u_0|\right)^2.$$

Como os termos que estão à esquerda da desigualdade acima são positivos, obtemos duas desigualdades:

$$\int_0^L tu_x^2(x,t)dx \leq (c_2(T)|u_0|)^2$$

e

$$\int_0^T tu_x^2(0,t)dt + \int_0^T tu_{xx}^2(0,t)dt \leq (c_2(T)|u_0|)^2 .$$

Da primeira desigualdade acima concluímos (7), e a segunda pode ser escrita como

$$\left| \left(|\sqrt{t}u_x(0,t)|_{L^2(0,T)}, |\sqrt{t}u_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)} \right) \right|_2^2 \leq (c_2(T)|u_0|)^2 ,$$

onde $| \ . \ |_2$ denota a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Como existe $\eta \geq 0$, tal que $| \ . \ |_s \leq \eta | \ . \ |_2$, onde $| \ . \ |_s$ denota norma da soma em $\mathbb{R}^n$, concluímos (8):

$$\left(|\sqrt{t}u_x(0,t)|_{L^2(0,T)} + |\sqrt{t}u_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)} \right)^2 \leq (\eta c_2(T)|u_0|)^2 . \qquad (15b)$$

Para provar (9) e (10) multiplicamos (3) por xu_{xx} e integramos por partes, o que conduz a

$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu_x^2 dx + 2\int_0^L u_x u_t dx + \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L u_{xx}^2 dx = 0.$$

Substituindo o termo $u_t = -(u + u_{xx})_x$ e integrando por partes, obtemos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu_x^2 dx + 2u_x(0,t)u_{xx}(0,t) - \int_0^L u_x^2 dx + 3\int_0^L u_{xx}^2 dx = 0. \qquad (16)$$

Multiplicando a identidade por s e integrando na variável temporal sobre $(0,t)$, segue que

$$\int_0^t s\frac{d}{ds}\int_0^L xu_x^2(x,s)dxds + 2\int_0^t su_x(0,s)u_{xx}(0,s)ds$$

$$- \int_0^t \int_0^L su_x^2(x,s)dxds + 3\int_0^t \int_0^L su_{xx}^2(x,s)dxds = 0.$$

Integrando o primeiro termo por partes, e adicionando o termo $t\int_0^L u_x^2(x,t)dx$ à nova identidade, teremos

$$t\int_0^L (1+x)u_x^2(x,t)dx + 3\int_0^t \int_0^L su_{xx}^2(x,s)dxds$$

$$= \int_0^t \int_0^L \left(x u_x^2(x,s) + u_x^2(x,t) \right) dx ds + \int_0^t \int_0^L s u_x^2(x,s) dx ds$$

$$- 2 \int_0^t \left(s u_x(0,s) u_{xx}(0,s) \right) ds.$$

Os termos que estão à direita da identidade acima podem ser limitados por $(1+T)|u_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)}$. Além disso, se aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz no último termo obtemos

$$t \int_0^L (1+x) u_x^2(x,t) dx + 3 \int_0^t \int_0^L s u_{xx}^2(x,s) dx ds$$

$$\leq (1+T)|u_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} + 2\sqrt{\int_0^t s u_x^2(0,s) ds}\sqrt{\int_0^t s u_{xx}^2(0,s) ds}$$

$$\leq (1+T)|u_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} + 2|\sqrt{t} u_x(0,t)|_{L^2(0,T)} |\sqrt{t} u_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)}$$

$$\leq (1+T)|u_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} + |\sqrt{t} u_x(0,t)|^2_{L^2(0,T)} + |\sqrt{t} u_{xx}(0,t)|^2_{L^2(0,T)}.$$

Aplicando (5) no primeiro termo que está do lado direito da desigualdade acima, e (8) nos dois últimos termos, concluímos que

$$\int_0^L t u_x^2(x,t)(1+x) dx + 3 \int_0^t \int_0^L s u_{xx}^2(x,s) dx ds$$

$$\leq (2+T) \left(c_2(T)|u_0| \right)^2.$$

Da desigualdade acima concluímos (9) e (10), respectivamente:

$$|\sqrt{t} u_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))} \leq c_4(T)|u_0|$$

$$|\sqrt{t} u_{xx}|_{L^2(0,T;L^2)} \leq c_4(T)|u_0|, \quad \text{onde} \quad c_4(T) = \sqrt{(2+T)} c_2(T).$$

Considerando η introduzido em (15b) e

$$c(t) := \sum_{i=1; i \neq 2}^{4} c_i(t) + (\eta+1) c_2(t)$$

obtemos a função que satisfaz a Proposição 1. $\square$

2.1.2 Estimativas uniformes da solução com relação a L, para um problema não-homogêneo.

Nesta seção estabelecemos estimativas independentes de L para o problema linear não homogêneo:

$$
\begin{aligned}
&v_t + v_x + v_{xxx} = f(x,t), \quad x \in [0,L], \qquad t \in [0,T[,\\
&v(0,t) = 0, \qquad\qquad t \in [0,T[,\\
&v_x(L,t) = 0, \qquad\qquad t \in [0,T[,\\
&v_{xx}(L,t) = 0, \qquad\qquad t \in [0,T[,\\
&v(x,0) = 0, \qquad\qquad x \in [0,L].
\end{aligned} \tag{17}
$$

Proposição 2.1.3. *Existe uma função contínua $t \longmapsto \tilde{c}(t)$, tal que, se $f \in E$, então*

$$|v|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{18}$$

$$|v_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{19}$$

$$|v_x(0,t)|_{L^2(0,T)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{20}$$

$$|\sqrt{t}v_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx)} \le \tilde{c}(T)|f|_E, \tag{21}$$

$$|\sqrt{t}v_x(0,t)|_{L^2(0,T)} \le \tilde{c}(T)|f|_E, \tag{22}$$

$$|\sqrt{t}v_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)} \le \tilde{c}(T)|f|_E, \tag{23}$$

$$|\sqrt{t}v_{xx}|_{L^2(0,T;L^2)} \le \tilde{c}(T)|f|_E, \tag{24}$$

$$|v_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{25}$$

$$|v_x(0,t)|_{L^2(0,T)} + |v_{xx}(0,t)|_{L^2(0,T)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{26}$$

$$|v_{xx}|_{L^2(0,T;L^2)} \le \tilde{c}(T)|f|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}, \tag{27}$$

Demonstração: Segue do Teorema 1.5.7 que $v(x,t) = \int_0^t S(t-s)f(x,s)ds$ é mild solution de (17). Logo, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e (4), segue que

$$
\begin{aligned}
|v|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))} &= \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^L \left(\int_0^t S(t-s)f(x,s)ds \right)^2 (1+x^2)dx \right)^{1/2} \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^L t \int_0^t \left(S(t-s)f(x,s)\right)^2 ds(1+x^2)dx \right)^{1/2} \\
&\le T|S(\cdot - s)f(\cdot,s)|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\
&\le Tc(T)|f(\cdot,s)|_{L^2((1+x^2)dx)}.
\end{aligned}
$$

Integrando esta desigualdade na variável s, sobre $[0,T]$, obtemos (18):

$$
|v|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx)} \le c(T)|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))}.
$$

Prova de (19): Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o Teorema de Fubini e a estimativa (5), segue que

$$
\begin{aligned}
|v_x|^2_{L^2((1+x)dx)} &= \int_0^L \left[\int_0^t \partial_x S(t-s)f(x,s)ds \right]^2 (1+x)dx \\
&\le \int_0^L t \int_0^t |\partial_x S(t-s)f(x,s)|^2 ds(1+x)dx \\
&= t\int_0^t |\partial_x S(t-s)f(x,s)|^2_{L^2((1+x)dx)} ds \\
&\le T|\partial_x S(t-s)f(x,s)|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\
&\le Tc^2(T)|f(x,s)|^2_{L^2((1+x^2)dx))},
\end{aligned}
$$

integrando esta desigualdade em t sobre $[0,T]$ tem-se

$$
|v_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} \le T^2c^2(T)|f(x,s)|^2_{L^2((1+x^2)dx))}.
$$

logo, tomando raiz quadrada e integrando esta desigualdade na variável s sobre $[0,T]$ vamos ter (19):

$$
|v_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} \le c(T)|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))}.
$$

Para provar (20), multiplicamos (17) por v, integramos por partes e usamos as condições de contorno para obter

$$\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + v^2(L,t) - 2\int_0^L v_x v_{xx} dx = 2\int_0^L v f dx.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + v_x^2(0,t) \leq 2\int_0^L v f dx.$$

Integrando a desigualdade acima na variável temporal sobre $[0,t]$, teremos que

$$\int_0^L v^2 dx + \int_0^t v_x^2(0,s)ds \leq 2\int_0^t\int_0^L v f dx ds,$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e (18) segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t v_x^2(0,s)ds &\leq 2\int_0^t \left(\int_0^L v^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^L f^2 dx\right)^{1/2} ds \\ &\leq 2|v|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))}|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq 2c(T)|f|^2_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos (20):

$$|v_x(0,t)|_{L^2(0,T)} \leq \sqrt{2c(T)}|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))}.$$

Para provar as desigualdades (21)-(24), multiplicamos (17) por v_{xx} e procedemos como na demostração das desigualdades (7) e (8). Assim, obtemos uma identidade semelhante a (15):

$$\frac{d}{dt}\int_0^L v_x^2 dx + v_x^2(0,t) + v_{xx}^2(0,t) = -2\int_0^L f(x,t)v_{xx}dx. \tag{28}$$

Por outro lado, multiplicamos (17) por xv_{xx} e procedendo como na demostração das desigualdades (9) e (10) obtemos uma identidade similar a (16):

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^L x v_x^2 dx + 2v_x(0,t)v_{xx}(0,t) - \int_0^L v_x^2 dx + 3\int_0^L v_{xx}^2 dx \\ &= -2\int_0^L v_x(x,t)f(x,t)dx - 2\int_0^L x v_{xx}(x,t)f(x,t)dx. \end{aligned}\tag{29}$$

Logo, multiplicando a identidade (28) por 2 e somando com a identidade (29), segue que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (2+x)v_x^2dx + v_x^2(0,t) + v_{xx}^2(0,t)$$

$$+\left[v_x(0,t)+v_{xx}(0,t)\right]^2 + 3\int_0^L v_{xx}^2dx$$

$$= -4\int_0^L v_{xx}f dx + \int_0^L v_x^2 dx - 2\int_0^L xv_{xx}f dx - 2\int_0^L v_x f dx.$$

Note que o primeiro termo da segunda linha acima é não negativo, portanto temos a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (2+x)v_x^2dx + v_x^2(0,t) + v_{xx}^2(0,t)$$

$$\leq 3\int_0^L v_{xx}^2dx - 4\int_0^L v_{xx}f dx + \int_0^L v_x^2dx - 2\int_0^L xv_{xx}f dx$$

$$-2\int_0^L v_x f dx.$$

Por conveniência, vamos escrever essa desigualdade da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (2+x)v_x^2dx + v_x^2(0,t) + v_{xx}^2(0,t) + \int_0^L v_{xx}^2dx - 2\int_0^L v_x^2dx$$

$$\leq -\int_0^L v_{xx}^2dx - 4\int_0^L v_{xx}f dx \tag{L1}$$

$$-\int_0^L v_x^2dx - 2\int_0^L v_x f dx \tag{L2}$$

$$-\int_0^L v_{xx}^2dx - 2\int_0^L xv_{xx}f dx. \tag{L3}$$

Observe que

$$(L1) = -\int_0^L (v_{xx} + 2f)^2 \, dx + 4\int_0^L f^2 dx$$

$$(L2) = -\int_0^L (v_x + f)^2 \, dx + \int_0^L f^2 dx$$

$$(L3) = -\int_0^L (v_{xx} + xf)^2 \, dx + \int_0^L x^2 f^2 dx,$$

de onde concluímos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L (2+x)v_x^2 dx + v_x^2(0,t) + v_{xx}^2(0,t) + \int_0^L v_{xx}^2 dx$$

$$\leq 2\int_0^L v_x^2 dx + 5\int_0^L f^2(1+x^2)dx. \tag{29b}$$

Multiplicando a desigualdade (29b) por s e integrando na variável temporal sobre $[0,t]$, obtém-se

$$\int_0^L t v_x^2(2+x)dx + \int_0^t s v_x^2(0,s)ds$$

$$+\int_0^t s v_{xx}^2(0,s)ds + \int_0^t \int_0^L s v_{xx}^2 dx$$

$$\leq 2\int_0^t \int_0^L s v_x^2 dx ds + 5\int_0^L \int_0^t s f^2(1+x^2)dx ds + \int_0^t \int_0^L v_x^2(2+x)dx.$$

Utilizando a estimativa (19), o lado direito da desigualdade acima pode ser estimado como segue:

$$2T\int_0^t \int_0^L v_x^2 dx ds + 5\int_0^L \int_0^T t f^2(1+x^2)dx dt + 2\int_0^t \int_0^L v_x^2(1+x)dx$$

$$\leq 2(T+1)\int_0^t \int_0^L v_x^2(1+x)dx ds + 5\int_0^T \int_0^L t f^2(1+x^2)dx dt$$

$$\leq 2(T+1)|v_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} + 5|\sqrt{t}f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$\leq 2(T+1)c^2(T)|f|^2_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)} + 5|\sqrt{t}f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$\leq \tilde{c}_1^2(T)\left[|f|^2_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)} + |\sqrt{t}f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}\right]$$

$$\leq \tilde{c}_1^2(T)\left[|f|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)} + |tf|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}\right]^2$$

$$= \tilde{c}_1^2(T)|f|^2_E,$$

onde $\tilde{c}_1^2(T) = [2(T+1)c^2(T) + 5 - |2(T+1)c^2(T) - 5|]/2$. Assim, concluímos que

$$\int_0^L tv_x^2(2+x)dx + \int_0^T sv_x^2(0,s)ds$$

$$+ \int_0^T sv_{xx}^2(0,s)ds + \int_0^T\int_0^L sv_{xx}^2 dx$$

$$\leq \tilde{c}_1^2(T)|f|^2_E,$$

Da desigualdade acima, obtemos as estimativas (21)-(24), respectivamente.

Para provar as desigualdades (25)-(27) integramos (29b) sobre $(0,T)$ e aplicamos a estimativa (19) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz; ou seja;

$$\int_0^L (2+x)v_x^2dx + \int_0^T v_x^2(0,s)ds + \int_0^T v_{xx}^2(0,s)ds + \int_0^T\int_0^L v_{xx}^2 dxds$$

$$\leq 2\int_0^T\int_0^L v_x^2 dxdt + 5\int_0^T\int_0^L f^2(1+x^2)dxdt$$

$$\leq 2|v_x|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx)} + 5|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$\leq 2c^2(T)|f|^2_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)} + 5|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$= 2c^2(T)\left[\int_0^T |f|_{L^2((1+x^2)dx)}\right]^2 + 5|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$\leq 2c^2(T)T\int_0^T |f|^2_{L^2((1+x^2)dx)} + 5|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)}$$

$$= \tilde{c}_2^2(T)|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)},$$

onde $\tilde{c}_2^2(T) = (2c^2(T)T+5)$. Portanto,

$$\int_0^L (1+x)v_x^2dx \leq \int_0^L (2+x)v_x^2dx \leq \tilde{c}_2^2(T)|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)},$$

$$\int_0^T v_x^2(0,t)dt + \int_0^T v_{xx}^2(0,t)dt \leq \tilde{c}_2^2(T)|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)},$$

$$\int_0^T\int_0^L v_{xx}^2dxds \leq \tilde{c}_2^2(T)|f|^2_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)},$$

de onde concluímos as desigualdades (25),(26) e (27), respectivamente. Fazendo

$$\tilde{c}(t) = c(t) + \sqrt{2c(T)} + \tilde{c}_1(t) + (1+\eta)\tilde{c}_2^2(t),$$

obtemos uma função contínua satisfazendo a Proposição 2.1.3 $\square$

2.2 O problema não linear

Nesta seção vamos provar um resultado de existência e unicidade local para o sistema (2).

Proposição 2.2.1. *Suponha que $L \geq 1$ e $g(0) = u_0(0)$. Então, existe $T > 0$, independente de L, e uma única solução fraca u de (2) definida em $[0, T]$.*

Demonstração: A demonstração será dividida em três passos.

1. Inicialmente, fazemos uma mudança pertinente nas condições de contorno do modo: Consideramos ϕ uma função suave em $\mathbb{R}^+$, tal que

$$\phi(0) = 1 \quad \text{e} \quad \phi(x) = 0, \qquad \forall x \geq 1.$$

Nessas condições a função $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \phi(x)g(t)$, satisfaz

$$\begin{array}{ll}
\tilde{u}_t + \tilde{u}_x + \tilde{u}_{xxx} = -F(\tilde{u}, \tilde{u}_x, g) & x \in [0, L], \quad t \in [0, T[, \\
\tilde{u}(0,t) = 0, & t \in [0, T[, \\
\tilde{u}(L,t) = 0, & t \in [0, T[, \\
\tilde{u}_{xx}(L,t) = 0, & t \in [0, T[, \\
\tilde{u}(x,0) = u_0 - \phi(x)g(0), & x \in [0, L],
\end{array}$$

onde

$$F(\tilde{u}, \tilde{u}_x, g) = (\tilde{u} + \phi g)(\tilde{u}_x + \phi' g) + g(\phi' + \phi''') + \phi g'.$$

Observe que a mudança de variável transforma o problema original (2) em um problema com condições de contorno de Dirichlet com $g = 0$. No que segue, para simplificar a notação, denotaremos a solução por u ao invés de $\tilde{u}$.

2. Introduzimos o seguinte funcional $\mathcal{T}$ definido por

$$\mathcal{T}(u_0, g, u) := S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)F(u, u_x, g)(s)ds,$$

onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo linear introduzido na Seção 2.1. Usaremos as estimativas provadas nas Subseções 2.1.1 e 2.1.2 para analisar os termos

$$S(t)u_0 \quad \text{e} \quad \int_0^t S(t-s)F(u, u_x, g)(s)ds.$$

Começamos com os seguintes Lemas:

Lema 2.2.1. *Existe uma constante $c(T)$, dependendo de T, e independente de L, tal que, para toda $u_0 \in L^2(0, L)$,*

$$|S(t)u_0|_X \leq c(T)|u_0|,$$

e a função $T \mapsto c(T)$ é contínua.

Demonstração: A estimativa é consequência imediata das desigualdades (4), (5), (9) e (10). □

Para o problema não homogêneo o seguinte Lema é válido:

Lema 2.2.2. *Existe uma constante $c(T)$, dependendo de T e independente de L, tal que, para toda f em E*

$$\left| \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right|_X \leq c(T)|f|_E,$$

e a função $T \mapsto c(T)$ é contínua.

Demonstração: A estimativa é consequência imediata das desigualdades (18), (19), (21) e (24). □

3. Argumento de contração: Começamos com o Lema

Lema 2.2.3. *Para toda $w \in H^1(0,L)$, tal que $w(0) = 0$, segue que*

$$|\sqrt{x}w|_{L^\infty} \leq 5\left(\sqrt{|w|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|w_x|_{L^2((1+x)dx)}} + |w|_{L^2((1+x)dx)}\right). \tag{30}$$

Demonstração: A condição $w(0) = 0$ implica que

$$w^2(y) = 2\int_0^y ww_x dx.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$|w|^2 = 2\left|\int_0^y ww_x dx\right| \leq 2\left(\int_0^y w^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^y w_x^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= 2|w|_{L^2}|w_x|_{L^2}.$$

Portanto,

$$|w|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2}}\sqrt{|w_x|_{L^2}}, \tag{30b}$$

e, para $0 \leq x \leq 1$, temos

$$\sup_{0\leq x\leq 1}|\sqrt{x}w| \leq \sup_{0\leq x\leq 1}|w| \leq |w|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2}}\sqrt{|w_x|_{L^2}}.$$

Analogamente, para $x \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|(\sqrt{x}w)^2 - w^2(1)| &= 2\left|\int_1^x \sqrt{y}w\,(\sqrt{y}w)_y\,dy\right| \\
&\leq 2\left|\int_1^x (\sqrt{y}w)^2\,dy\right|^{1/2}\left|\int_1^x (\sqrt{y}w)_y^2\,dy\right|^{1/2} \\
&\leq 2|\sqrt{x}w|_{L^2}|(\sqrt{x}w)_x|_{L^2},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x}w|^2 &\leq 2|\sqrt{x}w|_{L^2}\left|\sqrt{x}w_x + \frac{\sqrt{x}}{2x}w\right|_{L^2} + |w(1)|^2 \\
&\leq \left(\sqrt{2}\sqrt{|\sqrt{x}w|_{L^2}}\sqrt{\left|\sqrt{x}w_x + \frac{\sqrt{x}}{x}w\right|_{L^2}} + |w(1)|\right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{2}\sqrt{|\sqrt{x}w|_{L^2}}\sqrt{|\sqrt{x}w_x|_{L^2} + |\sqrt{x}w|_{L^2}} + |w|_{L^\infty}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (30b), segue que

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\geq 1}|\sqrt{x}w| &\leq \sqrt{2}\sqrt{|\sqrt{x}w|_{L^2}}\sqrt{|\sqrt{x}w_x|_{L^2} + |\sqrt{x}w|_{L^2}} + |w|_{L^\infty} \\
&\leq \sqrt{2}\sqrt{|\sqrt{x}w|_{L^2}}\sqrt{|\sqrt{x}w_x|_{L^2} + |\sqrt{x}w|_{L^2}} + \sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2}}\sqrt{|w_x|_{L^2}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x}w|_{L^\infty} &\leq \sqrt{2}\sqrt{|\sqrt{x}w|_{L^2}}\sqrt{|\sqrt{x}w_x|_{L^2} + |\sqrt{x}w|_{L^2}} + 2\sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2}}\sqrt{|w_x|_{L^2}} \\
&\leq \sqrt{2}\sqrt{|w|^2_{L^2((1+x)dx)} + |w_x|_{L^2((1+x)dx)}|w|_{L^2((1+x)dx)}} \\
&\quad + 2\sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|w_x|_{L^2((1+x)dx)}} \\
&\leq \sqrt{2}|w|_{L^2((1+x)dx)} + 3\sqrt{2}\sqrt{|w|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|w_x|_{L^2((1+x)dx)}} \\
&\leq 5\left(|w|_{L^2((1+x)dx)} + \sqrt{|w|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|w_x|_{L^2((1+x)dx)}}\right).
\end{aligned}
$$

□

A seguinte estimativa é o ponto-chave desta seção:

Proposição 2.2.2. *Suponha que* $u_0, v_0 \in L^2(0,L)$ *e* $g, h \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. *Então, existe uma função contínua* $t \mapsto c(t)$, *tal que, para todo* T *em* $[0, T_0]$,

$$|\mathcal{T}(u_0,g,u) - \mathcal{T}(v_0,h,v)|_X$$

$$\leq c(T)|u_0 - v_0| + c(T)\sqrt{T}(|g|_{H^1(0,T)} + |h|_{H^1(0,T)} + 1 + |u|_X)|g - h|_{H^1(0,T)}$$

$$+ c(T)T^{1/4}|u - v|_X(|u|_X + |v|_X)$$

$$+ c(T)\sqrt{T}|u - v|_X(|h|_{H^1(0,T)} + |u|_X + |v|_X).$$

Demonstração: Temos que

$$\mathcal{T}(u_0,g,u) - \mathcal{T}(v_0,h,v) = S(t)(u_0 - v_0)(x)$$

$$- \int_0^t S(s-t)(F(u,u_x,g) - F(v,v_x,h)).$$

Denotaremos por $G(s)$ a função

$$G(s) := F(u,u_x,g) - F(v,v_x,h) = F_c + F_1 + F_{nl},$$

onde

$$F_c = \phi\phi'(g^2 - h^2) + (g-h)(\phi' + \phi''') + \phi(g' - h'),$$

$$F_1 = (u\phi' g - v\phi' h) + (\phi g u_x - \phi h v_x),$$

$$F_{nl} = uu_x - vv_x.$$

Devido aos Lemas 2.2.1 e 2.2.2, obtemos

$$|\mathcal{T}(u_0,g,u) - \mathcal{T}(v_0,h,v)|_X$$

$$\leq c(T)|u_0 - v_0| + c(T)|G|_E$$

$$= c(T)|u_0 - v_0|$$

$$+ c(T)\left(|G|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} + |\sqrt{t}G|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))}\right).$$

Estimamos separadamente os três termos de G; ou seja; F_c, F_1 e F_{nl}.

1. O termo independente de u e v, ou seja; F_c:
Por um lado, obtém-se

$$|F_c| \leq |\phi\phi'||g(t) - h(t)||g(t) + h(t)| + |g(t) - h(t)||\phi' + \phi'''| + |\phi||g'(t) - h'(t)|.$$

Logo,

$$|F_c|_{L^2((1+x^2)dx)} \leq c_\phi \left(1 + |g(t)| + |h(t)|\right) |g(t) - h(t)| + c_\phi |g'(t) - h'(t)|;$$

ou seja;

$$|F_c|_{L^2((1+x^2)dx)} \leq c_\phi \left(1 + |g(t)| + |h(t)|\right) \left(|g(t) - h(t)| + |g'(t) - h'(t)|\right), \tag{30c}$$

pois ϕ tem suporte compacto contido em $[0, L]$, e $c_\phi > 0$. Por outro lado, lembramos que

$$|F_c|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)dx)} \leq \sqrt{T} |F_c|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)dx)}.$$

Usando a desigualdade acima e (30c), obtemos

$$\begin{aligned} |F_c|_E &\leq 2\sqrt{T} |F_c|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx)dx)} \\ &\leq 2c_\phi \sqrt{T} \left(1 + |g|_{H^1} + |h|_{H^1}\right) |g - h|_{H^1}. \end{aligned}$$

2. O termo linear F_1 : Para o primeiro termo de F_1, temos

$$\begin{aligned} &|u\phi' g - v\phi' h|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq |\phi' u(g-h)|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} + |\phi'(u-v)h|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq c_{\phi'} \sqrt{T} |g-h|_{L^\infty(0,T)} |u|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\qquad + c_{\phi'} \sqrt{T} |h|_{L^\infty(0,T)} |u-v|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq c_{\phi'} \sqrt{T} \left(|g-h|_{H^1(0,T)} |u|_X + |h|_{H^1(0,T)} |u-v|_X\right), \end{aligned}$$

pois ϕ' tem suporte compacto. Analogamente, para o segundo termo de F_1, temos

$$\begin{aligned} &|\phi(u_x g - v_x h)|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq |\phi u_x (g-h)|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} + |\phi(u_x - v_x)h|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\ &\leq c_\phi |(g-h)|_{L^\infty(0,T)} |u_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\ &\qquad + c_\phi |h|_{L^\infty(0,T)} |u_x - v_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\ &\leq c_\phi \left(|g-h|_{H^1(0,T)} |u|_X + |h|_{H^1(0,T)} |u-v|_X\right), \end{aligned}$$

pois ϕ tem suporte compacto e $\phi(x)(1+x^2) \leq c_\phi(1+x)$. Portanto, obtemos

$$|F_1|_E \leq c_\phi \sqrt{T}(1+\sqrt{T})\left(|g-h|_{H^1(0,T)}|u|_X + |h|_{H^1(0,T)}|u-v|_X\right).$$

3. O termo não linear F_{nl} : A fim de estimar

$$|uu_x - vv_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} + |\sqrt{t}(uu_x - vv_x)|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))}, \tag{30d}$$

escrevemos

$$uu_x - vv_x = (u-v)u_x + v(u_x - v_x). \tag{30e}$$

Para o primeiro termo, queremos uma cota de UV_x em $L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))$, onde $U = u-v$ e $V = u$. Inicialmente, temos

$$\begin{aligned} |UV_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx)dx)} &= \int_0^T \sqrt{\int_0^L (1+x^2)U^2V_x^2 dxdt} \\ &= \int_0^T \sqrt{\int_0^L U^2V_x^2dx + \int_0^L x^2U^2V_x^2dxdt} \\ &\leq \int_0^T \left(\sqrt{\int_0^L U^2V_x^2dx} + \sqrt{\int_0^L x^2U^2V_x^2dx}\right) dt. \end{aligned}$$

Além disso, por (30b)

$$\begin{aligned} &\int_0^L U^2V_x^2dx \\ &\leq |U|^2_{L^\infty}\int_0^L (1+x)V_x^2dx \leq 2|U|_{L^2((1+x)dx)}|U_x|_{L^2((1+x)dx)}|V_x|^2_{L^2((1+x)dx)} \end{aligned} \tag{31}$$

e

$$\int_0^L x^2U^2V_x^2dx \leq |xU^2|_{L^\infty}\int_0^L xV_x^2dx \leq |\sqrt{x}U|^2_{L^\infty}\int_0^L (1+x)V_x^2dx.$$

Portanto, pelo Lema 2.2.3,

$$\begin{aligned} &|xUV_x|_{L^2} \leq |\sqrt{x}U|_{L^\infty}|V_x|_{L^2((1+x)dx)} \\ &\qquad \leq 5\left(\sqrt{|U|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|U_x|_{L^2((1+x)dx)}} + |U|_{L^2((1+x)dx)}\right)|V_x|_{L^2((1+x)dx)} \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$
\begin{aligned}
&|UV_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\
&\quad \leq \sqrt{2}\int_0^T |U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\quad\quad + 5\int_0^T \left(|U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)} + |U|_{L^2((1+x)dx)}\right)|V_x|_{L^2((1+x)dx)} \\
&\quad \leq 7\int_0^T |U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\quad\quad + 5\int_0^T |U|_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt.
\end{aligned}
$$

O próximo passo é estimar os termos à direita da desigualdade acima. Inicialmente, pela desigualdade de Cauchy-Shwarz, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\leq |U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\int_0^T |U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\leq |U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\left(\int_0^T |U_x|_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T |V_x|^2_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2} \\
&\leq |U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\left[\sqrt{T}\left(\int_0^T |U_x|^2_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2}\right]^{1/2}|V_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\
&= T^{1/4}|U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}|U_x|^{1/2}_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))}|V_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\
&\leq T^{1/4}|U|_X|V|_X.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |U|_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\qquad\leq |U|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\int_0^T |V_x|_{L^2((1+x)dx)}dt \\
&\qquad\leq \sqrt{T}|U|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\left(\int_0^T |V_x|^2_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2} \\
&\qquad\leq \sqrt{T}|U|_X|V|_X,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$|UV_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \leq 7(\sqrt{T}+T^{1/4})|U|_X|V|_X.$$

Pela definição de U e V, obtém-se

$$|(u-v)u_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \leq 7(\sqrt{T}+T^{1/4})|u-v|_X|u|_X. \tag{31b}$$

Para analisar o segundo termo de (30e); ou seja; $v(u_x - v_x)$, fazemos $U = v$, $V = u - v$ e usamos os mesmos argumentos usados anteriormente. Assim, vamos obter

$$\begin{aligned}
|UV_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} &= |v(u_x-v_x)|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\
&\leq 7(\sqrt{T}+T^{1/4})|u-v|_X|v|_X.
\end{aligned}$$

Portanto, a estimativa de $|uu_x - vv_x|_{L^1(0,T;L^2((1+x^2)dx))}$ fica estabelecida.

Retornando a (30d), o segundo passo é estimar $|\sqrt{t}UV_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))}$, onde $U = u-v$ e $V = u$, ou $U = v$ e $V = u - v$. Escrevemos

$$\begin{aligned}
&|\sqrt{t}UV_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \\
&\qquad= |\sqrt{t}UV_x\sqrt{1+x^2}|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\qquad\leq |\sqrt{t}UV_x|_{L^2(0,T;L^2)} + |\sqrt{t}xUV_x|_{L^2(0,T;L^2)}.
\end{aligned} \tag{31c}$$

Para estimar o primeiro termo que está à direita da desigualdade acima usamos (31):

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{t}UV_x|_{L^2(0,T;L^2)} \\
&\quad = \left(\int_0^T \int_0^L tU^2V_x^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\quad \leq \left(\int_0^T 2t|U|_{L^2((1+x)dx)}|U_x|_{L^2((1+x)dx)}|V_x|^2_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2} \\
&\quad \leq \sqrt{2T}|U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(1+x^2))}|\sqrt{t}U_x|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}|V_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x)dx))} \\
&\quad \leq \sqrt{2T}|U|_X|V|_X.
\end{aligned}
\tag{31d}
$$

Para estimar o segundo termo, aplicamos o Lema 2.2.3. Inicialmente, observe que

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{x}U\sqrt{x}V_x|_{L^2} \\
&\quad \leq |\sqrt{x}U|_{L^\infty}|\sqrt{x}V_x|_{L^2} \\
&\quad \leq 5(\sqrt{|U|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|U_x|_{L^2((1+x)dx)}} + |U|_{L^2((1+x)dx)})|\sqrt{x}V_x|_{L^2} \\
&\quad \leq 5\sqrt{|U|_{L^2((1+x)dx)}}\sqrt{|U_x|_{L^2((1+x)dx)}}|V_x|_{L^2((1+x)dx)} \\
&\qquad + 5|U|_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)} \\
&\quad = 5|U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}\left(|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)} + |U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&|\sqrt{t}xUV_x|_{L^2(0,T;L^2)}\\
&= \left(\int_0^T |\sqrt{t}xUV_x|^2_{L^2}dt\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\int_0^T t\left(5|U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}|V_x|_{L^2((1+x)dx)}\left(|U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}+|U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}\right)\right)^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq 15\sqrt{3}|U|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(1+x^2))}|\sqrt{t}V_x|_{L^\infty(0,T;L^2((1+x)dx))}\left||U_x|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}+|U|^{1/2}_{L^2((1+x)dx)}\right|_{L^2(0,T)}\\
&\leq 15\sqrt{3}|U|^{1/2}_X|V|_X\left[\left(\int_0^T |U_x|_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2}+\left(\int_0^T |U|_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}
$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^T |U_x|_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2} \leq T^{1/4}|U_x|^{1/2}_{L^2(0.T;L^2((1+x)dx))}$$

e

$$\left(\int_0^T |U|_{L^2((1+x)dx)}dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{3T}|U|^{1/2}_{L^\infty(0.T;L^2(1+x^2))}.$$

Portanto,

$$|\sqrt{t}xUV_x|_{L^2(0,T;L^2)} \leq 15\sqrt{3}(\sqrt{T}+T^{1/4})|U|_X|V|_X,$$

que, combinando com (31c) e (31d), conduz a

$$|\sqrt{t}UV_x|_{L^2(0,T;L^2((1+x^2)dx))} \leq 15\sqrt{3}(\sqrt{T}+T^{1/4})|U|_X|V|_X.$$

Finalmente, temos

$$|F_{nl}|_E \leq 15\sqrt{3}(\sqrt{T}+T^{1/4})|u-v|_X(|u|_X+|v|_X).$$

Somando as estimativas de $|F_c|_E, |F_1|_E$ e $|F_{nl}|_E$ e tomando o máximo das constantes, que vamos denotar novamente por $c(T)$, concluímos a demonstração da Proposição 2.2.2. $\square$

Para demonstrar os próximos resultados fazemos as seguintes considerações:

Seja $T_0 > 0$. Toma-se $R = 2c(T_0)(|u_0| + T_0^{1/2}(1+|g|_{H^1})|g|_{H^1})$. Denotamos por $\mathcal{B}_R$ a bola de centro 0 e raio R em X_T.

Proposição 2.2.3. *Suponha que* $g \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. *Então, existe um tempo* $T_1 \in]0, T_0]$, *tal que a bola* $\mathcal{B}_R$ *é invariante pela aplicação* $u \longmapsto \mathcal{T}(u_0, g, u)$.

Demonstração: Aplicando Proposição 2.2.2 com $v_0 = 0$, $h = 0$ e $v = 0$, obtém-se

$$|\mathcal{T}(u_0, g, u)| \leq c(T_0)|u_0| + c(T_0)\sqrt{T}(|u|_X + |g|_{H^1(0,T)} + 1)|g|_{H^1(0,T)}$$

$$+ c(T_0)|u|_X^2 T^{1/4} + c(T_0)\sqrt{T}|u|_X^2.$$

Logo,

$$|\mathcal{T}(u_0, g, u)| \leq \frac{R}{2} + c(T_0)\sqrt{T}|u|_X|g|_{H^1} + c(T_0)T^{1/4}|u|_X^2 + c(T_0)\sqrt{T}|u|_X^2,$$

e, se $u \in \mathcal{B}_R$, então

$$|\mathcal{T}(u_0, g, u)| \leq \frac{R}{2} + c(T_0)\left(\sqrt{T}R|g|_{H^1} + T^{1/4}R^2 + \sqrt{T}R^2\right).$$

Escolhendo

$$T_1 < \left(\frac{5}{16}\right)^2 \left(c(T_0)(|g|_1 + R) + c^2(T_0)R^2\right)^{-2},$$

vamos ter que

$$c(T_0)\left(\sqrt{T_1}R|g|_{H^1} + T_1^{1/4}R^2 + \sqrt{T_1}R^2\right) \leq \frac{R}{2}.$$

Portanto, a escolha de T_1 garante que $u \longmapsto \mathcal{T}(u_0, g, u)$ aplica a bola $\mathcal{B}_R$ nela mesma e a Proposição 5 está provada. □

Proposição 2.2.4. *Suponha que* $g \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. *Então, existe um tempo* $T_2 \in]0, T_1]$, *tal que a aplicação* $u \longmapsto \mathcal{T}(u_0, g, u)$ *é uma contração sobre* $(\mathcal{B}_R, |\cdot|_X)$.

Demonstração: Aplicando a Proposição 2.2.2, com $v_0 = u_0$ e $h = g$ temos

$$|\mathcal{T}(u_0, g, u) - \mathcal{T}(u_0, g, v)|_X \leq cT^{1/4}|u - v|_X(|u|_x + |v|_X)$$

$$+ c\sqrt{T}|u - v|_X(|g|_{H^1(0,T)} + |u|_X + |v|_X),$$

onde $c = c(T_0)$. Logo, se $u, v \in \mathcal{B}_R$, então

$$|\mathcal{T}(u_0, g, u) - \mathcal{T}(u_0, g, v)|_X \leq c(2RT^{1/4} + 2R\sqrt{T} + \sqrt{T}|g|_{H^1(0,T)})|u - v|_X.$$

Escolhendo

$$T_2 < \frac{9}{16}\left(4c^2R^2 + c(2R + |g|_{H^1})\right)^{-2}$$

teremos que

$$c(2RT_2^{1/4} + 2R\sqrt{T_2} + \sqrt{T_2}|g|_{H^1(0,T)}) < 1.$$

Logo, a aplicação $u \longmapsto \mathcal{T}(u_0, g, u)$ é uma contração sobre $\mathcal{B}_R$. □

Para concluir a prova da Proposição 2.2.1 é suficiente aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach 1.4.1 para a aplicação $u \longmapsto \mathcal{T}(u_0, g, u)$ sobre o espaço métrico completo $(\mathcal{B}_R, |\cdot|_X)$. Isso garante a existência e unicidade de solução fraca do sistema (2). □

2.2.1 Dependência contínua dos dados iniciais e de fronteira

Proposição 2.2.5. *A solução u dada pela Proposição 2.2.1 depende continuamente de u_0 em $L^2((1+x^2)dx)$ e de g em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$.*

Demonstração: Mais uma vez, o resultado segue da Proposição 2.2.2 para tempos pequenos. De fato, temos que

$$\begin{aligned}|u-v|_X \leq{}& c|u_0 - v_0|\\ &+ c(T)\sqrt{T}(|g|_{H^1(0,T)} + |h|_{H^1(0,T)} + 1 + |u|_X)|g-h|_{H^1(0,T)}\\ &+ |u-v|_X c(T)\left((T^{1/4}+\sqrt{T})(|u|_X + |v|_X) + \sqrt{T}|h|_{H^1(0,T)}\right).\end{aligned}$$

Assim, se u_0 tende para v_0 em $L^2((1+x^2)dx)$ e se g tende para h em H^1, então u tende para v em X_T.

Os resultados acima foram obtidos localmente no tempo, mas como o intervalo de tempo onde eles são válidos dependem apenas de $|u_0|$ e $|g|_{H^1}$, podemos estendê-los para o intervalo onde a solução existe.
□

2.2.2 Existência e unicidade de solução global para o problema na semi-reta positiva

Introduzimos o espaço

$$\begin{aligned}\tilde{X}_T :=&\{w \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^+, (1+x^2)dx)) \mid w_x \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^+, (1+x)dx)),\\ &\sqrt{t}w_x \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^+, (1+x^2)dx)), \sqrt{t}w_{xx} \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^+))\}.\end{aligned}$$

Nosso objetivo é provar o seguinte resultado:

TEOREMA 4. Sejam $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+, (1+x^2)dx)$ e $g \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Então, existe uma única $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^+, (1+x^2)dx))$, solução de (1), tal que $u \in \tilde{X}_T$. Além disso, para todo $t > 0$, $u \in \mathcal{C}([t, +\infty[; H^2)$ e, para todo $t > 0$, $u(x,t)$ é a solução obtida por Bona e

Winther [3, 4].

Demonstração: Todas as estimativas obtidas na seção anterior se aplicam para o problema na semi-reta positiva ($L = +\infty$) já que elas são uniformes em relação a L. Isto nos dá a existência local e a unicidade no espaço $\tilde{X}_T$. Para provar que a solução é global, precisamos estabelecer algumas estimativas de energia. Por simplicidade, faremos as demonstrações no caso $g \equiv 0$. O caso geral pode ser obtido como em [3], usando a mudança de função $v = u - g(t)e^{-x}$.

Inicialmente, multiplicamos (1) por u e integramos na variável espacial sobre $[0, +\infty[$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} u^2 dx + u_x^2(0,t) = 0.$$

Integrando na variável temporal concluímos que $|u|_{L^2} \leq |u_0|_{L^2}$.

Multiplicando (1) por xu e integrando, segue que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} xu^2 dx - \int_0^{+\infty} u^2 dx - \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} u^3 dx + 3\int_0^{+\infty} u_x^2 dx = 0. \tag{32}$$

Usando a estimativa anterior vamos ter

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |u|^3 dx &\leq |u|_{L^\infty}|u|_{L^2}^2 \\ &\leq |u|_{L^\infty}|u_0|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Como $|u|_{L^\infty} \leq 2^{1/2}|u_x|_{L^2}^{1/2}|u_0|_{L^2}^{1/2}$, de (32), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} xu^2 dx + 3\int_0^{+\infty} u_x^2 dx \leq C_0^2 + 2^{1/2}C_0^{5/2}|u_x|_{L^2}^{1/2},$$

onde $C_0 = |u_0|_{L^2}$. Aplicando a desigualdade de Young com $p = 4$ e $q = 4/3$ o termo acima pode ser estimado da seguinte forma:

$$2^{1/2}C_0^{5/2}|u_x|_{L^2}^{1/2} \leq \frac{3}{4}\left(2^{1/3}C_0^{10/3}\right) + \frac{|u_x|_{L^2}^2}{4}.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} xu^2 dx + 3\int_0^{+\infty} u_x^2 dx \leq \mu_0 + |u_x|_{L^2}^2, \tag{32b}$$

com $\mu_0 = C_0^2 + 2^{1/3}C_0^{10/3}$, de onde concluímos que

$$2\int_0^T\int_0^{+\infty} u_x^2 dx dt \leq \mu_0 T + \mu_1,$$

com $\mu_1 = |u_0|_{L^2(\mathbb{R}^+,(1+x^2)dx)}$. Por outro lado, de (32b) também obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} xu^2 dx \leq \mu_0. \tag{33}$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} xu^2 dx \leq \mu_T,$$

onde $\mu_T = (\mu_0 T + \mu_1)$. Por outro lado multiplicando (1) por $x^2 u$, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} x^2u^2dx - 2\int_0^{+\infty} xu^2dx - \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} xu^3dx + 6\int_0^{+\infty} xu_x^2dx = 0$$

e as estimativas anteriores garantem que

$$2\int_0^{+\infty} xu^2dx + \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} xu^3dx \leq \left(2 + \frac{4}{3}|u|_{L^\infty}\right)\int_0^{+\infty} xu^2dx$$

$$\leq \left(2 + \frac{8C_0^{1/2}}{3}|u_x|_{L^2}^{1/2}\right)\mu_T.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} x^2u^2dx + 6\int_0^{+\infty} xu_x^2dx \leq \left(2 + \frac{8C_0^{1/2}}{3}|u_x|_{L^2}^{1/2}\right)\mu_T$$

e, consequentemente,

$$\int_0^{+\infty} x^2u^2dx + 6\int_0^t\int_0^{+\infty} xu_x^2dxds$$

$$\leq \left(2T + \frac{8C_0^{1/2}}{3}\int_0^t\int_0^{+\infty} u_x^2dxds\right)\mu_T + \mu_1$$

$$\leq 2T\mu_T + \frac{4C_0^{1/2}\mu_T^2}{3} + \mu_1.$$

Assim, obtemos a existência global na semi-reta positiva. Dado que $u(.,t) \in H^2$ para quase todo t, u é a solução obtida por Bona e Winther em [3, 4].

Agora, mostramos a unicidade da solução de (1): Sabemos que as soluções são tais que $u \in L^\infty(0,T;L^2)$, $u_x \in L^2(0,T;L^2)$ e $\sqrt{t}u_{xx} \in L^2(0,T;L^2)$. Sejam u e v duas soluções com as mesmas condições inicias e definamos $w = u - v$. Esta função satisfaz $w_t + w_x + w_{xxx} + wu_x + vw_x = 0$ e $w(x,0) = 0$. Multiplicando por w e integrando a expressão resultante com respeito à variável espacial x sobre $[0,+\infty[$ teremos

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} w^2(x,t)dx + w_x^2(0,t) + 2\int_0^{+\infty} w^2(x,t)u_x(x,t)dx$$

$$-\int_0^{+\infty} w^2(x,t)v_x(x,t)dx = 0,$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq 2G(t)|v_x - u_x|_{L^\infty}, \quad \text{onde} \quad G(t) := \int_0^{+\infty} w^2(x,t)dx.$$

Observe que G é uma função uniformemente contínua no intervalo $[0,T]$, Portanto, vamos mostrar que $|u_x(\cdot,s)|_{L^\infty} \in L_t^1$, e assim usar o Lema de Gronwall. Sabemos que

$$|u_x|_{L^\infty} \leq 2|u_x|_{L^2}^{1/2}|u_{xx}|_{L^2}^{1/2} = t^{-1/4} \ . \ |u_x|_{L^2}^{1/2} \ . \ t^{1/4}|u_{xx}|_{L^2}^{1/2}.$$

Além disso, como $u, v \in \tilde{X}_T$, estas soluções satisfazem $|u_x|_{L^2}^{1/2} \in L_t^4$, $t^{1/4}|u_{xx}|_{L^2}^{1/2} \in L_t^4$ e, por outro lado, $t^{-1/4} \in L_t^2$

Integrando com respeito à variável temporal e usando a desigualdade generalizada de Hölder 1.2.3 com $p_1 = 4$, $p_2 = 4$ e $p_3 = 2$, concluímos que

$$\int_0^t |u_x(\cdot,s)|_{L^\infty}ds \leq ||u_x|_{L^2}^{1/2}|_{L_t^4} \ . \ |t^{1/4}|u_{xx}|_{L^2}^{1/2}|_{L_t^4} \ . \ |t^{-1/4}|_{L_t^2}.$$

Portanto, $|u_x|_{L^\infty} \in L^1(0,T)$ e pelo Lema de Gronwall 1.4.5, teremos que $G \equiv 0$. Logo, $w \equiv 0$ em $[0,T]$, o que garante a unicidade da solução. $\square$

Capítulo 3

Convergência para a solução do problema na semi-reta positiva

Por simplicidade, nos restringimos ao caso $g = 0$, mas os resultados que provaremos são válidos se tomarmos $g \in H^1(\mathbb{R}^+)$.
O objetivo deste capítulo é provar o seguinte resultado:

TEOREMA 5. Consideremos a família de dados iniciais $u_0^L \in L^2([0, L], (1 + x^2)dx)$, tais que

$$\sup_{L \geq 1} \int_0^L |u_0^L|^2(x)(1 + x^2)dx < +\infty,$$

e $u_0^L \to u_0$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$, fortemente. Então, para todo $T > 0$, se L é suficientemente grande, $u^L \to u$ em $L^p(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^+))$, fortemente, para todo $p < +\infty$, onde $u(x, t)$ é a solução de (1) com dado inicial u_0.

Para provar este teorema, usaremos algumas estimativas de energia para o problema não linear (2). Portanto, precisamos de soluções mais regulares:

TEOREMA 6. Suponha que $u_0 \in H^3(0, L)$, $(u_0)_{xxx} \in L^2((1 + x^2)dx)$ e $g \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Então, u, a solução de (2) dada pelo Teorema 3, satisfaz $u_{xxx} \in X_T$, $\forall T < T_L$, onde T_L é o tempo máximo de existência da solução u.

Demonstração. Devemos resolver a equação integral $\mathcal{F}(u_0, g, u) = u$ no espaço

$$Y_T = \{u \in X_T, u_{xxx} \in X_T\}.$$

Encontra-se uma solução local no tempo, assim como na Proposição 2.2.2. Uma vez que esta solução local no tempo é construída, mostra-se que ela e o tempo de existência em Y_T coincidem, respectivamente, com a solução e o tempo de existência em X_T. □

3.1 Comportamento do tempo de existência

Proposição 3.1.1. *Tem-se que*

$$\lim_{L \to +\infty} T_L = +\infty$$

Demonstração: Para provar este resultado, vamos usar algumas estimativas de u em $L^\infty(0,T;H^1)$, mas como o dado inicial pode não estar em H^1, então não seria possível estimar u nesse espaço. Porém, para quase todo $t>0$, a solução $u(\cdot,t)$ encontra-se em H^1. Portanto, consideramos o problema de valor inicial em algum novo tempo de origem t_L, tal que $u(\cdot,t_L)\in H^1$.
Uma estimativa uniforme (com respeito a L) de $|u(\cdot,t)|_{H^1}$ é dada no seguinte Lema:

Lema 3.1.1. *Para todo $L>0$, existe um tempo t_L, tal que*

$$\int_0^L (1+x)u_x^2(x,t_L)dx \le \frac{C}{T_2},$$

onde $C=|u_x|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^+;(1+x)dx))}$ e T_2 é o tempo de existência dado na Proposição 2.2.4. Este tempo T_2 é independente de L.

Demonstração: Sabemos que $u_x\in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^+;(1+x)dx))$. Então, para todo $L>0$, tem-se

$$\int_0^{T_2}\int_0^L (1+x)u_x^2(x,t)dxdt \le C.$$

Por outro lado, se supomos que para todo $t\in(0,T_2)$

$$\int_0^L (1+x)u_x^2(x,t)dx > \frac{C}{T_2},$$

então, integrando na variável temporal sobre $(0,T_2)$ vamos ter uma contradição.

□

Agora, vamos considerar o problema (2) com dado inicial $u(\cdot,t_L)$. Por simplicidade, vamos denotar $t_L=0$ e $u_0=u(\cdot,t_L)$. Adaptaremos o método utilizado em [11] para provar a existência global com dados pequenos.

Introduzimos as funções dependentes do tempo:

$$X(t)=\sup\left(\int_0^t |(1+\sqrt{x}u)|^4_{L^\infty}(s)ds, 1\right),$$

$$Y(t)=\int_0^L (1+x)(u_x^2-u^2-u^3/3)dx.$$

Observe que $X(t)$ é não decrescente e $X(t)\ge 1$. A ideia da prova é mostrar que $X(t)$ controla a norma $|u|$ da solução. Logo, prova-se que $X(t)$ controla também $Y(t)$ que, por sua vez, controla $|(1+\sqrt{x})u_x|_{L^2}$. Portanto, obtemos uma desigualdade para $X(t)$ na qual os coeficientes dos termos não lineares são sempre proporcionais a alguma potência positiva de L^{-1}.

Estimativas para X(t):

Consideramos o problema (2) com $g\equiv 0$. Multiplicando a equação por u e integrando,

obtemos
$$\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx + u^2(L,t) + \frac{2}{3}u^3(L,t) + u_x^2(0,t) = 0.$$
Logo,
$$\int_0^L u^2dx - \int_0^L u_0^2dx + \int_0^t u_x^2(0,s)ds \leq \frac{2}{3}\int_0^t |u^3(L,s)|ds.$$
Tomando $\gamma^{1/3} \in (L^{1/2}, +\infty)$, se $x \in (0,L)$, $L^{1/2} \leq \gamma^{1/3}(1+\sqrt{x})$. Assim,
$$\int_0^L u^2dx + \int_0^t u_x^2(0,s)ds \leq c_0 + \frac{\gamma}{L^{3/2}}\int_0^t |(1+\sqrt{x})u|_{L^\infty}^3(s)ds,$$
onde $c_0 = \int_0^L u_0^2dx$. Pela desigualdade de Hölder com $p=4$ e $q=4/3$ concluímos que
$$|u|_{L^2}^2 + \int_0^t u_x^2(0,s)ds \leq c_0 + \frac{\gamma\; t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4}. \tag{34}$$

Agora, multiplicando (2) por xu vamos obter
$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu^2dx - \int_0^L u^2dx + Lu^2(L,t)$$
$$+\frac{2}{3}Lu^3(L,t) - \frac{2}{3}\int_0^L u^3dx + 3\int_0^L u_x^2dx = 0;$$
ou seja;
$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu^2dx + 2\int_0^L u_x^2dx \leq |u|_{L^2}^2$$
$$+\int_0^L u^3dx - \frac{2}{3}Lu^3(L,t) - |u_x|_{L^2}^2.$$
Como
$$\int_0^L u^3dx \leq |u|_{L^\infty}|u|_{L^2}^2 \leq \sqrt{2}|u_x|_{L^2}^{1/2}|u|_{L^2}^{5/2},$$
usando a desigualdade de Young com $p=4$ e $q=4/3$, obtemos
$$\int_0^L u^3dx \leq |u_x|_{L^2}^2 + 2^{2/3}|u|_{L^2}^{10/3}.$$
Mas por (34)
$$2^{2/3}|u|_{L^2}^{10/3} \leq 2^{2/3}\left(c_0 + \frac{\gamma\; t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4}\right)^{5/3}$$
$$\leq 2^{2/3}(\kappa c_0)^{5/3} + 2^{2/3}\frac{(\kappa\gamma)^{5/3}t^{5/12}}{L^{5/2}}X^{5/4},$$
onde $\kappa > 0$ é tal que $|\cdot|_s \leq \kappa|\cdot|_{\frac{5}{3}}$, ($|\cdot|_{\frac{5}{3}}$ é a $\frac{5}{3}$-norma em $\mathbb{R}^n$ e $|\cdot|_s$ a norma da soma

em $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$). Usando estas desigualdades e (34) concluímos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^L xu^2dx + 2\int_0^L u_x^2dx \leq c_0 + 2^{2/3}(\kappa c_0)^{5/3} - \frac{2}{3}Lu^3(L,t)$$

$$+ \frac{\gamma\ t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4} + 2^{2/3}\frac{(\kappa\gamma)^{5/3}t^{5/12}}{L^{5/2}}X^{5/4}.$$

Integrando na variável temporal sobre $(0,t)$. e usando o fato da função $X(t)$ ser não decrescente, obtém-se

$$\int_0^L xu^2dx + 2\int_0^t\int_0^L u_x^2dxds \leq \rho_0 + \rho_1 t + L\frac{\gamma\ t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{5/4},$$

$$+ \frac{\gamma\ t^{5/4}}{L^{3/2}}X^{5/4} + 2^{2/3}\frac{(\kappa\gamma)^{5/3}t^{17/12}}{L^{5/2}}X^{5/4},$$

onde $\rho_0 = \int_0^L xu_0^2dx$ e $\rho_1 = c_0 + 2^{2/3}(\kappa c_0)^{5/3}$. Agora, sabemos que

$$t^{-5/4} + t^{-1/4} + t^{-1/12} \leq t_L^{-5/4} + t_L^{-1/4} + t_L^{-1/12} =: \alpha_L, \quad \text{para todo } t \geq t_L.$$

Multiplicando esta expressão por $t^{3/2}$, temos

$$t^{1/4} + t^{5/4} + t^{17/12} \leq \alpha_L t^{3/2}, \quad \text{para todo } t \geq t_L.$$

Definimos

$$\rho_2 := \max\left\{\gamma, 2^{2/3}(\kappa\gamma)^{5/3}\right\}$$

$$\rho_3 := \max\left\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\alpha_L\right\},$$

Como $L > 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^L xu^2dx + 2\int_0^t\int_0^L u_x^2dxds &\leq \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2\frac{\left(t^{1/4} + t^{5/4} + t^{17/12}\right)}{L^{1/2}}X^{5/4} \\ &\leq \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2\alpha_L\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4} \\ &\leq \rho_3\left(1 + t + \frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right). \qquad (35)\end{aligned}$$

Somando (34) e (35) concluímos que

$$\int_0^L (1+x)u^2dx \le c_0 + \frac{\gamma\, t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4} + \rho_3\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right)$$

$$\le \rho\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right), \tag{35b}$$

onde ρ depende de t_L. Dado que (2) pode ser escrito como $u_t+(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx})_x=0$, depois de multiplicar (2) por $u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}$ vamos ter

$$\int_0^L u_t\left(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)^2\right)dx = 0.$$

Integrando por partes e usando as condições iniciais e de contorno, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \left(u_x^2 - u^2 - \frac{u^3}{3}\right)dx + u_{xx}^2(0,t) \le \left(u+\frac{1}{2}u^2\right)^2(L,t). \tag{36}$$

Multiplicando (2) por $x(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx})$ concluímos que

$$\int_0^L xu_t\left(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^L x\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)^2\right)dx = 0,$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L x\left(u^2+\frac{u^3}{3}-u_x^2\right)dx - \int_0^L u_xu_tdx + \frac{1}{2}L\left(u+\frac{u^2}{2}\right)^2(L,t)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^L\left(u+\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)^2dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L x\left(u_x^2-u^2-\frac{u^3}{3}\right)dx \le L\left(u+\frac{u^2}{2}\right)^2(L,t) - 2\int_0^L u_xu_tdx.$$

Antes de continuar, vamos estimar o último termo que está à direita desta expressão. Pela desigualdade de Young com $p=q=2$, teremos

$$\int_0^L u_xu_tdx \le \int_0^L u_x^2dx + \int_0^L u_t^2dx.$$

Usando (2) e a equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$, com $n\ge 3$ e η introduzido em (15b), obtém-se

$$\int_0^L u_x u_t dx \leq |u_x|_{L^2}^2 + \eta^2 \int_0^L \left(u_x^2 + u^2 u_x^2 + u_{xxx}^2\right) dx$$

$$\leq (1+\eta^2)|u_x|_{L^2}^2 + \eta^2 |u_{xxx}|_{L^2}^2 + \eta^2 \int_0^L u^2 u_x^2 dx.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L x\left(u_x^2 - u^2 - \frac{u^3}{3}\right) dx \leq L\left(u + \frac{u^2}{2}\right)^2 (L,t) + (1+2\eta^2)|u_x|_{L^2}^2$$

$$+ 2\eta^2 |u_{xxx}|_{L^2}^2 + 2\eta^2 \int_0^L u^2 u_x^2 dx, \tag{37}$$

somando (36) e (37), segue que

$$Y'(t) \leq 2L\left(u + \frac{u^2}{2}\right)^2 (L,t) + (1+2\eta^2)|u_x|_{L^2}^2$$

$$+ 2\eta^2 |u_{xxx}|_{L^2}^2 + 2\eta^2 \int_0^L u^2 u_x^2 dx,$$

pois $L \geq 1$. Portanto,

$$Y(t) - Y(0) \leq 2\gamma^{2/3} \int_0^t \left(\frac{\gamma^{1/3}}{L^{1/2}} |(1+\sqrt{x})u|_{L^\infty} + \frac{\gamma^{2/3}}{2L} |(1+\sqrt{x})u|_{L^\infty}^2\right)^2 (s) ds$$

$$+ (1+2\eta^2)|u|_X^2 ds + 2\eta^2 |u_{xxx}|_X^2$$

$$+ 2\eta^2 \int_0^t \int_0^L u^2 u_x^2 dx ds. \tag{37b}$$

Para o último termo da desigualdade acima temos que

$$
\begin{aligned}
2\eta^2 \int_0^t \int_0^L u^2 u_x^2 dx ds &\leq \frac{2\eta^2 \gamma^{2/3}}{L} \int_0^t |(1+\sqrt{x})u|^2_{L^\infty}(s) \int_0^L u_x^2 dx ds \\
&\leq \frac{2\eta^2 \gamma^{2/3}}{L} X^{1/2} \left(\int_0^t s^{-2} \left(\int_0^L s u_x^2 dx \right)^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2\eta^2 \gamma^{2/3}}{t_L^2 L} t^{1/2} X^{1/2} |\sqrt{t} u_x|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^+;(1+x)dx))} \\
&\leq \alpha_0 \frac{t^{1/2}}{L} X^{1/2},
\end{aligned}
$$

onde $\alpha_0 = \dfrac{2\eta^2\gamma^{2/3}}{t_L^2}|u|_X$. Retornando a (37b), segue que

$$
Y(t) \leq \frac{2\eta^2\gamma}{L} \int_0^t |(1+\sqrt{x})u|^2_{L^\infty}(s) ds + \alpha_0 \frac{t^{1/2}}{L} X^{1/2} + \frac{\alpha_1}{L^2} X + \alpha_2,
$$

onde $\alpha_1 = \eta^2\gamma^{5/3}/2$ e $\alpha_2 = (1+2\eta^2)|u|^2_X ds + 2\eta^2 |u_{xxx}|^2_X + Y(0)$. Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos a seguinte estimativa para Y(t):

$$
\begin{aligned}
Y(t) \leq& \alpha_3 \frac{t^{1/2}}{L} X(t)^{1/2} + \frac{\alpha_1}{L^2} X(t) + \alpha_2 \\
\leq& \alpha_5 \frac{t^{1/2}+1}{L} X(t) + \alpha_2,
\end{aligned}
$$

onde $\alpha_3 = \max\{\alpha_0, 2\eta^2\gamma\}$ e $\alpha_5 = \max\{\alpha_1, \alpha_3\}$, Como $t_L \leq t$ temos que $(1+t^{1/2}) \leq (1+t_L^{-1/2})t^{1/2}$ e

$$
Y(t) \leq \alpha \frac{t^{1/2}}{L} X(t) + \alpha_2,
$$

onde $\alpha = \alpha_5(1+t_L^{-1/2})$. Usando a definição de $Y(t)$ nesta expressão vamos ter

$$
\int_0^L (1+x) u_x^2 dx \leq \alpha_2 + \alpha \frac{t^{1/2}}{L} X(t) + \int_0^t (1+x) \left(u^2 + \frac{u^3}{3} \right) dx.
$$

Para estimar o último termo, usamos inicialmente (35b):

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (1+x) \left(u^2 + \frac{u^3}{3} \right) dx \leq& \rho \left(1 + t + \frac{t^{3/2}}{L^{1/2}} X^{5/4} \right) \\
&+ \frac{1}{3}|u|_{L^\infty} \int_0^L (1+x) u^2 dx.
\end{aligned}
\tag{37c}
$$

Por outro lado, usando a desigualdades de Young ($p = q = 2$), (30b), (34) e (35b) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}|u|_{L^\infty}\int_0^L (1+x)u^2dx \\
&\leq \frac{1}{18}|u|^2_{L^\infty} + \frac{1}{2}\left(\int_0^L (1+x)u^2dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{9}|u|_{L^2}|u_x|_{L^2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^L (1+x)u^2dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2}|u|^2_{L^2} + \frac{1}{162}|u_x|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\left(\int_0^L (1+x)u^2dx\right)^{1/2} \\
&\leq |u|^2_{L^2} + \frac{1}{162}\int_0^L (1+x)u_x^2dx + \frac{1}{2}\left(\int_0^L (1+x)u^2dx\right)^{1/2} \\
&\leq c_0 + \gamma\frac{t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4} + \frac{\rho^{1/2}}{2}\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{1}{162}\int_0^L (1+x)u_x^2dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1+x)\left(u^2+\frac{u^3}{3}\right)dx &\leq c_0 + \gamma\frac{t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4} + \frac{\rho^{1/2}}{2}\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right)^{1/2} \\
&\quad + \rho\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right) + \frac{1}{162}\int_0^L (1+x)u_x^2dx,
\end{aligned}$$

De (37c) e da desigualdade acima concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{161}{162}\int_0^L (1+x)u_x^2dx \leq{}& \alpha_2 + \alpha\frac{t^{1/2}}{L}X(t) + c_0 + \gamma\frac{t^{1/4}}{L^{3/2}}X^{3/4} \\
&+ \frac{\rho^{1/2}}{2}\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right)^{1/2} + \rho\left(1+t+\frac{t^{3/2}}{L^{1/2}}X^{5/4}\right).
\end{aligned}$$

Por simplicidade denotamos

$$A := \left(1 + \frac{t^{1/2}}{L} X(t)\right) \quad \text{e} \quad B := \left(1 + t + \frac{t^{3/2}}{L^{1/2}} X^{5/4}\right).$$

Aplicando os argumentos usados anteriormente, concluímos que

$$\int_0^L (1+x) u_x^2 dx \leq \beta_0 \left(A + A^{1/2} + B\right)$$

$$\leq \beta_1 (A + B),$$

pois $A \geq 1$, onde os coeficientes β_0 e β_1 dependem de t_L. Logo, como $t_L \leq t$ temos

$$\int_0^L (1+x) u_x^2 dx \leq \beta_1 \left(1 + t + \frac{t^{3/2} + t^{1/2}}{L^{1/2}} X^{5/4}\right)$$

$$\leq \beta_1 \left(1 + t + \frac{(1 + t_L^{-1}) t^{3/2}}{L^{1/2}} X^{5/4}\right)$$

$$\leq \beta \left(1 + t + \frac{t^{3/2}}{L^{1/2}} X^{5/4}\right), \qquad (38)$$

onde $\beta = (1 + t_L^{-1})\beta_1$. Pela definição de X e aplicando (30b),(35b) e (38) obtém-se

$$X'(t) \leq |(1 + \sqrt{x}) u|_{L^\infty}^4$$

$$\leq 4\eta^4 |\sqrt{1+x}\, u|_{L^2}^2 |\sqrt{1+x}\, u_x|_{L^2}^2$$

$$\leq 4\eta^4 \rho\beta \left(1 + t + \frac{t^{3/2}}{L^{1/2}} X^{5/4}\right)^2 \leq 4\eta^6 \rho\beta \left(1 + t^2 + \frac{t^3}{L^{1/2}} X^{5/2}\right),$$

onde η foi introduzida em (15b). Integrando com respeito ao tempo vamos ter

$$X(t) - 1 \leq 4\eta^6 \rho\beta \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4L^{1/2}} X^{5/2}\right)$$

$$\leq 4\eta^6 \rho\beta \left(\kappa_L t^6 + \frac{t^4}{L^{1/2}} X^{5/2}\right),$$

onde $\kappa_L = t_L^{-5} + t_L^{-3}$. Assim,

$$X(t) \leq \tau \left(1 + t^6 + \frac{t^4}{L^{1/2}} X^5\right),$$

(39)

onde $\tau := \max\{4\eta^6\rho\beta\kappa_L, 1\}$.
Agora vamos concluir a prova da Proposição 3.1.1. Inicialmente, observe que a função $X(t)$ controla a norma $|u|$ da solução. Portanto, para concluir o resultado, precisamos provar que $X(t)$ está limitada em um intervalo de tempo $[0,T]$, onde $T \to +\infty$ quando $L \to +\infty$.
Tomamos $T > 0$ e fazendo $R = 2\tau(1+T)^6$, temos que $R > 1$, pois $\tau > 1$. Por outro lado, da condição

$$\lim_{t\to 0} X(t) = X(0) = 1,$$

teremos que para $\epsilon = R - 1$, existe um tempo $T' \in]0,T]$, tal que $\sup_{t\in[0,T']} X(t) \le R$. Então, (39) implica que

$$\sup_{t\in[0,T']} X(t) \le \frac{R}{2} + \tau T^4 R^5 / L^{1/2}.$$

Escolhendo T, tal que $\tau T^4 R^4 / L^{1/2} \le 1/4$, garantimos que

$$\sup_{t\in[0,T']} X(t) \le 3R/4.$$

Esta condição é satisfeita sempre que $2^4\tau^5 T^4 (1+T^6)^4 / L^{1/2} \le 1/4$; ou seja; quando $T \sim L^\lambda$ para algum $\lambda > 0$. Por continuidade, segue que $T' = T$. Portanto, o tempo de existência T_L tende para $+\infty$ quando L tende para $+\infty$. $\square$

3.2 Convergência na semi-reta positiva.

Demonstração do Teorema 5: Seja $T > 0$. Pela Proposição 3.1.1, se L é suficientemente grande, a solução u^L de (2) está limitada em $L^2(0,T;H^1_{loc})$. Além disso, usando a equação, temos que u^L_t está limitada em $L^2(0,T;H^{-2}_{loc})$. portanto, usando argumentos de compacidade [22], existe uma subsequência $u^{L_j} := u^L$ e uma função u, tais que

$$u_L \rightharpoonup u \quad \text{em } L^2(0,T;H^1_{loc}),$$

$$u_L \to u \quad \text{em } \mathcal{C}(0,T;H^{-s}) \cap L^p(0,T;L^2_{loc}),$$

quando $L \to +\infty$, para todo $s > 0$ e $p < \infty$. Portanto, $u(x,0)$ e $u(x,0)$ fazem sentido e coincidem com $g(t)$ e $u_0(x)$, respectivamente. Além disso, podemos passar a parte linear da equação ao limite. Para o termo não linear, basta observar que $u^L u^L_x \rightharpoonup uu_x$ em $L^2(0,T;L^2_{loc})$, obtendo assim que u satisfaz a identidade 2.1.

Bibliografia

[1] Edwin F. Beckenbach, Richard Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, 1961.

[2] J.L. Bona, R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 278 (1975), 555–601.

[3] J.L. Bona, R. Winther, *The Korteweg–de Vries equation, posed in a quarter-plane*, SIAM J. Math. Anal. 14 (6) (1983), 1056–1106.

[4] J.L. Bona, R. Winther, *The Korteweg–de Vries equation in a quarter-plane, continuous dependence results*, Dif. Int. Eq. 2 (2) (1989), 228–250.

[5] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II: the KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. 3 (3) (1993), 209–262.

[6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1983).

[7] R. Cipolatti,*Cálculo Avançado I*, IM/UFRJ (2012).

[8] T. Colin, M. Gliscon. *An initial-boundary-value problem that approximate the quarter-plane problem for the Korteweg-de Vries equation*, Nonlinear Analysis 46 (2001), 869-892.

[9] T. Colin, J.-M. Ghidaglia, *Un problème mixte pour l'équation de Korteweg–de Vries sur un intervalle borné*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 324 (1997), 599–603.

[10] T. Colin, J.-M. Ghidaglia, *Un problème aux limites pour l'équation de Korteweg–de Vries sur un intervalle borné*, Journées équations aux dérivées partielles, Saint-Jean-de Monts, exposé No. 3, 1997.

[11] T. Colin, J.-M. Ghidaglia, *An initial-boundary-value problem for the Korteweg–de Vries equation posed on a finite interval*, Rapport Interne de l'Unité Mathématiques Appliquées de Bordeaux, No 98009, 1998.

[12] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley - Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, (1999).

[13] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, 2º Edição, Rio de Janeiro, UFRJ - IM, (2005).

[14] G. Helmberg, *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland Publishing Company, (1969).

[15] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear with estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. (9) (1996), (2) (1994), 573–603.

[16] D.J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. 39 (1895) 422–443.

[17] L.C. Evans, *Partial Differential Equations* Graduate Studies in Mathematics,AMS, 1998.

[18] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext. Springer, New York, 2009.

[19] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[20] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).

[21] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, (1976).

[22] J. Simon, *Compact sets in the space Lp(0,T;B)*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987), 65–96.

[23] R. Temam, *Sur un problème non linéaire*, J. Math. Pures Appl. 48 (1969), 159–172.