Representações de Weierstrass

Paul Eladio Luque Ccama

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Orientadora: Lacramiora Marianty Ionel

Rio de Janeiro

26 de Maio de 2014

Representações de Weierstrass

Paúl Eladio Luque Ccama

Orientadora: Lacramiora Marianty Ionel

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Aprovada por:

Presidente, Profª. Lacramiora Marianty Ionel - IM/UFRJ

Prof. Stefano Nardulli - IM/UFRJ

Profª. Abigail Silva Duarte Folha - IM/UFF

Suplente, Prof. Michael B. Deutsch - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

26 de Maio de 2014

CIP - Catalogação na Publicação

L966r

Luque Ccama, Paul Eladio
Representações de Weierstrass / Paul Eladio Luque Ccama. -- Rio de Janeiro, 2014.
94 f.

Orientadora: Lacramiora Marianty Ionel.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Espaço Hiperbólico. 2. Representação de Enneper-Weierstrass. 3. Representação de Bryant. I. Ionel, Lacramiora Marianty, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar comigo sempre. Principalmente pela vida que me permitiu viver; pelas dificultades que acima de tudo, me tornaram o que sou hoje.

A meus pais Eladio Luque e Corina Ccama que são razão de todo esforço e dedicação, pelo incentivo, educação, apoio e amor dedicados a mim durante toda minha vida.

A minha orientadora Marianty Ionel pela aceitação da orientação, pela compreensão e pelo apoio no decorrer deste trabalho.

Aos professores Stefano Nardulli, Michael Deutsch pelo apoio brindado.

A Capes pelo auxilio financeiro que permitiu com que eu pudesse prosseguir meus estudos.

A todos que de alguma forma comtribuíram para a conclusão deste trabalho. Que Deus os abençoe.

Resumo

Neste trabalho pretendemos descrever duas representações tipo Weierstrass no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. A primeira representação que exibimos sera para superfícies de curvatura media um, baseado no trabalho de Bryant [1]. A segunda representação sera para superfícies planas, baseado no trabalho de Galvez, Martinez e Milan [7].
Estas representações possem uma grande semelhança com a representação de Weierstrass para superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$.

Palavras Chaves: Superfícies Minimas, Espaço Hiperbólico, Representação de Enneper-Weierstrass, Representação de Bryant.

Abstract

In the present work we describe two Weierstrass-type representations in the hyperbolic 3-space $\mathbb{H}^3$. The first such representation is for surfaces of constant mean curvature one in $\mathbb{H}^3$, based on the work of Bryant [1]. The second representation is for flat surfaces in $\mathbb{H}^3$, based on the work of Galvez, Martinez and Milan [7]. These representations are analogous to the well-known Weiestrass-Enneper representation for minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$.

Key words: Minimal Surfaces, Hyperbolic Space, Enneper-Weierstrass Representation, Bryant Representation.

Sumário

1 Preliminares **4**

1.1 O Método do Referencial Móvel 4

1.1.1 Equações de estrutura de $\mathbb{R}^3$ 4

1.1.2 Variedades Riemannianas 13

1.2 Representação de Enneper-Weierstrass 18

1.2.1 Alguns Exemplos 26

2 Representação de Bryant **28**

2.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$ 28

2.2 Modelos de Espaço Hiperbólico 29

2.2.1 Modelos de Semi-espaço Superior 29

2.2.2 Modelos de Poincaré 29

2.2.3 Modelos de Minkowski 29

2.2.4 Modelo Hermitiano 30

2.3 Teoria Local das Superfícies de $\mathbb{H}^3$ 36

2.3.1 Equações de estrutura de $\mathbb{H}^3$ 37

2.3.2 Curvatura Média e Gaussiana 42

2.4 Aplicação Hiperbólica de Gauss 44

2.5 Teorema de Representação de Bryant 47

3 Superfícies planas no $\mathbb{H}^3$ 60

3.1 Representação Conforme das Superfícies Planas no Espaço Hiperbólico 60

3.2 Representação Matricial 68

3.3 Alguns Exemplos 83

3.3.1 Superfícies paralelas 83

3.3.2 Superfícies de revolução 84

Introdução

Superfícies mínimas é um dos principais tópicos da geometria diferencial, que desperta um interesse muito grande entre os matemáticos. Os resultados destas superfícies encantam por ter fácil visualização e por ser uma teoria muito rica. Tem conexões profundas com as funções analíticas de variáveis complexas e equações diferenciais parciais. Um dos mais belos efeitos disto é a bem conhecida representação de Weierstrass para superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$, consistindo de uma função meromorfa g e uma 1-forma holomorfa ω que descrevem inteiramente uma tal superfície. Isso influenciou na procura de uma representação análoga em outros modelos espaciais, particularmente em $\mathbb{H}^3$.

A teoria de superfícies de curvatura média um no espaço hiperbólico começou com o trabalho de R. Bryant [1], onde foi obtida uma representação de tais superfícies em termos de dados holomorfos, em analogia com a representação de Weierstrass em $\mathbb{R}^3$.

O trabalho pioneiro de Bryant tem despertado um interesse ao estudo de superfícies de curvatura media um, ou seja CMC-1, em $\mathbb{H}^3$. Em 1993, M. Umehara e K. Yamada [14], refinaram consideravelmente o trabalho de Bryant e foram capazes de criar uma ampla classe de exemplos, conhecido sob o nome de superfícies de Bryant.

As superfícies de Bryant não são a única classe de superfície em $\mathbb{H}^3$ que admite uma representação conforme. Mais concretamente, em [7] Gálvez, Martínez e Milán demostraram que as superfícies planas de $\mathbb{H}^3$ podem ser descritas a través de dados holomorfos, no espirito da representação de Bryant.

Apos o aparecimento deste trabalho muitos matemáticos contribuíram para o tema. Como exemplos, podemos citar os trabalhos de Kokubu, Rossman, Saji, Umehara e Yamada [10] e [9], que fizeram estudos sobre singularidades em superfícies planas.

Agora vamos descrever brevemente o contendo desse trabalho.

No Capitulo 1, fazemos um breve estudo sobre alguns resultados de geometria Riemanniana via método do referencial móvel, e caracterizamos a aplicação normal de Gauss.

Teorema 0.0.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ superfície imersa. A aplicação normal de Gauss é conforme, se e somente se ou M é totalmente umbílica ou minimal.*

Logo apresentaremos a representação de Enneper-Weierstrass para uma superfície mínima.

Teorema 0.0.2 (**Teorema de Representação de Weierstrass**). *Qualquer imersão minima conforme não-plana $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com M simplesmente conexo pode ser escrita na forma*

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{f(1-g^2)}{2}dz\right) \\ x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{if(1+g^2)}{2}dz\right) \\ x_3(z) &= Re\left(\int_0^z fgdz\right) \end{aligned} \tag{1}$$

onde $z \in M$, $f(z)dz$ é 1-forma holomorfa, $g(z)$ é função meromorfa e cada polo de ordem m de g é um zero de ordem $2m$ de $f(z)$. A reciproca também vale: dadas 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e função meromorfa g em M, onde os polos de ordem m de g são zeros de ordem $2m$ de f, podemos encontrar imersão minima conforme não-plana em $\mathbb{R}^3$ a través das equações acima.

No Capitulo 2, fazemos uma breve revisão do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, apresentando alguns modelos e as equações de estrutura de $\mathbb{H}^3$. Também definiremos uma aplicação de Gauss hiperbólica análoga a aplicação normal de Gauss em $\mathbb{R}^3$ e mostraremos um resultado análogo ao caso das superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 0.1. *A aplicação hiperbólica de Gauss $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se, e somente se, f é totalmente umbílica (neste caso $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação) ou f satisfaz $H \equiv 1$ (nesse casso $[e_0 + e_3]$ preserva a orientação).*

A continuação demostraremos o teorema de representação de Bryant. Segue abaixo o enunciado.

Teorema 0.0.3. *Seja M^2 uma superfície de Riemann e $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ uma imersão holomorfa nula. Então $e_0 \circ F = f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão conforme com $H \equiv 1$. Reciprocamente, se M^2 é simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão com $H \equiv 1$, então existe uma imersão $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ holomorfa, com respeito a estrutura complexa sobre M^2, tal que $f = e_0 \circ F$. Ademais, F é única a menos de uma multiplicação por uma constante $g \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$.*

No Capitulo 3, centramos o estudo nas superfícies planas no espacio hiperbólico, falando sobre a existência de coordenadas isotérmicas globais e exibimos a segunda forma fundamental em uma coordenada conforme. Para a aplicação de Gauss hiperbólica mostraremos um resultado análogo ao caso das superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$ e de curvatura media um no $\mathbb{H}^3$.

Teorema 0.0.4. *Seja N uma superfície orientada e conexa e $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão tal que sua segunda forma fundamental é definida positiva para uma escolha de campo de vetores unitário normal a η. Se em N consideramos a estrutura conforma determinada pela segunda forma fundamental, então a aplicação hiperbólica de Gauss $[\varphi - \eta] : N \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se e somente se a métrica induzida por φ em N é plana ou φ é totalmente umbílica.*

Finalmente enunciamos e demostramos o análogo do teorema de representação de Weierstrass para superfícies planas (ver 3.2.1), dando como exemplos as superfícies paralelas de uma superfície plana e as superfícies de revolução.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos algumas definições e alguns resultados básicos de geometria Riemanniana com o intuito de fixar a notação, admitindo que o leitor tinha se familiarizado com os pré-requisitos necessários. Para este capítulo as principais referências são [2], [3] [4].

1.1 O Método do Referencial Móvel

1.1.1 Equações de estrutura de $\mathbb{R}^3$

Definição 1.1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $p \in U$ fixo arbitrário*

i) Consideramos campos de vetores $e_i : U \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$ tais que, os vetores $e_1(p), e_2(p), e_3(p)$ formem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3_p$, $\forall\, p \in U$. O conjunto dos campos e_1, e_2, e_3 é chamado um referencial (triedro móvel) em U.

ii) Consideramos o espaço dual $(\mathbb{R}^3_p)^*$ de $\mathbb{R}^3_p$, e sejam $(\theta_1)_p, (\theta_2)_p.(\theta_2)_p$ os elementos da base dual de $(\mathbb{R}^3_p)^*$. Para cada i, θ_i é 1-forma diferencial em U. O conjunto das 1-formas $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ é chamado o coreferencial de e_1, e_2, e_3.

Para cada i tem sentido falar da diferencial $(de_i)_p : T_pU \longrightarrow \mathbb{R}^3$ da aplicação $e_i : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Logo para cada $v \in T_pU$, $(de_i)_p(v) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear de

$e_1(p), e_2(p), e_3(p)$, ou seja:

$$(de_i)_p(v) = (\theta_{i1})_p(v)e_1(p) + (\theta_{i2})_p(v)e_2(p) + (\theta_{i3})_p(v)e_3(p)$$

Como $(de_i)_p$ é linear em v, tem-se que cada coeficiente $(\theta_{ij})(v)$, $i, j = 1, 2, 3$ é linear em v.
Decorre daí que θ_{ij} são 1-formas em U, $i, j = 1, 2, 3$.
Deixando cair o índice p e a indicação do argumento v, escrevemos:

$$\begin{aligned} de_1 &= \theta_{11}e_1 + \theta_{12}e_2 + \theta_{13}e_3 \\ de_2 &= \theta_{21}e_1 + \theta_{22}e_2 + \theta_{23}e_3 \\ de_3 &= \theta_{31}e_1 + \theta_{32}e_2 + \theta_{33}e_3 \end{aligned}$$

ou, mais sucintamente

$$de_i = \sum_{j=1}^{3} \theta_{ij}e_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

As formas θ_{ij} são chamadas as formas de conexão do referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$.
Em resumo, associados a um referencial e_1, e_2, e_3 em $U \subset \mathbb{R}^3$, obtivemos um coreferencial $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e formas de conexão θ_{ij}.

Observação:

1. Das nove formas θ_{ij} apenas três são independentes. Com efeito:
   Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ uma curva parametrizada diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.
   Restringindo o produto escalar $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ a curva α e derivando em t, obtemos:

   $$\left\langle \frac{de_i}{dt}, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \frac{de_j}{dt} \right\rangle = 0$$

   donde:

   $$\begin{aligned} (\theta_{ij})_p(v) &= \langle (de_i)_p(v), e_j \rangle \\ &= -\langle e_i, (de_j)_p(v) \rangle \\ &= -(\theta_{ji})_p(v) \end{aligned}$$

   Por tanto:
   $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ e, em particular $\theta_{ii} = 0$, $\forall\, i = 1, 2, 3$.

2. Entre as formas θ_i e θ_{ij} e suas diferenciais existem certas relações (equações de estrutura de Élie Cartan) que estão na base da geometria local das subvariedades de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.1.1 (**Equações de Estrutura de E.Cartan).** *Seja $U \in \mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 um referencial ortonormal em U e θ_i, θ_{ij} o coreferencial e as formas de conexão do referencial e_1, e_2, e_3. Então:*

$$d\theta_i = \sum_k^3 \theta_{ik} \wedge \theta_k \tag{1.1}$$

$$d\theta_{ij} = \sum_k^3 \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} \tag{1.2}$$

Demonstração. Seja $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$ os vetores da base canônica associada a origem de $\mathbb{R}^3$. Para cada ponto p, existe uma matriz ortogonal $(a_{ij}(p))$ de mudança da base $\{e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ para $\{u_1, u_2, u_3\}$ (supostos transladados para p) dada por

$$e_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(p) u_j$$

Se dx_1, dx_2, dx_3 é a base dual de u_1, u_2, u_3, temos:

$$\theta_i(p) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(p) dx_j$$

Inicialmente, vamos provar que $da_{ij} = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} a_{kj}$.
De fato,

$$de_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} e_k = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \left(\sum_{j=1}^3 a_{kj} u_j \right) \tag{1.3}$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} a_{kj} u_j. \tag{1.4}$$

Como $de_i = \sum_{j=1}^3 da_{ij} u_j$, comparando os somatórios, concluímos que

$$da_{ij} = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} a_{kj} \tag{1.5}$$

Usando este resultado, vamos obter a primeira equação de estrutura. Por definição de diferencial exterior, temos

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^3 da_{ij} \wedge dx_j$$

donde, por (1.5),

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}a_{kj}\right)\wedge dx_j \tag{1.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge\left(\sum_{j=1}^{3}a_{kj}dx_j\right) \tag{1.7}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge\theta_k \tag{1.8}$$

como queríamos.

Para obter a segunda equação de estrutura, tomaremos a diferencial de (1.5), obtendo

$$0 = \sum_{k=1}^{3} d\theta_{ik}a_{kj} - \sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge da_{kj}$$

Isto é

$$\sum_{k=1}^{3} d\theta_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge\left(\sum_{s=1}^{3}\theta_{ks}a_{sj}\right),$$

ou

$$\sum_{s=1}^{3} d\theta_{is}a_{sj} = \sum_{s=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge\theta_{ks}\right)a_{sj}$$

Cada termo desta igualdade é um elemento da matriz produto de uma matriz de formas com a matriz (a_{ij}), que é não singular. Multiplicando o produto destas matrizes pela inversa de (a_{ij}), temos: $d\theta_{is} = \sum_{k=1}^{3}\theta_{ik}\wedge\theta_{ks}$. □

Observação 1.1. *Se indicarmos por $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação de inclusão, dizer que as formas θ_i são duais do referencial e_i é dizer que $dx = \sum_{i=1}^{3}\theta_i e_j$. Intuitivamente, as expressões que definem θ_i e θ_{ij}, isto é*

$$dx = \sum_{i=1}^{3}\theta_i e_i \quad , \quad de_i = \sum_{j=1}^{3}\theta_{ij}e_j \tag{1.9}$$

indicam como varia o triedro móvel e_1, e_2, e_3 quando nos deslocamos (ao longo de uma curva $x(t)$) em U.

Seja uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto tal que a seguinte condição esteja verificada: existem em V três campos ortonormais e_1, e_2, e_3 de tal modo que em $U = V \cap S$, e_1 e e_2 são tangentes a S e e_3 normal a S. Esses campos formam um referencial adaptado a superfície S. Observamos que esta escolha é sempre possível localmente

(basta tomar para U o domínio de uma parametrização ortogonal de S, normalizar os vetores tangentes desta parametrização e estende-los a V).

Escolhidos os três campos de vetores em V satisfazendo a condição acima, obtemos o corefe-rencial $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

De (1.9), temos

$$de_i = \sum_{j=1}^{3} \theta_{ij} e_j$$

onde θ_{ij} são as formas de conexões.

Seja $i : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação de inclusão. As formas

$$i^*(\theta_j) = \omega_j, \;\; i^*(\theta_{kj}) = \omega_{kj} \;\; k, j = 1, 2, 3$$

são bem definidas em $U \subset S$. Pelo teorema 1.1.1 temos

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_{k}^{3} \theta_{ik} \wedge \theta_k \\ d\theta_{ij} &= \sum_{k}^{3} \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} \end{aligned}$$

Como a diferencial de uma forma comuta com o pullback, temos que as equações de estrutura são validas para as formas diferenciais em $U \subset S$.

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{k}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_k \\ d\omega_{ij} &= \sum_{k}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \end{aligned}$$

Vamos utilizar as equações de estrutura para estudar as superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$.

Como $\omega_3(v) = 0$ para $v \in T_pS$, então $\omega_3 = 0$ em $U \subset S$.

Por tanto, $\omega_3 = 0$ em U.

Convém recordar que se S é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, então $\mathbb{R}^3$ induz um produto interno denotado por $\langle , \rangle_p$, em cada plano tangente T_pS de S. A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle = |v|^2 \tag{1.10}$$

Definição 1.1.2. *A forma quadrática I_p em T_pS definida em (1.10), é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.*

Definição 1.1.3. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + y^2 = 1\} \tag{1.11}$$

A aplicação $N : S \longrightarrow S^2$, assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de S.

Vamos recordar algumas propriedades da aplicação normal de Gauss.

Por abuso de notação, indicaremos por $N(p)$ tanto o vetor normal a S em p, como o ponto de S^2 imagem de p pela aplicação normal N.
É imediato verificar que a aplicação N é diferenciável. A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em T_pS^2. Como estes dois planos são paralelos em $\mathbb{R}^3$, é possível identifica-los por uma translação e considerar $dN_p : T_pS \longrightarrow T_pS$.
A propriedade fundamental de dN_p é que ela é uma aplicação linear auto-adjunta, ou seja $(\langle dN_p(v), w\rangle = \langle v, dN_p(w)\rangle \ \forall v, w \in T_pS)$.
O fato de dN_p ser uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS, dado por $Q(v) = \langle dN_p(v), v\rangle$, $v \in T_pS$.

Definição 1.1.4. *A forma quadrática II_p definida em T_pS por: $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p.*

Definição 1.1.5. *Seja p um ponto de uma superfície S e $dN_p : T_pS \longrightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação normal de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p. O negativo da metade do trazo de dN_p é chamado a curvatura média H de S em p.*

Voltamos ao método de referencial móvel de Cartan. Observamos que o campo normal N coincide com e_3, uma vez escolhida o referencial e_1, e_2, e_3 como foi indicado anteriormente. Na proposição seguinte, vamos obter expressões para K e H em função das formas diferenciais ω_i e ω_{ij}.

Teorema 1.1.2. *Seja K a curvatura Gaussiana de S em p e H a curvatura media em p. Então:*

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} &= 2H\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos a primeira equação de estrutura

$$d\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \omega_{3i} \wedge \omega_i$$

como $\omega_3 = 0$, temos:

$$0 = \omega_{31} \wedge \omega_1 + \omega_{32} \wedge \omega_2 \tag{1.12}$$

As formas ω_1 e ω_2 formam uma base para o espaço cotangente de T_pS.
Por tanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 \\ \omega_{32} &= h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde,

$$\begin{aligned} \omega_{31} \wedge \omega_1 &= h_{12}\omega_2 \wedge \omega_1 \\ \omega_{32} \wedge \omega_2 &= h_{21}\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (1.12), temos:

$$0 = h_{12}\omega_2 \wedge \omega_1 - h_{21}\omega_2 \wedge \omega_1 = (h_{12} - h_{21})\omega_2 \wedge \omega_1$$

Mas $\omega_2 \wedge \omega_1 \neq 0$ e portanto, $h_{12} = h_{21}$
Por (1.13) temos que:

$$\begin{aligned} \omega_{31}(e_1) = h_{11} \quad , \quad \omega_{31}(e_2) = h_{12} \\ \omega_{32}(e_1) = h_{21} = h_{12} \quad , \quad \omega_{32}(e_2) = h_{22} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Como

$$de_3 = \omega_{31}(v)e_1 + \omega_{32}(v)e_2 \tag{1.15}$$

temos por (1.14), que a matriz de de_3 na base $\{e_1, e_2\}$ é

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Portanto,

$$K = det(h) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{12}$$

As equações (1.13) nos dão que:

$$\begin{aligned} \omega_{31} \wedge \omega_{32} &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\ &= h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 - h_{12}h_{12}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{12})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Pela segunda equação de estrutura temos que

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\omega_{31} \wedge \omega_{32}$$

Portanto,

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

como tínhamos afirmado.

Vamos obter agora a expressão para H. Por (1.16) e pela definição de H temos que

$$H = -\frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

As equações (1.13) nos dão que

$$\begin{aligned} \omega_{13} \wedge \omega_2 &= -h_{11}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ \omega_1 \wedge \omega_{23} &= -h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} &= -(h_{11} + h_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= 2H\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.1.3. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa. A aplicação normal de Gauss é conforme, se e somente se ou M é totalmente umbílica ou minima.*

Demonstração. De fato: Seja $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação de inclusão, $\{e_i\}$, $\{\omega_1\}$ $i = 1, 2, 3$ o referencial e o coreferencial de M respectivamente. Assim temos:

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i \,, \qquad de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} e_j \;, i = 1, 2, 3$$

i) Denotemos por ds^2 a métrica sobre M, de (1.9) temos:

$$ds^2 = \langle dx, dx \rangle \;\; = \;\; (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 \tag{1.17}$$

ii) Denotemos por $d\sigma^2$ a métrica sobre $\mathbb{S}^2$, de (1.15) temos:

$$d\sigma^2 = \langle de_3, de_3 \rangle \;\; = \;\; (\omega_{31})^2 + (\omega_{32})^2 \tag{1.18}$$

A aplicação de Gauss é conforme se $d\sigma^2$ é múltiplo de ds^2. De (1.13) e usando $h_{12} = h_{21}$ temos:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= (\omega_{31})^2 + (\omega_{32})^2 && (1.19)\\ &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2)^2 + (h_{12}\omega_1 + h_{22}\omega_2)^2 && (1.20)\\ &= (h_{11}^2 + h_{12}^2)\omega_1^2 + (h_{12}^2 + h_{22}^2)\omega_2^2 + 2\omega_1 \circ \omega_2 h_{12}(h_{11} + h_{22}) && (1.21) \end{aligned}$$

Temos que se:

i) $H \equiv 0$ (isto é $h_{11} = -h_{22}$ em todo ponto), então $d\sigma^2$ é múltiplo de ds^2.

ii) M totalmente umbílica (isto é $h_{12} = 0$ e $h_{11} = h_{22}$ em todo ponto), então $d\sigma^2$ é múltiplo de ds^2.

Reciprocamente se a aplicação de Gauss é conforme, existe uma função positiva λ, tal que $\lambda ds^2 = d\sigma^2$, logo temos:

$$\lambda((\omega_1)^2 + (\omega_2)^2) = (h_{11}^2 + h_{12}^2)\omega_1^2 + (h_{12}^2 + h_{22}^2)\omega_2^2 + 2\omega_1 \circ \omega_2 h_{12}(h_{11} + h_{22})$$

Assim em cada ponto temos 2 casos:

i) $h_{11} = -h_{22}$ isto é $H = 0$

ii) $h_{11} = h_{22}$ e $h_{12} = 0$ isto é M é umbilica

Logo temos 2 possibilidades:

i) M é totalmente umbílica ou $H \equiv 0$

ii) M é umbílica nos pontos que $H \neq 0$

No segundo caso temos que se $H \not\equiv 0$, ou seja existe $p \in M$ tal que $H(p) \neq 0$, então f é totalmente umbílica. Seja

$$W = \{p \in M : H(p) \neq 0\} \tag{1.22}$$

Claramente W é aberto. Seja W_0 uma componente conexa de W, assim M é totalmente umbílica em W_0. Logo as curvaturas principais e H são constantes em W_0, logo H é constante em cada componente conexa.
Alem disso como H é continua, então H é constante sobre $\overline{W_0} \subset M$. Como W_0 é conexo então $\overline{W_0}$ é conexo então $\overline{W_0} = W$. Pelo fato de M ser conexo e W ser aberto e fechado temos que $W_0 = M$.
Logo se $H(p) \neq 0$ para algum $p \in M$ tem-se que, M é totalmente umbílica. □

1.1.2 Variedades Riemannianas

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p em M, onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $e_1, ..., e_n$ tais que:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

O conjunto $\{e_i\}_{i=1}^n$ é chamado referencial ortonormal móvel em U. Sejam $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ formas diferenciais em U tais que

$$\omega^i(e_j) = \delta_{ij}$$

As formas ω^i são chamadas coreferencial associado a $\{e_i\}$. Temos o seguinte resultado

Lema 1.1. *Escolhido um coreferencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ num aberto U de uma variedade Riemanniana M, existe em U um (único) conjunto de formas diferenciais $\{\omega_i^j\}_{i=1}^n$, onde $\omega_i^j = -\omega_j^i$ e satisfazem*

$$d\omega^i = \sum_{i=1}^{n} \omega^k \wedge \omega_k^i$$

A demostração do lema anterior pode ser encontrada em [4].

As formas ω_i^j são chamadas formas de conexão de M do referencial $\{e\}_{i=1}^n$. As formas de conexão permitem definir uma noção de derivada covariante para campos em M.

Proposição 1.1. *Sejam X, Y campos diferenciáveis em M^n e $\{e_i\}_i^n$ um referencial em $U \subset M$. Suponha que $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ e defina:*

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^{n} \left\{ dy_j(X) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^j(X) y_i \right\} e_j$$

Então $\nabla_X Y$ independe do referencial $\{e_i\}$ e, portanto está bem definido em M.

A demostração do resultado acima segue de [3].

$\nabla_X Y$ é dito derivada covariante de Y em relação a X. A derivada covariante possui importantes propriedades dadas pela proposição seguinte:

Proposição 1.2. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em M, F e G funções diferenciáveis em M e a e b números reais. Então:*

1. $\nabla_{fX+gY} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z X$
2. $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$
4. $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle$
5. *Se $p \in M$, $(\nabla_X Y)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, e $\alpha'(0) = X(p)$.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [3].

Note que

$$\langle \nabla_X e_i, e_j\rangle = \omega_i^j(X)$$

onde

$$\omega_i^j(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$$

Definimos as formas Ω_{ij} por $\Omega_{ij} = d\omega_i^j - \sum_{i=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j$.
Estas são ditas formas de curvatura de M no referencial $\{e_i\}$.
Para cada $p \in M$, e cada par de vetores $X, Y \in T_pM$, a matriz $(\Omega_{ij})_p(X, Y)$ pode ser vista como a matriz da aplicação linear

$$(R_{XY})_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

em relação à base $\{e_1, ...e_n\}$.

R_{XY} é chamado operador curvatura de M. Como $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ e Ω_{ij} é uma 2-formas, temos as seguintes equações para o operador curvatura: Se X, Y, Z e T são campos diferenciáveis em M então

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{YX}Z, T\rangle \tag{1.23}$$

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{XY}T, Z\rangle \tag{1.24}$$

Tomando a derivada exterior da equação:

$$d\omega^j = \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge \omega_k^j$$

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n d\omega^k \wedge \omega_k^j - \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge d\omega_k^j \\ &= \sum_{i,k=1}^n \omega^i \wedge \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge d\omega_i^j \\ &= \sum_{i=1}^n \omega^i \wedge (\sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j - d\omega_i^j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \Omega_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \omega^i \wedge \Omega_{ij} = 0 \quad \forall\, j = 1, ..., n \tag{1.25}$$

A equação (1.25) é chamada primeira identidade de Bianchi. Em termos de operador curvatura, ela se traduz da seguinte forma. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \Omega_{ij}(X,Y,Z) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \omega^i(X)\Omega_{ij}(Y,Z) - \omega^i(Y)\Omega_{ij}(X,Z) + \omega^i(Z)\Omega_{ij}(X,Y) \right\} \\ &= \langle R_{YZ}X - R_{XZ}Y + R_{XY}Z, e_j \rangle . \end{aligned}$$

para $j = 1, ..., n$. Daí,

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0 \tag{1.26}$$

Note que valem as seguintes igualdades

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle + \langle R_{YZ}X, T\rangle + \langle R_{ZX}Y, T\rangle = 0$$

$$\langle R_{YZ}T, X\rangle + \langle R_{ZT}Y, X\rangle + \langle R_{TY}Z, X\rangle = 0$$

$$\langle R_{TX}X, Y\rangle + \langle R_{TX}Z, Y\rangle + \langle R_{XZ}T, Y\rangle = 0$$

$$\langle R_{TX}Y, Z\rangle + \langle R_{XY}T, Z\rangle + \langle R_{YT}X, Z\rangle = 0$$

Somando as equações acima e utilizando (1.4), temos

$$\langle R_{ZX}Y, T\rangle + \langle R_{TY}Z, X\rangle = 0.$$

Daí, por (1.2), temos

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = \langle R_{ZT}X, Y\rangle .$$

Como as formas Ω_{ij} são formas de grau dois, elas podem ser escritas

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} \omega^k \wedge \omega^l.$$

As funções R_{ijkl} são chamadas as componentes de tensor curvatura de M. Notamos que:

$$\begin{aligned} \langle R_{e_k e_l}(e_i), e_j \rangle &= \Omega_{ji}(e_k, e_l) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s,t} R_{jist} \omega^s \wedge \omega^t(e_k, e_l). \\ &= \left\langle R_{e_i e_j}(e_k), e_l \right\rangle . \end{aligned}$$

As formas de curvaturas nos permitem definir a curvatura seccional de uma variedade. A partir de agora faremos uma introdução de tal conceito. Seja $P \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente T_pM. Tomamos um referencial $\{e_1, ..., e_n\}$ em uma vizinhança de p de tal modo que $\{e_1, e_2\}$ geram P. Temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *O número* $(\Omega_{12})_p(e_1, e_2)$ *depende apenas do subespaço* P.

A demonstração da proposição acima segue de [3].

O número

$$\begin{aligned} K_p(P) &= -(\Omega_{12})_p(e_1, e_2) \\ &= \langle (R_{e_1e_2})_p(e_1), e_2 \rangle \end{aligned}$$

é chamado a *curvatura seccional* de M em p segundo P.

Temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4. *Seja* $P \subset T_pM$ *um subespaço de* T_pM. *Se* $X, Y \in P$ *são vetores linearmente independentes de* T_pM *e* $\{e_i\}$ *é um referencial ortonormal tal que* $\{e_1, e_2\}$ *gera* P, *então*

$$K(p) = \frac{\langle R_{XY}X, Y \rangle}{(A(X, Y))^2},$$

onde $A(X, Y) = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ *é a área do paralelogramo formado por* X *e* Y.

A demostração do resultado acima pode ser encontrado em [2].

Definição 1.1.6. *Diz-se que uma variedade Riemanniana* M *é isotrópica em* p *se todas as curvaturas seccionais em* p *têm o mesmo valor, isto é, se* $K_p(P)$ *não depende de* $P \subset T_pM$.

Finalmente, temos o resultado que traduz a importância das formas de curvatura de um referencial.

Proposição 1.5. *Seja* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$ *e* $\{e_i\}$ *um referencial em uma vizinhança de* p. *Então* M *é isotrópica em* p *se e só se*

$$\Omega_{ij} = -K_p \omega^i \wedge \omega^j.$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em [2]. Naturalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1.7. *Diz-se que uma variedade Riemanniana* M *tem curvatura constante, se* $K_p(P)$ *não depende de* p *e* P.

1.2 Representação de Enneper-Weierstrass

Nesta seção vamos descrever uma representação para superfícies mínimas em termos de dados holomorfos, chamada representação de Enneper-Weierstrass. Nos capítulos posteriores realizaremos uma tarefa similar no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Definição 1.2.1. *Sejam M e N variedades diferenciais com $dim(M) \leq dim(N)$. Uma imersão é uma aplicação diferenciável $X : M \longrightarrow N$ cujo diferencial $D_pX : T_pM \longrightarrow T_{X(p)}N$ é injetiva em todo ponto $p \in M$. Neste caso dizemos que $S := X(M)$ é superfície imersa em N.*

Ao longo da seção as superfícies estarão imersas em $N = \mathbb{R}^3$.

Definição 1.2.2. *Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Uma parametrização de S é uma imersão $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$.*

Observação 1.2. *Como trabalharemos com superfícies S imersas em $\mathbb{R}^3$, S se torna uma superfície de Riemann cuja métrica é induzida pela restrição da métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$ a S.*

Vamos agora expressar a primeira e segunda forma fundamental na base do espaço tangente X_u, X_v associada a uma parametrização $X(u, v)$ em p.
Como um vetor tangente $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2', X_{u_1}u' + X_{u_2}u_2' \rangle \\ &= \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle_p (u_1')^2 + 2\langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle_p u_1'u_2' + \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle_p (u_2')^2 \\ &= g_{11}(u_1')^2 + 2g_{12}u_1'u_2' + g_{22}(u_2')^2 \end{aligned}$$

onde $g_{ij} = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle$ são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$.
Se a superfície é orientável, então:

$$N = \frac{X_{u_1} \times X_{u_2}}{|X_{u_1} \times X_{u_2}|}$$

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u_1(t), u_2(t)) = N_{u_1}u_1' + N_{u_2}u_2'$$

Assim, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_{u_1,X_{u_2}}\}$ é dada por:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_{u_1}u_1' + N_{u_2}u_2', X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2' \rangle \\ &= b_{11}(u_1')^2 + 2b_{12}u_1'u_2' + b_{22}(u_2)^2 \end{aligned}$$

onde, $b_{ij} = \langle N, X_{u_iu_j} \rangle$ são os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$. A curvatura media H de S em p pode-se expressar por:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2det(g_{ij})} \tag{1.27}$$

E a curvatura Gaussiana K de S em p pode-se expressar por:

$$K = \frac{det(b_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{1.28}$$

Definição 1.2.3. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S. O vetor curvatura media em um ponto $p \in S$ é:*

$$\vec{H}(p) := H(p)\vec{N}(p)$$

onde $\vec{N}$ é o vetor normal unitário dado pela aplicação normal de Gauss

Definição 1.2.4. *Seja M superfície regular. Uma imersão $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dita conforme (ou isotérmica) quando $\langle D_pX(v), D_pX(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$, $\forall\, v, w \in T_pM$. Em outras palavras, se u_1, u_2 é uma base ortonormal de T_pM, então temos:*

$$||X_{u_1}||^2 = ||X_{u_2}||^2 = \lambda^2(p) \qquad \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0$$

onde X_{u_i} é a derivada de X na direção u_i e $\lambda(p)$ diferenciável.

Definição 1.2.5. *Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa, $S := X(M)$. Dizemos que X é minima se:*

$$H(p) = 0, \qquad \forall p \in S$$

Observação 1.3. *Quando X é uma parametrização conforme de uma superfície de Riemann, temos que $(g_{ij})(p) = \lambda^2(p)I$, onde I é a matriz identidade. Neste caso, a métrica induzida em M é dada por:*

$$ds^2 = \sqrt{det(g_{ij})}|dz|^2 = \lambda^2|dz|^2$$

onde $|dz|^2$ é a métrica usual de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Observação 1.4. *Uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ sempre admite uma parametrização conforme.*

Teorema 1.2.1. *Seja (M,g) superfície de Riemann. Então em uma vizinhança de qualquer ponto $p \in M$ existe uma parametrização conforme.*

Demonstração. Ver [6]. □

Agora vamos dar uma caracterização das superfícies minimas

Teorema 1.2.2. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização conforme de uma superfície S. Então:*

$$\Delta_{\mathbb{C}} X = 2\lambda^2 \vec{H}$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura media, o Laplaciano é o canônico dado por $\Delta_{\mathbb{C}} X = (\Delta_{\mathbb{C}} x_1, \Delta_{\mathbb{C}} x_2, \Delta_{\mathbb{C}} x_3)$, onde $\Delta_{\mathbb{C}} x_i = \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}$, $i = 1, 2, 3$, $(u_1, u_2) \in \Omega$

Demonstração. Seja $p \in S$ e sejam (u_1, u_2) coordenadas conformes de Ω centradas em $X^{-1}(p)$. Então:

$$\begin{aligned} &\langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle = \lambda^2 \\ &\langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Derivando a primeira equação de (1.29) em relação a u_1 obtemos:

$$\langle X_{u_1 u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_1 u_2}, X_{u_2} \rangle$$

Mas, derivando a segunda equação de (1.29) em relação a u_2 temos:

$$\langle X_{u_1 u_1}, X_{u_2} \rangle + \langle X_{u_1}, X_{u_2 u_2} \rangle = 0$$

Logo:

$$\langle X_{u_1 u_1}, X_{u_1} \rangle = -\langle X_{u_2 u_2}, X_{u_1} \rangle$$

Usando a equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_{\mathbb{C}} X, X_{u_1} \rangle &= \langle (X_{u_1u_1} + X_{u_2u_2}), X_{u_1} \rangle = 0 \\ \langle \Delta_{\mathbb{C}} X, X_{u_2} \rangle &= 0\end{aligned}$$

Por tanto $\Delta_{\mathbb{C}} X \perp T_p$. Se N é normal unitária de S, temos

$$\langle \Delta_{\mathbb{C}} X, N \rangle = \langle (X_{u_1u_1} + X_{u_2u_2}), N \rangle = \langle X_{u_1u_1}, N \rangle + \langle X_{u_2u_2}, N \rangle = b_{11} + b_{22}$$

De (1.27) tem-se: $b_{11} + b_{22} = 2\lambda^2 H$. Como $\Delta_{\mathbb{C}} X$ só tem componente normal a S e $\vec{H} = H\vec{N}$ o resultado segue. □

Corolário 1.1. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização conforme da superfície $S := X(M)$. Então S é minima se e somente se as coordenadas x_1, x_2 e x_3 são funções harmônicas, ou seja $\Delta x_i = 0$, $\forall\, i = 1, 2, 3$.*

Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização mínima conforme. Pelo corolário acima, sabemos que as coordenadas x_k são funções harmônicas, assim as coordenadas x_k são funções reais analíticas. Agora vamos provar um lema que servira de base para relacionar parametrizações minimas conformes X á funções holomorfas.

Lema 1.2. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização de uma superfície qualquer, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domínio. Defina, para $k \in 1, 2, 3$, as funções*

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(z) - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}(z)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Então:

i) $\phi_k(z)$ é holomorfa $\Longleftrightarrow$ x_k é harmônica

ii) X é parametrização conforme $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{3} (\phi_k(z))^2 \equiv 0$

iii) Suponha X parametrização conforme.
Então $\sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2 \neq 0$

Demonstração. i) Segue das equações de Cauchy-Riemann.

ii) Observe que:

$$\sum_{k=1}^{3}(\phi_k(z))^2 = \sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial x_k}{\partial u_1})^2 - \sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial x_k}{\partial u_2})^2 - 2i\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}) \tag{1.30}$$

$$= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} \tag{1.31}$$

Como $g_{11} = g_{22}$ e $g_{12} = 0$, o resultado segue.

iii) Usando que X é parametrização conforme, temos:

$$\sum_{k=1}^{3}|\phi_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial x_k}{\partial u_1})^2 + \sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial x_k}{\partial u_2})^2 \tag{1.32}$$

$$= g_{11} + g_{22} \tag{1.33}$$

$$= 2\lambda^2 \tag{1.34}$$

$$= 2\sqrt{det(g_{ij})} \neq 0 \tag{1.35}$$

□

Teorema 1.2.3. *Dada uma imersão mínima conforme $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, as 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ (onde $\phi_k(z)$ são definidas pelo Lema 1.2), estão bem definidas globalmente.*

Demonstração. Para que as 1-formas $\phi(z)dz$ estejam bem definidas globalmente, temos que provar que elas são invariantes por mudança de cartas de M. Seja $p \in M$.
Sabemos que x_k são harmônicas em M, portanto podemos pegar vizinhança V de p onde existe conjugada harmônica de x_k, que denotaremos por x_k^*. Portanto a função $\Phi_k(z) := (x_k + ix_k^*)$ é holomorfa em V, então satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Com isto obtemos:

$$\phi_k(z) = 2\frac{\partial \Phi_k(z)}{\partial z}$$

Sejam $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V$ e $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow V$ duas cartas de M. Denote por z os pontos de U_1 e por w os pontos de U_2. Como M é superfície de Riemann, $(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) : U_2 \longrightarrow U_1$ é aplicação holomorfa. Denote a mudança de cartas por $z(w) := (\phi_1^{-1} \circ \phi_2)(w)$.
Logo

$$\phi_k(w) = 2\frac{\partial \Phi_k}{\partial w} = 2\left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial w}\right]$$

Como $z(w)$ é holomorfa, $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \overline{\left(\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial w}\right)} = 0$. Então

$$\phi_k(w) = 2\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = \phi_k(z)\frac{dz}{dw}$$

Portanto

$$\phi_k dw = \phi_k dz$$

□

Definição 1.2.6. *Seja S superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. S é dita superfície fechada se ela for compacta e sem bordo.*

Teorema 1.2.4. *Não existe superfície minima fechada em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que tal superfície exista. Ao tomas uma parametrização minima conforme $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ obtemos que (x_1, x_2, x_3) são funções harmônicas. Escolha uma destas coordenadas, denotada por x_i. Como x_i é continua e M é compacta, x_i assume máximo em M. Mas pelo principio do máximo em M, donde x_i no poderia assumir máximo em M, donde x_i é constante. Como este argumento vale para $i = 1, 2, 3$, temos um absurdo. □

Teorema 1.2.5 (**Teorema de Representacao de Weiertrass** (Versão 1))**.** *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização minima conforme, $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$. Defina, para $k \in 1, 2, 3$, as funções*

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(z) - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}(z)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \Omega$. Então as 1-formas $\phi_k(z)dz$ são holomorfas satisfazendo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} (\phi_k(z))^2 &\equiv 0 \\ \sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ e $\phi_3(z)$ funções holomorfas em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfazendo as equações acima. Então existe parametrização minima conforme $X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1}(z) - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}(z)$$

onde $z \in \Omega$.

Demonstração. A primeira parte do teorema segue diretamente do lema anterior (1.2) e do corolário (1.1).

Para a reciproca, defina

$$x_k(z) = Re\left(\int_{z_0}^{z} \phi_k(\xi)d\xi\right) \tag{1.36}$$

onde $k = 1, 2, 3$, $z_0 \in \Omega$.

Como ϕ_k é holomorfa e Ω é domínio simplesmente conexo, a integral esta bem definida (pois independe do caminho) e é holomorfa. Portanto x_k também esta bem definida e é harmônica. Para as outras observações sobre x_k, use o lema (1.2). □

Antes de presentar a representação de Enneper-Weierstrass vamos a provar um lema que relaciona as 1-formas holomorfas $\phi_k(z)dz$ com uma 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e uma função meromorfa $g(z)$.

Lema 1.3. *Seja M superfície de Riemann, $z \in M$, $g(z)$ uma função meromorfa em M e $f(z)dz$ uma 1-forma holomorfa em M com a propriedade que, os polos de ordem m de $g(z)$ são zeros de ordem $2m$ de $f(z)$. Então as 1-formas*

$$\begin{aligned} \phi_1(z)dz &= \frac{f(1-g^2)}{2}dz \\ \phi_2(z)dz &= \frac{if(1+f^2)}{2}dz \\ \phi_3(z)dz &= fgdz \end{aligned} \tag{1.37}$$

são holomorfas em M e satisfazem

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &\equiv 0 \\ |\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)| &\neq 0 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Reciprocamente, qualquer tripla de 1-forma holomorfa $\phi_i(z)dz$ em M, $i = 1, 2, 3$, satisfazendo (1.38) pode ser representado de maneira acima, excepto se $\phi_1 \equiv i\phi_2$, $\phi_3 \equiv 0$. Neste caso particular a superfície minima gerada pelas $\phi_i(z)dz$ é um plano.

Demonstração. Basta mostrar o lema localmente. Vamos começar provando a ida .

Veja que as ϕ_k definidas desta maneira satisfazem $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f^2(1-g^2)^2}{2^2} + \frac{i^2f^2(1+g^2)^2}{2^2} + \frac{f^2}{g^2} &= \frac{f^2}{4}(1 - 2g^2 + g^4 - 1 - 2g^2 - g^4 + 4g^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por fim, se $p \in M$ é zero de ϕ_3, então temos $f(p) = 0$ ou $g(p) = 0$. Vamos analisar os dois casos.

i) Se $f(p) = 0$, então p é zero de ordem 2m de f é polo de ordem m de g, onde $m \in \mathbb{N}^*$. Neste caso $(fg^2)(p) \neq 0$, onde $\phi_1(p) \neq 0$ e $\phi_2(p) \neq 0$.

ii) Se $g(p) = 0$, então $f(p) \neq 0$. Logo $\phi_1(p) \neq 0$ e $\phi_2(p)$

Para provar a volta, defina:

$$\begin{aligned} fdz &= (\phi_1 - i\phi_2)dz \\ g &= \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \end{aligned}$$

como $\phi_i(z)dz$ é bem definida globalmente em M(veja teorema 1.2.3), a 1-forma $f(z)dz$ também está.

Logo

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \Leftrightarrow (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2 \Rightarrow \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{f(1-g^2)}{2} \\ \phi_2 &= \frac{if(1+g^2)}{2} \\ \phi_3 &= fg \end{aligned}$$

como queríamos. Já que $(\phi_1 + i\phi_2) = -fg^2$ é holomorfa, os polos de ordem m de $g(z)$ devem ser zeros de ordem $\geq 2m$ de $f(z)dz$. Mas se p for polo de ordem m de $g(z)$ e zero de ordem $> 2m$ de $f(z)dz$ então $(fg^2)(p) = 0$, donde $\phi_i(p) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Logo um polo de ordem m de $g(z)$ tem que ser zero de ordem $2m$ de $f(z)dz$.

O único impedimento na representação acima é o caso em que $\phi_1 - i\phi_2 = 0$ (que é o denominador de g). Quando isto ocorre, a condição $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ implica $\phi_3 = 0$, que é o caso excepcional mencionado. □

Teorema 1.2.6 (**Teorema de Representação de Weierstrass** (Versão 2))**.** *Qualquer imersão minima conforme não-plana $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com M simplesmente conexo pode ser escrita na forma*

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{f(1-g^2)}{2}dz\right) \\ x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{if(1+g^2)}{2}dz\right) \\ x_3(z) &= Re\left(\int_0^z fgdz\right) \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde $z \in M$, $f(z)dz$ é 1-forma holomorfa, $g(z)$ é função meromorfa e cada polo de ordem m de g é um zero de ordem $2m$ de $f(z)dz$. A reciproca também vale: dadas 1-forma holomorfa $f(z)dz$ e uma função meromorfa g em M, onde os polos de ordem m de g são zeros de ordem $2m$ de f, podemos encontrar imersão minima conforme não-plana em $\mathbb{R}^3$ a traves das equações acima.

Demonstração. Usa teorema (1.2.5). □

1.2.1 Alguns Exemplos

i) O Catenoide.

Seja a superfície dada por $(x+1)^2+y^2 = \cosh^2(z)$ chamada catenoide. Considere $M = \mathbb{C}$ e $f = e^z$, $g = e^{-z}$ funções holomorfas em $\mathbb{C}$. De (1.37) e (1.39) temos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{f(1-g^2)}{2} = \frac{e^z(1-(e^{-z})^2)}{2} = \sinh(z) \\ \phi_2 &= \frac{if(1+g^2)}{2} = \frac{ie^z(1+(e^{-z})^2)}{2} = i\cosh(z) \\ \phi_3 &= fg = 1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_1 dz\right) = Re\left(\int_0^z \sinh(z)\right) = \cosh(u)\cos(v) - \frac{1}{2} \\ x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_2 dz\right) = Re\left(\int_0^z i\cosh(z)dz\right) = -i\cosh(u)\sin(v) \\ x_3(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_3 dz\right) = Re\left(\int_0^z dz\right) = u \end{aligned}$$

Assim recuperamos a parametrização da catenoide:

$$X(u,v) = (\cosh(u)\cos(v) - \frac{1}{2}, -i\cosh(u)\sin(v), u) \tag{1.40}$$

ii) A Helicoide.

Seja $z = \arctan(\frac{x}{y})$ a superfície chamada helicoide. Considere $M = \mathbb{C}$ e $f = -ie^z$, $g = e^{-z}$ funções holomorfas em $\mathbb{C}$. De (1.37) e (1.39) temos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{f(1-g^2)}{2} = \frac{-ie^z(1-(e^{-z})^2)}{2} = -i\sinh(z) \\ \phi_2 &= \frac{if(1+g^2)}{2} = \frac{i(-i)e^z(1+(e^{-z})^2)}{2} = \cosh(z) \\ \phi_3 &= fg = -i \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_1 dz\right) = Re\left(\int_0^z -i\sinh(z)\right) = \sinh(u)\sin(v) \\ x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_2 dz\right) = Re\left(\int_0^z i\cosh(z)dz\right) = \sinh(u)\cos(v) \\ x_3(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_3 dz\right) = Re\left(\int_0^z dz\right) = \frac{v}{2} \end{aligned}$$

Assim recuperamos a parametrização bem conhecida da helicoide:

$$X(u,v) = (\sinh(u)\sin(v), \sinh(u)\cos(v), \frac{v}{2}) \tag{1.41}$$

iii) Superfície de Enneper.

Considere $M = \mathbb{C}$ e $f = 1$, $g = z$ funções holomorfas em $\mathbb{C}$. De (1.37) e (1.39) temos:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{f(1-g^2)}{2} = \frac{(1-(z)^2)}{2} = \\ \phi_2 &= \frac{if(1+g^2)}{2} = \frac{i(1+(z)^2)}{2} = \cosh(z) \\ \phi_3 &= fg = z \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_1 dz\right) = Re\left(\int_0^z \frac{(1-(z)^2)}{2}dz\right) = \frac{u+uv^2-\frac{1}{3}u^3}{2} \\ x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_2 dz\right) = Re\left(\int_0^z \frac{i(1+(z)^2)}{2}dz\right) = \frac{-v-u^2v+\frac{1}{3}v^3}{2} \\ x_3(z) &= Re\left(\int_0^z \phi_3 dz\right) = Re\left(\int_0^z zdz\right) = \frac{u^2-v^2}{2} \end{aligned}$$

Assim:

$$X(u,v) = (\frac{u+uv^2-\frac{1}{3}u^3}{2}, \frac{-v-u^2v+\frac{1}{3}v^3}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}) \tag{1.42}$$

nos da a bem conhecida parametrização da superfície de Enneper.

Capítulo 2

Representação de Bryant

Obter um resultado análogo em outros espaços da representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, não sempre é possível em geral. No entanto, verifica-se que em espaços de curvatura seccional constante c, a superfície com curvatura média H satisfazendo $H = \pm\sqrt{-c}$ têm uma representação de Weierstrass. Quando $c = 0$, esta é apenas a representação Weiertrass das superfícies mínimas. Quando $c > 0$, não existem tais superfícies. Quando $c < 0$ se pode reduzir pela dilatação ao caso $c = 1$, ou seja, o caso do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Esse é o caso que vamos estudar nesse capitulo.

2.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$

Nesta seção apresentamos as equações de estrutura do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$. Considere em $\mathbb{R}^4$ o semi-produto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$. Esta pseudo-métrica é induzida pela forma quadrática

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(x_i)^2$$

O espaço $(\mathbb{R}^4, \langle.\rangle)$ é dito espaço de Lorentz-Minkowski e será representado por $\mathbb{L}^4$.

2.2 Modelos de Espaço Hiperbólico

Nesta sessão, estudamos uma variedade Riemanniana de dimensão 3, completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante e igual a -1: O Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Este espaço pode ser descrito por vários modelos, cada um com as suas respectivas vantagens. A seguir descrevemos algumas destas.

2.2.1 Modelos de Semi-espaço Superior

Neste modelo, temos o espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ representado pelo semi-espaço superior de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbb{R}^3_+ = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\right\}$$

com a métrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_3^2}$
As geodésicas neste modelo são as semi-retas e os semicírculos que intersectam o plano $x_3 = 0$ ortogonalmente.

2.2.2 Modelos de Poincaré

Neste modelo, o espaço hiperbólico $\mathbb{R}^3$ é representado pela bola $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{H}^3$ de raio unitário e centrada na origem

$$\mathbb{B}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x| < 1\}$$

com a métrica $g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1-|x|^2)^2}$
As geodésicas neste modelo são os diâmetros ou os arcos de círculos ortogonais ao bordo $\partial\mathbb{H}^3$ da bola $\mathbb{B}^3$.

2.2.3 Modelos de Minkowski

Considere a hipersuperficie

$$\{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4,\ \langle x, x\rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1\}$$

. Essa hipersuperficie (hiperboloide de duas folhas) tem duas componentes conexas. Escolhemos a componente conexa correspondente a $x_0 > 0$. Assim neste modelo o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ é representado pela parte superior de um hiperboloide de dos folhas, dado por

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4; x_0 > 0 \;\; e \;\; \langle x, x \rangle = -1 \right\},$$

com a métrica induzida pelo produto interno Lorentziano.
As geodésicas neste modelo são interseções de planos passando pela origem de $\mathbb{L}^4$ com $\mathbb{H}^3$, ou seja ramos de hipérboles.

2.2.4 Modelo Hermitiano

Este modelo é discutido em [1]. Para começar, faremos a identificação de $\mathbb{L}^4$ com $Herm(2)$, o conjunto das matrizes hermitianas 2x2, a través da relação;

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \longleftrightarrow X = \sum_{k=0}^{3} x_k \sigma_k = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

onde :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas matrizes são chamadas Matrizes de Pauli.

Seja $x = (x_0, x_1, x_2, x_3), y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{L}^4$. Da identificação de $\mathbb{L}^4$ com o espaço vetorial $Herm(2)$ temos que seus associados em são:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_0 + y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & y_0 - y_3 \end{pmatrix} \in Herm(2)$$

Pode-se verificar que: $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} tr\left(X^t \sigma_2 Y \sigma_2\right)$

Portanto em $Herm(2)$, vamos definir o pseudo-produto interno dado por

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} tr(X^t \sigma_2 Y \sigma_2)$$

Afirmação 2.1. *O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ pode ser identificado com o subconjunto $\mathcal{A} = \{X \in Herm(2), \langle X, X \rangle = -1, tr(X) > 0\}$ de $SL(2, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ então seu associado é $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in Herm(2)$ temos que:

$$\begin{aligned} det(X) &= (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) \\ &= (x_0)^2 - (x_3)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 \\ &= -\langle x, x \rangle \\ &= -(-1) = 1 \end{aligned}$$

Assim , $X \in SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}),\ det(A) = 1\}$.

i) $\langle X, X \rangle = -\frac{1}{2} tr(X^t \sigma_2 X \sigma_2) = \langle x, x \rangle = -1$

ii) $tr(X) = (x_0 + x_3) + (x_0 - x_3) = 2x_0 > 0$

Temos a identificação. □

Assim $\mathcal{A}$ pode ser visto como a representação matricial de $\mathbb{H}^3$. Tal representação e dita modelo hermitiano de $\mathbb{H}^3$.

Afirmação 2.2. *Neste modelo de $\mathbb{L}^4$, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ pode ser representado também como $\mathcal{B} = \{FF^*; F \in SL(2, \mathbb{C})\}$.*

Demonstração. Para provar a afirmação basta mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. De fato:
Seja $F \in SL(2, \mathbb{C})$. Tem-se que: $(FF^*)^* = FF^*$ e $det(FF^*) = 1$.
Logo, como $det(F) = 1$ então $tr(FF^*) > 0$. Por tanto, $FF^* \in \mathcal{A}$. Assim $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
Reciprocamente, seja $X \in Herm(2)$ tal que $det(X) = 1$ e $tr(X) > 0$.
Como $X \in Herm(2)$temos que X possui autovalores reales e é diagonalizável unitariamente.
Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, como $det(X) = 1$ temos que o outro autovalor é $\frac{1}{\lambda}$. Assim, X pode-se escrever como

$$X = U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} U^*$$

Escolhamos $F = U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$. Assim, como $detF = 1$ então $F \in SL(S, \mathbb{C})$. Por outro

lado, temos:

$$\begin{aligned} FF^* &= U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \overline{U}^t \\ &= U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \overline{U}^t \\ &= XU\overline{U}^t \\ &= X \end{aligned}$$

Por tanto, $X = F\overline{F}^t$.

Logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Assim obtemos a igualdade.

□

Considere SU(2) o subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ dado por

$$SU(2) = \{X \in SL(2, \mathbb{C}); X^* = X^{-1}\} \subset SL(2, \mathbb{C})$$

Definição 2.2.1. *Sejam G um grupo e M uma variedade diferenciável. Dizemos que uma aplicação*

$$\phi : G \times M \longrightarrow M$$

é uma ação de G sobre M quando satisfaz as seguintes condições:

1. *$\forall g \in G, \phi_g : M \longrightarrow M$ dada por*

$$\phi_g(p) = \phi(g, p)$$

   é um difeomorfismo.

2. *Dados $g_1, g_2 \in G$,*

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$$

3. *Se $e \in G$ é o elemento identidade do grupo G,*

$$\phi_e = Id_M$$

Lema 2.1. *O grupo de Lie complexo $SL(2,\mathbb{C})$ age sobre $\mathbb{L}^4$ pela aplicação*

$$\phi : SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{L}^4 \longrightarrow \mathbb{L}^4$$

definida por $\phi(g,v) = gvg^*$ onde v é uma matriz simétrica hermitiana $g^* = \overline{g}^t$.

Demonstração. Só é necessário provar o item 2 e 3, pois o item verifica-se desde que a multiplicação de matrizes é diferenciável.
Tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{g_1g_2}(v) &= g_1g_2v(g_1g_2)^* \\ &= g_1(g_2vg_2^*)g_1^* \\ &= \phi_{g_1}(g_2vg_2^*) \\ &= (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2})(v) \end{aligned}$$

Assim $\phi_{g_1g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$
Alem disso temos: $\phi_e(v) = eve^* = eve = e$, $\forall v \in SL(2,\mathbb{C})$
Por tanto, ϕ é uma ação de $SL(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{L}^4$. □

Observação 2.1. *Essa ação preserva o produto interno e a orientação.*

Considere $M = \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 / \langle x, x\rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$. Esse conjunto é o cone duplo, assim $N \setminus \{0\}$ tem duas componentes conexas.
Seja $\mathbb{N}^3 = \{v = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4; \langle v, v\rangle = 0, x_0 > 0\}$ o cone de luz com a métrica induzida pelo produto interno Lorentziano.

Afirmação 2.3. *No modelo hermitiano de $\mathbb{L}^4$, o cone de luz $\mathbb{N}^3$ pode ser representado como o subconjunto $\mathcal{N} = \{X \in Herm(2) \setminus \{0\}$; $det(X) = 0$, X é semidefinida positiva$\}$ de $Herm(2)$.*

Demonstração. Mostraremos que a representação matricial de $\mathbb{N}^3$ é dada pelo conjunto $\mathcal{N}$ das matrizes positivas semi-definidas de determinante zero não nulas. De fato:
Seja $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \subset \mathbb{L}^4$. Pela identificação de $\mathbb{L}^4$ com o espaço vetorial $Herm(2)$ temos $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$.
Alem disso tem-se $\langle x, x\rangle = -det(X)$. Assim temos que $det(X) = 0$.

Por outro lado, os autovalores de X são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2x_0$ e, por tanto, $\lambda_1, \lambda_2 \gneq 0$. Dai, X é uma matriz positiva semi-definida. Logo, como $x_0 > 0$ então X é não nula. Portanto, $X \in \mathcal{N}$
Seja $X \in \mathcal{N}$. Como X é hermitiana, pode-se encontrar $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que
$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$.
Dai como $det(X) = 0$ tem-se: $\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (x_0, x_1, x_2, x_3) \rangle = 0$. Alem disso, como $X \in \mathcal{N}$, seus autovalores são não-negativos. Por outro lado os autovalores de X são $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 2x_0$ e, portanto, $x_0 \gneq 0$. Observe que

$$(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

Dai, é imediato que $x_0 = 0 \Leftrightarrow X = 0$ e, portanto $x_0 > 0$.
Dai, tem-se que $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$
Portanto $\mathcal{N}$ é a representação matricial de $\mathbb{N}^3$. □

Vamos dar outra representação matricial de $\mathbb{N}^3$ que vamos utilizar neste trabalho.

Afirmação 2.4. *No modelo hermitiano de $\mathbb{L}^4$, o cone de luz $\mathbb{N}^3$ pode ser representado como o subconjunto $\widetilde{\mathcal{N}} = \{b\bar{b}^t, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; b_1, b_2 \in \mathbb{C}\}$ de $Herm(2)$.*

Demonstração. Basta mostrar que: $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.
Seja $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$
Como X é positiva semi-definida então $x_0 + x_3 \gneq 0$, e como $det(X) = 0$, temos que

$$(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

e, por tanto, $x_0 - x_3 \gneq 0$. Portanto, existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$\begin{aligned} c_1\overline{c_1} &= x_0 + x_3; \\ c_2\overline{c_2} &= x_0 - x_3 \end{aligned}$$

Assim $(c_1\overline{c_2})(c_2\overline{c_1}) = x_1^2 + x_2^2$, logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_1 + ix_2 = e^{i\alpha} c_1\overline{c_2}$$

Escolha $b_1 = e^{i\alpha/2}c_1$ e $\overline{b_2} = e^{i\alpha/2}\overline{c_2}$. Logo,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1\overline{b_1} & b_1\overline{b_2} \\ \overline{b_1}b_2 & b_2\overline{b_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathcal{N} = \left\{ b\overline{b}^t, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ; b_1, b_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

□

Como o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ não é compacto, é possível compactifica-lo adicionando uma 2-esfera "no infinito" denotada $\mathbb{S}^2_\infty$. Assim temos:

$$\overline{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^2_\infty$$

Assim para cada ponto $v \in \mathbb{N}^3$, definamos $[v] = \{\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}^*_+\}$, a reta com direção v. Então:

$$\mathbb{S}^2_\infty = \{[v] \, ; v \in \mathbb{N}^3\} = \frac{\mathbb{N}^3}{\mathbb{R}^*_+}$$

$\mathbb{S}^2_\infty$ é dito bordo assintótico de $\mathbb{H}^3$. Este será o modelo de espaço hiperbólico que adotaremos no decorrer do trabalho.

Agora vamos a dar uma identificação de $\mathbb{S}^2_\infty$

Afirmação 2.5. *O bordo assintótico $\mathbb{S}^2_\infty$ pode-se identificar com $\mathbb{CP}^1$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \tau : \widetilde{\mathcal{N}} &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ v &\longmapsto \tau(v) = [b_1, b_2] \end{aligned}$$

onde $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}$

A aplicação τ esta bem definida. De fato,

Sejam $b = (b_1, b_2)$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ tais que: $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{k_1} & \overline{k_2} \end{pmatrix}$

Obtemos que: $k = \exp(i\theta)b$

Assim:

$$\begin{aligned} [k_1, k_2] &= [\exp(i\theta)b_1, \exp(i\theta)b_2] \\ &= \exp(i\theta)[b_1, b_2] \\ &= [b_1, b_2] \end{aligned}$$

Portanto, τ esta bem definida.

Agora considere:

$$\tilde{\tau} : \mathbb{S}^2_\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \tag{2.1}$$

$$[v] \longmapsto \tilde{\tau}([v]) = \tau(v) \tag{2.2}$$

A cual esta bem definida, pois:

Se $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}$ então, dado $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$ temos que:

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\, b_1 \\ \sqrt{\lambda}\, b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\, \overline{b_1} & \sqrt{\lambda}\, \overline{b_2} \end{pmatrix}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \tau(\lambda v) &= [\sqrt{\lambda}b_1, \sqrt{\lambda}b_2] \\ &= \sqrt{\lambda}[b_1, b_2] \\ &= [b_1, b_2] \\ &= \tau(v) \end{aligned}$$

Assim temos uma identificação de $\mathbb{S}^2_\infty$ com $\mathbb{CP}^1$. □

2.3 Teoria Local das Superfícies de $\mathbb{H}^3$

Nesta seção estudaremos a teoria das superfícies em $\mathbb{H}^3$ via método do referencial móvel.

2.3.1 Equações de estrutura de $\mathbb{H}^3$

Sejam e_0, e_1, e_2, e_3 campos diferenciáveis sobre $\mathbb{L}^4$ tais que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_j \delta_{ij}, \tag{2.1}$$

onde $i, j = 0, 1, 2, 3$ e

$$\epsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{se j= 0} \\ 1 & \text{se j= 1,2,3} \end{cases}$$

O referencial em $\mathbb{L}^4$ que satisfaz (2.1), é chamado referencial Lorentziano.

A partir do referencial e_i podemos definir formas diferenciais lineares $(\omega^i)_{i=0}^3$ sobre $\mathbb{L}^4$ tais que

$$\omega^i(e_j) = \epsilon_j \delta_{ij}$$

O conjunto das formas diferenciais $(\omega^i)_{i=0}^3$ é chamado coreferencial associado ao referencial $(e_i)_{i=0}^3$. Por tanto podemos escrever

$$de_i = \sum_{k=0}^{3} \epsilon_k \omega_i^k e_k$$

onde as ω_i^j são 1-formas. As formas ω_i^j se chamam formas de conexão de $\mathbb{L}^4$ no referencial $(e_i)_{i=0}^3$.

Derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_j \delta_{ij}$, obtemos $\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0$

Alem disso, temos

$$\begin{aligned} \langle de_i, e_j \rangle &= \langle \sum_{k=0}^{3} \epsilon_k \omega_i^k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{3} \epsilon_k \omega_i^k \langle e_k, e_j \rangle = \epsilon_j \omega_i^j \langle e_j, e_j \rangle = (\epsilon_j)^2 \omega_i^j = \omega_i^j \\ \langle e_i, de_j \rangle &= \langle e_i, \sum_{k=0}^{3} \epsilon_k \omega_j^k e_k \rangle = \sum_{k=0}^{3} \epsilon_k \omega_j^k \langle e_i, e_k \rangle = \epsilon_i \omega_j^i \langle e_i, e_i \rangle = (\epsilon_i)^2 \omega_j^i = \omega_j^i \end{aligned}$$

isto é, as formas de conexão satisfaz

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad \text{onde } i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

Logo ω_i^j são antissimétricas.

Em particular: $\omega_0^i = -\omega_i^0$, para $i = 0, ...3$.

Vamos denotar:

$$\omega^i = \omega_0^i$$

Por tanto reescrevendo, temos:

$$de_0 = \sum_{j=1}^{3} e_j \omega^j \tag{2.3}$$

$$de_i = e_0 \omega^i + \sum_{j=1}^{3} e_j \omega_i^j \tag{2.4}$$

$$0 = \omega_j^i + \omega_i^j \tag{2.5}$$

Diferenciando(2.4) e utilizando o fato $d(de_i) \equiv 0$ temos:

$$\begin{aligned}
0 &= d(de_i) \\
&= d(e_0\omega^i + \sum_{j=1}^{3} e_j\omega_i^j) \\
&= d(e_0\omega^i) + \sum_{j=1}^{3} d(e_j\omega_i^j) \\
&= de_0 \wedge \omega^i + e_0 d\omega^i + \sum_{j=1}^{3} de_j \wedge \omega_i^j + \sum_{j=1}^{3} e_j d\omega_i^j \\
&= \sum_{k=1}^{3} e_k\omega^k \wedge \omega^i + e_0 d\omega^i + \sum_{j=1}^{3}(e_0\omega^j + \sum_{k=1}^{3} e_k\omega_j^k) \wedge \omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} e_k d\omega_i^k \\
&= \sum_{k=1}^{3} e_k[\omega^k \wedge \omega^i + d\omega_i^k + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^k \wedge \omega_i^j] + e_0[d\omega^i + \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_i^j]
\end{aligned}$$

Portanto, temos as equações

$$\begin{aligned}
d\omega^i &= -\sum_{j=1}^{3} \omega_j^i \wedge \omega^j \\
d\omega_j^i &= -\omega^i \wedge \omega^j - \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k
\end{aligned} \tag{2.6}$$

As equações em (2.6) são chamadas, respectivamente, primeira e segunda equações de Cartan para $\mathbb{H}^3$.

As formas de curvatura sobre $\mathbb{L}^4$ são dadas por:

$$\Omega_{ij} = d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \omega^i \wedge \omega^j$$

Agora consideremos um campo referencial local Lorentziano e_0, e_1, e_2, e_3 sobre $\mathbb{H}^3$ tal que :

i) e_0 é a aplicação inclusão, ou seja $e_0 = x \in \mathbb{H}^3$

ii) e_i são campos tangentes ortonormais sobre $\mathbb{H}^3$, $i = 1, 2, 3$.

Vamos caracterizar as métricas induzidas de $\mathbb{L}^4$ sobre $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{N}^3$.

i) Denotemos por ds^2 a métrica induzida sobre $\mathbb{H}^3$. Note que

$$ds^2 = \langle dx, dx\rangle = \langle de_0, de_0\rangle = \langle \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j, \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j\rangle = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \quad (2.7)$$

ii) Temos: $\langle e_0 + e_3, e_0 + e_3\rangle = \langle e_0, e_0\rangle + \langle e_0, e_3\rangle + \langle e_3, e_0\rangle + \langle e_3, e_3\rangle = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$.

Assim $(e_0 + e_3) \in \mathbb{N}^3$.

Em $\mathbb{N}^3$ sera tomada a métrica induzida de $\mathbb{L}^4$, e esta sera denotada por $d\sigma^2$. Em $\mathbb{S}^2_\infty$ sera tomada a estrutura conforme induzida de $\mathbb{N}^3$.
Como $(e_0 + e_3) \in \mathbb{N}^3$ e $d\sigma^2 = \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3)\rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} d(e_0 + e_3) &= de_0 + de_3 \\ &= \sum_{k=1}^{3} e_k\omega^k + e_0\omega^3 + \sum_{k=1}^{3} \omega_3^k \\ &= (e_0 + e_3)\omega^3 + e_1(\omega^1 + \omega_3^1) + e_2(\omega^2 + \omega_3^2) \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \langle d(e_0 + e_3), e_0\rangle &= -\omega^3 \\ \langle d(e_0 + e_3), e_1\rangle &= (\omega^1 + \omega_3^1) \\ \langle d(e_0 + e_3), e_2\rangle &= (\omega^2 + \omega_3^2) \\ \langle d(e_0 + e_3), e_0\rangle &= \omega^3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3)\rangle = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2$$

Assim, temos

$$d\sigma^2 = \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3)\rangle = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2$$

é a métrica induzida em $\mathbb{N}^3$.

Consideremos $[e_0 + e_3]$ a reta que contem $(e_0 + e_3)$ e a origem, Como $\mathbb{S}^2 = \frac{\mathbb{N}^3}{\mathbb{R}^*_+}$, este hereda uma estrutura conforme induzida de $\mathbb{N}^3$. Observe que $[e_0 + e_3] \in \mathbb{S}^2_\infty$.
Sobre $\mathbb{S}^2_\infty$ tomaremos a orientação

$$(\omega^2 + \omega^2_3) \wedge (\omega^1 + \omega^1_3)$$

Definição 2.3.1. *Seja $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ um grupo de Lie matricial com álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e seja $g = (g_{ij})$ a função que mergulha G em $M_{n\times n}$, com diferencial $dg_a : T_aG \longrightarrow T_{g(a)}M_{n\times n} \cong M_{n\times n}$. Definimos a forma de Maurer Cartan de G como:*

$$\omega_a = g(a)^{-1}dg_a$$

Pode-se escrever simplesmente

$$\omega = g^{-1}dg$$

Note que, dado $\omega = g^{-1}dg$ temos que

$$d\omega = d(g^{-1}) \wedge dg + g^{-1} \wedge d(dg)$$

Mas, $d(dg) \equiv 0$, e dai

$$d\omega = d(g^{-1}) \wedge dg$$

Para encontrarmos $d(g^{-1})$, considere a matriz $e = (\delta_{ij})$ como uma aplicação constante $G \longrightarrow M_{n\times n}$ e note que

$$0 = d(e) = d(g^{-1}g) = d(g^{-1})g + g^{-1}dg$$

Então, $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$ e, portanto,

$$d\omega = -g^{-1}(dg)g^{-1} \wedge dg = -(g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}g) = -\omega \wedge \omega$$

Logo, temos

$$d\omega = -\omega \wedge \omega$$

chamada a equacao de Maurer-Cartan.
Segue um importante resultado.

Teorema 2.3.1. *Seja G um grupo de Lie matricial, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e seja ω a forma de Maurer-Cartan de G. Seja M uma variedade diferencial tal que existe uma 1-forma ϕ, valuada em $\mathfrak{g}$ tal que:*

$$d\phi = -\phi \wedge \phi$$

Então para qualquer $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação $f : U \longrightarrow G$ tal que $f^*(\omega) = \phi$. Ainda, se M é simplesmente conexa e verifica as condições acima então, aplicação f esta definida globalmente sobre M.

Voltamos no nosso estudo.

Assim a forma de Maurer-Cartan do grupo $SL(2,\mathbb{C})$ assume valores na álgebra de lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, ou seja $traço(g^{-1}dg) = 0$. Lembre que a base padrão de $\mathbb{L}^4$ é:

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1)$$

corresponde em $Herm(2)$ a:

$$\underline{e_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \underline{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \underline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \underline{e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $i = 0, 1, 2, 3$, vamos a definir as aplicações:

$$\begin{aligned} e_i : SL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{L}^4 \\ g &\longmapsto g\underline{e_i}g^* \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : SL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{F} \\ g &\longmapsto (e_0, e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}$ é o fibrado de referencias sobre $\mathbb{H}^3$

O fibrado de referenciais $\mathcal{F}$ parametriza o grupo $SL(2,\mathbb{C})$.

Vamos encontrar a forma de Maurer-Cartan de $SL(2,\mathbb{C})$ em termos a essa parametrização.

Tomando a diferencial da aplicação e_i definida em (2.8), temos

$$de_i = dg\underline{e_i}g^* + g\underline{e_i}dg^*$$

Por outro lado, das equações de estrutura de $\mathbb{L}^4$ temos

$$de_i \;\; = \;\; \omega^i e_0 + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j = \omega^i g\underline{e_0}g^* + \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j g\underline{e_j}g^*$$

Por tanto, temos:

$$\begin{aligned} dg\underline{e_i}g^* + g\underline{e_i}dg^* &= \omega^i e_0 + \omega_i^1 e_1 + \omega_i^2 e_2 + \omega_i^3 e_3 \\ &= g(\omega^i \underline{e_0} + \omega_i^1 \underline{e_1} + \omega_i^2 \underline{e_2} + \omega_i^3 \underline{e_3})g^* \end{aligned}$$

Assim temos,

$$dg\underline{e_i}g^* + g\underline{e_i}dg^* = g \begin{pmatrix} \omega^i + \omega_i^3 & \omega_i^1 + i\omega_i^2 \\ \omega_i^1 - i\omega_i^2 & \omega^i - \omega_i^3 \end{pmatrix} g^* \tag{2.9}$$

logo,

$$g^{-1}dg\underline{e_i} + \underline{e_i}dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^1 + i\omega^2 \\ \omega^1 - i\omega^2 & -\omega^3 \end{pmatrix}$$

Denotando

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & -a - ib \end{pmatrix}$$

temos:

$$dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} a - ib & e - if \\ c - id & -a + ib \end{pmatrix}$$

Da equação (2.9) podemos determinar a, b, c, d, e, f.

i) Para $i = 0$ temos: $a = \frac{1}{2}\omega_3$, $c + d = \omega_1$, $d - f = \omega_2$

ii) Para $i = 1$ temos: $c = \frac{1}{2}(\omega_1^3)$, $e = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_1^3)$, $b = \frac{1}{2}$

iii) Para $i = 2$ temos $b = \frac{1}{2}\omega_1^2$, $d = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_2^3)$, $f = -\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_2^3)$

Assim de i), ii) e iii) temos que a forma de Maurer-Cartan do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é:

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

2.3.2 Curvatura Média e Gaussiana

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão, M uma superfície regular orientada e conexa. Escolhamos o referencial adaptado $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ à superfície M, ou seja:

i) $e_0 \in M$.

ii) e_1, e_2 são ortonormais em T_pM.

iii) e_3 é normal a M

Lembremos que $\omega_3 = 0$ em M.
Então de (2.7) temos que a métrica induzida em M de $\mathbb{H}^3$ é

$$ds_f^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

Das equações de estrutura temos:

$$d\omega^3 = \omega_1^3 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^2$$

Por outro lado, como $\omega^3 = 0$ então

$$\omega_1^3 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^2 = 0$$

Pelo Lema de Cartan, ver [3], existem $h_{ij} = h_{ji}$ tais que

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2, \\ \omega_2^3 &= h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2. \end{aligned}$$

Assim, faz sentido definir a forma quadrática

$$II = h_{11}(\omega^1)^2 + 2h_{12}\omega^1 \circ \omega^2 + h_{22}(\omega^2)^2$$

sobre M, chamada a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{H}^3$.

Observe que

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2 \wedge (h_{11}^1 + h_{12}\omega^2) - \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (1 + h_{12}^2 - h_{11}h_{22})\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

Portanto, definiremos a curvatura Gaussiana de M por

$$K = -1 - h_{12}^2 + h_{11}h_{12.}$$

A equação acima é dita equação de Gauss.

A curvatura média de $f(M)$ é definida por

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}.$$

Observe que $\omega_{13} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_{23} = 2H\omega^1 \wedge \omega^2$

2.4 Aplicação Hiperbólica de Gauss

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ superfície imersa e $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ o referencial adaptado à M. Consideramos agora uma aplicação análoga à aplicação normal de Gauss para imersões em $\mathbb{R}^3$. Note que, para todo $e_0 = f(m) \in \mathbb{H}^3$, a geodésica orientada em $\mathbb{H}^3$ passando por e_0 na direção e_3 intercepta o bordo ideal $\mathbb{S}^2_\infty$ em dois pontos. Denotamos estes pontos por $[e_0 + e_3]$ e $[e_0 - e_3]$. Como a geodésica está orientada, podemos considerar $[e_0 - e_3]$ o ponto inicial e $[e_0 + e_3]$ o ponto final. Desta forma fica bem definida a aplicação $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$, chamada aplicação hiperbólica de Gauss. Esta é a aplicação análoga à aplicação de Gauss em $\mathbb{R}^3$.
Se $M \subset \mathbb{R}^3$, temos que a aplicação normal de Gauss é conforme se e somente se M é totalmente umbílica ou minima. Temos um resultado análogo em $\mathbb{H}^3$.

Proposição 2.1. *A aplicação $[e_0+e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se, e somente se, f é totalmente umbílica (neste caso $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação) ou f satisfaz $H \equiv 1$ (nesse casso $[e_0 + e_3]$ preserva a orientação)*

Demonstração. Denotemos por $d\sigma^2_f$ a métrica induzida em $\mathbb{S}^2_\infty$

$$d\sigma^2_f = (\omega^1 + \omega^1_3)^2 + (\omega^2 + w^2_3)^2.$$

Como $\omega^3_1 = -\omega^1_3$, $\omega^3_2 = -\omega^2_3$ tem-se

$$\begin{aligned} d\sigma^2_f &= (\omega^1 - \omega^3_1)^2 + (\omega^2 - \omega^3_2)^2 \\ &= ((1 - h_{11})\omega^1 - h_{12}\omega^2)^2 + (-h_{12}\omega^1 + (1 - h_{22})\omega^2)^2 \\ &= (\omega^1)^2((1 - h_{11}\omega^2)^2 + h^2_{12}) + (\omega^2)^2(h^2_{12} + (1 - h_{22})^2) - 2h_{12}\omega^1 \circ \omega^2(2 - h_{11} - h_{22}) \end{aligned}$$

Agora vamos obter $d\sigma_f^2$ em função de K, H e ds_f^2, a métrica induzida em M. Temos: temos

$$\begin{aligned}
d\sigma_f^2 &= (\omega^1)^2(-2h_{11}+h_{11}^2-K+h_{11}h_{22})+(\omega^2)^2(-K-h_{11}h_{22}-2h_{22}+h_{22}^2)- \\
&\quad 2h_{12}\omega^1\circ\omega^2(2-2H) \\
&= (\omega^1)^2h_{11}(-2+h_{11}+h_{22})-K(\omega^1)^2-K(\omega^2)^2+(\omega^2)^2h_{22}(-2+h_{11}+h_{22})+ \\
&\quad 4h_{12}\omega^1\circ\omega^2(H-1) \\
&= (\omega^1)^2h_{11}(2H-2)-K((\omega^1)^2+(\omega^2)^2)+(\omega^2)^2h_{22}(2H-2)+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2(H-1) \\
&= (H-1)(2(\omega^1)^2h_{11}+2(\omega^2)^2h_{22}+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2)-K((\omega^1)^2+(\omega^2)^2) \\
&= (H-1)[(\omega^1)^2(h_{11}+h_{22})+(\omega^2)^2(h_{11}+h_{22})]-K((\omega^1)^2+(\omega^2)^2)+ \\
&\quad (H-1)[(\omega^1)^2(h_{11}-h_{22})+(\omega^2)^2(h_{22}-h_{11})+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2]
\end{aligned}$$

Vamos denotar

$$h(\omega^1,\omega^2)=(H-1)\left[(\omega^1)^2(h_{11}-h_{22})+(\omega^2)^2(h_{22}-h_{11})+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2\right]$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
d\sigma_f^2 &= h(\omega^1,\omega^2)+(\omega^1)^2[(H-1)(h_{11}+h_{22})-K]+(\omega^2)^2[(H-1)(h_{11}+h_{22})-K] \\
&= h(\omega^1,\omega^2)+((\omega^1)^2+(\omega^2)^2)(2(H-1)H-K) \\
&= h(\omega^1,\omega^2)+(2(H^2-H)-K)ds_f^2
\end{aligned}$$

Logo obtemos,

$$d\sigma_f^2=(2(H^2-H)-K)ds_f^2+(H-1)[(h_{11}-h_{22})(\omega^1)^2+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2-(h_{11}-h_{22})(\omega^2)^2]$$

Lembre que $[e_0+e_3]:M\longrightarrow\mathbb{S}^2_\infty$ conforme significa que $d\sigma_f^2$ é múltiplo de ds_f^2.
Observe que $(h_{11}-h_{22})(\omega^1)^2+4h_{12}\omega^1\circ\omega^2-(h_{11}-h_{22})(\omega^2)^2)$ não é múltiplo de ds_f^2.
Por tanto, $d\sigma_f^2$ é múltiplo de ds_f^2 se e somente se;

$$(H-1)(h_{11}-h_{22}) = (H-1)h_{12}=0 \tag{2.11}$$

Então se $H=1$ ou $h_{11}=h_{22}$ e $h_{12}=0$ (caso umbilical), então $[e_0+e_3]$ é conforme.
Reciprocamente, se $[e_0+e_3]$ é conforme, da afirmação temos que $d\sigma^2$ é múltiplo de ds_f^2, assim tem-se que satisfaz a equação (2.11).
Então temos as seguintes possibilidades

i) f é totalmente umbílica ou $H \equiv 1$

ii) f é umbílica nos pontos que $H \neq 1$

No segundo caso temos que se $H \neq 1$, tem-se que f é totalmente umbílica.
De fato, seja $U = \{m \in M; H(m) \neq 1\}$. Claramente U é aberto e, assim $f|_U$ é totalmente umbílica. Seja V uma componente conexa de U. Considere $A = d(e_0 + e_3)$ o operador shape. Observe que, como $f(U)$ é totalmente umbílica, então

$$Av = kv$$

Por outro lado, pela fórmula de Codazzi, ver [2], temos

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X),$$

onde $(\nabla_x A)(y) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y)$ e $(\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$
Daí, como

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X(kY) - A(\nabla_X Y) = X(k)Y + k\nabla_X Y - k\nabla_X Y$$

e

$$(\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(kX) - A(\nabla_Y X) = Y(k)X + k\nabla_Y X - k\nabla_Y X$$

então

$$X(k) = Y(k) = 0.$$

Como X, Y são campos arbitrários então

$$X(k) = Y(k) = 0.$$

Logo, H é constante em cada componente conexa.
Assim, H é constante sobre V.
Alem disso, como H é continua então H é constante sobre $\overline{V} \subset U$. Assim, temos que $\overline{V} \subset U$.
Como V é conexo então $\overline{V}$ é conexo e $\overline{V}$ contém V então $\overline{V} = V$. Pelo fato de M ser conexo e V ser aberto e fechado temos que $V = M$.
Logo se $H(m) \neq 1$ para qualquer $m \in M$ tem-se que, f é totalmente umbílica.
Portanto, $[e_0 + e_3]$ é conforme se, e só se, $H \equiv 1$ ou f é totalmente umbílica.
Agora respeito a orientação temos

i) Se $H \equiv 1$, então

$$d\sigma_f^2 = -K ds_f^2.$$

Logo, $K \leq 0$.

Ademais,

$$\begin{aligned}(\omega^2 + \omega_2^3) \wedge (\omega^1 + \omega^3) &= (\omega^2 - h_{21}\omega^1 - h_{22}\omega^2) \wedge (\omega^1 - h_{11} - h_{12}\omega^2) \\ &= (1 + h_{21}h_{12} - h_{22}h_{11}) \\ &= -K\omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

Portanto, $[e_0 + e_3]$ preserva a orientação.

ii) Se f é totalmente umbílica então

$$\begin{aligned}(\omega^2 + \omega_2^3) \wedge (\omega^1 + \omega^3) &= (\omega^2 - h_{21}\omega^1 - h_{22}\omega^2) \wedge (\omega^1 - h_{11} - h_{12}\omega^2) \\ &= (-1 + 2H - H^2)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -(H-1)^2\omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

Portanto, $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação.

□

2.5 Teorema de Representação de Bryant

Nessa seção demostramos o teorema de representação de Bryant para superfícies com $H = 1$ em $\mathbb{H}^3$ que é o análogo do teorema de representação de Weierstrass para superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$.

A forma quadrática holomorfa $\Phi = -4det(g^{-1}dg)$ nos da a métrica de Cartan-Killing em $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, a álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$.

Definição 2.5.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Cada elemento $x \in \mathfrak{g}$ define um endomorfismo adjunto $ad(x)$ (ou ad_x) de $\mathfrak{g}$, da forma $ad_x(y) = [x, y]$, onde $[.,.]$ é o colchete de Lie.*

Se $\mathfrak{g}$ é de dimensão finita, o traço da composição de dos endomorfismos define uma forma bilinear simétrica.

$$B(x,y) = tr(ad(x) \circ ad(y))$$

com valores em $\mathbb{K}$, chamado a forma de Killing de $mathfrakg$.

No caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ a forma de Killing é dada por

$$B(X,Y) = 4tr(XY) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Seja M^2 uma superfície de Riemann. Dizemos que $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ é nula se $F^*(\Phi) \equiv 0$. É fácil notar que F é nula se, e só se, $det(F^{-1}dF) = 0$, pois

$$F^*(g^{-1}dg) = F^{-1}dF$$

Então, $F^*(\Phi) = -4det(F^{-1}dF)$.
Segue o teorema de representação de Bryant.

Teorema 2.5.1. *Seja M^2 uma superfície de Riemann e $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ uma imersão holomorfa nula. Então $e_0 \circ F = f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão conforme com $H \equiv 1$. Reciprocamente, se M^2 é simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão com $H \equiv 1$, então existe uma imersão $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ holomorfa, com respeito a estrutura complexa sobre M^2, tal que $f = e_0 \circ F$. Ademais, F é única a menos uma multiplicação por uma matriz constante $g \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$.*

Demonstração. Para simplificar as contas, vamos usar as seguintes notações:

$$\omega = \omega^1 + i\omega^2, \pi = \omega_1^3 - i\omega_2^3$$

Suponha que $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ é uma imersão holomorfa nula da superfície de Riemann M.
De (2.10) e da observação anterior temos que:

$$F^*(g^{-1}dg) = F^{-1}dF = F^*\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}\right]$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} F^*(\omega^3 + i\omega_1^2) &= 2\alpha \\ F^*[(\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2)] &= F^*(\overline{\omega} - \pi) = 2\beta \\ F^*[(\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2)] &= F^*(\omega + \overline{\pi}) = 2\gamma \end{aligned}$$

onde α, β, γ são 1-formas holomorfas sobre M^2.

Como

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

resulta que

$$F^*(\Phi) = -4det(F^{-1}dF) = 4(\alpha^2 + \beta\gamma)$$

Como F é nula, então

$$\alpha^2 + \beta \circ \gamma = 0$$

Observe que

$$\begin{aligned} F^*(\omega^3) &= \frac{1}{2}F^*(2\omega^3) \\ &= \frac{1}{2}F^*(\omega^3 + i\omega_1^2 + \omega^3 - i\omega_1^2) \\ &= \frac{1}{2}F^*(\omega^3 + i\omega_1^2) + F^*(\overline{\omega^3 + i\omega_1^2}) \\ &= \alpha + \overline{\alpha} \\ F^*(\omega) &= \frac{F^*(\omega - \overline{\pi} + \omega + \overline{\pi})}{2} \\ &= \frac{1}{2}(F^*(\omega - \pi) + F^*(\omega + \pi)) \\ &= \overline{\beta} + \gamma \end{aligned}$$

Logo, obtemos as equações

$$\begin{aligned} F^*(\Phi) &= 4(\alpha^2 + \beta \circ \gamma) \\ F^*(\omega^3) &= \alpha + \overline{\alpha} \\ F^*(\omega) &= \overline{\beta} + \gamma \end{aligned}$$

Agora, seja $f = e_0 \circ F : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$. Então temos,

$$\begin{aligned} f^*(ds^2) &= F^* \circ e_0^*(ds^2) \\ &= F^*((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^3) \\ &= F^*(\omega \circ \overline{\omega} + (\omega^3)^2) \\ &= F^*((\omega^3)^2) + F(\omega \circ \overline{\omega}) \\ &= (\alpha + \overline{\alpha})^2 + (\overline{\beta} + \gamma)^2 \circ (\beta + \overline{\gamma}) \\ &= (\alpha^2 + \beta \circ \gamma) + ((\overline{\alpha})^2 + \overline{\beta} \circ \overline{\gamma}) + [2\alpha \circ \overline{\alpha} + \beta \circ \overline{\beta} + \gamma \circ \overline{\gamma}] \\ &= 2\alpha \circ \overline{\alpha} + \beta \circ \overline{\beta} + \gamma \circ \overline{\gamma} \end{aligned}$$

onde usamos que $\alpha^2 + \beta \circ \gamma = 0$

Portanto,

$$ds_f^2 = 2\alpha \circ \overline{\alpha} + \beta \circ \overline{\beta} + \gamma \circ \overline{\gamma}$$

Desde que F é uma imersão, esta ultima expressão é positivamente definida. Assim, temos que f é uma imersão.

Afirmamos que f é imersão conforme.

De fato, temos que F é nula. Considere $\langle , \rangle$ o produto interno dado pela forma quadrática Φ. Considere $z = u + iv$ uma coordenada em M, assim

$$\begin{aligned} 0 &= F^*(\Phi) \\ &= \Phi(dF) \\ &= \langle F_u + iF_v, F_u + iF_v \rangle \\ &= \langle F_u, F_u \rangle - \langle F_v, F_v \rangle + 2i \langle F_u, F_v \rangle \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \langle F_u, F_u \rangle &= \langle F_v, F_v \rangle \\ \langle F_u, F_v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, F é conforme. Desta forma, como e_0 é a aplicação de inclusão, então

$$\begin{aligned} \langle f_u, f_u \rangle &= \langle f_v, f_v \rangle \\ \langle f_u, f_v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, f é conforme.

Mostraremos que para esta imersão $H \equiv 1$. Lembre que toda superfície (de Riemann) pode ser parametrizada utilizando parâmetros conformes.

De fato, sejam $U \subset M$ um aberto simplesmente conexo e ϕ uma 1-forma do tipo $(1,0)$ definida sobre U tal que a métrica ds_f^2 induzida sobre M pela imersão seja dada por $ds_f^2 = \phi \otimes \overline{\phi}$ em U.

Consideremos funções complexas A, B, C sobre U tais que

$$\begin{aligned} F^*(\omega^3 + i\omega_1^2) &= 2A\phi \\ F^*(\overline{\omega} - \pi) &= 2B\phi \\ F^*(\omega + \overline{\pi}) &= 2C\phi \end{aligned}$$

Usando que $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$, temos

$$A^2 + BC = 0$$

Usando que $ds_f^2 = 2\alpha \circ \overline{\alpha} + \beta \circ \overline{\beta} + \gamma \circ \overline{\gamma}$, temos

$$2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C} = 1$$

Desde que U é simplesmente conexo, faz sentido considerar funções $p, q : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (p, q são únicos ao menos uma transformação $(p, q) \to (-p, -q)$) satisfazendo

$$\begin{aligned} A &= pq \\ B &= p^2 \\ C &= -q^2 \\ p\overline{p} + q\overline{q} &= 1 \end{aligned}$$

Observe que $2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C} = 1$, logo $(p\overline{p} + q\overline{q})^2 = 1 \Longrightarrow p\overline{p} + q\overline{q} = 1$.

Observe que, como α, β, γ são 1-formas holomorfas em $U \subset M$, então $A\phi, B\phi, C\phi$ são claramente holomorfas sobre U. Assim

$$\frac{p}{q} = \frac{B}{A}$$

é meromorfa sobre U (a não ser que $q \equiv 0$).

Em particular a 1-forma

$$pdq - qdp = \begin{cases} p^2 d(\frac{q}{p}) & , \text{se } p \neq 0 \\ -q^2 d(\frac{p}{q}) & , \text{se } q \neq 0 \end{cases}$$

é uma 1-forma sobre U, de tipo $(1,0)$.

Consideremos a aplicação $h : U \longrightarrow SU(2)$ definida por

$$h = \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}$$

Como $h \in SU(2)$ então $hh^* = I$. Logo,

$$(Fh)(Fh)^* = F(hh^*)F^* = FF^*$$

Portanto, $e_0(Fh) = e_0(F)$.

Alem disso, temos que

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \frac{1}{2}F^* \begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix} = h^*$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(Fh)^{-1}d(Fh) &= (h^{-1}F^{-1})(dF.h + Fdh) \\
&= h^{-1}(F^{-1}dF)h + h^{-1}F^{-1}Fdh \\
&= h^{-1}(F^{-1}dF)h + h^{-1}dh \\
&= h^{-1}\phi \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} h + h^{-1}dh \\
&= h^{-1}\left[\phi \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} \\ dp & d\overline{q} \end{pmatrix}\right] \\
&= h^{-1} \begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} - q\phi \\ dp & -p\phi + d\overline{q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} - q\phi \\ dp & -p\phi + d\overline{q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overline{q}dq + \overline{p}dp & -\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi \\ -pdq + qdp & pd\overline{p} + qd\overline{q} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(Fh)^{-1}d(Fh) = \frac{1}{2}(Fh)^* \begin{pmatrix} \omega^3 + \omega_1^2 i & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}$$

Assim temos,

$$\frac{1}{2}(Fh)^* \begin{pmatrix} \omega^3 + \omega_1^2 i & \omega + \overline{\pi} \\ \overline{\omega} - \pi & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{q}dq + \overline{p}dp & -\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi \\ -pdq + qdp & pd\overline{p} + qd\overline{q} \end{pmatrix}$$

Logo, temos as seguintes equações

$$\begin{aligned}
(Fh)^*(\omega) &= \frac{1}{2}(Fh)^*(\omega + \overline{\pi} + \overline{\overline{\omega} - \pi}) \\
&= (-\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi) + \overline{(qdp - pdq)} \\
&= -\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Fh)^*(\omega^3) &= \frac{1}{2}(Fh)^*((\omega^3 + i\omega_1^2) - \overline{(-\omega^3 - i\omega_1^2)}) \\
&= (-\overline{q}dq + \overline{p}dp - \overline{(pd\overline{p} - qd\overline{q})}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(Fh)^*(\overline{\pi}) &= 2\frac{1}{2}(Fh)^*(\overline{\pi}+\omega-(\omega)) \\
&= 2\frac{1}{2}(Fh)^*(\overline{\pi}+\omega)-2\frac{1}{2}(Fh)^*(\omega) \\
&= 2(-\overline{q}d\overline{p}+\overline{p}d\overline{q}-\phi)-2\frac{1}{2}(-\phi) \\
&= -\overline{q}d\overline{p}+\overline{p}d\overline{q}-\phi \\
&= -\overline{\phi}+2(pdq-qdp)
\end{aligned}
$$

Por tanto a aplicação $Fh : U \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ satisfaz a equação $f = e_0 \circ F = e_0(Fh)$.
Afirmamos que:

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \overline{\omega} &= -2i\omega^1 \wedge \omega^2 \\
\pi \wedge \omega &= 2Hi\omega^1 \wedge \omega^2
\end{aligned}
$$

De fato:

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \overline{\omega} &= (\omega^1 + i\omega^2) \wedge (\omega^1 - i\omega^2) && (2.12) \\
&= -2i\omega_1 \wedge \omega_2 && (2.13)
\end{aligned}
$$

Lembre que

$$
\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\pi \wedge \omega &= (\omega_1^3 - i\omega_2^3) \wedge (\omega^1 + i\omega^2) \\
&= (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 - i(h_{12}\omega^1 + h_{22}\omega^2)) \wedge (\omega^1 + i\omega^2) \\
&= (h_{11} + h_{22})i\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= 2H\omega^1 \wedge \omega^2
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\pi \wedge \omega = -H\omega \wedge \overline{\omega}
$$

Alem disso,

$$
\begin{aligned}
(Fh)^*(\pi \wedge \omega) &= (Fh)^*(\pi) \wedge (Fh)^*(\omega) \\
&= (-\overline{\phi} - 2(qdp - pdq)) \wedge (-\phi) \\
&= \overline{\phi} \wedge \phi + 2(qdp - pdq) \wedge \phi
\end{aligned}
$$

E desde que $qdp - pdq$ e ϕ sao do tipo $(1,0)$ então $(qdp - pdq) \wedge \phi = 0$. Logo,

$$(Fh)^*(\pi \wedge \omega) = \overline{\phi} \wedge \phi.$$

Evaluando a aplicação F^* na igualdade temos,

$$\begin{aligned} (Fh)^*(\pi \wedge \omega) &= -H(Fh)^*(\omega \wedge \overline{\omega}) \\ \overline{\phi} \wedge \phi &= H\overline{\phi} \wedge \phi \end{aligned}$$

Portanto, como $\overline{\phi} \wedge \phi \neq 0$, temos que $H \equiv 1$. Assim temos provado que a imersão $f = e_0 \circ F$ possui curvatura média 1.

Reciprocamente, suponhamos que M^2 é uma superfície de Riemann simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão com $H = 1$. É possível definir uma (1,0)-forma ϕ globalmente sobre M^2 tal que que $ds_f^2 = \phi \otimes \overline{\phi}$.

Considere a aplicação holomorfa $G : M^2 \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que $e_0 \circ G = f$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f^*(\omega \circ \overline{\omega}) &= (e_0 \circ G)^*(\omega \circ \overline{\omega}) \\ &= G^* \circ e_0^*(\omega \circ \overline{\omega}) \\ &= G^*(\omega \circ \overline{\omega}) \\ &= ds_f^2 \\ &= \phi \circ \overline{\phi} \end{aligned}$$

Assim, podemos assumir que G satisfaz $G^*(\omega) = -\phi$.

Afirmamos que:

$$(G)^{-1}dG = \frac{1}{2}(G)^* \begin{pmatrix} \omega^3 + \omega_1^2 i & \omega + \overline{\pi} \\ \overline{\omega} - \pi & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & -2\phi - \overline{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix}.$$

onde ρ é 1-forma real, e η é do tipo $(1,0)$ De fato lembre que

$$(G)^{-1}dG = \frac{1}{2}(G)^* \begin{pmatrix} \omega^3 + \omega_1^2 i & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}$$

Como $e_0 \circ G = f$ e $f^*(\omega^3) = 0$ temos que: $G^*(\omega^3) = 0$

Vamos denotar $G^*(\omega_1^2) = \rho$ e $G^*(\overline{\omega} - \pi) = \eta$.

Assim temos,

$$\begin{aligned} G^*(\omega^3 + i\omega_1^2) &= i\rho \\ G^*(\pi) &= -\overline{\phi} - \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^*(\omega + \overline{\pi}) &= G^*(\omega) + G^*(\overline{\pi}) \\ &= -\phi + \overline{G^*(\pi)} \\ &= -\phi + \overline{-\overline{\phi} - \eta} \\ &= -2\phi - \overline{\eta} \end{aligned}$$

Como $H = 1$, então $\pi \wedge \omega = -\omega \wedge \overline{\omega}$. temos:

$$\begin{aligned} G^*(\pi \wedge \omega) &= -G^*(\omega \wedge \overline{\omega}) \\ (-\overline{\phi} - \eta) \wedge -\phi &= \overline{\phi} \wedge \phi \\ \eta \wedge \phi &= 0 \end{aligned}$$

Assim, como ϕ é uma 1-forma do tipo $(1,0)$ então η é do tipo $(1,0)$.

Portanto, temos provado a afirmação.

Considere a 1-forma sobre M dada por

$$\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\rho & -\overline{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix}$$

Observe que μ toma valores em $SU(2)$.

Afirmamos que: $d\mu = -\mu \wedge \mu$.

De fato: Seja $\Omega = G^{-1}dG$. Assim, temos que $2\Omega = \mu + \nu$, onde $\nu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como Ω satisfaz a equação de compatibilidade de Maurer-Cartan ($d\Omega = -\Omega \wedge \Omega$). Tem-se,

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(\mu + \nu) \\ &= -(\mu + \nu) \wedge (\mu + \nu) \\ &= -(\mu \wedge \mu + \mu \wedge \nu + \nu \wedge \mu + \nu \wedge \nu) \end{aligned}$$

Mas

$$\omega^1 + i\omega^2 = \begin{pmatrix} -2\phi \wedge \eta & 0 \\ 0 & -2\phi \wedge \eta \end{pmatrix} = 0$$

pois $\phi \wedge \eta = 0$. Dai, como $d\Omega = d\mu + d\nu$

$$\begin{aligned} d\mu + d\nu &= -(\mu \wedge \mu + \nu \wedge \nu) \\ d\mu + \mu \wedge \mu &= -(d\nu + \nu \wedge \nu) \end{aligned}$$

Agora como ϕ é holomorfa do tipo $(1,0)$, então $d\phi = 0$, logo $d\nu = 0$. Alem disso tem-se que $\nu \wedge \nu = 0$.

Portanto,

$$d\mu + \mu \wedge \mu = 0$$

Se segui do teorema de Cartan (2.3.1), que existe uma aplicação $h : M^2 \longrightarrow SU(2)$ (única a menos de translação a esquerda por uma constante) tal que $\mu = h^{-1}dh$.

Denotemos

$$h = \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}$$

onde p, q funções suaves sobre M^2

Considere a aplicação $F = Gh^{-1} : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$. Afirmamos que $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ satisfaz

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} qp & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi$$

Como $Fh = G$ temos que $dFh + Fdh = dG$, assim

$$dF = (dG - Fdh)h^{-1} \tag{2.14}$$

$$F^{-1}dF = F^{-1}dGh^{-1} - (dh)h^{-1} \tag{2.15}$$

Alem disso, tem-se que $F^{-1} = hG^{-1}$ e $\mu = h^{-1}dh$, assim

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= (hG^{-1})dGh^{-1} - (h\mu)h^{-1} \\ &= h(G^{-1}dG)h^{-1} - h\mu h^{-1} \\ &= h(G^{-1}dG - \mu)h^{-1} \\ &= \frac{1}{2}h \begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h^{-1} \\ F^{-1}dF &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ satisfaz

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} qp & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi$$

Segue-se que, F é holomorfa, pois desde que ϕ é do tipo (1,0) e como $dF = \begin{pmatrix} qp & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi$ temos que dF é do tipo $(1,0)$

Claramente F é uma imersão nula (pois $det(F^{-1}dF) = 0$) e satisfaz

$$e_0 \circ F = e_0 \circ (Gh^{-1}) = e_0 \circ G = f$$

Pois, $FF^* = GG^*$ já que $h^* = h^{-1}$, e $F = Gh^{-1}$.

Agora, mostraremos que F é única a menos de uma multiplicação a direita por uma matriz constante $g \in SU(2)$.

De fato, suponha que temos $F_1, F_2 : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ imersões nulas e holomorfas tais que $e_0 \circ F_1 = e_0 \circ F_2 = f$.

Temos que $F_1F_1^* = F_2F_2^*$.

Assim $F_1 = F_2[F_2^*(F_2^*)^{-1}]$. Agora vamos considerar a aplicação $g : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ definida por $h = F_2^*(F_2^*)^{-1}$.

Logo, temos:

$$F_1F_1^* = F_2F_2^* \tag{2.16}$$

$$(F_2h)(g^*F_2^*) = F_2F_2^* \tag{2.17}$$

$$F_2(gg^* - I)F_2^* = 0 \tag{2.18}$$

Dai, tem-se que $gg^* = I$, pois F_2 é invertível. Portanto $g \in SU(2)$. Assim podemos considerar a g da forma $g = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, onde a, b funções suaves sobre M^2.

Como g é holomorfa segue que a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$ são holomorfas. Dai temos que g é constante.

Assim temos que $F_1 = F_2g$, onde $g \in SU(2)$. □

Observação 2.2. *Substituindo no teorema representação de Bryant $\mathbb{H}^3$ por $\mathbb{R}^3$, $SL(2,\mathbb{C})$ por $\mathbb{C}^3$, $e_0 : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^3$ por $Re : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Φ por o produto interno em $\mathbb{C}^3$ e $H = 1$ por $H = 0$, obtemos o teorema de representação de Enneper-Weierstrass para superfícies minimas*

em $\mathbb{R}^3$.

O teorema de Representação de Bryant é um análogo do teorema de Enneper-Weierstrass.

Capítulo 3

Superfícies planas no $\mathbb{H}^3$

Neste capitulo obtemos uma representação em termos de dados holomorfos para superfícies planas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, consideradas como superfícies de Riemann com a estrutura conforme determinada pela sua segunda forma fundamental. Esse é análogo da representação de Weiertrass-Bryant para superfícies com $H = 1$ em $\mathbb{H}^3$.

3.1 Representação Conforme das Superfícies Planas no Espaço Hiperbólico

Seja M uma superfície orientada simplesmente conexa e $\psi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ uma imersão no espaço hiperbólico com métrica induzida plana. Então, existe uma imersão coordenada isoterma $x + iy : S \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3.1}$$

Então $\{e_0 = \psi, e_1 = \psi_x, e_2 = \psi_y, e_3 = \eta\}$ é um referencial adaptado a M, η vetor unitário normal ao $M \subset \mathbb{H}^3$. A aplicação hiperbólica de Gauss é $[e_0 - e_3] = [\psi - \eta] : M \longrightarrow S^2_\infty$.

Lema 3.1. *As seguentes equações valem para a imersão $\psi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$:*

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= E\eta + \psi \\ \psi_{xy} &= F\eta \\ \psi_{yy} &= G\eta + \psi \\ \eta_x &= -E\psi_x - F\psi_y \\ \eta_y &= -F\psi_x - G\psi_y \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde E, F e G são funções suaves em M que representam os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão ψ e $(.)_x$, $(.)_y$ denotam as derivadas parciais com respeito a x e y, respectivamente.

Demonstração. Temos que ψ_x, ψ_y, e η formam uma base para $T_p\mathbb{H}^3$ e como $\psi(p)$ é ortogonal a $T_{\psi(p)}\mathbb{H}^3 \cong T_p\mathbb{H}^3$ tem-se que: ψ_x, ψ_y, η e ψ formam uma base ortonormal Lorentziana, ou seja eles são ortogonais e:

$$\langle \psi_x, \psi_x \rangle = \langle \psi_y, \psi_y \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 1, \qquad \langle \psi, \psi \rangle = -1 \tag{3.3}$$

$$\tag{3.4}$$

para $\mathbb{L}^4$ em p.

Logo, é possível escrever os vetores ψ_{xx}, ψ_{yy}, ψ_{xy} η_x e η_y nesta base.

Seja $\psi_{xx} = a\psi_x + b\psi_y + c\psi + e\eta$, onde

i) $a = \langle \psi_{xx}, \psi_x \rangle = \frac{1}{2}\langle \psi_x, \psi_x \rangle_x = \frac{1}{2}(1)_x = 0$

ii) $b = \langle \psi_{xx}, \psi_y \rangle = -\langle \psi_x, \psi_{xy} \rangle = -\frac{1}{2}\langle \psi_x, \psi_x \rangle_y = -\frac{1}{2}(1)_y = 0$

iii) $c = -\langle \psi_{xx}, \psi \rangle = \langle \psi_x, \psi_x \rangle = 1$

iv) $e = \langle \psi_{xx}, \eta \rangle = -\langle \psi_x, \eta_x \rangle = E$

Portanto, $\psi_{xx} = \psi + E\eta$

De forma análoga podem obter-se as equações para ψ_{xy} e ψ_{yy}, onde E, F, G são os coeficientes da segunda forma fundamental, ou seja $\langle \psi_{xy}, \eta \rangle = F$ e $\langle \psi_{yy}, \eta \rangle = G$.

Considere agora $\eta_x = a\psi_x + b\psi_y + c\psi + e\eta$, onde

i) $a = \langle \eta_x, \psi_x \rangle = -\langle \psi_{xx}, \eta \rangle = -E$

ii) $b = \langle \eta_x, \psi_y \rangle = -\langle \psi_{yx}, \eta_x \rangle = -F$

iii) $-c = \langle \eta_x, \psi \rangle = -\langle \eta, \psi_x \rangle = 0$

iv) $e = \langle \eta_x, \eta \rangle = \frac{1}{2}\langle \eta, \eta \rangle_x = \frac{1}{2}(1)_x = 0$

Assim temos $\eta_x = -E\psi_x - F\psi_y$
De modo análogo para η_y, pode-se obter: $\eta_y = -F\psi_x - G\psi_y$. Portanto temos provado o teorema. □

As equações de compatibilidade para uma superfície são:

(i) $EG - F^2 = 1$ (Equação de Gauss)

(ii) $E_y - F_x = 0$ e $F_y - G_x = 0$ (Equações de Codazzi-Mainardi)

Com efeito,

$$(\psi_{xx})_y - (\psi_{xy})_x = 0 \tag{3.5}$$

$$(\psi_{yy})_x - (\psi_{xy})_y = 0 \tag{3.6}$$

e usando as equações do lema temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi_{xx})_y - (\psi_{xy})_x \\ &= (E\eta + \psi)_y - (F\eta)_x \\ &= E_y\eta + E\eta_y + \psi_y - F_x\eta - F\eta_x \\ &= (E_y - F_x)\eta + E(-F\psi_x - G\psi_y) - F(-E\psi_x - F\psi_y) + \psi_y \\ &= -EG\psi_y + F^2\psi_y + \psi_y \\ &= -1 + EG - F^2 \end{aligned}$$

Portanto temos $EG - F^2 = 1$ (Equação de Gauss)
Agora tomando produto interno de (3.5) com η temos

$$\langle (\psi_{xx})_y - (\psi_{xy})_x, \eta \rangle = \langle E_y\eta + E\eta_y + \psi_y - F_x\eta - F\eta_x, \eta \rangle \tag{3.7}$$

$$0 = E_y - F_x \tag{3.8}$$

Assim temos $E_y - F_x = 0$.

De forma análoga, tomando produto interno de (3.6) com η temos $F_y - G_x = 0$.

Portanto temos: $E_y - F_x = 0$ e $F_y - G_x = 0$ (Equações de Codazzi-Mainardi).

Como M é simplesmente conexo, existe uma função ϕ em M tal que: $E = \phi_{xx}$, $F = \phi_{xy}$ e $G = \phi_{yy}$.

De fato: Considere $\omega = Edx + Gdy$ uma 1-forma diferencial. Assim tem-se $dw = (E_y - F_x)dy \wedge dx$, logo das equações de Mainardi-Codazzi, temos que: $dw = 0$.

Pelo lema de Poincaré , existe $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_x = E$ e $f_y = F$

De forma análoga, se consideramos $\tilde{\omega} = Fdx + Gdy$ uma 1-forma diferencial, vai existir uma função $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_x = F$ e $g_y = G$.

Pelo Lema de Poincaré, existe uma função $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi_x = f$ e $\phi_y = g$.

Assim temos:

$$E = \phi_{xx}, \quad F = \phi_{xy} \quad \text{e} \quad G = \phi_{yy}$$

Logo a segunda forma fundamental $d\sigma^2$ da imersão pode escrever-se como:

$$d\sigma^2 \;=\; \phi_{xx}dx^2 + 2\phi_{xy}dxdy + \phi_{yy}dy^2 \tag{3.9}$$

com:

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 \;=\; 1 \tag{3.10}$$

De agora para frente considere M uma superfície de Riemann com uma estrutura conforme determinada pela sua segunda forma fundamental $d\sigma^2$ obtida acima.

Da equação (3.10) pode-se escolher η tal que $\phi_{xx} > 0$

Lema 3.2. *Considere a nova coordenada $z = u + iv$, para a imersão ψ , onde:*

$$u = x + \phi_x, \qquad v = y + \phi_y \tag{3.11}$$

Então:

$$\begin{aligned} \psi_u &= \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_x - \frac{\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_y \\ \psi_v &= \frac{-\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_x + \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\psi_y \end{aligned} \tag{3.12}$$

Alem disso: $z : M \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma imersão conforme tal que a segunda forma fundamental pode escrever-se como:*

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} |dz|^2 \tag{3.13}$$

e a aplicação hiperbólica de Gauss:

$$[\psi - \eta] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$$

é uma aplicação conforme que induz sobre M *a métrica plana* $du^2 + dv^2$.

Alem disso a imersão ψ *pode escrever-se como*

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi - \eta) + 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}} \tag{3.14}$$

Demonstração. Temos que o jacobiano da transformação $(x, y) \longrightarrow (u, v)$ vem dado por:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 + \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & 1 + \phi_{yy} \end{vmatrix} \\
&= (1 + \phi_{xx})(1 + \phi_{yy}) - \phi_{xy}^2 \\
&= 1 + \phi_{yy} + \phi_{xx} + \phi_{xx}\phi_{xy} - \phi_{xy}^2
\end{aligned}$$

Por (3.10), tem-se

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}$$

e como: $2+\phi_{xx}+\phi_{yy} > 0$, pois nos escolhemos o η convenientemente, temos que z é localmente um difeomorfismo.

Agora tem-se que:

$$\begin{aligned}
\psi_x &= \psi_u u_x + \psi_v v_x \\
&= (1 + \phi_{xx})\psi_u + \phi_{xy}\psi_v \\
\psi_y &= \psi_u u_y + \psi_v v_y \\
&= \phi_{xy}\psi_u + (1 + \phi_{yy})\psi_v
\end{aligned}$$

Em forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & 1+\phi_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & 1+\phi_{yy} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix} &= \frac{1}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}} \begin{pmatrix} 1+\phi_{yy} & -\phi_{xy} \\ -\phi_{xy} & 1+\phi_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obtendo as equações (3.12).

Agora de (3.2), (3.9), (3.10) (3.11) e (3.12) temos:

$$\begin{aligned} du^2+dv^2 &= (u_x dx+u_y dy)^2+(v_x dx+v_y dy)^2 \\ &= (u_x^2+v_x^2)dx^2+(u_y^2+v_y^2)dy^2+2(u_x u_y+v_x v_y)dxdy \\ &= [(1+\phi_{xx})^2+\phi_{xy}^2]dx^2+[(1+\phi_{yy})^2+\phi_{xy}^2]dy^2+2[(1+\phi_{xx})\phi_{xy}+(\phi_{xy})(1+\phi_{yy})] \\ &= [\phi_{xx}^2+2\phi_{xx}+\phi_{xx}\phi_{yy}]+[\phi_{yy}^2+2\phi_{yy}+\phi_{xx}\phi_{yy}]+2[\phi_{xy}+\phi_{xx}\phi_{xy}+\phi_{xy}+\phi_{xy}\phi_{yy}] \\ &= (\phi_{xx}+\phi_{yy}+2)[\phi_{xx}dx^2+\phi_{yy}dy^2+2\phi_{xy}dxdy] \\ &= (\phi_{xx}+\phi_{yy}+2)d\sigma^2 \end{aligned}$$

Por tanto temos

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2+E+G}(du^2+dv^2) = \frac{1}{2+E+G}|dz|^2 \tag{3.15}$$

Afirmamos que:

$$(\psi-\eta)_u = \psi_x \qquad (\psi-\eta)_v = \psi_y \tag{3.16}$$

Vamos a determinar η_u, η_v em função de ψ_x, ψ_y

$$\begin{aligned} \eta_u &= \eta_x x_u+\eta_y y_u \\ &= (-E\psi_x-F\psi_y)x_u+(-F\psi_x-G\psi_y)y_u \\ &= (-Ex_u-Fy_u)\psi_x+(-Fx_u-Gy_u)\psi_y \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora como

$$x_u = \frac{1+G}{2+E+G}, \qquad y_u = \frac{-F}{2+E+G}$$

Substituindo em (3.17), temos:

$$\eta_u = \frac{-(1+E)}{2+E+G}\psi_x - \frac{F}{2+E+G}\psi_y$$

Por outro lado, obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_u - \psi_x &= \frac{1+G}{2+E+G}\psi_x + \frac{-F}{2+E+G}\psi_y - \psi_x \\ \psi_u - \psi_x &= \frac{-(1+E)}{2+E+G}\psi_x - \frac{F}{2+E+G}\psi_y \end{aligned}$$

Assim $\psi_u - \psi_x = \eta_u$.

Portanto $(\psi - \eta)_u = \psi_x$

Similarmente, pode-se provar que $(\psi - \eta)_v = \psi_y$.

Da equação (3.16) da afirmação acima, tem-se

$$\begin{aligned} (\psi-\eta)_{uu} &= (\psi_x)_u \\ (\psi-\eta)_{uu} &= \psi_{xx}x_u + \psi_{xy}y_u \\ &= (E\eta+\psi)(\frac{1+G}{2+E+G}) + F\eta(\frac{-F}{2+E+G}) \\ &= \frac{E+1}{2+E+G}\eta + \frac{1+G}{2+E+G}\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\psi-\eta)_{vv} &= (\psi_y)_v \\ (\psi-\eta)_{vv} &= \psi_{yx}x_v + \psi_{yy}y_v \\ &= F\eta(\frac{-F}{2+E+G}) + (G\eta+\psi)\frac{1+E}{2+E+G} \\ &= \frac{1+E}{2+E+G}\psi + \frac{1+G}{2+E+G}\eta \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$4(\psi-\eta)_{z\bar{z}} = \psi + \eta \tag{3.18}$$

Lembre que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})\end{aligned}$$

onde $z = u + iv$. Então temos

$$\begin{aligned}4(\psi-\eta)_{z\overline{z}} &= (\psi-\eta)_{uu} + (\psi-\eta)_{vv} \\ &= \frac{1+G}{2+E+G}\psi + \frac{1+E}{2+E+G}\eta + \frac{1+E}{2+E+G}\psi + \frac{1+G}{2+E+G}\eta \\ &= \psi + \eta\end{aligned}$$

Assim, usando (3.18) obtemos:

$$\begin{aligned}\psi &= 4(\psi-\eta)_{z\overline{z}} - \eta \\ &= 2(\psi-\eta)_{z\overline{z}} + 2(\psi-\eta)_{z\overline{z}} - \eta \\ &= 2(\psi-\eta)_{z\overline{z}} + \frac{1}{2}(\psi-\eta)\end{aligned}$$

Alem disso $\psi - \eta : M \longrightarrow \mathbb{N}^3$ é conforme.

Para provar essa afirmação, temos que mostrar:

$$\langle d(\psi-\eta)_p(v), d(\psi-\eta)_p(v)\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle \tag{3.19}$$

para todo $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Seja $p \in M$ e considere (U, φ) uma carta local de p. $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ é a base associada de T_pM. Assim

$$\begin{aligned}\left\langle d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u}), d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\right\rangle &= \langle d(\psi-\eta)_u, d(\psi-\eta)_u\rangle &(3.20)\\ &= \langle \psi_x, \psi_x\rangle &(3.21)\\ &= 1 &(3.22)\end{aligned}$$

Alem disso:

$$(2+E+G)\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\rangle_{d\sigma^2} = (2+E+G)\left[\frac{1}{2+E+G}\langle\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\rangle_{dz^2}\right] = 1 \tag{3.23}$$

Assim temos

$$\left\langle d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u}), d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\right\rangle = \lambda^2\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle \tag{3.24}$$

Analogamente, podemos ter

$$\left\langle d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u}), d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v})\right\rangle = \lambda^2\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle \tag{3.25}$$

$$\tag{3.26}$$

$$\left\langle d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v}), d(\psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v})\right\rangle = \lambda^2\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle \tag{3.27}$$

Portanto, temos provado a afirmação para os vetores de uma base de T_pM então, esta satisfeita para todo $v \in T_pM$.

$$\langle d(\psi-\eta)_p(v), d(\psi-\eta)_p(v)\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle \tag{3.28}$$

Agora consideremos a aplicação $\pi : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty = \frac{\mathbb{N}^3}{\mathbb{R}_+}$. Tem-se que π é uma aplicação conforme. Logo como a composição de duas aplicações conformes é conforme, temos que a aplicação de Gauss: $[\psi-\eta] : M \longrightarrow S^2$ é conforme. □

3.2 Representação Matricial

Lema 3.3. *Seja $A, B : M \longrightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas definidas em toda superfície M tal que $[\psi-\eta]$ é representado como $[(A,B)] \in \mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2_\infty$. Então, a imersão $\psi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por:*

$$\psi = \begin{pmatrix} C\overline{C} + 4\overline{C_z}C_z & C\overline{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ \overline{C}D + 4\overline{C_z}D_z & D\overline{D} + 4D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

e o vetor unitário η normal a M é dado por:

$$\eta = \begin{pmatrix} -C\overline{C} + 4\overline{C_z}C_z & -C\overline{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ -\overline{C}D + 4\overline{C_z}D_z & -D\overline{D} + 4D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

onde, $C = \frac{A}{\sqrt{2}R}$ e $D = \frac{B}{\sqrt{2}R}$, com $R^2 = AB_z - BA_z$ e $R : M \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e nunca zero sobre M.

Demonstração. Como $[\psi - \eta] \in \mathbb{S}^2_\infty \cong \mathbb{CP}^1$ então pode ser representado como $[(A, B)] \in \mathbb{CP}^1$. Tem-se que:

$$\psi - \eta = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A\overline{A} & A\overline{B} \\ \overline{A}B & B\overline{B} \end{pmatrix}$$

para alguma função real positiva $\lambda \in C^\infty(M)$.

Afirmamos que

$$\frac{1}{2} = \langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\overline{z}} \rangle = \frac{1}{2}\lambda^2 |AB_z - BA_z|^2$$

De fato, usando as equações (3.16) temos:

$$\begin{aligned} (\psi - \eta)_z &= \frac{1}{2}((\psi - \eta)_u - i(\psi - \eta)_v) = \frac{1}{2}(\psi_x - i\psi_y) \\ (\psi - \eta)_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}((\psi - \eta)_u + i(\psi - \eta)_v) = \frac{1}{2}(\psi_x + i\psi_y) \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\overline{z}} \rangle = \frac{1}{4}\langle \psi_x - i\psi_y, \psi_x + i\psi_y \rangle = \frac{1}{2} \tag{3.29}$$

Alem disso, lembre-se que para $m \in Herm(2)$ temos o produto interno $\langle m, m \rangle = -det(m)$.

Vamos obter uma expressão para $\langle m, n \rangle$ en função do determinante.

Considere $m, n \in Herm(2)$. Temos:

$$\langle m - n, m - n \rangle = \langle m, m \rangle + \langle n, n \rangle - 2\langle m, n \rangle$$

Logo obtêm-se:

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle &= \frac{1}{2}(\langle m, m \rangle + \langle n, n \rangle - \langle m - n, m - n \rangle) && (3.30) \\ &= \frac{1}{2}(-det(m) - det(n) + det(m - n)) && (3.31) \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\overline{z}} \rangle = \frac{1}{2}[-det((\psi - \eta)_z) - det((\psi - \eta)_{\overline{z}}) + det((\psi - \eta)_z - (\psi - \eta)_{\overline{z}})]$$

Fazendo os cálculos dos termos, tem-se:

$$\begin{aligned} -det((\psi-\eta)_z) &= \langle(\psi-\eta)_z,(\psi-\eta)_z\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle\psi_x - i\psi_y, \psi_x - i\psi_y\rangle \\ &= \frac{1}{4}(1+i^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -det((\psi-\eta)_{\overline{z}}) &= \langle(\psi-\eta)_{\overline{z}},(\psi-\eta)_{\overline{z}}\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle\psi_x + i\psi_y, \psi_x + i\psi_y\rangle \\ &= \frac{1}{4}(1+i^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\langle(\psi-\eta)_z,(\psi-\eta)_{\overline{z}}\rangle = \frac{1}{2}[det((\psi-\eta)_z - (\psi-\eta)_{\overline{z}})] \tag{3.32}$$

Da representação matricial do $(\psi-\eta)_z$ e $(\psi-\eta)_{\overline{z}}$, e dado que A e B são holomorfas (isto é equivalente a $A_{\bar{z}}=0$ e $B_{\bar{z}}=0$), tem-se $\overline{A}_z = 0$, $\overline{B}_z = 0$. Assim temos:

$$\begin{aligned} (\psi-\eta)_z &= \begin{pmatrix} \lambda A\overline{A} & \lambda A\overline{B} \\ \lambda\overline{A}B & \lambda B\overline{B} \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} \lambda A_z\overline{A} & \lambda A_z\overline{B} \\ \lambda\overline{A}B_z & \lambda B_z\overline{B} \end{pmatrix} \\ (\psi-\eta)_{\overline{z}} &= \begin{pmatrix} \lambda A\overline{A} & \lambda A\overline{B} \\ \lambda\overline{A}B & \lambda B\overline{B} \end{pmatrix}_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} \lambda A\overline{A}_{\overline{z}} & \lambda A\overline{B}_{\overline{z}} \\ \lambda\overline{A}_{\overline{z}}B & \lambda B\overline{B}_{\overline{z}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dai, como $\overline{A_z} = \bar{A}_{\bar{z}}$ e $\overline{B_z} = \bar{B}_{\bar{z}}$, tem-se:

$$(\psi-\eta)_z - (\psi-\eta)_{\overline{z}} = \lambda \begin{pmatrix} A_z\bar{A} - A\overline{A_z} & A_z\bar{B} - A\overline{B_z} \\ \bar{A}B_z - \overline{A_z}B & B_z\bar{B} - B\overline{B_z} \end{pmatrix}$$

Assim

$$\begin{aligned} det((\psi-\eta)_z - (\psi-\eta)_{\overline{z}}) &= \lambda^2[(A_z\bar{A} - A\overline{A_z})(B_z\bar{B} - B\overline{B_z}) - (A_z\bar{B} - A\overline{B_z})(\bar{A}B_z - \overline{A_z}B)] \\ &= \lambda^2[A_zB(\overline{BA_z} - \overline{AB_z}) + AB_z(\overline{AB_z} - \overline{A_zB})] \\ &= \lambda^2(B_zA - BA_z)(\overline{AB_z} - \overline{BA_z}) \\ &= \lambda^2(B_zA - BA_z)\overline{(B_zA - BA_z)} \\ &= \lambda^2|AB_z - BA_z|^2 \end{aligned}$$

Portanto, das equações (3.29) e (3.32) tem-se

$$\begin{aligned}\langle(\psi-\eta)_z,(\psi-\eta)_{\bar{z}}\rangle &= \frac{1}{2}det((\psi-\eta)_z-(\psi-\eta)_{\bar{z}})\\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\lambda^2|AB_z-BA_z|^2\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2}\lambda^2|AB_z-BA_z|^2 = 1 \tag{3.33}$$

Logo de (3.32) e (3.33) temos provado a afirmação.

Denotemos $f = AB_z - BA_z$. Como f nunca se anula em M, então existe uma função $g : M \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que: $f = e^g$. Agora definimos $R = e^{\frac{1}{2}g}$. Então $R^2 = f$ também é holomorfa. Denotando: $C = \frac{A}{\sqrt{2}R}$ e $D = \frac{B}{\sqrt{2}R}$ holomorfas, temos:

$$\begin{aligned}(\psi-\eta) &= \lambda\begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B}\\ \bar{A}B & B\bar{B}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2|R|^2C\bar{C} & 2|R|^2C\bar{D}\\ 2|R|^2\bar{C}D & 2|R|^2D\bar{D}\end{pmatrix}\\ &= 2\lambda|R|^2\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Usando a equação (3.14), tem-se

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}(\psi-\eta)+2(\psi-\eta)_{z\bar{z}}\\ &= \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix}_{z\bar{z}}\\ &= \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} C_z\bar{C}_z & C_z\bar{D}_z\\ \bar{C}_zD_z & D_z\bar{D}_z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} C\bar{C}+4C_z\bar{C}_z & C\bar{D}+4C_z\bar{D}_z\\ \bar{C}D+4\bar{C}_zD_z & D\bar{D}+4D_z\bar{D}_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.34}$$

O vetor η é dado por:

$$\begin{aligned}
\eta &= 4(\psi-\eta)_{z\bar{z}} - \psi \\
&= 8\begin{pmatrix} C_z\bar{C}_z & C_z\bar{D}_z \\ \bar{C}_z D_z & D_z\bar{D}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C\bar{C}+4C_z\bar{C}_z & C\bar{D}+4C_z\bar{D}_z \\ \bar{C}D+4\bar{C}_z D_z & D\bar{D}+4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -C\bar{C}+4C_z\bar{C}_z & -C\bar{D}+4C_z\bar{D}_z \\ -\bar{C}D+4\bar{C}_z D_z & -D\bar{D}+4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Vamos mostrar agora que

$$(\psi+\eta)_z = f(\psi-\eta)_{\bar{z}}$$

onde $f = \dfrac{\phi_{yy}-\phi_{xx}+2i\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\psi+\eta)_z &= (\psi-\eta)_z + 2\eta_z \\
&= \frac{1}{2}((\psi-\eta)_u - i(\psi-\eta)_v) + 2(\frac{1}{2}(\eta_u - i\eta_v)) \\
&= \frac{1}{2}\psi_x - \frac{i}{2}\psi_y + \eta_u - i\eta_v \\
&= \frac{1}{2}\psi_x - \frac{i}{2}\psi_y + (\psi_u - \psi_x) - i(\psi_v - \psi_y) \\
&= \psi_u - \frac{1}{2}\psi_x - i(\psi_v - \frac{i}{2}\psi_y) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{yy}-\phi_{xx}+2i\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}\right)(\psi_x + i\psi_y) \\
&= \frac{f}{2}(\psi_x + i\psi_y)
\end{aligned}$$

E como:

$$\begin{aligned}
(\psi-\eta)_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}[(\psi-\eta)_u + i(\psi-\eta)_v] \\
&= \frac{1}{2}(\psi_x + i\psi_y)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$(\psi+\eta)_z = f(\psi-\eta)_{\bar{z}} \tag{3.35}$$

Alem disso, temos que:

$$\begin{aligned}(\psi+\eta)_z &= \begin{pmatrix} 8\overline{C_z}C_z & 8C_z\overline{D_z} \\ 8\overline{C_z}D_z & 8D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}_z \\ &= 8\begin{pmatrix} \overline{C_z}C_{zz} & C_{zz}\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_{zz} & D_{zz}\overline{D_z} \end{pmatrix} \\ (\psi-\eta)_{\bar{z}} &= 2\begin{pmatrix} \overline{C}C & C\overline{D} \\ \overline{C}D & D\overline{D} \end{pmatrix}_{\bar{z}} \\ &= 2\begin{pmatrix} \overline{C_z}C & C\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D & D\overline{D_z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.35) temos

$$4\begin{pmatrix} \overline{C_z}C_{zz} & C_{zz}\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_{zz} & D_{zz}\overline{D_z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \overline{C_z}C & C\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D & D\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos:

$$4\begin{pmatrix} C_{zz} \\ D_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{C_z} & \overline{D_z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{C_z} & \overline{D_z} \end{pmatrix}$$

Da equação (3.33) tem-se:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lambda^2|CD_z - DC_z|^2 \tag{3.36}$$

Assim de (3.36) temos que:

C_z e D_z não se anulam simultaneamente, logo temos

$$C_{zz} = \frac{1}{4}fC, \quad D_{zz} = \frac{1}{4}fD \tag{3.37}$$

C e D não se anulam simultaneamente e como C_{zz}, C, D e D_{zz} são holomorfas temos que f é

holomorfa. Alem disso tem-se $|f| < 1$, pois:

$$\begin{aligned}
|f|^2 &= \left|\frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}\right|^2 = \frac{(\phi_{yy} - \phi_{xx})^2 + 4\phi_{xy}^2}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} \\
&= \frac{\phi_{yy}^2 - 2\phi_{xx}\phi_{yy} + \phi_{xx}^2 + 4\phi_{xy}^2}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} \\
&= \frac{\phi_{xx}^2 + \phi_{yy}^2 - 2\phi_{xx}\phi_{yy} + 4(\phi_{xx}\phi_{yy} - 1)}{\phi_{yy}^2 + (2 + \phi_{xx})^2 + 2\phi_{yy}(2 + \phi_{xx})} \\
&= \frac{\phi_{xx} + \phi_{yy} + 2\phi_{xx}\phi_{yy} - 4}{\phi_{yy} + \phi_{xx} + 4\phi_{xx} + 4 + 4\phi_{yy} + 2\phi_{xx}\phi_{yy}} \\
&= \frac{\phi_{xx} + \phi_{yy} + 2\phi_{xx}\phi_{yy} - 4}{(\phi_{xx} + \phi_{yy} + 2\phi_{xx}\phi_{yy} - 4) + 8 + 4\phi_{xx} + 4\phi_{yy}} < 1
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$|f| < 1 \tag{3.38}$$

Finalmente de (3.34) a imersão ψ pode ser recuperada por $\psi = gg^*$, onde $g : M \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ é a imersão holomorfa dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

tal que:

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz \tag{3.40}$$

De fato:

Afirmamos que $g \in SL(2, \mathbb{C})$, ou seja $det(g) = 1$.

Temos $det(g) = 2CD_z + 2DC_z = 2(CD_z + DC_z)$.

Lembre que:

$$C = \frac{A}{\sqrt{2}R} \quad = \quad D = \frac{B}{\sqrt{2}R}$$

Então:

$$\begin{aligned}
C_z &= \frac{A_z}{\sqrt{2}R} + A(\frac{1}{\sqrt{2}R})_z \\
D_z &= \frac{B_z}{\sqrt{2}R} + B(\frac{1}{\sqrt{2}R})_z
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} det(g) &= 2[CD_z + DC_z] \\ &= 2\left[\frac{A}{\sqrt{2}R}\left(\frac{B_z}{\sqrt{2}R} + B(\frac{1}{\sqrt{2}R})_z\right) - \frac{B}{\sqrt{2}R}\left(\frac{A_z}{\sqrt{2}R} + A(\frac{1}{\sqrt{2}R})_z\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{AB_z - BA_z}{2R^2}\right] \\ &= 2\left[\frac{R^2}{2R^2}\right] = 1 \end{aligned}$$

Observe que: $CD_z + DC_z = \frac{1}{2}$ e como g é holomorfa temos:
$dg = \frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = \frac{\partial g}{\partial z}dz$

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_z & 2C_{zz} \\ D_z & 2D_{zz} \end{pmatrix} dz \\ &= \frac{1}{det(g)} \begin{pmatrix} 2D_z & -2C_z \\ -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_z & \frac{1}{2}fC \\ D_z & \frac{1}{2}fD \end{pmatrix} dz \\ &= \begin{pmatrix} 2D_zC_z - 2C_zD_z & fCD_z - fC_zD \\ -DC_z + CD_z & -\frac{1}{2}fCD + \frac{1}{2}fDC \end{pmatrix} dz \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz \\ &= \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{1}{2}dz$.

Alem disso, usando (3.1) (3.9), (3.13), (**??**), (3.38) e (3.40), a métrica induzida e a segunda forma fundamental podem ser escritas, respectivamente como :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4}(fdz^2 + (1 + |f|^2)|dz|^2 + \overline{f}d\bar{z}^2) \\ d\sigma^2 &= \frac{1}{4}(1 - |f|^2)|dz|^2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

De fato: Como $\psi = gg^*$, tem-se

$$\begin{aligned} d\psi &= dgg^* + gdg^* \\ &= g(g^{-1}dg + dg^*(g^*)^{-1})g^* \\ &= g(g^{-1}dg + (dg)^*(g^{-1})^*)g^* \\ &= g(g^{-1}dg + (g^{-1}dg)^*)g^* \end{aligned}$$

Através da identificação de $\mathbb{L}^4$ com o espaço das matrizes Hermitianas 2×2 tem-se:

$$\begin{aligned} det(d\psi) &= det(g(g^{-1}dg + (g^{-1}dg)^*g^*) \\ &= det\left(\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*\omega^*\right) \\ &= det\left(\begin{pmatrix} 0 & f\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{f}\bar{f} & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= det\begin{pmatrix} 0 & f\omega + \bar{\omega} \\ \omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)|\omega|^2) \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)|\omega|^2 \tag{3.42}$$

Alem disso, de (3.38) temos:

$$|f|^2 = \frac{\phi_{xx} + \phi_{yy} + 2\phi_{xx}\phi_{yy} - 4}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} = \frac{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2 - 8 - 4\phi_{xx} - 4\phi_{yy}}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} 1 - |f|^2 &= \frac{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} - \frac{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2 - 8 - 4\phi_{xx} - 4\phi_{yy}}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} \\ &= \frac{8 + 4\phi_{xx} + \phi_{yy}}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2} \\ &= \frac{4}{(2 + \phi_{xx} + \phi_{yy})} \end{aligned}$$

Do lema (3.1), temos que:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}|dz|^2 \\ &= \frac{4}{2 + \phi_{xx} + 4\phi_{yy}}\frac{|dz|^2}{4} \\ &= (1 - |f|^2)|\omega|^2 \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$d\sigma^2 \;=\; (1-|f|^2)|\omega|^2 \tag{3.43}$$

Teorema 3.2.1. *(Representação de Weierstrass para Superfícies Planas)*

(I) *Seja S uma superfície simplesmente conexa e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão plana. Se sobre S consideramos a estrutura conforme determinada pela segunda forma fundamental de ψ, então existe uma imersão holomorfa $g : S \longrightarrow \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ e um par (f,ω) formada por uma função holomorfa f e uma 1-forma holomorfa ω sobre S tal que:*

(i) *$|f| < 1$ e $\omega \neq 0$ em todo punto*

(ii) $g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega$

(iii) *A imersão pode ser recuperada como $\psi = gg^*$*

(iv) *A métrica induzida e a segunda forma fundamental da imersão vem dadas por :*

$$\begin{aligned} ds^2 &= f\omega^2 + (1+|f|^2)|\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 \\ d\sigma^2 &= (1-|f|^2)|\omega|^2 \end{aligned}$$

Alem disso, g é única salvo multiplicação a la direita por uma matriz constante $g_0 \in SU(2)$.

(II) *Reciprocamente, seja S uma superfície de Riemann e $g : S \longrightarrow \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ uma imersão holomorfa tal que*

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega \tag{3.44}$$

$\omega = \frac{1}{2}dz$ e $|f| < 1$. Então $\psi = gg^* : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão plana que tem métrica induzida e segunda forma fundamental dadas respectivamente por:

$$ds^2 \;=\; f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1+|f|^2)|\omega|^2 \tag{3.45}$$

$$d\sigma^2 \;=\; (1-|f|^2)|\omega|^2 \tag{3.46}$$

Demonstração. De (3.34), (3.38), (3.39), (3.40) (3.41) temos (i), (ii), (iii), (iv); só resta provar a unicidade.

Suponha que existe $h : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ outra imersão, tal que $\psi = hh^*$. Assim temos: $gg^* = \psi = hh^*$.

Como $h = gg^*(h^*)^{-1}$, escolha $g_0 = g^*(h^*)^{-1}$. Tem-se que $g_0 \in SU(2)$.

$$\begin{aligned} g_0 g_0^* &= (g^*(h^*)^{-1})(g^*(h^*)^{-1})^* \\ &= (g^*(h^*)^{-1})([(h^*)^{-1}]^*(g^*)^*) \\ &= (g^*(h^*)^{-1})(h^{-1}g) \\ &= (g^{-1}g)(g^*(h^*)^{-1})(h^{-1}g) \\ &= g^{-1}(gg^*)(h^*)^{-1})(h^{-1}g) \\ &= g^{-1}(hh^*)(h^*)^{-1})(h^{-1}g) \\ &= g^{-1}h(h^{-1}g) \\ &= Id \end{aligned}$$

Assim: $h = gg_0$. Alem disso, como g e h são holomorfas, tem-se:

$$(g_0)_z = (h^*(g^*)^{-1})_z = (h^*)_z(g^*)^{-1} + h^*((g^*)^{-1})_z = h^*((g^{-1})^*)_z = 0$$

Portanto, g é única salvo multiplicação na direita por uma matriz constante $g_0 \in SU(2)$.

Reciprocamente, seja M uma superfície de Riemann e $g : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ a imersão holomorfa, tal que

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega \quad \text{e} \quad |f| < 1$$

onde $\omega = \frac{1}{2}dz$.

Afirmação 3.1. *Considere* $g = \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. *Então tem-se* $E = 2C_z$ *e* $F = 2D_z$.

Demonstração. De fato, como $g \in SL(2,\mathbb{C})$, tem-se que:

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} F & -E \\ -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dC & dE \\ dD & dF \end{pmatrix}$$

Da hipótese (3.44) e dado que C, D, E e F são holomorfas, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega = \begin{pmatrix} F & -E \\ -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_z & E_z \\ D_z & F_z \end{pmatrix} dz$$

Assim

$$\begin{aligned} FC_z - ED_z &= 0 \\ -C_z D + D_z C &= \frac{1}{2} \\ FE_z - EF_z &= \frac{1}{2} f \\ -DE_z + CF_z &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, temos:

$$E = 2C_z \quad \text{e} \quad F = 2D_z$$

□

Da afirmação temos: $g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix}$. Logo, a imersão ψ pode-se expressar como

$$\psi = gg^* = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & C_z \\ D & D_z \end{pmatrix}^* \tag{3.47}$$

$$= \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_z C_z & C\bar{D} + 4C_z \bar{D}_z \\ \bar{C}D + 4C_z D_z & D\bar{D} + 4D_z \bar{D}_z \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Logo, a primeira forma fundamental é dada por:

$$ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle = -det(d\psi)$$

Assim de (3.42) temos:

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)|\omega|^2$$

Agora se consideramos $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, podemos expressar um vetor normal a imersão como

$$\eta = gvg^* = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4C_zC_z & -C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ -\bar{C}D + 4C_zD_z & -D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix}$$

A segunda forma fundamental é dada por:

$$d\sigma^2 = -\langle d\eta, d\psi\rangle = \frac{1}{2}[det(d\eta) + det(d\psi) - det(d\eta - d\psi)]$$

Vamos calcular $det(d\eta)$, $det(d\psi)$, $det(d\eta - d\psi)$:

$$\begin{aligned} d\eta &= dg(vg^*) + gv(dg^*) && (3.49)\\ &= (gg^{-1})dg(vg^* + gv(dg^*)((g^*)^{-1}g^*) && (3.50)\\ &= g(g^{-1}dgv + (g^{-1}dg)^*)g^* && (3.51)\\ &= g\left[\begin{pmatrix} 0 & f\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right] g^* && (3.52) \end{aligned}$$

Assim,

$$det(d\eta) = det\begin{pmatrix} 0 & f\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} = f\omega^2 - |f|^2|\omega|^2 - |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2$$

e

$$det(d\eta - d\psi) = det\left[\begin{pmatrix} 0 & f\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & f\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right] = -4|\omega|^2$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{1}{2}[f\omega^2 - |f|^2|\omega|^2 - |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (-f\omega^2 - \bar{f}\bar{\omega}^2(1 + |f|^2)|\omega|^2) - (-4|\omega|^2)]\\ &= \frac{1}{2}(2|\omega|^2 - 2|f|^2|\omega|^2)\\ &= (1 - |f|^2)|\omega|^2 \end{aligned}$$

Assim

$$d\sigma^2 = (1 - |f|^2)|\omega|^2 \qquad (3.53)$$

Finalmente como $\omega = \frac{1}{2}(du + idv)$, temos:

$$ds^2 = \frac{f + \bar{f} + 1 + |f|^2}{4}du^2 + \frac{fi - \bar{f}i}{4}2dudv + \frac{-f - \bar{f} + 1 + |f|^2}{4}dv^2$$

e

$$d\sigma^2 = \frac{(1 - |f|^2)}{4}(du^2 + dv^2)$$

e concluímos a demostração do teorema de representação de Weierstrass. □

Definição 3.2.1. *O par (f, ω) no teorema anterior sera chamado Dados de Weierstrass, associados a representação conforme da imersão plana.*

Observação 3.1. *Se consideramos os datos de Weierstrass (f, ω) e a imersão holomorfa g escrita num parâmetro complexo arbitrário ζ como $(f(\zeta), h(\zeta)d\zeta)$ e*

$$g = \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix}$$

então desde (3.37), (3.39) e (3.40) temos que C e D são funções soluções linearmente independentes da equação diferencial ordinária

$$X_{\zeta\zeta} - \frac{h_\zeta}{h} X_\zeta - fh^2 X = 0 \tag{3.54}$$

e

$$E = \frac{1}{h} C_\zeta, \; F = \frac{1}{h} D_\zeta$$

Reciprocamente, si C e D são soluções linearmente independentes da equação (3.54) tal que:

$$\frac{1}{h}(CD_\zeta - DC_\zeta) = 1$$

então:

$$g = \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h} C_\zeta \\ D & \frac{1}{h} D_\zeta \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

determina a imersão plana com dados de Weierstrass $(f(\zeta), h(\zeta)d\zeta)$.
Mais ainda, se A e B são outras soluções de (3.54) sob as mesmas condições anteriores então a imersão plana associada com A e B é, a menos de isometria, a imersão associada com C e D.

Agora enunciamos um resultado análogo, que tem-se para a aplicação de Gauss em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$.

Teorema 3.2.2. *Seja S uma superfície orientada e conexa e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão tal que sua segunda forma fundamental é positivamente definida para uma escolha de campo de vetores unitário normal a η. Se em S consideramos a estrutura conforma induzida pela segunda forma fundamental, então a imersão $[\psi - \eta] : S \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se e somente se a métrica induzida por ψ em S é plana ou ψ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Seja $p \in S$. Como a segunda forma fundamental é autoadjunta, existe uma base E_1, E_2 ortogonal e suave em uma vizinhança de p que diagonaliza a métrica σ associada a segunda forma fundamental em p, isto é $\sigma(E_i, E_j) = h_{ij}\delta_{ij}, \quad i, j \in 1, 2$. Nessa base, $[\sigma] = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix}$
Então $[\psi - \eta]$ é uma aplicação conforme se e somente se

$$\sigma = -\langle d\eta, d\psi\rangle = \lambda\langle d(\psi - \eta), d(\psi - \eta)\rangle = \lambda[\langle d\psi, d\psi\rangle - 2\langle d\psi, d\eta\rangle + \langle d\eta, d\eta\rangle]$$

Aplicando σ em (E_i, E_j), temos

$$\sigma(E_i, E_j) = \delta_{ij}h_{ij}\lambda[\delta_{ij} + 2\delta_{ij}h_{ij} + h_{ij}^2\delta_{ij}],$$

Assim

$$h_{11} = \lambda(1 + h_{11})^2 \tag{3.56}$$

$$h_{22} = \lambda(1 + h_{22})^2 \tag{3.57}$$

Eliminando λ obtemos:

$$\frac{(1 + h_{11})^2}{h_{11}} = \frac{(1 + h_{22})^2}{h_{22}}$$

Logo

$$h_{22}(1 + h_{11})^2 = h_{11}(1 + h_{22})^2 \tag{3.58}$$

$$h_{22}(1 + 2h_{11} + h_{11}^2) = h_{11}(1 + 2h_{22} + h_{22}^2) \tag{3.59}$$

$$h_{22} - h_{11} = h_{11}h_{22}(h_{22} - h_{11}) \tag{3.60}$$

Portanto,

$$(h_{22} - h_{11})(1 - h_{11}h_{22}) = 0$$

Então temos as seguintes possibilidades:

i) A métrica em S é plana (isto é: $K = h_{11}h_{22} - 1 = 0$) ou S é totalmente umbílico (isto é $h_{11} = h_{22}$).

ii) S é umbílica nos pontos onde $K \neq 0$

No segundo caso, temos que se $K \neq 0$ em algum ponto, tem-se que S é totalmente umbílica. De fato: O conjunto $S' = \{p \in S \ / \ K(p) \neq 0\}$ é um conjunto aberto e $\psi|_{S'}$ é totalmente umbílica. Portanto temos que K é constante em cada componente conexa de S, e assim S é fechado. Então como S é conexa, ψ é totalmente umbílica. □

3.3 Alguns Exemplos

3.3.1 Superfícies paralelas

Seja S uma superfície simplesmente conexa e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão plana. Do teorema (3.2.1) existe uma imersão coordenada conforme ζ em M e dados de Weierstrass $(f, hd\zeta)$ tal que $\psi = gg^*$ com g determinada por (3.54) e (3.55).
Escolhemos as famílias $f_t = e^{2t}f$, $\omega_t = e^{-t}hd\zeta$ e

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2}C & \frac{1}{h}e^{t/2}C_\zeta \\ e^{-t/2}D & \frac{1}{h}e^{t/2}D_\zeta \end{pmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$ tal que $|f_t| < 1$. Então:

i) $g_t^{-1}dg_t = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\psi_t = g_t g_t^* = cosh(t)\psi + senh(t)\eta$

Portanto ψ_t é uma imersão plana paralela a ψ a distancia $|t|$, com datos de Weierstrass $(e^{2t}f, e^{-t}hd\zeta)$.
De fato: Para cada $t \in \mathbb{R}$ considere a equação

$$X_{\zeta\zeta} - \frac{h_\zeta}{h} - f_t h_t^2 X = 0$$

onde: $h_t = e^{-t}h$. Esta tem soluções linearmente independentes $C_t = e^{-t/2}C$ e $D_t = e^{-t/2}D$, e como $\frac{1}{h}[CD_\zeta - DC_\zeta] = 1$. Temos que:

$$\frac{1}{h}[C_t(D_t)_\zeta - D_t(C_t)_\zeta] = \frac{1}{h}[CD_\zeta - DC_\zeta] = 1$$

Assim da observação (3.1) temos que :

$$g = \begin{pmatrix} C_t & \frac{1}{h}(C_t)_\zeta \\ D_t & \frac{1}{h}(D_t)_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t/2}C & \frac{1}{h}e^{t/2}C_\zeta \\ e^{-t/2}D & \frac{1}{h}e^{t/2}D_\zeta \end{pmatrix}$$

determina a imersão plana com dados de Weierstrass $(f_t, h_t d\zeta)$.

Assim do teorema de Representação de Weierstrass para superfícies planas temos que:

$$g_t^{-1}dg_t = \begin{pmatrix} 0 & f_t \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h_t d\zeta = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t}h d\zeta$$

Alem disso, temos que:

$$\begin{aligned} \psi_t = g_t g_t^* &= \begin{pmatrix} e^{-t/2}C & \frac{1}{h}e^{t/2}C_\zeta \\ e^{-t/2}D & \frac{1}{h}e^{t/2}D_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t/2}\overline{C} & e^{-t/2}\overline{D} \\ \frac{1}{h}e^{t/2}\overline{C_\zeta} & \frac{1}{h}e^{t/2}\overline{D_\zeta} \end{pmatrix} && (3.61) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}|C|^2 + \frac{1}{h^2}e^t|C_\zeta|^2 & e^{-t}C\overline{D}\frac{1}{h^2}e^t C_\zeta \overline{D_\zeta} \\ e^{-t}\overline{C}D + \frac{1}{h^2}e^t\overline{C_\zeta}D_\zeta & e^{-t}|D|^2 + \frac{1}{h^2}e^t|D_\zeta|^2 \end{pmatrix} && (3.62) \\ &= \cosh(t)\psi + \sinh(t)\eta && (3.63) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \psi = gg^* &= \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\zeta \\ D & \frac{1}{h}D_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{D} \\ \frac{1}{h}\overline{C_\zeta} & \frac{1}{h}\overline{D_\zeta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |C|^2 + \frac{1}{h^2}|C_\zeta|^2 & C\overline{D}\frac{1}{h^2}C_\zeta\overline{D_\zeta} \\ \overline{C}D + \frac{1}{h^2}\overline{C_\zeta}D_\zeta & |D|^2 + \frac{1}{h^2}|D_\zeta|^2 \end{pmatrix} \\ &= \\ \eta = gvg^* &= \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\zeta \\ D & \frac{1}{h}D_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{D} \\ \frac{1}{h}\overline{C_\zeta} & \frac{1}{h}\overline{D_\zeta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -|C|^2 + \frac{1}{h^2}|C_\zeta|^2 & -C\overline{D}\frac{1}{h^2}C_\zeta\overline{D_\zeta} \\ -\overline{C}D + \frac{1}{h^2}\overline{C_\zeta}D_\zeta & -|D|^2 + \frac{1}{h^2}|D_\zeta|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3.2 Superfícies de revolução

Consideremos o modelo do semi-espaço superior de $\mathbb{H}^3$, isto é, $\mathbb{R}^3_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_3 > 0\}$ com a métrica

$$d\tau^2 = \frac{1}{y_3^2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$$

Se fazemos a identificação de $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$ com $\frac{1}{x_0+x_3}(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3_+$, podemos escrever uma superfície de revolução no espaço hiperbólico como

$$\psi(r, \theta) = (y_1(r)cos(\theta), y_1(r)sen(\theta), y_3(r)) \tag{3.64}$$

com $y_3 > 0$, onde escolhemos o parâmetro r como o comprimento de arco da curva generatriz $(y_1(r), 0, y_3(r)) \in \mathbb{R}^3_+$.

Se pode calcular, ver [5] que a curvatura de Gauss de M é dada por:

$$K_G = -\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{y_1(r)}{y_3(r)}\right)\frac{y_3(r)}{y_1(r)}$$

Assim, tem-se que ψ é uma imersão plana se e somente se $y_1(r) = y_3(r)(ar + b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, não ambos nulos. Distinguimos dos casos:

A) Se $a = 0$

Afirmamos que: $r + ib\theta$ é um parâmetro isotérmico com a métrica induzida pela imersão. De fato, fazendo $\xi = b\theta$, tem-se

$$\psi(r, \xi) = (y_1(r)\cos(\xi/b), y_1(r)\,\mathrm{sen}(\xi/b), y_3)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \psi_r(r, \xi) &= (y_1'(r)\cos(\xi/b), y_1'(r)\,\mathrm{sen}(\xi/b), y_3') \\ \psi_\xi(r, \xi) &= (-y_1(r)\frac{1}{b}\,\mathrm{sen}(\xi/b), y_1(r)\frac{1}{b}\cos(\xi/b), 0) \end{aligned}$$

Como a curva generatriz $(y_1, 0, y_3)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos:

$$1 = \langle (y_1', 0, y_3'), (y_1', 0, y_3') \rangle$$

então:

$$y_3^2 = (y_1')^2 + (y_3')^2 \tag{3.65}$$

Assim, de (3.65) e como $y_1(r) = by_3$, temos

i) $\langle \psi_r, \psi_r \rangle = \frac{(y_1')^2 + (y_3)^2}{y_3^2} = 1$

ii) $\langle \psi_r, \psi_\xi \rangle = -y_1' \cos(\xi/b) y_1 \frac{1}{b}\,\mathrm{sen}(\xi/b) + y_1'\,\mathrm{sen}(\xi/b) y_1 \frac{1}{b}\cos(\xi/b) = 0$

iii) $\langle \psi_\xi, \psi_\xi \rangle = \frac{y_1^2}{b^2}\frac{1}{y_3^2} = \frac{y_1^2}{y_3^2}\frac{1}{b^2} = 1$

O que prova a afirmação.

Afirmamos que:

$$z = \left(1 + \sqrt{\frac{b^2}{1+b^2}}\right) r + i \left(1 + \sqrt{\frac{1+b^2}{b^2}}\right) b\theta$$

é uma imersão coordenada conforme para a estrutura de superfície de Riemann induzida pela segunda forma fundamental.

De fato:

Vamos a expressar ψ em sua forma matricial hermitiana, obtendo os coeficientes da segunda forma fundamental E, F G e construindo uma função ϕ, para expressar as coordenadas conformes, do jeito que foi realizado na prova do teorema de representação de Weierstrass para superficies planas.

Temos:

$$\psi = (y_1(r)\cos(\theta), y_1 \operatorname{sen}(\theta), y_3(r)) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{x_0 + x_3}$$

Lembre que a identificação de $\mathbb{L}^4$ com o espaço $Herm(2)$ das matrizes hermitianas 2×2 é dada por:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Assim

$$y_3 = \frac{1}{x_0 + x_3} \tag{3.66}$$

$$y_1 + iy_2 = \frac{x_1 + ix_2}{x_0 + x_3} = y_1(\cos(\xi/b) + i \operatorname{sen}(\xi/b)) \tag{3.67}$$

Os coeficientes de ψ em sua forma matricial são:

i) $x_0 + x_3 = \dfrac{1}{y_3}$

ii) Como: $\dfrac{x_1 + ix_2}{x_0 + x_3} = y_1(\cos(\xi/b) + i \operatorname{sen}(\xi/b))$, temos

$$x_1 + ix_2 = y_1(x_0 + x_3)\exp^{i\xi/b} \tag{3.68}$$

$$= \frac{y_1}{y_3}\exp^{i\xi/b} \tag{3.69}$$

$$= b\exp^{i\xi/b} \tag{3.70}$$

Por tanto

$$x_1 + ix_2 = b\exp^{i\xi/b}$$

iii) Tomando conjugada a ii), temos:

$$x_1 - ix_2 = b\exp^{-i\xi/b}$$

iv) Como: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, temos:

$$\begin{aligned}(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) &= x_0^2 - x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 1\end{aligned}$$

Assim $(x_0 - x_3) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_0 + x_3}$,

Alem disso como

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{(x_0 + x_3)^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_0 + x_3)^2} + \frac{1}{(x_0 + x_3)^2} \tag{3.71}$$

$$= y_1^2 + y_3^2 \tag{3.72}$$

$$= y_3^2(b^2 + 1) \tag{3.73}$$

Portanto

$$(x_0 - x_3) = (b^2 + 1)y_3$$

A representação matricial de ψ é

$$\psi(r, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_3} & b\exp^{i\xi/b} \\ b\exp^{-i\xi/b} & y_3(b^2 + 1) \end{pmatrix}$$

Assim obtemos

$$\psi_r = \begin{pmatrix} -\frac{y_3'}{y_3^2} & 0 \\ 0 & y_3'(b^2 + 1) \end{pmatrix} \qquad \psi_{rr} = \begin{pmatrix} -\frac{y_3'' y_3^2 - 2y_3 y_3' y_3'}{y_3^4} & 0 \\ 0 & y_3''(b^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$\psi_\xi = \begin{pmatrix} 0 & i\exp^{i\xi/b} \\ -i\exp^{-i\xi/b} & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\exp^{i\xi/b}}{b} \\ \frac{-\exp^{-i\xi/b}}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Agora temos que encontrar os coeficientes E, F, G da segunda forma fundamental, usando as equações (3.2) e lema (3.1).

a) Temos que $E^2 = \langle E\eta, E\eta\rangle = \langle \psi_{rr} - \psi, \psi_{rr} - \psi\rangle = -det(\psi_{rr} - \psi)$

Como $y_1 = by_3$, tem-se $1 = \langle \psi_r, \psi_r\rangle = (y_3)^2 \frac{b^2+1}{y_3^2}$ Assim temos

$$\frac{(y_3')^2}{y_3^2} = \frac{1}{b^2+1} \tag{3.74}$$

Derivando obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(y_3')^2(b^2+1)}{y_3^2}\right)' &= \frac{2y_3'y_3''(b^2+1)y_3^2 - 2y_3y_3'(y_3')^2(b^2+1)}{y_3^4}\\ 0 &= \frac{2(b^2+1)}{y_3^4}y_3'(y_3''y_3^2 - y_3(y_3')^2)\end{aligned}$$

Logo tem-se

$$y_3''y_3^2 - y_3(y_3')^2 = 0$$

Pois se $y_3' = 0$ tem-se $y_1 = 0$, logo temos $0 = 1$, um absurdo.

Assim tem-se $y_3'' = \dfrac{(y_3')^2}{y_3}$.

Assim, temos

$$det(\psi_{rr} - \psi) = \begin{vmatrix} -\frac{(y_3''y_3^2 - 2y_3(y_3')^2)}{y_3^4} - \frac{1}{y_3} & -b\exp^{i\xi b} \\ -b\exp^{-i\xi/b} & (y_3'' - y_3)(b^2+1)\end{vmatrix} \tag{3.75}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{y_3(y_3')^2}{y_3^4} - \frac{1}{y^3} & -b\exp^{i\xi/b} \\ -b\exp^{-i\xi/b} & \left(\frac{(y_3')^2}{y_3} - y_3\right)(b^2+1)\end{vmatrix} \tag{3.76}$$

$$= \left(\frac{(y_3')^2 - y_3^2}{y_3^3}\right)\left(\frac{(y_3')^2 - y_3^2}{y_3}\right)(b^2+1) - b^2 \tag{3.77}$$

$$= \frac{(y_3')^4 - 2(y_3')^2y_3^2 + y_3^4}{y_3^4}(b^2+1) - b^2 \tag{3.78}$$

De (3.74) tem-se,

$$\begin{aligned}det(\psi_{rr} - \psi) &= \left(\frac{1}{(b^2+1)^2} - 2\frac{1}{b^2+1} + 1\right)(b^2+1) - b^2\\ &= \frac{1}{b^2+1} - 1\\ &= -\frac{b^2}{b^2+1}\end{aligned}$$

Assim $det(\psi_{rr} - \psi) = -\frac{b^2}{b^2+1}$

Portanto

$$E = \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}$$

b) Temos que $\psi_{\xi\xi} = F\eta$

Como $\psi_{r\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se:

$$F = 0$$

c) Temos que $G^2 = \langle G\eta, G\eta \rangle = \langle \psi_{\xi\xi} - \psi, \psi_{rr} - \psi \rangle$

Calculando $det(\psi_{\xi\xi} - \psi)$, temos:

$$\begin{aligned} det(\psi_{\xi\xi} - \psi) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{y^3} & -\frac{\exp^{i\xi/b}}{b} - b\exp^{i\xi/b} \\ -\frac{\exp^{-i\xi/b}}{b} - b\exp^{-i\xi/b} & -y_3(b^2+1) \end{vmatrix} \\ &= (b^2+1) - \left(\frac{1+b^2}{b}\right)^2 \\ &= \frac{b^4 + b^2 - 1 - 2b^2 - b^4}{b^2} \\ &= -\frac{b^2+1}{b^2} \end{aligned}$$

Assim $G^2 = \frac{b^2+1}{b^2}$

Portanto

$$G = \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}$$

Finalmente já tendo os termos da segunda forma fundamental, pode-se construir uma função real ϕ definida em M, tal que $\phi_{rr} = E$, $\phi_{\xi\xi} = G$, $\phi_{r\xi} = F$.

De esta forma, temos

i) $\phi_r = Er + L(s) = \left(\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r + cte)$

ii) $\phi_\xi = Fr + L(s) = \left(\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}\right) r + cte.$

Em particular, sem perdida de generalidade, podemos escolher

$$\phi_r = \left(\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r \quad \text{e} \quad \phi_\xi = \quad \left(\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}\right) r$$

Assim do lema (3.2), temos que:

$$z = (1+\phi_r)r + i(1+\phi_\xi)\xi \tag{3.79}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r + i\phi\xi \tag{3.80}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}\right) b\theta \tag{3.81}$$

é uma imersão em coordenadas conformes com a estrutura determinada pela segunda forma fundamental.

Afirmamos que a imersão plana associada aos dados de Weierstrass $(\frac{1}{k^2}, \frac{k}{2\xi}d\xi)$ é:

$$g(\xi) = i\sqrt{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \xi^{1/2} & \frac{1}{k}\xi^{1/2} \\ \xi^{-1/2} & -\frac{1}{k}\xi^{-1/2} \end{pmatrix}$$

De fato:

$$f(\xi) = \frac{1}{k^2}, \quad \omega = \frac{1}{2}dz = \frac{k}{2\xi}d\xi \tag{3.82}$$

Usando a função $f = \frac{\phi_{\xi\xi} - \phi_{rr} + 2i\phi_{rr}}{2+\phi_{\xi\xi}+\phi_{rr}}$ temos:

$$f(\xi) = \frac{\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}} - \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}}{2 + \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}} \tag{3.83}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2|b|\sqrt{b^2+1} + 2b^2 + 1} \tag{3.84}$$

Resolvendo a equação, tem-se: $k^2 = 2|b|\sqrt{b^2+1}$.

Alem disso de $\frac{1}{2}dz = \frac{k}{2\xi}d\xi$ temos que $z = k\ln(\xi)$. Assim: $dz = k\frac{1}{\xi}d\xi$.

$\omega = \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\frac{k}{\xi}d\xi = h(\xi)d\xi$, então: $h(\xi) = \frac{k}{2\xi}$

Portanto os novos parâmetros são

$$\xi = \exp^{z/k} \quad k^2 = 2|b|\sqrt{b^2+1}$$

Da equação (3.54), temos que:

$$X_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}X_\xi - \frac{1}{4\xi^2}X = 0 \tag{3.85}$$

Considere C, D soluções linearmente independentes da equação (3.85). Vamos provar que $CD_\xi - DC_\xi = \frac{k}{2\xi}$. Tem-se:

$$g = \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\xi \\ D & \frac{1}{h}D_\xi \end{pmatrix}$$

é uma imersão holomorfa e $\psi = gg^*$ determina a imersão plana.

A equação

$$\xi^2 X_{\xi\xi} + \xi X_\xi - \frac{1}{4}X = 0$$

é uma equação de Cauchy-Euler.

Logo a solução é dada por $X = \xi^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Substituindo $X = \xi^\alpha$ na equação, temos:

$$\xi^\alpha(\alpha)(\alpha-1)\xi^{\alpha-2} + \xi\alpha\xi^{\alpha-1} - \frac{1}{4}\xi^\alpha = 0$$

Assim a equação característica é

$$\alpha^2 - \frac{1}{4} = 0$$

onde as soluções são $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

Então uma base para o conjunto solução é $\{\xi^{1/2}, \xi^{-1/2}\}$.

Assim $C = i\sqrt{\frac{k}{2}}\xi^{1/2}$ e $D = i\sqrt{\frac{k}{2}}\xi^{-1/2}$ são soluções linearmente independentes e

$$CD_\xi - DC_\xi = \frac{k}{2\xi} \tag{3.86}$$

Logo pela observação (3.1), temos que

$$g = i\sqrt{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \xi^{1/2} & \frac{1}{k}\xi^{1/2} \\ \xi^{-1/2} & -\frac{1}{k}\xi^{-1/2} \end{pmatrix}$$

é uma imersão plana associada aos dados de Weierstrass $(\frac{1}{k^2}, \frac{k}{2\xi}d\xi)$ e a respectiva superfície plana de revolução a menos uma isometria, é dada por:

$$\begin{aligned} \psi &= gg^* \\ &= i\sqrt{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} \xi^{1/2} & \frac{1}{k}\xi^{1/2} \\ \xi^{-1/2} & -\frac{1}{k}\xi^{-1/2} \end{pmatrix} \left(-i\sqrt{\frac{k}{2}}\right) \begin{pmatrix} \overline{\xi^{1/2}} & \overline{\xi^{-1/2}} \\ \frac{1}{k}\overline{\xi^{1/2}} & -\frac{1}{k}\overline{\xi^{-1/2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{pmatrix} |\xi| + \frac{1}{k^2} & \xi^{1/2}\overline{\xi^{-1/2}}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ \xi^{-1/2}\overline{\xi^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) & |\xi|^{-1}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B) Se $a \neq 0$, então $\frac{1}{a}e^{log(ar+b)+ia\theta}$ é um parâmetro isotérmo local, induzido por ψ. Por tanto, de (3.2) e (3.11), temos:

$$z = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1-a^2}{(ar+b)^2}}\right)\frac{1}{a}(ar+b)e^{ia\theta}$$

é um parâmetro conforme. Assim, se tomamos o novo parâmetro local ζ determinado por $\zeta^a = az$, os dados de Weierstrass associados à imersão são:

$$f(\zeta) = \frac{1-a^2}{\zeta^{2a}}, \qquad \omega = \frac{1}{2}\zeta^{a-1}d\zeta$$

para $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tal que $|f(\zeta)| < 1$.

Usando (3.54) e (3.55), obtemos que:

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^{\frac{a+1}{2}} & (a+1)\zeta^{\frac{1-a}{2}} \\ \zeta^{\frac{a-1}{2}} & (a-1)\zeta^{-\frac{1+a}{2}} \end{pmatrix}$$

e uma superfície plana de revolução, ao menos isometrias é parametrizada de forma explicita por

$$\psi_a(\zeta) = \left(\frac{\zeta(|\zeta|^{a-1} + (a^2-1)|\zeta|^{-(a+1)})}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}, \frac{2}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}\right) \quad (3.87)$$

Observamos que as superfícies parametrizadas por ψ_a, ψ_{-a} são isométricas através da reflexão sobre o plano geodésico $\{(x_1, x_2, x_3)/x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 > 0\}$ dado por

$$I(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(x_1, x_2, x_3)$$

Para $a = \pm 1$ as superfícies são horoesferas.

Nos outros casos, obtemos superfícies planas de revolução.

Referências

[1] Bryant, R. L. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, Asterisque 154-155 p.321-347, Soc. Math de France, 1987.

[2] do Carmo, M. P., Geometria Riemanniana, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[3] do Carmo, M. P., O Método do Referencial Móvel, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[4] do Carmo, M. P., Formas Diferenciais e Aplicações Wiley, 1995.

[5] do Carmo, M. P. and Dajczer M., Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature Trans. A. M. S. 277(2)(1983), 685-709.

[6] Chern, S.S., An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface, Proc. Amer. Math. Soc., 6: 771-782, 1985.

[7] Gálvez J.A., Martínez A., Milán F., Flat Surfaces in the hyperbolic 3-space, Math. Ann. 316 p. 419-435. No. 3, 2000.

[8] Gray, A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2.ed. Boca Raton, CRC Press, 1998.

[9] Kokubu M., Umehara M., Yamada K., Flat fronts in Hiperbolic 3-space. Pacific Journal of Mathematics, p.149-175, No. 1.

[10] Kokubu M., Rossman W., Saji K., Umehara M., Yamada K., Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-spaces. Pacific Journal of Mathematics, p.303-351, v. 221, No. 2.

[11] Lima, E. L., Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA 1998.

[12] Neto, L.A., Funções de uma Variável Complexa, Rio de Janeiro: IMPA, 2008

[13] Spivak, M., Comprehensive introduction to differential geometry, Vol.4, Boston, Publish or Perish Inc., 1975.

[14] Umehara, M., Yamada, K., Complete Surfaces of Constant Mean Curvature-1 in the Hyperbolic 3-Space Ann. Math. 137, p. 611-638, 1993.