OPERADORES HIPERCÍCLICOS

Tiago Soares dos Reis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro
Janeiro de 2012

Reis, Tiago Soares dos
R375o Operadores Hipercíclicos/ Tiago Soares dos Reis. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2012.
viii, 87f.; 30cm.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.
Referências: f. 85–87.

1. Operadores Hipercíclicos 2. Hiperciclicidade
I. Bernardes Junior, Nilson da Costa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

OPERADORES HIPERCÍCLICOS

Tiago Soares dos Reis

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Orientador, Nilson da Costa Bernardes Junior - UFRJ - Doutorado

----

Antonio Roberto da Silva - UFRJ - Doutorado

Dinamérico Pereira Pombo Junior - UFF - Doutorado

Luiza Amalia de Moraes - UFRJ - Doutorado

Rio de Janeiro

Janeiro de 2012

Dedico este trabalho a todos que se fascinam com a Matemática num simples momento onde passam a conhecer um pouco mais dela. E à memória de meu pai Joel A. dos Reis, homem responsável por muito do que sou.

Agradeço a minha amada esposa Larissa pelo companheirismo, amor e compreensão; ao meu professor e orientador acadêmico Nilson, por me acompanhar e por revisar atentamente este trabalho e ao Deus que me conhece, caminha comigo e me proporciona a vida.

Resumo

Apresentamos três exemplos clássicos de operadores hipercíclicos. Demonstramos o critério de hiperciclicidade, que dá condições suficientes para que um operador seja hipercíclico. Estabelecemos diversas propriedades e provamos a existência destes operadores em todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita. Em seguida demonstramos que o conjunto dos operadores hipercíclicos é denso no espaço dos operadores lineares contínuos com respeito à topologia da convergência pontual. Provamos a existência de operadores hipercíclicos com comportamento prescrito. Demonstramos um critério para determinação de operadores diagonalmente hipercíclicos, e ainda, apresentamos alguns exemplos de tais operadores. Por fim, damos um exemplo de um operador hipercíclico que não satisfaz o critério de hiperciclicidade.

Palavras chave: Operadores Hipercíclicos, Critério de Hiperciclicidade, Existência de Operadores Hipercíclicos, Operadores Diagonalmente Hipercíclicos.

Abstract

We present three classic examples of hypercyclic operators. We demonstrate the hypercyclicity criterion, which gives sufficient conditions for an operator to be hypercyclic. We establish several properties of these operators and we prove the existence of such operators in every infinite-dimensional separable Fréchet space. Then we show that the set of hypercyclic operators is dense in the space of continuous linear operators with respect to the topology of pointwise convergence. We prove the existence of hypercyclic operators with prescribed behavior. We demonstrate a criterion for the determination of diagonally hypercyclic operators, and present some examples of such operators. Finally, we give an example of a hypercyclic operator that does not satisfy the hypercyclicity criterion.

Keywords: Hypercyclic Operators, Hypercyclicity Criterion, Existence Hypercyclic Operators, Diagonally Hypercyclic Operators.

Sumário

Introdução

Sejam X um espaço vetorial topológico (real ou complexo) e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é um *operador hipercíclico* se existe um vetor $x \in X$ cuja órbita, $\mathrm{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$, é densa em X. Um tal vetor é dito um *vetor hipercíclico com respeito a* T.

Os primeiros exemplos de operadores hipercíclicos foram obtidos por G. Birkhoff [12] e G. MacLane [27], que mostraram, respectivamente, que o operador translação $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + 1)$ e o operador derivação $f \mapsto f'$ são hipercíclicos no espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras. O primeiro exemplo de um operador hipercíclico em um espaço de Banach, obtido por Rolewicz [32], é o múltiplo λB, com $|\lambda| > 1$, do operador deslocamento à esquerda B sobre o espaço de Hilbert ℓ_2.

O termo "hipercíclico" foi introduzido por B. Beauzamy em 1984, motivado pelo conceito de vetor cíclico. Lembramos que um vetor $x \in X$ é dito *cíclico com respeito a* T se o subespaço vetorial gerado pela órbita de x com respeito a T é denso em X. Este conceito está intimamente ligado ao seguinte problema famoso:

Problema do Subespaço Invariante: Será verdade que para todo operador linear contínuo $T : X \longrightarrow X$ existe um subespaço vetorial T-invariante fechado não trivial?

Como o subespaço vetorial fechado gerado por uma órbita de T é T-invariante, segue que T não possui subespaços vetoriais T-invariantes fechados não triviais se, e só se, todo vetor não nulo $x \in X$ é cíclico com respeito a T.

Relacionado ao conceito de vetor hipercíclico, temos o seguinte problema:

Problema do Subconjunto Invariante: Será verdade que para todo operador linear contínuo $T : X \longrightarrow X$ existe um subconjunto T-invariante fechado não trivial?

Como a aderência de uma órbita de T é T-invariante, segue que T não possui subconjuntos T-invariantes fechados não triviais se, e só se, todo vetor não nulo $x \in X$ é hipercíclico com respeito a T.

O problema do subespaço invariante para espaços de Banach foi resolvido na negativa por P. Enflo por volta de 1975. Todavia, seu artigo [16] com o contra-exemplo é extremamente difícil e demorou muito para ser publicado, tendo aparecido apenas em 1987. Neste meio tempo, B. Beauzamy [6] publicou uma simplificação do exemplo de Enflo e C. Read [30] construiu um contra-exemplo no espaço ℓ_1. Pouco depois, C. Read [31] construiu um operador linear contínuo $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ tal que todo vetor não nulo é hipercíclico com respeito a T, resolvendo assim, também na negativa, o problema do subconjunto invariante. Ambos os problemas continuam em aberto para espaços de Banach reflexivos e, em particular, para espaços de Hilbert.

Em seu artigo [32], S. Rolewicz propôs o seguinte problema: Todo espaço de Banach separável de dimensão infinita admite um operador hipercíclico? Esta pergunta foi respondida na afirmativa, independentemente, por S. Ansari [3] e por L. Bernal-Gonzalez [7]. Logo, em seguida, J. Bonet e A. Peris estenderam este resultado a espaços de Fréchet separáveis de dimensão infinita [13].

C. Kitai determinou um critério para garantir a hiperciclicidade de um operador linear [26]. Esta condição, conhecida como Critério de Hiperciclicidade, foi reformulada por R. Gethner and J. H. Shapiro [17] e é largamente utilizada na prova de hiperciclicidade de operadores lineares. Até meados da década de 2000, todos os exemplos de operadores hipercíclicos conhecidos satisfaziam o critério de hiperciclicidade. Então foi natural a pergunta:

Existe um operador hipercíclico que não satisfaz o critério de hiperciclicidade?

Este problema foi originalmente proposto por D. A. Herrero [24]. J. Bès e A. Peris mostraram que um operador T satisfaz o critério de hiperciclicidade se, e só se, $T \times T$ é hipercíclico [10]. Portanto, a pergunta acima é equivalente a: $T \times T$ é hipercíclico sempre que T o é? Este problema foi resolvido por volta de 2006 por M. De La Rosa e C. Read, que mostraram que existe um espaço de Banach que admite um operador hipercíclico que não satizfaz o critério de hiperciclicidade [15]. Este resultado é bastante engenhoso e não é óbvio se o espaço construído pode ser um dos espaços de Banach clássicos. Conhecendo o trabalho de M. De La Rosa e C. Read, F. Bayart e É. Matheron mostraram que qualquer espaço de Banach possui um operador hipercíclico que não satisfaz o critério de hiperciclicidade, desde que este espaço possua uma base incondicional e o deslocamento à direita associado a esta base seja contínuo [4]. Note que os espaços ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ e c_0 satisfazem estas condições.

Os trabalhos de C. Kitai [26], R. Gethner e J. Shapiro [17], G. Godefroy e J. Shapiro [18] e D. Herrero [24, 25] estabeleceram a base da teoria de hiperciclicidade. O "survey" de K.-G. Grosse-Erdmann [20] no Bulletin da AMS deu impulso adicional à teoria. Nos últimos 25 anos, o estudo de operadores hipercíclicos se transformou numa área de pesquisa muito ativa.

Na presente dissertação apresentamos alguns aspectos da teoria de operadores hipercíclicos.

No capítulo 1 introduzimos o conceito de operador hipercíclico e apresentamos diversos exemplos de operadores hipercíclicos (incluindo os exemplos clássicos de Birkhoff, MacLane e Rolewicz).

No capítulo 2 estabelecemos o Critério de Hiperciclicidade e o Teorema de Bès-Peris [10] que diz que um operador T satisfaz o critério de hiperciclicidade se, e só se, $T \times T$ é hipercíclico.

No capítulo 3 apresentamos algumas propriedades dos operadores hipercíclicos, incluindo o Teorema de Ansari [2] que assegura a hiperciclicidade das iteradas T^n de T a partir da hiperciclicidade de T.

O Capítulo 4 é dedicado ao Teorema de Ansari-Bernal-Bonet-Peris [3, 7, 13] que garante a existência de operadores hipercíclicos em todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita.

No capítulo 5 demonstramos que o conjunto dos operadores hipercíclicos é denso no espaço dos operadores lineares contínuos com a topologia da convergência pontual.

No capítulo 6 mostramos que um subconjunto enumerável denso e linearmente independente arbitrário de um espaço de Banach é a órbita de algum operador hipercíclico neste espaço.

No capítulo 7 introduzimos o conceito de *operadores d-hipercíclicos* no seguinte sentido:

$T_1 \times \cdots \times T_N$ possui um vetor hipercíclico da forma $(x, \ldots, x)$. Estabelecemos, para d-hiperciclicidade, resultados análogos ao critério de hiperciclicidade ao Teorema de Bès-Peris e apresentamos alguns exemplos de operadores d-hipercíclicos.

No oitavo e último capítulo apresentamos o exemplo de um operador hipercíclico que não satisfaz o critério de hiperciclicidade obtido por F. Bayart e É. Matheron [4].

Capítulo 1

Operadores Hipercíclicos

Iniciamos este capítulo introduzindo a noção de operador hipercíclico. Formalmente, um operador $T : X \longrightarrow X$ é hipercíclico se existe um elemento x de X tal que o conjunto $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ é denso em X. Em seguida demonstramos o Teorema de Transitividade de Birkhoff, que é uma ferramenta muito utilizada para provar que um dado operador é hipercíclico. De posse desse instrumento apresentamos três exemplos clássicos de tais operadores. No espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras, o operador translação $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + a)$ ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) e o operador derivação $f \mapsto f'$, que são devidos, respectivamente, a Birkhoff e a MacLane, e no espaço de Banach ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ou c_0, o múltiplo λB, com $|\lambda| > 1$, do operador deslocamento à esquerda $B(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, devido a Rolewicz.

Dados um conjunto X e uma função $f : X \longrightarrow X$, definimos as *iteradas* de f por

$$f^0 = \mathrm{Id}_X,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f^2,\ \dots\ ;$$

onde Id_X denota a função identidade em X. Além disso, para cada $x \in X$, definimos a *órbita de x com respeito a f* por

$$\mathrm{orb}(x, f) := \{x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

Definição 1.1. Seja X um espaço vetorial topológico. Um operador linear contínuo T em X é dito *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, T)$ é densa em X. Neste caso, x é chamado um *vetor hipercíclico* de T. O conjunto dos vetores hipercíclicos de T é denotado por $HC(T)$.

Apesar do conceito de operador hipercíclico ter sentido em espaços vetoriais topológicos arbitrários, nos concentraremos nos espaços de Fréchet e, em particular, nos espaços de Banach. Assim, alguns resultados não serão apresentados em toda generalidade.

Em todo este texto usaremos as convenções: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

O seguinte resultado de dinâmica topológica implica um teorema muito útil para provar a hiperciclicidade de um operador.

Lema 1.2 (Teorema de Transitividade de Birkhoff). Sejam X um espaço métrico completo separável sem ponto isolado e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. A função f possui uma órbita densa se, e só se, f é *topologicamente transitiva*, no seguinte sentido: para qualquer par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. E neste caso, o conjunto dos pontos cuja órbita é densa é um conjunto residual, isto é, união enumerável de abertos densos em X.

Demonstração. Suponha que $x \in X$ tem órbita densa com respeito a f. Sejam U, V subconjuntos abertos não vazios de X. Existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(x) \in U$. Mas $f^n(x)$ também tem órbita densa. De fato, $\operatorname{orb}(x, f) \setminus \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \subset \operatorname{orb}(f^n(x), f)$ e $\operatorname{orb}(x, f) \setminus \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ é denso, pois X não possui ponto isolado. Logo, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^m(f^n(x)) \in V$. Daí, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Agora, suponha que f seja topologicamente transitiva. Denotaremos a bola aberta com centro em x e raio r por $B(x, r)$. Como X possui um conjunto enumerável denso $\{x_j; j \in \mathbb{N}\}$, as bolas abertas $B(x_j, \frac{1}{m}),\ m \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$, formam uma base enumerável da topologia de X. Seja $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma enumeração desta base. Daí, x possui órbita densa se, e só se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(x) \in U_k$. Isto é, o conjunto D dos pontos cuja órbita é densa é dado por

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k).$$

Como f é contínua, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k)$ é aberto em X. Além disso, cada um desses conjuntos é denso em X. De fato, se V é um subconjunto aberto não vazio arbitrário de X, então, pela hipótese de transitividade topológica de f, temos que $(f^n)^{-1}(U_k) \cap V \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, donde $\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k) \cap V \neq \emptyset$.

Pelo Teorema de Baire ([34], Teorema 2.2), D é denso e, em particular, não vazio. Além disso, D é um conjunto residual em X.

□

Teorema 1.3. Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X . Então T é hipercíclico se, e só se, T é topologicamente transitivo. E neste caso, $HC(T)$ é um conjunto residual em X.

Demonstração. Fixemos uma métrica completa d compatível com a topologia de X. Assim, (X, d) é um espaço métrico completo separável e sem ponto isolado. Logo, o resultado segue do Lema 1.2.

□

Corolário 1.4. Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Se T possui um vetor hipercíclico, então T possui um conjunto denso de tais vetores.

Denotamos por $H(\mathbb{C})$ o espaço de Fréchet das funções inteiras, cuja topologia é dada pela família de semi-normas

$$p_n(f) = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|; \; n \in \mathbb{N}.$$

Note que $H(\mathbb{C})$ é separável, já que o conjunto dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ é enumerável e denso em $H(\mathbb{C})$.

O seguinte exemplo mostra que existe uma função inteira f tal que qualquer outra função inteira pode ser aproximada por translações de f.

Exemplo 1.5 (Birkhoff). Para cada $a \in \mathbb{C}$ não nulo, o operador linear

$$T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C}), \; f(z) \longmapsto T_a f(z) = f(z + a),$$

é chamado *operador translação por a* em $H(\mathbb{C})$. Observe que T_a é contínuo. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq n + |a|$. Então $|z| \leq n$ implica $|z+a| \leq k_n$. Portanto,

$$p_n(T_a f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z+a)| \leq \sup_{|w|\leq k_n} |f(w)| = p_{k_n}(f), \text{ para todo } f \in H(\mathbb{C}),$$

provando a continuidade de T_a.

Agora, vejamos que T_a é hipercíclico. Sejam $U, V \subset H(\mathbb{C})$ abertos não vazios arbitrários. Fixemos $f \in U$ e $g \in V$. Existem $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\{h \in H(\mathbb{C}); \sup_{|z|\leq m} |f(z) - h(z)| < \varepsilon\} \subset U \text{ e}$$

$$\{h \in H(\mathbb{C}); \sup_{|z|\leq m} |g(z) - h(z)| < \varepsilon\} \subset V.$$

Seja $K \subset \mathbb{C}$ o disco fechado centrado em 0 de raio m. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $K + na$ é disjunto de K e seja q uma função holomorfa com $q(z) = f(z)$, para todo z numa vizinhança de K, e $q(z) = g(z - na)$, para todo z numa vizinhança de $K + na$. Aplicando o Teorema de Runge ([33], Teorema 13.7) à função q e ao compacto $K \cup (K + na)$, obtemos um polinômio p tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sup_{w\in K+na} |g(w - na) - p(w)| < \varepsilon.$$

Daí,

$$\sup_{z\in K} |g(z) - T_a^n p(z)| = \sup_{z\in K} |g(z) - p(z+na)| = \sup_{w\in K+na} |g(w-na) - p(w)| < \varepsilon.$$

Assim, $p \in U$ e $T_a^n p \in V$. Logo, T_a é topologicamente transitivo. Pelo Teorema 1.3, T_a é hipercíclico.

O seguinte exemplo mostra que existe uma função inteira f tal que qualquer outra função inteira pode ser aproximada por sucessivas derivadas de f.

Exemplo 1.6 (MacLane). O operador linear

$$D : f \in H(\mathbb{C}) \longmapsto f' \in H(\mathbb{C})$$

é chamado *operador derivação* em $H(\mathbb{C})$. Note que D é contínuo. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue das Estimativas de Cauchy ([33], Teorema 10.25) que

$$|f'(w)| \leq \sup_{|z-w|\leq 1} |f(z)| \leq \sup_{|z|\leq n+1} |f(z)|,$$

sempre que $|w| \leq n$. Portanto,

$$p_n(Df) = \sup_{|w|\leq n} |f'(w)| \leq \sup_{|z|\leq n+1} |f(z)| = p_{n+1}(f), \text{ para todo } f \in H(\mathbb{C}),$$

provando a continuidade de D.

Agora, vejamos que D é hipercíclico. Dados abertos não vazios $U, V \subset H(\mathbb{C})$ arbitrários, existem polinômios $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \in U$ e $q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k \in V$, pois o conjunto dos polinômios é denso em $H(\mathbb{C})$. Queremos encontrar um polinômio r tal que $D^n r \in V$ e r esteja suficientemente próximo de p. Observe que

$$r_n(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k! b_k}{(k+n)!} z^{k+n}$$

satisfaz $D^n r_n = q$, quando $n \geq N + 1$. E também que, se $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{|z|\leq m} |r_n(z) - p(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k|}{(k+n)!} m^{k+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Daí, $r_n \in U$ e $D^n r_n \in V$ para n suficientemente grande. Logo, D é topologicamente transitivo, portanto hipercíclico.

Exemplo 1.7 (Rolewicz). Seja $X = \ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, ou $X = c_0$. O operador linear

$$B : (x_1, x_2, \dots) \in X \longmapsto (x_2, x_3, \dots) \in X$$

é chamado *operador deslocamento à esquerda em* X. Obviamente B é contínuo.

Seja λ um escalar e considere o operador $\lambda B(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$. Suponha que $|\lambda| > 1$. Dados abertos não vazios $U, V \subset X$ arbitrários, existem

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in U \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, 0, \dots) \in V,$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Observe que se $z_n = (z_{n,1}, z_{n,2}, \dots)$, onde $z_{n,k} = x_k$ quando $1 \leq k \leq N$, $z_{n,k} = \lambda^{-n} y_{k-n}$ quando $n+1 \leq k \leq n+N$ e $z_{n,k} = 0$ para os demais índices k (onde $n \geq N$), temos que

$$(\lambda B)^n z_n = y \text{ para todo } n \geq N \quad \text{e} \quad \|x - z_n\| \leq |\lambda|^{-n} \|y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Daí, $z_n \in U$ e $(\lambda B)^n z_n \in V$ para todo n suficientemente grande. Logo, λB é topologicamente transitivo, portanto hipercíclico. Se $|\lambda| \leq 1$, então λB não é hipercíclico, pois $\|\lambda B\| = |\lambda|$, donde toda órbita de λB é limitada.

Capítulo 2

O Critério de Hiperciclicidade

Neste capítulo estabelecemos o Critério de Hiperciclicidade que dá condições suficientes para que um operador seja hipercíclico e o Teorema de Bès-Peris que garante a equivalência entre o fato de o operador T satisfazer o critério de hiperciclicidade e o fato de $T \times T$ ser hipercíclico.

Antes, precisamos de um resultado preliminar que será utilizado diversas vezes neste texto.

Lema 2.1. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ funções contínuas. Se g admite uma órbita densa e existe uma função contínua $\phi : Y \longrightarrow X$ com imagem densa tal que $f \circ \phi = \phi \circ g$, então f também admite uma órbita densa.

Demonstração. Seja $y \in Y$ com órbita densa com respeito a g. Se U é um subconjunto aberto não vazio de X, então $\phi^{-1}(U)$ é aberto não vazio de Y, pois ϕ é contínua e tem imagem densa. Logo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $g^n(y) \in \phi^{-1}(U)$. Como $f(\phi(y)) = \phi(g(y))$, verifica-se, por indução, que $f^n(\phi(y)) = \phi(g^n(y))$. Portanto, $f^n(\phi(y)) = \phi(g^n(y)) \in U$. Logo, $\phi(y)$ tem órbita densa com respeito a f.

□

Sejam X, Y conjuntos quaisquer e $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ funções. A função $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ é definida por

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Claramente, $(f \times g)^n = f^n \times g^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Além disso, se X, Y são espaços topológicos e f, g são contínuas, então $f \times g$ também é contínua na topologia produto de $X \times Y$.

Teorema 2.2 (**Critério de Hiperciclicidade**)**.** Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X. Se existem subconjuntos densos $X_0, Y_0 \subset X$, uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturais e aplicações $S_{n_k} : Y_0 \longrightarrow X,\ k \in \mathbb{N}$, não necessariamente lineares ou contínuas, tais que para quaisquer $x \in X_0$ e $y \in Y_0$,

(i) $T^{n_k}x \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,

(ii) $S_{n_k}y \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,

(iii) $T^{n_k}S_{n_k}y \xrightarrow[k\to\infty]{} y$,

então $T \times T$ é hipercíclico e, consequentemente, T é hipercíclico.

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abertos não vazios arbitrários. Como X_0 e Y_0 são densos em X, existem $x_1 \in U_1 \cap X_0$, $x_2 \in U_2 \cap X_0$, $y_1 \in V_1 \cap Y_0$ e $y_2 \in V_2 \cap Y_0$. De (i) e (iii) segue que

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_1 + S_{n_k}y_1) = \lim_{k\to\infty} T^{n_k}x_1 + \lim_{k\to\infty} T^{n_k}S_{n_k}y_1 = 0 + y_1 = y_1.$$

E de (ii) segue que

$$\lim_{k\to\infty}(x_1 + S_{n_k}y_1) = x_1 + 0 = x_1.$$

Logo, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 + S_{n_k}y_1 \in U_1$ e $T^{n_k}(x_1 + S_{n_k}y_1) \in V_1$ sempre que $k \geq k_1$. Da mesma forma, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_2 + S_{n_k}y_2 \in U_2$ e $T^{n_k}(x_2 + S_{n_k}y_2) \in V_2$ sempre que $k \geq k_2$. Escolhendo $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, vemos que $(T \times T)^{n_{k_0}}(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Logo, $T \times T$ é topologicamente transitivo, consequentemente hipercíclico. Claramente, $\phi : (x, y) \in X \times X \longmapsto x \in X$ satisfaz as condições do Lema 2.1 para $T \times T$ e T. Logo, T é hipercíclico.

$\square$

O próximo exemplo mostra que a completude do espaço X é essencial no critério de hiperciclicidade.

Exemplo 2.3. Seja $X = c_{00}$, o espaço vetorial das sequências de escalares que possuem apenas um número finito de coordenadas não nulas, olhado como um subespaço de ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ou de c_0. Definamos $T, S : X \longrightarrow X$ por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots)$$

e

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots).$$

Claramente T, S são operadores lineares contínuos em X. Além disso, T^n e S^n tendem a 0 pontualmente em X e $TS = \mathrm{Id}_X$. Logo, o critério de hiperciclicidade é satisfeito, mas claramente T não possui vetor hipercíclico em X.

Vejamos como podemos utilizar o critério de hiperciclicidade nos exemplos de Birkhoff, MacLane e Rolewicz.

Exemplo 2.4. Seja $a \in \mathbb{C}$ não nulo e consideremos o operador translação por a

$$T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C}),\ f(z) \mapsto T_a f(z) = f(z+a).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = (T_{-a})^n$. Obviamente, $T^n S_n = \mathrm{Id}_{H(\mathbb{C})}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que a condição (iii) do critério de hiperciclicidade se verifica. Para obtermos as condições (i) e (ii), consideramos

$$X_0 = Y_0 = \{p(z)e^{\frac{-z^2}{k}};\ p \text{ é um polinômio complexo e } k \in \mathbb{N}\}.$$

Como $p(z)e^{\frac{-z^2}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p(z)$ em $H(\mathbb{C})$, o conjunto acima é denso em $H(\mathbb{C})$. Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$|y| \leq \frac{n|a| - |x|}{2} \leq \frac{|x \pm na|}{2}, \text{ para todo } x + iy \in K,$$

donde

$$|e^{-\frac{(z\pm na)^2}{k}}| = e^{-\frac{((x\pm na)^2 - y^2)}{k}} \leq e^{-\frac{3(x\pm na)^2}{4k}}, \text{ para todo } z = x + iy \in K.$$

Isto implica que $p(z \pm na)e^{-\frac{(z\pm na)^2}{k}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em K. Assim, (i) e (ii) também se verificam. Pelo critério de hiperciclicidade, T_a é hipercíclico.

Exemplo 2.5. Seja $D : f \in H(\mathbb{C}) \longmapsto f' \in H(\mathbb{C})$ o operador derivação em $H(\mathbb{C})$.

Neste caso, tomamos $X_0 = Y_0$ como sendo o conjunto dos polinômios complexos e definimos $S_n : Y_0 \longrightarrow H(\mathbb{C})$ por

$$S_1 f(z) = \int_{[0,z]} f(\eta)d\eta \quad \text{e} \quad S_n f(z) = \int_{[0,z]} S_{n-1}(\eta)d\eta, \ n > 1.$$

Como $S_n(z^k) = \dfrac{k!}{(k+n)!}z^{k+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ em $H(\mathbb{C})$, temos que $X_0,\ Y_0,\ (n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem o critério de hiperciclicidade. Logo, D é hipercíclico.

Exemplo 2.6. Consideremos o operador

$$\lambda B : (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X \longmapsto (\lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots) \in X,$$

com $|\lambda| > 1$, onde $X = \ell_p$ $(1 \leq \ell < \infty)$ ou $X = c_0$.

Sendo $X_0 = Y_0 = c_{00}$ e $S_n : Y_0 \longrightarrow X$ definidas por $S_n = \dfrac{1}{\lambda^n}F^n$, onde

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

é o operador *deslocamento à direita em* X, temos que $X_0,\ Y_0,\ (n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem o critério de hiperciclicidade. Logo, λB é hipercíclico.

Definição 2.7. Sejam X um espaço de Fréchet separável, T um operador linear contínuo em X e $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de números naturais. Então o operador T é dito *hereditariamente hipercíclico com respeito a* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se para cada subsequência $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, existe $x \in X$ tal que $\{T^{m_k}x;\ k \in \mathbb{N}\}$ é denso em X.

Um operador T é chamado *hereditariamente hipercíclico* se o é com respeito a alguma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

O seguinte resultado de dinâmica topológica nos será bastante útil.

Lema 2.8 (Furstenberg). Sejam X um espaço métrico completo separável sem pontos isolados e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Se $f \times f$ possui uma órbita densa, então o n-produto $f \times \cdots \times f$ também possui, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por hipótese, a conclusão é válida para $n = 2$. Logo, segue do Lema 2.1, com

$$Y = X \times X, \; g = f \times f \; \text{ e } \; \phi : (x, y) \in Y \longmapsto x \in X,$$

que a conclusão também é válida para $n = 1$. Suponhamos a conclusão válida para um certo $n \geq 2$ e provemos que ela também vale para $n + 1$. Como estamos supondo que o n-produto $f \times \cdots \times f$ possui órbita densa, o Lema 1.2 garante que ele é topologicamente transitivo. O mesmo lema assegura que basta provarmos que o $(n+1)$-produto $f \times \cdots \times f$ é topologicamente transitivo. Sejam $U_1, \ldots, U_{n+1}$ e $V_1, \ldots, V_{n+1}$ abertos não vazios arbitrários em X. Como $f \times f$ é topologicamente transitivo, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ e $f^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$. Como f^m é contínua, existem abertos não vazios $U'_n \subset U_n$ e $V'_n \subset V_n$ tais que

$$f^m(U'_n) \subset U_{n+1} \; \text{ e } \; f^m(V'_n) \subset V_{n+1}. \tag{2.1}$$

Como o n-produto $f \times \cdots \times f$ é topologicamente transitivo, existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$(f \times \cdots \times f)^r (U_1 \times \cdots \times U_{n-1} \times U'_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_{n-1} \times V'_n),$$

donde

$$f^r(U_k) \cap V_k \neq \emptyset \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, n-1\} \tag{2.2}$$

e

$$f^r(U'_n) \cap V'_n \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

Como $U'_n \subset U_n$ e $V'_n \subset V_n$, (2.3) nos dá

$$f^r(U_n) \cap V_n \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

Além disso, (2.3) também garante que existe $x \in U'_n$ com $f^r(x) \in V'_n$. Logo, por (2.1),

$f^m(x) \in U_{n+1}$ e $f^r(f^m(x)) = f^m(f^r(x)) \in V_{n+1}$, provando que

$$f^r(U_{n+1}) \cap V_{n+1} \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Por (2.2), (2.4) e (2.5), vemos que o $(n+1)$-produto $f \times \cdots \times f$ é topologicamente transitivo.

$\square$

Teorema 2.9 (Bès-Peris). Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X. São equivalentes:

(i) T satisfaz o critério de hiperciclicidade;

(ii) $T \times T$ é hipercíclico;

(iii) T é hereditariamente hipercíclico.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii): Segue do critério de hiperciclicidade.

(ii) $\implies$ (iii): Como X é separável, X possui uma base enumerável de abertos $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $(U_j, V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos pares $(W_n, W_m),\ n, m \in \mathbb{N}$. Como $T \times T$ é hipercíclico, pelo Lema 2.8, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe um inteiro positivo n_k tal que $T^{n_k}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. E ainda, podemos escolher estes inteiros de forma que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seja crescente.

Agora, sejam $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $U, V \subset X$ abertos não vazios arbitrários. Existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $U_l \subset U$ e $V_l \subset V$ e daí, para k suficientemente grande, $T^{m_k}(U) \cap V \supset T^{m_k}(U_l) \cap V_l \neq \emptyset$. Disto, segue de forma análoga à demonstração do Teorema de Transitividade de Birkhoff (Lema 1.2), que existe um $x \in X$ tal que $\{T^{m_k}x;\ k \in \mathbb{N}\}$ é denso em X.

(iii) $\implies$ (i): Por hipótese, T é hereditariamente hipercíclico com respeito a uma certa sequência $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $x \in X$ tal que $\{T^{m_n}x;\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X e seja $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{l_n}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Seja $z \in X$ tal que $\{T^{l_n}z;\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Claramente, dado $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, $\left\{T^{l_n}(\frac{1}{k}z);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ é denso em X, donde existe $l_{n_k} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{l_{n_k}}(\frac{1}{k}z) \in B\left(x, \frac{1}{k}\right)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Obtemos assim uma subsequência $(l_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$T^{l_{n_k}}(\frac{1}{k}z) \in B(x, \frac{1}{k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotando $x_k := \frac{1}{k}z$, $k \in \mathbb{N}$, temos que $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ e $T^{l_{n_k}} x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.

Seja $X_0 = Y_0 = \operatorname{orb}(x, T)$, que é um subconjunto denso de X. Como $(l_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e T é contínuo, temos que

$$T^{l_{n_k}}(T^n x) = T^n(T^{l_{n_k}} x) \xrightarrow[k\to\infty]{} T^n 0 = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Isto dá a condição (i) do critério de hiperciclicidade. Agora, se $y \in Y_0$, então existe um único $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $y = T^n x$. Definimos $S_{l_{n_k}} y := T^n x_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos que

$$S_{l_{n_k}} y = T^n x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T^n 0 = 0 \quad \text{e} \quad T^{l_{n_k}} S_{l_{n_k}} y = T^n T^{l_{n_k}} x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T^n x = y.$$

Isto dá as condições (ii) e (iii) do critério de hiperciclicidade.

□

Vejamos mais exemplos de aplicações do critério de hiperciclicidade.

Exemplo 2.10. Seja $T : c_0 \longrightarrow c_0$ o operador deslocamento à esquerda ponderado, $T = B_w$,

$$B_w(x_1, x_2, \dots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots),$$

onde $w = (w_1, w_2, \dots) = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, \dots)$. Como w é uma sequência limitada, T está bem definido e é contínuo.

Sejam $X_0 = c_{00} \subset c_0$ e $S_n = R^n : X_0 \longrightarrow X_0$, $n \in \mathbb{N}$, onde

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, w_2^{-1} x_1, w_3^{-1} x_2, \dots).$$

Claramente, $T^n S_n x = x$ e $T^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para todo $x \in X_0$. Agora seja $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência crescente de todos os inteiros m_k tais que $w_{m_k} = 2^{-1}$ e $w_{m_k+1} = 2$. E seja $n_k = m_k + k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotemos e_n o vetor em c_0 cuja n-ésima coordenada é igual a 1 e as demais são iguais a 0. Daí, temos

$$S_{n_k}e_1 = \left(0, \ldots, 0, \prod_{j=2}^{m_k+k+1} w_j^{-1}, 0, \ldots\right) = \left(0, \ldots, 0, 2^{-k-1}, 0 \ldots\right),$$

o que implica que $S_{n_k}e_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Como cada S_n é contínuo,

$$S_{n_k}e_l = S_{n_k}\left(\left(\prod_{j=2}^{l} w_j\right) S_{l-1}e_1\right) = \left(\prod_{j=2}^{l} w_j\right) S_{l-1}\left(S_{n_k}e_1\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Concluímos que $S_{n_k}x \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, para cada $x \in X_0$. Logo, o critério de hiperciclicidade é satisfeito e daí, T é hipercíclico.

Exemplo 2.11. Seja $H^2(\mathbb{D})$, onde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, o espaço das funções holomorfas $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|f\|^2 := \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty,$$

com o produto interno

$$\langle f, g\rangle := \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f\overline{g})(re^{i\theta}) d\theta.$$

O espaço $H^2(\mathbb{D})$, conhecido como *espaço de Hardy sobre* $\mathbb{D}$, é um espaço de Hilbert. Indicamos o capítulo 17 de [33] para um estudo mais detalhado sobre este espaço.

Para cada $z \in \mathbb{D}$, o Teorema de Fréchet-Riesz ([33], Teorema 4.12) garante que existe uma única função h_z tal que

$$\langle f, h_z\rangle = f(z), \text{ para todo } f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Seja $\phi \in H^2(\mathbb{D})$ limitada tal que existam $x, y \in \mathbb{D}$ com $|\phi(x)| < 1$ e $|\phi(y)| > 1$, e definamos o operador multiplicação $M_\phi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ por

$$M_\phi(f(z)) = \phi(z)f(z).$$

Como $\|M_\phi(f)\| \le \left(\sup_{z\in\mathbb{D}} |\phi(z)|\right) \|f\|$, para todo $f \in H^2(\mathbb{D})$, vemos que M_ϕ é um operador linear contínuo. Vamos provar que o adjunto M_ϕ^* de M_ϕ é um operador hipercíclico. De fato, para todo $z \in \mathbb{D}$, h_z é um autovetor de M_ϕ^* com autovalor $\overline{\phi(z)}$. Com efeito, $\langle f, M_\phi^*(h_z)\rangle = \langle \phi f, h_z\rangle = \phi(z)f(z) = \langle f, \overline{\phi(z)}h_z\rangle$ para toda $f \in H^2(\mathbb{D})$, donde

$$M_\phi^*(h_z) = \overline{\phi(z)}h_z.$$

Consideremos os conjuntos abertos $U = \{z \in \mathbb{D};\ |\phi(z)| < 1\}$ e $V = \{z \in \mathbb{D};\ |\phi(z)| > 1\}$. Por hipótese U e V são não vazios. Note que o subespaço vetorial X_0 gerado por $\{h_z;\ z \in U\}$ e o subespaço vetorial Y_0 gerado por $\{h_z;\ z \in V\}$ são ambos densos em $H^2(\mathbb{D})$. De fato, seja x^* um funcional linear contínuo em $H^2(\mathbb{D})$ tal que $x^*(h_z) = 0,$ para todo $z \in U$. Pelo Teorema de Fréchet-Riesz, existe $g_{x^*} \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $x^*(f) = \langle f, g_{x^*}\rangle,$ para todo $f \in H^2(\mathbb{D})$. Daí,

$$0 = x^*(h_z) = \langle h_z, g_{x^*}\rangle = \overline{\langle g_{x^*}, h_z\rangle} = \overline{g_{x^*}(z)}, \text{ para todo } z \in U.$$

Pelo Princípio da Continuação Analítica, g_{x^*} é identicamente nula. Portanto, segue que $x^*(f) = \langle f, g_{x^*}\rangle = 0,$ para todo $f \in H^2(\mathbb{D})$. Pelo Teorema de Hahn-Banach ([34], Teorema 3.5), X_0 é denso em $H^2(\mathbb{D})$. Analogamente Y_0 é denso em $H^2(\mathbb{D})$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos uma aplicação linear $S_n : Y_0 \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ colocando

$$S_n h_z = (\overline{\phi(z)})^{-n} h_z \ (z \in V).$$

A fim de provarmos que cada S_n está bem definida, basta mostrarmos que a família $(h_z)_{z\in\mathbb{D}}$ é linearmente independente. Suponhamos, então, que

$$\lambda_1 h_{z_1} + \cdots + \lambda_r h_{z_r} = 0,$$

onde $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ e $z_1, \ldots, z_r$ são pontos dois a dois distintos em $\mathbb{D}$. A função

$$f_1(z) = \frac{(z - z_2) \times \cdots \times (z - z_r)}{(z_1 - z_2) \times \cdots \times (z_1 - z_r)}$$

é holomorfa e limitada em $\mathbb{D}$, donde está em $H^2(\mathbb{D})$. Além disso,

$$0 = \langle f_1, \lambda_1 h_{z_1} + \cdots + \lambda_r h_{z_r} \rangle = \overline{\lambda_1} f_1(z_1) + \cdots + \overline{\lambda_r} f_1(z_r) = \overline{\lambda_1},$$

provando que $\lambda_1 = 0$. Um raciocínio análogo mostra que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Portanto, $(h_z)_{z\in\mathbb{D}}$ é uma família linearmente independente. Como

$$(M_\phi^*)^n h_z = (\overline{\phi(z)})^n h_z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ para todo } z \in U$$

e

$$S_n h_z = (\overline{\phi(z)})^{-n} h_z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ para todo } z \in V,$$

segue que as condições (i) e (ii) do critério de hiperciclicidade são satisfeitas. Finalmente, como $(M_\phi^*)^n S_n h_z = h_z$ para quaisquer $z \in V$ e $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$(M_\phi^*)^n S_n = \mathrm{Id}_{Y_0} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a condição (iii) também é satisfeita e M_ϕ^* é hipercíclico.

No capítulo 8 veremos um exemplo de um operador hipercíclico que não satisfaz o critério de hiperciclicidade.

Capítulo 3

Propriedades dos Operadores Hipercíclicos

Neste capítulo vamos estabelecer algumas propriedades úteis dos operadores hipercíclicos.

Proposição 3.1. Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo bijetivo. Então, T é hipercíclico se, e só se, T^{-1} o é.

Demonstração. Sabemos que T^{-1} também é um operador linear contínuo, pelo Teorema da Aplicação Aberta ([34], Teorema 2.11). Tendo em vista o Teorema 1.3, basta observar que, dados U, V subconjuntos de X abertos não vazios arbitrários, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ é equivalente a $U \cap (T^{-1})^n(V) \neq \emptyset$.

□

Veremos agora que um espaço de Fréchet separável X que tem um operador hipercíclico T possui uma propriedade interessante: qualquer vetor de X é a soma de dois vetores hipercíclicos.

Proposição 3.2. Se X é um espaço de Fréchet separável e $T : X \longrightarrow X$ é hipercíclico, então $X = HC(T) + HC(T)$.

Demonstração. Seja $x \in X$ arbitrário. Pelo Teorema 1.3, $HC(T)$ é uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos. Portanto, $x - HC(T)$ também o é. Assim, pelo teorema de Baire ([34], Teorema 2.2), $HC(T) \cap (x - HC(T)) \neq \emptyset$. Logo, $x \in HC(T) + HC(T)$.

$\square$

Seja X um espaço de Fréchet separável sobre o corpo dos reais. A complexificação $\widetilde{X}$ de X é definida por

$$\widetilde{X} = \{x + iy;\ x, y \in X\},$$

que é identificado com $X \times X$.

É fácil observar que, definindo a multiplicação por escalar complexo por

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx),\ a, b \in \mathbb{R},$$

$\widetilde{X}$ torna-se um espaço de Fréchet separável sobre o corpo dos complexos. Além disso, se $T : X \longrightarrow X$ é um operador real-linear em X, então a complexificação $\widetilde{T} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$, definida por $\widetilde{T}(x + iy) = Tx + iTy$, é um operador complexo-linear em $\widetilde{X}$.

Note que se a complexificação $\widetilde{T}$ é hipercíclica, então T também o é. De fato, basta observar que $\phi : x + iy \longmapsto x$ satisfaz as condições do Lema 2.1 para $\widetilde{T}$ e T.

Lema 3.3. Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X . Se T é hipercíclico, então o seu adjunto T^* não possui autovalor, o que é equivalente a dizer que $T - \lambda I$ tem imagem densa, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Além disso, se T é hipercíclico e X é um espaço real, então o adjunto $\widetilde{T}^*$ da complexificação de T não possui autovalor, o que é equivalente a dizer que $\widetilde{T} - \lambda I$ tem imagem densa, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $x \in X$ um vetor hipercíclico de T. Se T^* possui um autovalor λ, então $T^*x^* = \lambda x^*$ para algum $x^* \in X^*,\ x^* \neq 0$. Como qualquer funcional linear $x^* \neq 0$ é sobrejetivo e como x é hipercíclico, o conjunto $\{x^*(T^n x);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ é denso em $\mathbb{K}$, enquanto o conjunto $\{\lambda^n x^*(x);\ n \in \mathbb{N}_0\}$ claramente não o é. Mas

$$x^*(T^n x) = ((T^*)^n x^*)(x) = \lambda^n x^*(x),$$

uma contradição.

Agora, suponha que X é um espaço real e seja $\widetilde{T}$ a complexificação de T. Seja $x \in X$ um vetor hipercíclico de T e suponha que $\widetilde{T}^*$ tem um autovetor $\widetilde{x}^* \in \widetilde{X}^*,\ \widetilde{x}^* \neq 0$, correspondente a um autovalor λ. Como

$$\widetilde{x}^*(x_1 + ix_2) = \widetilde{x}^*(x_1) + i\widetilde{x}^*(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in X,$$

e como $\widetilde{x}^* \neq 0$, existe algum $y \in X$, tal que $|\widetilde{x}^*(y)| > 0$. Portanto, $|\widetilde{x}^*|$ pode assumir qualquer valor positivo em X. Como x é hipercíclico, o conjunto $\{|\widetilde{x}^*(T^n x)|;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ é denso nos reais positivos e claramente o conjunto $\{|\lambda|^n |\widetilde{x}^*(x)|;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ não o é. Mas

$$|\widetilde{x}^*(T^n x)| = |\widetilde{x}^*(\widetilde{T}^n x)| = |((\widetilde{T}^*)^n \widetilde{x}^*)(x)| = |\lambda|^n |\widetilde{x}^*(x)|,$$

uma contradição.

□

Se T é um operador sobre X e $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ é um polinômio sobre $\mathbb{K}$, o operador $p(T)$ sobre X é definido por $p(T) = \sum_{k=0}^{N} a_k T^k$.

Teorema 3.4 (Bourdon). Sejam X um espaço de Fréchet separável sobre $\mathbb{K}$ e T um operador linear contínuo em X. Se T é um operador hipercíclico e p é um polinômio não nulo sobre $\mathbb{K}$, então o operador $p(T)$ tem imagem densa.

Demonstração. Primeiro, suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Escreva $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ com $a_N \neq 0$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podemos reescrever p na forma $p(z) = a_N(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_N)$ para certos $\lambda_1, \ldots \lambda_N \in \mathbb{C}$. Logo, $p(T) = a_N(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_N I)$ e o resultado segue do Lema 3.3.

Agora, suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Considerando a complexificação $\widetilde{T}$ de T, do Lema 3.3 segue que para qualquer polinômio complexo q, $q(\widetilde{T})$ tem imagem densa em $\widetilde{X}$. Mas como p tem coeficientes reais, $p(\widetilde{T})(x + iy) = p(T)x + ip(T)y,\ x, y \in X$, donde $p(T)$ também tem imagem densa.

□

Corolário 3.5. A órbita de qualquer vetor hipercíclico é um conjunto linearmente independente.

Demonstração. Seja $x \in HC(T)$ e suponha que existem $N \in \mathbb{N}$ e escalares $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k \in \{0, \dots, N\}$, tais que

$$T^{N+1}x = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k T^k x.$$

Consideremos o polinômio $p(z) = z^{N+1} - \sum_{k=0}^{N} \alpha_k z^k$. Assim $p(T)x = 0$. Agora, seja $y \in X$ arbitrário. Como x é hipercíclico, existe uma sequência crescente de números naturais $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $y = \lim_{k\to\infty} T^{n_k}x$. Daí,

$$p(T)(y) = p(T)(\lim_{k\to\infty} T^{n_k}x) = \lim_{k\to\infty} p(T)(T^{n_k}x) = \lim_{k\to\infty} T^{n_k}p(T)(x) = \lim_{k\to\infty} T^{n_k}0 = 0.$$

Logo, $p(T)$ é identicamente nulo. Mas isto contradiz o Teorema de Bourdon (3.4).

□

Teorema 3.6 (Herrero-Bourdon). Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X. Se x é um vetor hipercíclico de T e M denota o subespaço vetorial gerado por $\mathrm{orb}(x, T)$, então

$$M \setminus \{0\}$$

é um conjunto denso de vetores hipercíclicos. Em particular, qualquer operador hipercíclico admite um subespaço invariante denso consistindo de vetores hipercíclicos, exceto pelo zero.

Demonstração. Seja $x \in X$ um vetor hipercíclico de T. Então

$$M=\{\text{combinações lineares de elementos de } \mathrm{orb}(x,T)\}=\{p(T)x;\ p \text{ é um polinômio}\}$$

é um subespaço T-invariante e denso, pois contém $\mathrm{orb}(x, T)$. Mais ainda, se $y = p(T)x \in M$, com $y \neq 0$, então $p \neq 0$ e $T^n y = p(T)(T^n x),\ n \in \mathbb{N}_0$. Portanto,

$$\overline{\mathrm{orb}(y,T)} = \overline{\mathrm{orb}(p(T)x,T)} = \overline{p(T)(\mathrm{orb}(x,T))} \supset p(T)\overline{(\mathrm{orb}(x,T))} = p(T)(X).$$

Pelo Teorema de Bourdon (3.4),

$$X = \overline{p(T)(X)} \subset \overline{\mathrm{orb}(y,T)}.$$

$\square$

Corolário 3.7. Se X é um espaço de Fréchet separável e $T : X \longrightarrow X$ é hipercíclico, então $HC(T)$ é conexo.

Demonstração. Seja M como no teorema anterior. Como $\dim(M) > 1$ (na verdade, $\dim(M)$ é infinita), $M \setminus \{0\}$ é conexo. Pelo Teorema de Herrero-Bourdon (3.6), $M \setminus \{0\} \subset HC(T) \subset X = \overline{M \setminus \{0\}}$. Isto implica a conexidade de $HC(T)$.

$\square$

Lema 3.8. Sejam X um espaço métrico sem ponto isolado e $f : X \longrightarrow X$ contínua. Então para quaisquer $x, y \in X$,

$$\operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(x,f)}) = \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(y,f)}) \quad \text{ou} \quad \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(x,f)}) \cap \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(y,f)}) = \emptyset.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ arbitrários. Suponha $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(x,f)}) \cap \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(y,f)}) \neq \emptyset$. Então $U = \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(x,f)}) \cap \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(y,f)})$ é aberto não vazio, com $U \subset \overline{\operatorname{orb}(x,f)}$ e $U \subset \overline{\operatorname{orb}(y,f)}$. De $U \subset \overline{\operatorname{orb}(x,f)}$ temos que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(x) \in U$. Logo, $f^n(x) \in \overline{\operatorname{orb}(y,f)}$. Como $\overline{\operatorname{orb}(y,f)}$ é f-invariante, segue que $f^k(x) \in \overline{\operatorname{orb}(y,f)}$, para todo $k \geq n$. Portanto, $\overline{\{f^k(x);\ k \geq n\}} \subset \overline{\operatorname{orb}(y,f)}$. Além disso, X não possui ponto isolado, donde obtemos que $\overline{\operatorname{orb}(x,f)} = \overline{\{f^k(x);\ k \geq n\}} \subset \overline{\operatorname{orb}(y,f)}$. Disso segue que $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(x,f)}) \subset \operatorname{int}(\overline{\operatorname{orb}(y,f)})$.

Trocando os papéis de x e y obtemos a outra inclusão e, consequentemente, a igualdade.

$\square$

Teorema 3.9 (**Ansari**)**.** Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet separável X. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $HC(T) = HC(T^n)$.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Claramente $HC(T^n) \subset HC(T)$.

Agora, suponha $x \in HC(T)$ arbitrário. $D := HC(T)$ é denso (pelo Teorema 1.3), T-invariante (veja demonstração do Lema 1.2) e conexo (pelo Corolário 3.7); em particular, não tem ponto isolado. Agora, consideremos $T : D \longrightarrow D$ com a topologia induzida em D. Como

D é denso em X, basta verificarmos que $\overline{\mathrm{orb}(x,T^n)} = D$, onde a aderência é tomada em D. Definamos $D_j = \overline{\mathrm{orb}(T^j x, T^n)},\ j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Vejamos que $D = D_0$. Observe que

$$D = \overline{\mathrm{orb}(x,T)} = \overline{\bigcup_{j=0}^{n-1} \mathrm{orb}(T^j x, T^n)} = \bigcup_{j=0}^{n-1} D_j$$

e

$$T(D_j) \subset D_{j+1(\mathrm{mod}\ n)}.$$

Seja $F \subset \{0,\ldots,n-1\}$ um conjunto de cardinalidade mínima tal que $D = \bigcup_{j\in F} D_j$. Suponha que F não seja unitário. Se existem $j,k \in F,\ j \neq k$ tais que $\mathrm{int}(D_j)\cap\mathrm{int}(D_k) \neq \emptyset$, então, pelo Lema 3.8, $\mathrm{int}(D_j) = \mathrm{int}(D_k)$. Da minimalidade de F, temos que

$$B = D \setminus \bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l$$

é um conjunto não vazio contido em D_j. Além disso, B é aberto, pois é complementar do fechado $\bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l$ (lembrando que estamos considerando a topologia em D). Portanto, $B \subset \mathrm{int}(D_j) \subset D_k$, um absurdo. Logo, $\mathrm{int}(D_j \cap D_k) = \emptyset$, para quaisquer $j,k \in F,\ j \neq k$. Agora, seja $F_l = F + l(\mathrm{mod}\ n)$, $l \in \{0,\ldots,n-1\}$. Temos que

$$D = \overline{T^l(D)} = \overline{\bigcup_{j\in F} T^l(D_j)} = \bigcup_{k\in F_l} D_k, \text{ para todo } l \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{3.1}$$

Como $\mathrm{card}(F_l) = \mathrm{card}(F)$, que é mínima, obtemos que $\mathrm{int}(D_j \cap D_k) = \emptyset$, para quaisquer $j,k \in F_l$ com $j \neq k$, para todo $l \in \{0,\ldots,n-1\}$. Por consequência,

$$A := \bigcup_{l=0}^{n-1} \bigcup_{\substack{j,k\in F_l \\ j\neq k}} (D_j \cap D_k)$$

é T-invariante e nunca denso (isto é, o interior de seu fecho é vazio), pois é a união finita de conjuntos nunca densos.

Se A fosse não vazio, tomando $y \in A$, teríamos $D = \overline{\mathrm{orb}(y,T)} \subset \overline{A} = A$, o que é uma contradição. Portanto, $A = \emptyset$ e daí, $D_j \cap D_k = \emptyset$, para todo $j,k \in F,\ j \neq k$. Isto implica que $D = \bigcup_{j \in F} D_j$ é uma união finita de subconjuntos fechados dois a dois disjuntos. Mas isto contraria o fato de D ser conexo. Logo, F é um conjunto unitário, digamos $F = \{j\}$. Daí, $D = D_j$ e, então, por (3.1), $D = \overline{T^{n-j}(D_j)}$. Mas

$$\overline{T^{n-j}(D_j)} = \overline{T^{n-j}(\overline{\{T^j x, T^{n+j} x, \dots\}})} = \overline{T^{n-j}(\{T^j x, T^{n+j} x, \dots\})} = \overline{\{T^n x, T^{2n} x, \dots\}} = D_0.$$

Logo, $D = D_0$.

$\square$

Corolário 3.10. Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet separável X. Se T é hipercíclico, então T^n também o é, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 4

Existência de Operadores Hipercíclicos

Iniciamos este capítulo com o fato interessante de que não há operador hipercíclico em espaços de dimensão finita.

Proposição 4.1. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Fréchet separável. Se X tem dimensão finita, então X não possui operador hipercíclico.

Demonstração. Seja $N = \dim(X)$. Neste caso, sabemos que X é isomorfo a K^N. Suponha que exista $x \in K^N$ hipercíclico com respeito a $T : K^N \longrightarrow K^N$, um operador linear contínuo. O conjunto $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ é linearmente independente. De fato, caso contrário, o subespaço vetorial gerado por $\operatorname{orb}(x, T)$ teria dimensão menor do que N e portanto não poderia ser denso em K^N. Logo, $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ é uma base vetorial de K^N.

Agora, qualquer que seja $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, como estamos supondo x hipercíclico com respeito a T, existe uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que depende de α tal que $T^{n_k}x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x$. Daí, $T^{n_k}T^j x = T^j T^{n_k} x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha T^j x$, para todo $j \in \{0, \ldots, N-1\}$. Logo, $T^{n_k} z \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha z$, para todo $z \in X$. Com isso, $\det(T^{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^N$, isto é, $(\det(T))^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^N$. Portanto, $\{|\det(T)|^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\{\beta \in \mathbb{R};\ \beta > 0\}$, o que é um absurdo.

□

S. Rolewicz [32] também propôs o seguinte problema: será que todo espaço de Banach separável de dimensão infinita admite um operador hipercíclico? Esta pergunta foi finalmente respondida na afirmativa, independentemente, por S. Ansari [3] e por L. Bernal-Gonzalez [7]. Logo em seguida, J. Bonet e A. Peris estenderam este resultado a espaços de Fréchet [13]. Nosso principal objetivo neste capítulo é estabelecer este resultado.

Seja $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ o espaço de todas as sequências com coordenadas em $\mathbb{K}$. Observe que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, munido com a topologia dada pela família de semi-normas $p_n(x) = \sup\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|;\ n \in \mathbb{N}$, onde $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, é um espaço de Fréchet separável. Se X é um subespaço vetorial fechado de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, então X também é um espaço de Fréchet separável com a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Seja X um espaço de Fréchet contido em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ arbitrário. Definimos o *deslocamento à esquerda ponderado* com respeito a $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X por

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots),$$

onde w é uma sequência de escalares não nulos.

Se B_w é um deslocamento à esquerda ponderado que aplica X em X, então B_w é contínuo. De fato, claramente cada funcional coordenada $f_j\colon X \longrightarrow \mathbb{K};\ f_j(x_1, x_2, \dots) = x_j$, $j \in \mathbb{N}$ é contínuo. Seja $((x_n, B_wx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos do gráfico de B_w, $G_{B_w} = \{(x, B_wx) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ x \in X\}$, tal que

$$(x_n, B_wx_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y),\ \text{em } \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Isto é,

$$(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_1, x_2, \dots)\ \text{ e }\ (w_2x_{n,2}, w_3x_{n,3}, \dots) \xrightarrow[n\to\infty]{} (y_1, y_2, \dots),$$

onde $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots)$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$. Como f_j é contínuo para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_1, x_2, \dots) \text{ implica que } x_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_j,\ \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

e

$$(w_2x_{x,2}, w_3x_{x,3}, \dots) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (y_1, y_2, \dots) \text{ implica que } w_{j+1}x_{n,j+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $w_{j+1}x_{j+1} = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, com isso $y = B_w x$ e portanto $(x, y) \in G_{B_w}$. Logo, G_{B_w} é fechado em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado ([34], Teorema 2.15), B_w é contínuo.

Observamos que se um espaço de Fréchet contido em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ arbitrário X contém a sequência de vetores unitários canônicos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Teorema 4.2. Se X é um espaço de Fréchet contido em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ arbitrário que contém $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e B, o *deslocamento à esquerda*, que é o deslocamento à esquerda ponderado pela sequência de pesos $w = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$, aplica X em X, então B é hipercíclico.

Demonstração. Pela definição das semi-normas em X, é fácil ver que $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Vejamos que B satisfaz o critério de hiperciclicidade. Seja $X_0 = Y_0 = c_{00}$. Como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, X_0 é denso em X. Sejam $S_n = F^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F : Y_0 \longrightarrow Y_0$ é o deslocamento à direita. Com isto, as condições (i) e (iii) do critério de hiperciclicidade são satisfeitas pela sequência $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $S_n e_j = e_{n+j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, pela linearidade de S, temos que $S_n y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in Y_0$. Assim, as três condições do critério de hiperciclicidade são satisfeitas. Logo, B é hipercíclico.

$\square$

Teorema 4.3. Se X é um espaço de Fréchet contido em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ arbitrário que contém $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e B_w, um deslocamento à esquerda ponderado, aplica X em X, então B_w é hipercíclico.

Demonstração. Definamos $v = (v_1, v_2, \dots)$, onde $v_n = \left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o espaço $X_v = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (x_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\}$.

Definimos em X_v as semi-normas $p_n(x) = \sup_{1\le k\le n} |x_k|$; $n \in \mathbb{N}$, onde $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. A aplicação $\phi_v : X_v \longrightarrow X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Com a topologia em X_v dada pela família de semi-normas citadas acima, não é difícil ver que U é aberto em X_v se, e só se, $\phi_v(U)$ é aberto em X. Além disso,

$$
\begin{aligned}
(B_w \circ \phi_v)(x_1, x_2, x_3, \dots) &= B_w(x_1 v_1, x_2 v_2, x_3 v_3, \dots) \\
&= B_w\left(x_1 w_1^{-1}, x_2\left(\prod_{j=1}^{2} w_j\right)^{-1}, x_3\left(\prod_{j=1}^{3} w_j\right)^{-1}, \dots\right) \\
&= \left(x_2 w_1^{-1}, x_3\left(\prod_{j=1}^{2} w_j\right)^{-1}, x_4\left(\prod_{j=1}^{3} w_j\right)^{-1}, \dots\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\phi_v \circ B)(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \phi_v(x_2, x_3, x_4 \dots) \\
&= (x_2 v_1, x_3 v_2, x_4 v_3 \dots) \\
&= \left(x_2 w_1^{-1}, x_3\left(\prod_{j=1}^{2} w_j\right)^{-1}, x_4\left(\prod_{j=1}^{3} w_j\right)^{-1}, \dots\right)
\end{aligned}
$$

Logo, $B_w \circ \phi_v = \phi_v \circ B$ e daí, ϕ satisfaz as condições do Lema 2.1 para B e B_w. Como X contém $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então X_v também o contém. Logo, pelo Teorema 4.2, $B : X_v \longrightarrow X_v$ é hipercíclico, Portanto, $B_w : X \longrightarrow X$ também é hipercíclico.

$\square$

É interessante notar que em $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, e c_0 olhados como subespaços de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, o operador λB é hipercíclico para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ não nulo. Porém se olharmos para $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, e c_0 como espaços de Banach, o operador λB permanece hipercíclico, se $|\lambda| > 1$, mas se $|\lambda| \leq 1$, λB não é hipercíclico.

Seja $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos. Definimos $\ell_p(v),\ 1 \leq p < \infty$, e $c_0(v)$ por

$$
\ell_p(v) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n < \infty\right\} \text{ e}
$$

$$
c_0(v) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \lim_{n\to\infty} |x_n| v_n = 0\right\}.
$$

Não é difícil ver que com $\| \ x \ \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n\right)^{1/p}$ e $\| \ x \ \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| v_n$, onde $x = (x_1, x_2, \dots)$; os espaços $(\ell_p(v), \| \ x \ \|_p)$, $(\ell_p(v), \| \ x \ \|_\infty)$ e $(c_0, \| \ x \ \|_\infty)$ são espaços de Banach. Se B, o deslocamento à esquerda, aplica $\ell_p(v)$ em $\ell_p(v)$ ($c_0(v)$ em $c_0(v)$), então B é contínuo e a aplicação definida por

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$$

é linear contínua em $\ell_p(v)$ ($c_0(v)$).

Teorema 4.4. Seja X um dos espaços $\ell_p(v),\ 1 \leq p < \infty$, ou $c_0(v)$. Se $T = e^B$ aplica X em X, então T é hipercíclico.

Demonstração. Como $\ell_1(v)$ é denso em c_0 e em $\ell_p((v_n^p)_{n\in\mathbb{N}})$, $\phi : \ell_1(v) \longrightarrow X$ definida por $\phi(y) = y$ satisfaz as condições do Lema 2.1.

Vejamos que T é topologicamente transitivo em $\ell_1(v)$. Seja $X_0 = c_{00}$. Como X_0 é denso em $\ell_1(v)$, basta mostrarmos que dados $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X_0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, existem $n \in \mathbb{N}_0$ e $z \in \ell_1(v)$ tais que

$$\| x - z \| < \varepsilon \text{ e } \| y - T^n z \| < \varepsilon.$$

Vejamos, sejam $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X_0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = y_k = 0$, para $k > m$. É fácil ver que a matriz

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{m!} \end{pmatrix}$$

tem determinante não nulo. Logo, o operador W é invertível. Seja

$$C = \| W^{-1} \| \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k| \right), \tag{4.1}$$

onde $\| W^{-1} \|$ denota a norma de W^{-1} como um operador de $(\mathbb{K}^m, \| \cdot \|_1)$ em $(\mathbb{K}^m, \| \cdot \|_\infty)$. Agora seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{2m} N^{m-k} v_k < \frac{\varepsilon}{eC}. \tag{4.2}$$

Seja $z = (z_1, z_2, \dots)$ uma sequência finita tal que $z_k = x_k$ para $k \in \{1, \dots, m\}$ e $z_k = 0$ para $k \geq 2m+1$. Escolhemos z_k para $k \in \{m+1, \dots, 2m\}$ de forma que as m primeiras coordenadas de $T^n z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{j!} B^j z$ coincidam com as de y, isto é,

$$y_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{j!} z_{k+j} = \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j, \; k \in \{1, \dots, m\}.$$

Isto é equivalente a solução do sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{1!} & \dots & \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{n^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} \frac{n^m}{m!} & \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} & \dots & \frac{n^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{n^m}{m!} & \dots & \frac{n^{2m-2}}{(2m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{1!} & \frac{n^2}{2!} & \dots & \frac{n^m}{m!} \end{pmatrix}.$$

Repare que $E = D_1 W D_2$, onde

$$D_1 = \begin{pmatrix} n^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^{m-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \; D_2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n^m \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução de (4.3) é dada por

$$\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = D_2^{-1} W^{-1} D_1^{-1} \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right] \tag{4.4}$$

onde

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} n^{-m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^{-m+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \ D_2^{-1} = \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n^{-m} \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que a sequência z de fato existe. Além disso, como as entradas de D_1^{-1} e de D_1^{-1} são limitadas por 1, temos que

$$\| D_1^{-1}[(y_1, \dots, y_m) - A(x_1, \dots, x_m) \|_1 \leq \sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|.$$

Disto, de (4.1) e de (4.4), temos

$$|z_k| \leq Cn^{m-k}, \ k \in \{m+1, \dots, 2m\}. \tag{4.5}$$

Finalmente, seja $n \geq N$. Então (4.2) e (4.5) implicam que

$$\| x - z \| = \sum_{k=m+1}^{2m} |z_k| v_k \leq C \sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} v_k < \varepsilon$$

e também que

$$\begin{aligned} \| y - T^n z \| &= \sum_{k=m+1}^{2m} \left| \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j \right| v_k \\ &\leq C \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{m-k}}{(j-k)!} \right) v_k \\ &\leq eC \left(\sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} v_k \right) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.5. Seja X um dos espaços $\ell_p(v), \ 1 \leq p < \infty$, ou $c_0(v)$. Se $T = I + B$, onde B denota o deslocamento à esquerda, aplica X em X, então T é hipercíclico.

Demonstração. Como antes, é suficiente mostrar o resultado para $\ell_1(v)$. Vejamos que existem uma sequência de pesos positivos $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\phi : \ell_1(w) \longrightarrow \ell_1(v)$ satisfazendo as condições do Lema 2.1 para $I + B$ e e^B. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

uma matriz infinita triangular inferior com $a_{nn} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e definamos $\phi(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}e_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos que A seja tal que $(I+B)\phi(e_n) = \phi(e^B e_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos,

$$(I + B)\phi(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(I + B)e_k = a_{nn}e_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{nk} + a_{nk+1})e_k.$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \phi(e^B e_n) &= \phi\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} e_{n-k}\right) &&= \phi\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\left(\sum_{k=1}^{j} a_{jk}e_k\right) &&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{a_{jk}}{(n-j)!} e_k\right). \end{aligned}$$

Definamos estas expressões como iguais. Comparando os coeficientes de e_{n-1}, obtemos $a_{nn-1} + a_{nn} = a_{n-1n-1} + a_{nn-1}$, para todo $n \geq 2$. Daí, os elementos da diagonal são iguais. Comparando os coeficientes restantes obtemos para $k \in \{1, \dots, n-2\}$,

$$a_{nk} + a_{nk+1} = \sum_{j=k}^{n} \frac{a_{jk}}{(n-j)!}.$$

Portanto,

$$a_{nk+1} = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{a_{jk}}{(n-j)!},$$

um sistema passível de solução. Repare que os valores dos elementos a_{n1}, para todo $n \geq 2$ podem ser quaisquer. Então definimos todos iguais a 0. Também, não importa o valor dos elementos da diagonal, desde que sejam iguais. Definimos então todos iguais a 1. Definida a matriz A, podemos escolher uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adequada tal que $\phi : \ell_1(w) \longrightarrow \ell_1(v)$ é uma aplicação contínua bem definida e e^B aplica $\ell_1(w)$ em $\ell_1(w)$. Pela construção feita, $(I + B) \circ \phi = \phi \circ e^B$; além disso, toda sequência finita pertence a $\phi(\ell_1(w))$. Logo, $\phi(\ell_1(w))$ é densa em $\ell_1(v)$. Como e^B é hipercíclico, $I + B$ também o é.

□

Corolário 4.6. Sejam X um dos espaços $\ell_p(v)$, $1 \leq p < \infty$, ou $c_0(v)$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pesos. Se $T = I + B_w$ e $S = e^{B_w}$ aplicam X em X, então T e S são hipercíclicos.

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em ([13], Lema 2 e [29], Corolário 1).

Lema 4.7. Seja X um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita que não é isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* tais que

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e o subespaço vetorial gerado por $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X,

b) a família $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua,

c) $x_n^*(x_k) = 0$, se $k \neq n$ e $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O resultado a seguir foi obtido para espaços de Banach por Ansari [3] e, de forma independente, por Bernal [7]. Bonet e Peris generalizaram para espaços de Fréchet [13].

Teorema 4.8 (Ansari-Bernal-Bonet-Peris). Todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita possui um operador hipercíclico.

Demonstração. Seja X um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita.

Se $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, pelo Teorema 4.3, o deslocamento a esquerda é hipercíclico.

Caso contrário, podemos supor que X não é isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pelo Lema 4.7, existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em X^* com as tais propriedades. Seja $T : X \longrightarrow X$,

$$Tx = x + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_{n+1}^*(x) x_n, \text{ para todo } x \in X.$$

Pela equicontinuidade de $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ e pelo fato de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tender a 0, temos que T é um operador linear contínuo bem definido. Agora seja $S : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$, $S = I + B_w$, onde B_w é um deslocamento à esquerda ponderado com $w = \left(\frac{x_1^*(x_1)}{2^0}, \frac{x_2^*(x_2)}{2^1}, \frac{x_3^*(x_3)}{2^2}, \dots \right)$. Pelo Corolário 4.6, S é hipercíclico.

A aplicação $\phi : \ell_1 \longrightarrow X,\ \phi((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ é contínua e tem imagem densa, pois o subespaço vetorial gerado por $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Como $T \circ \phi = \phi \circ S$, ϕ satisfaz as condições do Lema 2.1. Logo, T é hipercíclico.

$\square$

Capítulo 5

Densidade dos Operadores Hipercíclicos

Dado um espaço de Fréchet X, vamos denotar por $\mathcal{L}_s(X)$ o espaço vetorial $\mathcal{L}(X)$ de todos os operadores lineares contínuos sobre X munido da topologia da convergência pontual. Fixada uma métrica invariante d compatível com a topologia de X, observamos que uma base de vizinhanças de um operador T em $\mathcal{L}_s(X)$ é dada pelos conjuntos

$$U(T;\ x_1, \ldots, x_n,\ \varepsilon) := \{S \in \mathcal{L}(X);\ d(Tx_k, Sx_k) < \varepsilon \text{ para todo } 1 \leq k \leq n\},$$

onde $n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X$ são linearmente independentes e $\varepsilon > 0$.

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5.1. Para todo espaço de Fréchet separável X de dimensão infinita, o conjunto dos operadores hipercíclicos sobre X é denso em $\mathcal{L}_s(X)$.

Este teorema foi estabelecido por K. C. Chan [14] no caso em que X é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e estendido por J. Bès e K. C. Chan [8] aos espaços de Fréchet. A demonstração simplificada que apresentaremos aqui, usando o Teorema 5.3 abaixo, é devida a J. Bès e K. C. Chan [9].

No caso em que X é um espaço de Banach, é usual considerarmos $\mathcal{L}(X)$ munido da norma dos operadores. Com respeito à topologia induzida por esta norma, o conjunto dos operadores hipercíclicos não é denso em $\mathcal{L}(X)$, já que todo operador hipercíclico $T \in \mathcal{L}(X)$ satisfaz $\|T\| > 1$. Na verdade, P.Y. Wu [36] mostrou que o conjunto dos operadores cíclicos é nunca denso em $\mathcal{L}(X)$.

A fim de demonstrarmos o Teorema 5.1, vamos começar com o seguinte

Lema 5.2. Suponha que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ são dois conjuntos de vetores linearmente independentes em um espaço de Fréchet X. Então existe um operador invertível $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$Ax_k = y_k \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstração. Seja M o subespaço gerado por $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, que é um subespaço vetorial de X de dimensão $m \leq 2n$. Existem vetores $x_{n+1}, \ldots, x_m$ e $y_{n+1}, \ldots, y_m$ tais que ambos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ e $\{y_1, \ldots, y_m\}$ são bases de M. Como subespaços de dimensão finita são fechados, o Teorema de Hahn-Banach implica a existência de funcionais $x_k^* \in X^*$ tais que $x_k^*(x_j) = \delta_{j,k}$ para quaisquer $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, onde

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k \end{cases}.$$

Definamos $A : X \longrightarrow X$ por

$$Ax := \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) y_k + x - \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) x_k,$$

que é claramente um operador linear contínuo. Note que

$$Ax_k = y_k \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Em particular, A estabelece uma bijeção de M sobre M. Além disso, $M' := \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}(x_k^*)$ é um complemento algébrico de M (isto é, $X = M \oplus M'$) e $A|_{M'}$ é o operador identidade sobre M'. Portanto, A é bijetivo. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, A é um operador invertível.

$\square$

O próximo resultado é devido a D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi e P. Rosenthal

[22].

Teorema 5.3. Seja X um espaço de Fréchet de dimensão infinita. Suponha que $T \in \mathcal{L}(X)$ tem a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$, existem n vetores $x_1, \dots, x_n$ em X tais que

$$x_1, \dots, x_n, Tx_1, \dots, Tx_n$$

são linearmente independentes. Então a classe de conjugação

$$S(T) := \{A^{-1}TA;\ A \in \mathcal{L}(X) \text{ é invertível}\}$$

de T é densa em $\mathcal{L}_s(X)$.

Demonstração. Fixemos $R \in \mathcal{L}(X),\ x_1, \dots, x_n \in X$ linearmente independentes e $\varepsilon > 0$. Podemos definir indutivamente vetores $y_1, \dots, y_n$ tais que

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \text{ são linearmente independentes}$$

e

$$d(Rx_k, y_k) < \varepsilon \text{ para todo } k \in \{1, \dots, n\}.$$

De fato, se $y_1, \dots, y_{k-1}$ já foram escolhidos, então basta escolhermos $y_k \in B(Rx_k; \varepsilon)$ que não seja uma combinação linear de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}$. Agora, pela nossa hipótese, existem vetores $z_1, \dots, z_n \in X$ tais que $z_1, \dots, z_n, Tz_1, \dots, Tz_n$ são linearmente independentes. Pelo Lema 5.2, existe um operador invertível $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$Ax_k = z_k \text{ e } Ay_k = Tz_k \ (1 \leq k \leq n).$$

Portanto,

$$d(Rx_k, A^{-1}TAx_k) = d(Rx_k, y_k) < \varepsilon \text{ para todo } k \in \{1, \dots, n\},$$

donde $A^{-1}TA \in U(R; x_1, \dots, x_n,\ \varepsilon)$.

$\square$

Vamos finalmente demonstrar o Teorema 5.1.

Demonstração. (Teorema 5.1) Pelo Teorema de Ansari-Bernal-Bonet-Peris (4.8), existe um operador hipercíclico $T \in \mathcal{L}(X)$. Seja x um vetor hipercíclico de T. Como $x, Tx, T^2x, \ldots$ é uma sequência linearmente independente (Corolário 3.5), para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que os vetores

$$x, T^2x, T^4x, \ldots, T^{2n-2}x, Tx, T^3x, T^5x, \ldots, T^{2n-1}x$$

são linearmente independentes. Portanto, o Teorema 5.3 garante que a classe de conjugação $S(T)$ de T é densa em $\mathcal{L}_s(X)$. Como todo operador em $S(T)$ é claramente hipercíclico, temos o resultado desejado.

□

Capítulo 6

Existência de Operadores Hipercíclicos com Comportamento Prescrito

Sabemos que a órbita de um vetor hipercíclico é um conjunto simultaneamente denso e linearmente independente. Assim, é natural perguntarmos se, reciprocamente, toda sequência densa e linearmente independente está contida na órbita de algum vetor hipercíclico de algum operador hipercíclico. Esta pergunta foi proposta originalmente no contexto dos espaços de Banach por I. Halperin, C. Kitai e P. Rosenthal [23], que deram uma resposta positiva para espaços de Hilbert. A solução do problema para espaços de Banach foi dada por S. Grivaux [19], que estabeleceu o seguinte resultado:

Teorema 6.1. Dado um subconjunto denso e linearmente independente $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de um espaço de Banach X, existe um operador $T \in \mathcal{L}(X)$, necessariamente hipercíclico, tal que $\mathrm{orb}(x_1, T) = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Recentemente este resultado foi estendido por A. A. Albanese [1] a espaços de Fréchet com uma norma contínua.

Nosso objetivo neste capítulo é provar o teorema acima. Para tal, precisamos de alguns lemas.

Lema 6.2. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível. Se $B \in$

$\mathcal{L}(X)$ satisfaz $\|A - B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, então B também é invertível e

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|}.$$

Demonstração. Se $T \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T\| < 1$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge em $\mathcal{L}(X)$ na norma dos operadores e, assim, define um operador $C \in \mathcal{L}(X)$. Como

$$(I - T)C = C(I - T) = I,$$

o operador $I - T$ é invertível e tem inversa C. Logo, como

$$\|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\|\|A - B\| < 1,$$

o operador $A^{-1}B = I - (I - A^{-1}B)$ é invertível, donde B é invertível. Além disso,

$$B^{-1}A = (A^{-1}B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I - A^{-1}B)^n = I + \sum_{n=1}^{\infty}(A^{-1}(A - B))^n.$$

Portanto,

$$A^{-1} - B^{-1} = (I - B^{-1}A)A^{-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}(A^{-1}(A - B))^n A^{-1}.$$

Aplicando a norma dos operadores e usando a fórmula das séries geométricas, obtemos a estimativa desejada para $\|A^{-1} - B^{-1}\|$.

□

Lema 6.3. Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita, X_0, Y_0 subconjuntos densos de X, E, F subespaços de X com $\dim(E) = \dim(F) < \infty$, e $A \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível com $A(E) = F$. Então, dados $x_0 \in X \setminus E$, $y_0 \in X \setminus F$ e $\varepsilon > 0$, existe um operador invertível $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$B|_E = A|_E,\ Bx_0 \in Y_0,\ B^{-1}y_0 \in X_0 \ \text{ e } \|A - B\| < \varepsilon.$$

Demonstração. Como E é um subespaço de dimensão finita de X, E é fechado em X. Logo, o Teorema de Hahn-Banach garante a existência de um funcional $x^* \in X^*$ tal que

$$x^*(x_0) = 1 \ \text{ e } \ x^*(x) = 0 \ \text{ para todo } x \in E.$$

Pela densidade de Y_0 em X, existe $y_1 \in Y_0$ tal que

$$\|x^*\|\|y_1 - Ax_0\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right\}$$

e podemos supor que y_1 não pertence ao subespaço gerado por $F \cup \{y_0\}$. Definimos $C \in \mathcal{L}(X)$ por

$$Cx := Ax + x^*(x)(y_1 - Ax_0) \ \ (x \in X).$$

Claramente,

$$C|_E = A|_E, \ Cx_0 = y_1 \ \text{ e } \ \|A - C\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right\}.$$

Pelo Lema 6.2, C é invertível. Agora, usando o Teorema de Hahn-Banach, tomemos $y^* \in X^*$ tal que

$$y^*(y_0) = 1 \ \text{ e } \ y^*(y) = 0 \ \text{ para todo } \ y \ \text{ pertencente ao subespaço gerado por } \ F \cup \{y_1\}.$$

Seja $\eta \in \left(0, \dfrac{1}{\|C\|}\right)$. Pela densidade de X_0 em X, existe $x_1 \in X_0$ tal que

$$\|y^*\|\|x_1 - C^{-1}y_0\| < \eta.$$

Definimos $D \in \mathcal{L}(X)$ por

$$Dy := C^{-1}y + y^*(y)(x_1 - C^{-1}y_0) \ \ (y \in X).$$

Então

$$D|_F = C^{-1}|_F, \ Dy_1 = C^{-1}y_1 = x_0, \ Dy_0 = x_1 \ \text{ e } \ \|C^{-1} - D\| < \eta < \frac{1}{\|C\|}.$$

Pelo Lema 6.2, D é invertível. Além disso, o Lema 6.2 também mostra que escolhendo η suficientemente pequeno, teremos $\|C - D^{-1}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, $\|A - D^{-1}\| \leq \|A - C\| + \|C - D^{-1}\| < \varepsilon$ e $B := D^{-1}$ é o operador que estávamos procurando.

$\square$

Lema 6.4. Suponha X um espaço de Banach, $X_0 = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $Y_0 = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ conjuntos densos e linearmente independentes em X, e $\varepsilon > 0$. Então existe um operador invertível $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$A(X_0) = Y_0 \ \text{ e } \ \|I - A\| < \varepsilon.$$

Demonstração. Vamos construir indutivamente conjuntos finitos $V_n \subset X_0, W_n \subset Y_0$ e operadores invertíveis $A_n \in \mathcal{L}(X)$ de modo que as seguintes condições se verificam para todo $n \in \mathbb{N}$:

(i) $V_{n-1} \subset V_n$ e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V_n$,

(ii) $W_{n-1} \subset W_n$ e $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset W_n$,

(iii) $A_n(V_n) = W_n$, $A_n|_{V_{n-1}} = A_{n-1}|_{V_{n-1}}$ e $\|A_n - A_{n-1}\| < \frac{\varepsilon}{2^n}$,

onde $V_0 = W_0 = \emptyset$ e $A_0 = I$.

Para $n = 1$ aplicamos o Lema 6.3 com $F = E = \{0\}$ e $A = I$ para obtermos um operador invertível $A_1 \in \mathcal{L}(X)$ com $\|A_1 - I\| < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que existem $p_1, q_1 \geq 1$ com $A_1 x_1 = y_{p_1}$ e $A_1 x_{q_1} = y_1$. Então colocamos $V_1 = \{x_1, x_{q_1}\}$ e $W_1 = \{y_1, y_{p_1}\}$ (note que ambos os conjuntos podem ser unitários).

Suponha $n \geq 2$ e $V_1, \ldots, V_{n-1}, W_1, \ldots, W_{n-1}, A_1, \ldots, A_{n-1}$ já construídos com as propriedades desejadas. Como $\operatorname{card}(V_{n-1}) = \operatorname{card}(W_{n-1})$, podemos aplicar o Lema 6.3 com E sendo o subespaço gerado por V_{n-1}, F sendo o subespaço gerado por W_{n-1} e $A = A_{n-1}$, para x_0 escolhemos o vetor $x_{k_n} \in X_0$ de menor índice que não pertence a E e para y_0 escolhemos o vetor $y_{m_n} \in Y_0$ de menor índice que não pertence a F. Obtemos então um operador invertível $A_n \in \mathcal{L}(X)$ e inteiros $p_n, q_n \geq 1$ tais que

$$A_n|_E = A_{n-1}|_E,\ A_n x_{k_n} = y_{p_n},\ A_n x_{q_n} = y_{m_n} \ \text{ e } \ \|A_n - A_{n-1}\| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Agora, colocamos $V_n = V_{n-1} \cup \{x_{k_n}, x_{q_n}\}$ e $W_n = W_{n-1} \cup \{y_{m_n}, y_{p_n}\}$. Pela construção e pela hipótese de indução,

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V_n, \ \{y_1, \ldots, y_n\} \subset W_n \text{ e } \ A_n(V_n) = W_n.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n - A_{n-1}\| < \infty$,

$$A := I + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})$$

define um operador em $\mathcal{L}(X)$. Além disso, $\|I - A\| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n - A_{n-1}\| < \varepsilon$. Escolhendo $\varepsilon < 1$, o Lema 6.2 garante que A é invertível. Finalmente, como

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

na norma dos operadores, concluímos que $A(X_0) = Y_0$.

□

Lema 6.5. Suponha X um espaço de Banach, $X_0 = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $Y_0 = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ conjuntos densos e linearmente independentes em X, $B \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível com $Bx_1 = y_1$, e $\varepsilon > 0$. Então existe um operador invertível $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$A(X_0) = Y_0, Ax_1 = y_1 \text{ e } \ \|B - A\| < \varepsilon.$$

Demonstração. A demonstração é idêntica à do lema anterior se começarmos com $A_1 = B$, $V_1 = \{x_1\}$ e $W_1 = \{y_1\}$, e então procedermos com a indução.

□

Agora vamos finalmente demonstrar o Teorema 6.1.

Demonstração. (Teorema 6.1) Como X é um espaço de Banach separável de dimensão infinita, o Teorema 4.8 garante a existência de um operador hipercíclico $S \in \mathcal{L}(X)$. Aplicando o Lema 6.3 com $E = F = \{0\}$, $X_0 = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}, Y_0 = HC(S)$ e $A = I$, obtemos um operador invertível $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que $y_1 := Bx_1 \in HC(S)$.

Como $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\} := \mathrm{orb}(y_1, S)$ é linearmente independente, podemos aplicar o Lema 6.5 com $X_0 = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $Y_0 = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e obtermos um operador invertível $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$A(X_0) = Y_0 \text{ e } Ax_1 = y_1.$$

Logo, o operador $T := A^{-1}SA$ também é hipercíclico e

$$\mathrm{orb}(x_1, T) = \{T^n x_1; n \in \mathbb{N}\} = A^{-1}(\{S^n y_1;\ n \in \mathbb{N}\}) = A^{-1}(Y_0) = X_0,$$

como queríamos demonstrar.

□

Capítulo 7

Operadores Diagonalmente Hipercíclicos

Nos capítulos 1 e 2 vimos algumas condições necessárias e outras suficientes para que um N-produto de operadores seja hipercíclico. Neste momento, estudaremos um caso especial de hiperciclicidade de tais operadores.

Dados $T_1, \ldots, T_N$ operadores definidos em X, agora estamos interessados não apenas na existência de um vetor qualquer em X^N com órbita densa, mas procuramos um vetor x de X tal que a N-úpla $(x, \ldots, x)$ possua órbita densa em X^N com respeito a $T_1 \times \cdots \times T_N$. Operadores com esta propriedade são chamados d-hipercíclicos.

No decorrer deste capítulo, apresentamos algumas condições suficientes para d-hiperciclicidade, além de alguns exemplos envolvendo os operadores translação, derivação e deslocamento à esquerda.

Definição 7.1. Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T_1, \ldots, T_N$, $N \geq 2$, operadores lineares contínuos em X. Dizemos que $T_1, \ldots, T_N$ são *d-hipercíclicos* (*diagonalmente hipercíclicos*) se existe $x \in X$ tal que

$$\operatorname{orb}((x, \ldots, x), (T_1 \times \cdots \times T_N)) = \{(x, \ldots, x), (T_1 x, \ldots, T_N x), (T_1^2 x, \ldots, T_N^2 x), \ldots\}$$

é densa em X^N. O vetor x é dito um *vetor d-hipercíclico com respeito aos operadores* $T_1, \ldots, T_N$.

Note que um operador não é d-hipercíclico com ele mesmo. Mais geralmente, um operador não é d-hipercíclico com um múltiplo escalar seu. De fato, se T e cT, onde $c \in \mathbb{K}$, possuíssem um vetor d-hipercíclico x, então existiriam sequências crescentes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturais tais que

$$(T^{n_k}x, (cT)^{n_k}x) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x,0) \text{ e } (T^{m_k}x, (cT)^{m_k}x) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,x).$$

Mas o primeiro limite implica que $|c| < 1$ e o segundo limite implica que $|c| > 1$, o que é uma contradição.

Definição 7.2. Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T_1, \ldots, T_N$, $N \geq 2$, operadores lineares contínuos em X. Dizemos que $T_1, \ldots, T_N$ são *d-topologicamente transitivos* se para quaisquer subconjuntos $V_0, \ldots, V_N$ abertos não vazios de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_0 \cap (T_1^m)^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap (T_N^m)^{-1}(V_N) \neq \emptyset$.

Teorema 7.3. Sejam $T_1, \ldots, T_N$ operadores lineares contínuos em um espaço de Fréchet separável X de dimensão infinita. O conjunto dos vetores d-hipercíclicos de $T_1, \ldots, T_N$ é um conjunto residual se, e só se, $T_1, \ldots, T_N$ são d-topologicamente transitivos.

Demonstração. Suponha que $T_1, \ldots, T_N$ sejam d-topologicamente transitivos. Como X é separável, a topologia de X possui uma base enumerável $\{U_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. Então, para cada $(j_1, \ldots, j_N) \in \mathbb{N}^N$, temos que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left((T_1^m)^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap (T_N^m)^{-1}(U_{j_N})\right)$$

é aberto e denso em X. Mas um vetor $x \in X$ é d-hipercíclico se, e só se, dado um aberto básico não vazio $W_1 \times \cdots \times W_N$ em X^N arbitrário, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_1^m x \in W_1, \ldots, T_N^m x \in W_N$, isto é, dado $J = (j_1, \ldots, j_N) \in \mathbb{N}^N$ arbitrário, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in (T_1^m)^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap (T_N^m)^{-1}(U_{j_N}).$$

Portanto, o conjunto dos vetores d-hipercíclicos de $T_1, \ldots, T_N$ é dado por

$$\bigcap_{J \in \mathbb{N}^N} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left((T_1^m)^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap (T_N^m)^{-1}(U_{j_N}) \right),$$

que é um subconjunto residual de X.

Agora, suponha que o conjunto dos vetores d-hipercíclicos de $T_1, \ldots, T_N$ é um conjunto residual. Então, dados subconjuntos abertos $V_0, \ldots, V_N$ não vazios de X, existe $x \in V_0$ tal que x é d-hipercíclico. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T_1^n x, \ldots, T_N^n x) \in V_1 \times \cdots \times V_N$. Por conseguinte, $V_0 \cap (T_1^n)^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap (T_N^n)^{-1}(V_N) \neq \emptyset$, provando que $T_1, \ldots, T_N$ são d-topologicamente transitivos.

□

Teorema 7.4 (Critério de D-Hiperciclicidade). Sejam $T_1, \ldots, T_N$ operadores lineares contínuos em um espaço de Fréchet separável X de dimensão infinita. Se existem uma sequência crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturais, conjuntos $X_0, \ldots, X_N$ densos em X e aplicações $S_{l,k} : X_l \longrightarrow X,\ k \in \mathbb{N}$, não necessariamente lineares ou contínuas, satisfazendo, para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$,

(a) $T_l^{n_k} x_0 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ para todo $x_0 \in X_0$,

(b) $S_{l,k} x_l \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ para todo $x_l \in X_l$ e

(c) $(T_l^{n_k} S_{i,k} - \delta_{i,l} \mathrm{Id}_{X_i}) x_i \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ para todo $x_i \in X_i$ e para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$,

então $T_1, \ldots, T_N$ são d-topologicamente transitivos e, em particular, d-hipercíclicos.

Demonstração. Sejam $V_0, \ldots, V_N$ subconjuntos abertos não vazios de X. Observe que para cada $l \in \{0, \ldots, N\}$, temos que $V_l \cap X_l \neq \emptyset$. Fixemos $y_l \in V_l \cap X_l$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B(y_l, (N+1)\varepsilon) \subset V_l$, $l \in \{0, \ldots, N\}$. Por (a), (b) e (c), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_l^{n_k} y_0$, $S_{l,k} y_l$ e $T_l^{n_k} S_{i,k} y_i - \delta_{i,l} y_i$ pertencem a $B(0, \varepsilon)$, para todo $k \geq k_0$ e para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$. Então, para cada $k \geq k_0$, temos que $z_k := y_0 + \sum_{i=1}^{N} S_{i,k} y_i \in V_0$ e $T_l^{n_k} z_k \in B(y_l, (N+1)\varepsilon) \subset V_l$. Daí, $V_0 \cap (T_1^{n_k})^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap (T_N^{n_k})^{-1}(V_N) \neq \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. Portanto, $T_1, \ldots, T_N$ são d-topologicamente transitivos e pelo Teorema 7.3 são d-hipercíclicos.

□

É importante notar que se $T : X \longrightarrow X$ é topologicamente transitivo, então para qualquer par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X, segue que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para n arbitrariamente grande. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ arbitrário. Temos que U e $(T^k)^{-1}(V)$ são abertos não vazios, pois T é contínua e tem imagem densa (Teorema de Bourdon (3.4)). Logo, existem $m \in \mathbb{N}_0$ e $x \in X$ tais que $x \in U$ e $T^m x \in (T^k)^{-1}(V)$. Portanto, $T^{m+k}(U) \cap V \neq \emptyset$.

O teorema a seguir é um resultado similar ao Teorema de Bès-Peris (2.9).

Teorema 7.5. Sejam $T_1, \ldots, T_N$ $(N \geq 2)$ operadores lineares contínuos em um espaço de Fréchet separável X de dimensão infinita. São equivalentes:

(i) $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade.

(ii) (*D-Hiperciclicidade Densa Hereditária*) Existe uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais tal que para qualquer subsequência $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, existe um conjunto Z denso em X^N tal que $\{(T_1^{n_{k_j}} z, \ldots, T_N^{n_{k_j}} z) : \ j \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, qualquer que seja o vetor $z \in Z$.

(iii) Para cada $r \in \mathbb{N}$, os operadores $\underbrace{T_1 \times \cdots \times T_1}_{r \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{T_N \times \cdots \times T_N}_{r \text{ vezes}}$ são d-topologicamente transitivos.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Se $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade com respeito a uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, então dada uma subsequência $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ arbitrária, claramente $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade com respeito a $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Pela demonstração do Teorema 7.4, dados $V, U_{j_1}, \ldots, U_{j_N}$ subconjuntos abertos não vazios de X arbitrários, temos que $V \cap (T_1^{n_{k_j}})^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap (T_N^{n_{k_j}})^{-1}(U_{j_N}) \neq \emptyset$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Com isso, pela demonstração do Teorema 7.3, a condição (ii) é satisfeita pela sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e o subconjunto denso

$$Z = \bigcap_{J\in\mathbb{N}^N} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left((T_1^{n_{k_j}})^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap (T_N^{n_{k_j}})^{-1}(U_{j_N}) \right),$$

onde $J = (j_1, \ldots, j_N)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja $r \in \mathbb{N}$ fixado e, para cada $l \in \{0, \ldots, N\}$ e cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, seja $V_{l,j} \subset X$ aberto não vazio. Suponha que $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem (ii) com respeito a uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Então existe uma subsequência $(n_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_{0,1} \cap (T_1^{n_{1,k}})^{-1}(V_{1,1}) \cap \cdots \cap (T_N^{n_{1,k}})^{-1}(V_{N,1}) \neq \emptyset, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $(n_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem (ii) com respeito a $(n_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde existe uma subsequência $(n_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(n_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_{0,2} \cap (T_1^{n_{2,k}})^{-1}(V_{1,2}) \cap \cdots \cap (T_N^{n_{2,k}})^{-1}(V_{N,2}) \neq \emptyset, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Procedendo neste mesmo raciocínio, depois de r etapas, obtemos

$$V_{0,j} \cap (T_1^{n_{r,k}})^{-1}(V_{1,j}) \cap \cdots \cap (T_N^{n_{r,k}})^{-1}(V_{N,j}) \neq \emptyset,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ e para todo $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Se vale (iii), então para cada $r \in \mathbb{N}$ e $V_{l,k}$ $(0 \leq l \leq N,\ 1 \leq k \leq r)$ subconjuntos abertos não vazios de X, existe $m \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que

$$V_{0,k} \cap (T_1^{m})^{-1}(V_{1,k}) \cap \cdots \cap (T_N^{m})^{-1}(V_{N,k}) \neq \emptyset, \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, r\}. \tag{7.1}$$

Sejam $(U_{1,n} \times \cdots \times U_{N,n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma base da topologia de X^N e $(U_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma base da topologia de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $l \in \{0, \ldots, N\}$, sejam $U_{l,n,0} := U_{l,n}$ e $W_n := B\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, tomemos $U_{l,1,1}$ aberto não vazio de diâmetro menor que $1/2$ tal que $\overline{U_{l,1,1}} \subset U_{l,1,0}$. Por (7.1), existe $n_1 > 1$ tal que

$$U_{0,1,0} \cap (T_1^{n_1})^{-1}(W_1) \cap \cdots \cap (T_N^{n_1})^{-1}(W_1) \neq \emptyset \tag{7.2}$$

e

$$W_1 \cap (T_l^{n_1})^{-1}(U_{l,1,1}) \cap \bigcap_{s\neq l} (T_s^{n_1})^{-1}(W_1) \neq \emptyset, \text{ para todo } l \in \{1, \ldots, N\}. \tag{7.3}$$

Repare que por (7.2), para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, o conjunto $A_l = U_{0,1,0} \cap (T_l^{n_1})^{-1}(W_1)$ é aberto e não vazio e que $T_l^{n_1}(A_l) \subset W_1$. Tomemos $U_{0,1,1}$ aberto e não vazio de diâmetro menor que $1/2$ tal que $\overline{U_{0,1,1}} \subset A_l$. Daí, $\overline{U_{0,1,1}} \subset U_{0,1,0}$ e $T_l^{n_1}(\overline{U_{0,1,1}}) \subset W_1$. Por (7.3), para cada $s \in \{1, \ldots, N\}$, podemos fixar $w_{s,1,1} \in W_1$ tal que para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$,

$$T_l^{n_1} w_{s,1,1} \in \begin{cases} U_{l,1,0}, & \text{se } s = l \\ W_1, & \text{se } s \neq l \end{cases}.$$

Agora, tomemos $U_{l,1,2}$ e $U_{l,2,1}$ abertos e não vazios de diâmetro menor que $1/3$ tais que $\overline{U_{l,1,2}} \subset U_{l,1,1}$, $\overline{U_{l,2,1}} \subset U_{l,2,0}$ e $\overline{U_{l,1,2}} \cap \overline{U_{l,2,1}} = \emptyset$. Por (7.1), existe $n_2 > n_1$ tal que

$$U_{0,1,1} \cap (T_1^{n_2})^{-1}(W_2) \cap \cdots \cap (T_N^{n_2})^{-1}(W_2) \neq \emptyset,$$

$$W_2 \cap (T_l^{n_2})^{-1}(U_{l,1,2}) \cap \bigcap_{s \neq l} (T_s^{n_2})^{-1}(W_2) \neq \emptyset, \text{ para todo } l \in \{1, \ldots, N\}$$

e

$$U_{0,2,0} \cap (T_1^{n_2})^{-1}(W_2) \cap \cdots \cap (T_N^{n_2})^{-1}(W_2) \neq \emptyset,$$

$$W_2 \cap (T_l^{n_2})^{-1}(U_{l,2,1}) \cap \bigcap_{s \neq l} (T_s^{n_2})^{-1}(W_2) \neq \emptyset, \text{ para todo } l \in \{1, \ldots, N\}.$$

Procedendo como antes, para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, tomamos $w_{s,1,2} \in W_2$ e $U_{0,1,2}$ aberto e não vazio com diâmetro menor que $1/3$ tais que $\overline{U_{0,1,2}} \subset U_{0,1,1}$, $T_l^{n_2}(\overline{U_{0,1,2}}) \subset W_2$ e, para cada $s \in \{1, \ldots, N\}$,

$$T_l^{n_2} w_{s,1,2} \in \begin{cases} U_{l,1,2}, & \text{se } s = l \\ W_2, & \text{se } s \neq l \end{cases}$$

e tomamos também $w_{s,2,1} \in W_2$ e $U_{0,2,1}$ aberto e não vazio com diâmetro menor que $1/3$ tais que $\overline{U_{0,2,1}} \subset U_{0,2,0}$, $T_l^{n_2}(\overline{U_{0,2,1}}) \subset W_2$ e, para cada $s \in \{1, \ldots, N\}$,

$$T_l^{n_2} w_{s,2,1} \in \begin{cases} U_{l,2,1}, & \text{se } s = l \\ W_2, & \text{se } s \neq l \end{cases}.$$

Continuando este processo indutivamente usando (7.1) em cada etapa, obtemos inteiros $1 < n_1 < n_2 < \cdots$ e, para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, $i \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, \ldots, i\}$, abertos não vazios $U_{l,k,i+1-k}$ de diâmetro menor que $\dfrac{1}{i+1}$ e $w_{l,k,i+1-k} \in W_l$ satisfazendo

(a) $\overline{U_{l,k,i+1-k}} \subset U_{l,k,i-k} \subset U_{l,k}$.

(b) Cada coleção $\{\overline{U_{l,k,i+1-k}} : 1 \leq k \leq i\}$ tem elementos dois a dois disjuntos.

(c) $T_l^{n_i}(\overline{U_{0,k,i+1-k}}) \subset W_i$.

(d) Para $s \in \{1, \ldots, N\}$, $T_l^{n_i} w_{s,k,i+1-k} \in \begin{cases} U_{l,k,i+1-k}, & \text{se } s = l \\ W_i, & \text{se } s \neq l \end{cases}$.

Agora, para cada $l \in \{0, \ldots, N\}$ e $m \in \mathbb{N}$ fixados, $\bigcap_{j=m+1}^{\infty} \overline{U_{l,m,j-m}} \neq \emptyset$, pois $\{\overline{U_{l,m,j-m}};\ j \geq m+1\}$ forma uma sequência encaixante de compactos. Seja $a_{l,m} \in \bigcap_{j=m+1}^{\infty} \overline{U_{l,m,j-m}}$. Se $x \in \bigcap_{j=m+1}^{\infty} \overline{U_{l,m,j-m}}$, então $d(x, a_{l,m}) < \frac{1}{j}$, para todo $j \geq m+1$. Logo $x = a_{l,m}$, donde

$$\{a_{l,m}\} = \bigcap_{j=m+1}^{\infty} \overline{U_{l,m,j-m}}.$$

Note que, por (b), $a_{l,m} \neq a_{l,n}$ sempre que $m \neq n$ e, por (a), $X_l := \{a_{l,m} :\ m \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Então $S_{l,m} : X_l \longrightarrow X$,

$$S_{l,m} a_{l,k} := \begin{cases} w_{l,k,m+1-k}, & \text{se } m \geq k \\ 0, & \text{se } 1 \leq m < k \end{cases}$$

está bem definida e $S_{l,m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_l, para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$, pois $w_{l,k,m+1-k} \in W_m = B\left(0, \frac{1}{m}\right)$. Por (d),

$$T_s^{n_m} S_{l,m} a_{l,k} = T_s^{n_m} w_{l,k,m+1-k} \in \begin{cases} U_{l,k,m+1-k}, & \text{se } s = l \\ W_m, & \text{se } s \neq l \end{cases}, \text{ quando } m \geq k.$$

Portanto, $(T_s^{n_m} S_{l,m} - \delta_{s,l} \mathrm{Id}_{X_l}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_l, para todo $l, s \in \{1, \ldots, N\}$. Finalmente, $T_l^{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_0, para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$, por (c). Logo, $T_1, \ldots, T_N$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade.

□

Vejamos alguns exemplos de operadores d-hipercíclicos.

Proposição 7.6. Sejam $a_1, \ldots a_N$ números complexos não nulos e dois a dois distintos. Então $T_{a_1}, \ldots, T_{a_N}$ são d-hipercíclicos, onde $T_{a_1}, \ldots, T_{a_N}$ denotam os operadores translação por $a_1, \dots, a_N$ em $H(\mathbb{C})$, respectivamente.

Demonstração. Sejam $h, g_1, \dots, g_N \in H(\mathbb{C})$ e $r, \varepsilon > 0$ arbitrários. Fixemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \max_{\substack{1 \le i,j \le N \\ i \ne j}} \left\{ \frac{2r}{|a_i - a_j|} \right\} + \max_{1 \le i \le N} \left\{ \frac{2r}{|a_i|} \right\}.$$

Vejamos que, para cada $n \ge n_0$, existe $f_n \in H(\mathbb{C})$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\sup_{|z| \le r} |f_n(z) - h(z)| < \varepsilon \text{ e} \\ &\sup_{|z| \le r} |T_{a_i}^n(f_n)(z) - g_i(z)| < \varepsilon, \ 1 \le i \le N. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Seja $n \ge n_0$ fixado. Observe que os discos fechados $\overline{B}(0, r),\ \overline{B}(na_1, r),\ \dots\ ,\ \overline{B}(na_N, r)$ são dois a dois disjuntos e, portanto, o complementar da união deles é conexo. Daí, pelo Teorema da de Runge ([33], Teorema 13.7), existe $f_n \in H(\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} &|f_n(z) - h(z)| < \varepsilon \text{ para cada } z \in \overline{B}(0, r) \text{ e} \\ &|f_n(w) - g_i(w - na_i)| < \varepsilon \text{ para cada } w \in \overline{B}(na_i, r), \ 1 \le i \le N. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Mas (7.5) implica (7.4) (veja exemplo 1.5). Logo, $T_{a_1}, \dots, T_{a_N}$ são d-topologicamente transitivos, consequentemente d-hipercíclicos.

□

Proposição 7.7. Sejam $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{N}$ tais que $r_1 < \cdots < r_N$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com $N \ge 2$. Então $\lambda_1 D^{r_1}, \dots, \lambda_N D^{r_N}$ são d-hipercíclicos, onde D denota o operador derivação em $H(\mathbb{C})$.

Demonstração. Claramente $T_1 = \lambda_1 D^{r_1}, \dots, T_N = \lambda_N D^{r_N}$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade para a sequência $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_0 = \cdots = X_N$ o conjunto dos polinômios em $\mathbb{C}$ e $S_{l,n} : X_l \longrightarrow X$ definidas, para cada $l \in \{1, \dots, N\}$ e cada $n \in \mathbb{N}$, por $S_{l,n}(p) = q$, onde

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \text{ e } q(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{\lambda_l^n} \frac{k!}{(k + r_l n)!} z^{k + r_l n}, \ a_k \in \mathbb{C}.$$

□

Proposição 7.8. Seja X um dos espaços de Banach c_0 ou ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ e sejam $1 \leq r_1 < \cdots < r_N$ inteiros $(N \geq 2)$. Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, seja $w_l = (w_{l,n})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de escalares não nulos e seja $B_{w_l} : X \longrightarrow X$ o correspondente operador deslocamento à esquerda ponderado. Então são equivalentes:

(i) $B_{w_1}^{r_1}, \ldots, B_{w_N}^{r_N}$ são d-hipercíclicos.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande satisfazendo, para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$|w_{l,j+1} \cdots w_{l,j+r_l m}| > \frac{1}{\varepsilon} \ (1 \leq l \leq N) \tag{7.6}$$

e

$$\frac{|w_{l,j+1} \cdots w_{l,j+r_l m}|}{|w_{s,j+(r_l - r_s)m+1} \cdots w_{s,j+r_l m}|} > \frac{1}{\varepsilon} \ (1 \leq s < l \leq N). \tag{7.7}$$

(iii) $B_{w_1}^{r_1}, \ldots, B_{w_N}^{r_N}$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$, fixemos $0 < \delta < 1$ com $\dfrac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots)$ um vetor d-hipercíclico para $B_{w_1}^{r_1}, \ldots, B_{w_N}^{r_N}$. Escolha $m > q$ tal que

$$|x_k| < \delta, \text{ para todo } k \geq r_1 m, \tag{7.8}$$

e

$$\| B_{w_l}^{r_l m} x - (e_1 + \cdots + e_q) \| < \delta \ \text{ para todo } l \in \{1, \ldots, N\}. \tag{7.9}$$

Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, segue de (7.9) que

$$1 - \delta < |w_{l,i+1} \cdots w_{l,i+r_l m} x_{i+r_l m}| < 1 + \delta, \text{ se } i \leq q, \tag{7.10}$$

e

$$|w_{l,i+1} \cdots w_{l,i+r_l m} x_{i+r_l m}| < \delta, \text{ se } i > q. \tag{7.11}$$

Fixemos $j \in \{1, \ldots, q\}$ e $l \in \{1, \ldots, N\}$. Por (7.8) e (7.10),

$$|w_{l,j+1} \cdots w_{l,j+r_l m}| > \frac{1-\delta}{\delta} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Além disso, fixado $s < l$, temos que

$$|w_{s,j+(r_l-r_s)m+1}\cdots w_{s,j+r_lm}| < \frac{\delta}{|x_{j+r_lm}|}$$

(por (7.11) com s em lugar de l e $j+(r_l-r_s)m$ em lugar de i), donde

$$\frac{|w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_lm}|}{|w_{s,j+(r_l-r_s)m+1}\cdots w_{s,j+r_lm}|} > \frac{|w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_lm}x_{j+r_lm}|}{\delta} > \frac{1-\delta}{\delta} > \frac{1}{\varepsilon},$$

onde usamos (7.10) na segunda desigualdade.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se (ii) é verdadeiro, então existem inteiros $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ satisfazendo, para cada $q \in \mathbb{N}$ e cada $j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$|w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_ln_q}| > q \ (l \in \{1, \ldots, N\}), \tag{7.12}$$

e

$$\frac{|w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_ln_q}|}{|w_{s,j+(r_l-r_s)m+1}\cdots w_{s,j+r_ln_q}|} > q \ (l, s \in \{1, \ldots, N\} \text{ com } s < l). \tag{7.13}$$

Agora, seja $X_0 = \cdots = X_N = c_{00}$. Note que X_0 é denso em X e que $B_{w_l}^{r_ln_q} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_0, para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$. Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$ e $q \in \mathbb{N}$, considere a aplicação $S_{l,q} : X_l \longrightarrow X$ dada por

$$S_{l,q}(x_1, x_2, \ldots) = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_ln_q \text{ vezes}}, \frac{x_1}{w_{l,2}\cdots w_{l,1+r_ln_q}}, \ldots, \frac{x_j}{w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_ln_q}}, \ldots \right).$$

Então $B_{w_l}^{r_ln_q} S_{l,q} = \mathrm{Id}_{X_l}$ e, por (7.12), segue que $S_{l,q} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_l, para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$. Agora, para $1 \leq s < l \leq N$, temos que $B_{w_l}^{r_ln_q} S_{s,q} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_l, pois $r_s < r_l$. Além disso, $B_{w_s}^{r_sn_q} S_{l,q} \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$ pontualmente em X_l, por (7.13). Portanto, $B_{w_1}^{r_1}, \ldots, B_{w_N}^{r_N}$ satisfazem o critério de d-hiperciclicidade.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Segue do critério de d-hiperciclicidade (Teorema 7.4).

$\square$

Cabe comentar que operadores hipercíclicos em espaços normados possuem norma estritamente maior que 1. De fato, se $T : X \longrightarrow X$ é tal que $\|T\| \leq 1$, então $\|x\| \geq \|Tx\|$, para todo $x \in X$, donde $\|x\| \geq \|T^n x\|$ para todo $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, todas as órbitas de T são limitadas. Portanto, não há vetor hipercíclico com respeito a T.

Corolário 7.9. Sejam $N \geq 2$ e para cada $l \in \{1, \dots, N\}$, $r_l \in \mathbb{N}$ e $\lambda_l \in \mathbb{C}$ com $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N$. Os operadores $\lambda_1 B^{r_1}, \dots, \lambda_N B^{r_N}$ são d-hipercíclicos se, e só se,

$$r_1 < r_2 < \dots < r_N \text{ e } 1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_N|. \tag{7.14}$$

Demonstração. Para cada $l \in \{1, \dots, N\}$, sejam λ_l^{1/r_l} uma raiz fixada de $p(z) = z^{r_l} - \lambda_l$ e B_{w_l} o operador deslocamento à esquerda ponderado com $w_l = (w_{l,n})_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda_l^{1/r_l})_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, $B_{w_l}^{r_l} = \lambda_l B^{r_l}$.

Suponha que $\lambda_1 B^{r_1}, \dots, \lambda_N B^{r_N}$ são d-hipercíclicos e sejam $s, l \in \{1, \dots, N\}$ fixados com $s < l$. Como operadores hipercíclicos em espaços normados possuem norma estritamente maior que 1 e $\|B^{r_s}\| = 1$, $|\lambda_s| = \| \lambda_s B^{r_s} \| > 1$. Além disso, como $\lambda_s B^{r_s}$ e $\lambda_l B^{r_l}$ são d-hipercíclicos e um operador não pode ser d-hipercíclico como um múltiplo escalar dele mesmo, $r_s < r_l$. Finalmente, pela Proposição 7.8 (fazendo $\varepsilon = 1$ em (ii)),

$$\frac{|\lambda_l|^m}{|\lambda_s|^m} = \frac{(|\lambda_l|^{\frac{1}{r_l}})^{r_l m}}{(|\lambda_s|^{\frac{1}{r_s}})^{r_s m}} = \frac{|w_{l,2} \cdots w_{l,r_l m+1}|}{|w_{s,(r_l - r_s)m+2} \cdots w_{s,r_l m+1}|} > 1$$

para algum $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $|\lambda_s| < |\lambda_l|$ e como s, l foram tomados arbitrariamente em $\{1, \dots N\}$ com $s < l$, segue a desigualdade em (7.14).

Agora suponha, reciprocamente, que

$$r_1 < r_2 < \dots < r_N \text{ e } 1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_N|,$$

e sejam $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$ arbitrários. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_1|^m > \dfrac{1}{\varepsilon}$ e $\left(\dfrac{|\lambda_l|}{|\lambda_s|}\right)^m > \dfrac{1}{\varepsilon}$ para todo $s, l \in \{1, \dots, N\}$ com $s < l$. Então quaisquer $l \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$, satisfazem

$$|w_{l,j+1} w_{l,j+2} \cdots w_{l,j+r_l m}| = (|\lambda_l|^{\frac{1}{r_l}})^{r_l m} = |\lambda_l|^m > |\lambda_1|^m > \frac{1}{\varepsilon}$$

e

$$\frac{|w_{l,j+1}w_{l,j+2}\cdots w_{l,j+r_l m}|}{|w_{s,j+(r_l-r_s)m+1}\cdots w_{s,j+r_l m}|} = \frac{|\lambda_l|^m}{|\lambda_s|^m} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ se } 1 \leq s < l \leq N.$$

Logo, pela Proposição 7.8, $\lambda_1 B^{r_1}, \ldots, \lambda_N B^{r_N}$ são d-hipercíclicos.

□

Proposição 7.10. Sejam $X = c_0$ ou $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ e $2 \leq N \in \mathbb{N}$ fixado. Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, sejam $r_l \in \mathbb{N}$, $(w_{l,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sequências limitadas de escalares não nulos, $B_{w_l} : X \longrightarrow X$ correspondentes deslocamentos à esquerda ponderados e $r_1 < \cdots < r_N$ números naturais. Então são equivalentes:

(i) $B_{w_1}^{r_1} \times \cdots \times B_{w_N}^{r_N}$ é hipercíclico em X^N.

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\min\{|w_{l,2}w_{l,2}\cdots w_{l,r_l n}| : 1 \leq l \leq N\}\} = \infty$.

(iii) Para cada $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$, existe um inteiro $m > q$ satisfazendo, para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$|w_{l,j+1}\cdots w_{l,j+r_l m}| > \frac{1}{\varepsilon} \ (1 \leq l \leq N).$$

(iv) $B_{w_1}^{r_1} \times \cdots \times B_{w_N}^{r_N}$ satisfaz o critério de hiperciclicidade em X^N.

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Se (ii) é verdadeiro, então, para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$, existe $\left(|w_{l,2}\cdots w_{l,r_l n_{l,k}}|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência crescente de $(|w_{l,2}\cdots w_{l,r_l n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$|w_{l,2}\cdots w_{l,r_l n_{l,k}}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Dados $\varepsilon > 0$ e $q \in \mathbb{N}$ arbitrários, para cada $j \in \{1, \ldots, q\}$, tomemos $n_{l,k_j} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{l,k_j} > q$ e

$$|w_{l,2}\cdots w_{l,j+r_l n_{l,k_j}}| > \frac{1}{\varepsilon}|w_{l,2}\cdots w_{l,j}|.$$

Denotando por $n_{l,k} = \max\{n_{l,k_j};\ 1 \leq j \leq q\}$, temos que

$$|w_{l,2}\cdots w_{l,j+r_l n_{l,k}}| > \frac{1}{\varepsilon}|w_{l,2}\cdots w_{l,j}|, \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, q\}.$$

O resultado segue tomando $m = \max\{n_{l,k};\ 1 \leq l \leq N\}$.

Claramente, (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Analogamente à demonstração da Proposição 7.8 verifica-se que (i), (iii) e (iv) são equivalentes.

$\square$

Exemplo 7.11. Sejam $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de escalares dada por

$$w_k = \begin{cases} 2, & \text{se } k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+1, \ldots, 2^{2n}+n\} \cup \{3(2^{2n}+n)-n+1, \ldots, 3(2^{2n}+n)-n+n\} \\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{se } k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+n+1\} \cup \{3(2^{2n}+n)+1\} \\ 1 & \text{para os demais valores de } k \text{ em } \mathbb{N} \end{cases}$$

e $B_w : X \longrightarrow X$ o deslocamento à esquerda ponderado correspondente, onde $X = c_0$ ou $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$. Então $B_w \times B_w^3$ é hipercíclico em $X \times X$, mas B_w e B_w^3 não são d-hipercíclicos. De fato,

$$\min\left\{\prod_{j=2}^{m} w_j, \prod_{j=2}^{3m} w_j\right\} = 2^n, \text{ se } m = 2^{2n}+n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Proposição 7.10, $B_w \times B_w^3$ é hipercíclico em $X \times X$.

Agora, vamos provar que B_w e B_w^3 não satisfazem a condição (ii) da Proposição 7.8, e portanto não são d-hipercíclicos. Neste caso, na notação da Proposição 7.8, $N = 2$, $w_1 = w_2 = w$, $r_1 = 1$ e $r_2 = 3$. Tomando $\varepsilon = 1$ e $q = 1$, e fazendo $j = 1$, $l = 2$ em (7.6) e em (7.7) e $s = 1$ em (7.7), basta verificarmos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, ou (7.6) não é satisfeito ou (7.7) não é satisfeito, isto é, respectivamente,

$$\text{ou } |w_2 \cdots w_{1+3m}| \leq 1$$

$$\text{ou } |w_2 \cdots w_{1+2m}| \leq 1.$$

Vejamos. Se $|w_2 \cdots w_{1+2m}| > 1$, então, pela definição da sequência w,

$$1 + 2m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+1, \ldots, 2^{2n}+n\} \cup \{3(2^{2n}+n)-n+1, \ldots, 3(2^{2n}+n)\}.$$

Se $1+2m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+1, \ldots, 2^{2n}+n\}$, então $1+2m = 2^{2n}+j$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, donde

$$1+3m = \frac{3}{2}2^{2n} + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}2^{2n} + 1 > 2^{2n} + n$$

e

$$1+3m = \frac{3}{2}2^{2n} + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}2^{2n} - \frac{3}{2}n - \frac{1}{2} < 3(2^{2n}+n) - n + 1.$$

Se $1+2m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{3(2^{2n}+n)-n+1, \ldots, 3(2^{2n}+n)\}$, então $1+2m = 3(2^{2n}+n)-n+j$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, donde

$$1+3m = \frac{9}{2}2^{2n} + 3n + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2}2^{2n} + 3n + 1 > 4 \times 2^{2n} + n + 1 = 2^{2(n+1)} + (n+1)$$

e

$$\begin{aligned} 1+3m &= \frac{9}{2}2^{2n} + 3n + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2} \leq \frac{9}{2}2^{2n} + \frac{9}{2}n - \frac{1}{2} \\ &< 12 \times 2^{2n} + 2n + 3 = 3\left(2^{2(n+1)} + (n+1)\right) - (n+1) + 1. \end{aligned}$$

Isto é, se

$$1+2m \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+1, \ldots, 2^{2n}+n\} \cup \{3(2^{2n}+n)-n+1, \ldots, 3(2^{2n}+n)\},$$

então

$$1+3m \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{2n}+1, \ldots, 2^{2n}+n\} \cup \{3(2^{2n}+n)-n+1, \ldots, 3(2^{2n}+n)\}.$$

Portanto, se $|w_2 \cdots w_{1+2m}| > 1$, então $|w_2 \cdots w_{1+3m}| \leq 1$.

Se $|w_2 \cdots w_{1+3m}| > 1$, de forma análoga verificamos que $|w_2 \cdots w_{1+2m}| \leq 1$.

Conhecendo a Proposição 7.8 podemos achar que potências de mesmo expoente de deslocamentos à esquerda ponderados nunca são d-hipercíclicos, mas a proposição seguinte afirma o contrário.

Proposição 7.12. Sejam $(n_q)_{q\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de naturais, $X = c_0$ ou $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ e $N \geq 2$. Então existem deslocamentos à esquerda ponderados

$B_{w_1}, \ldots, B_{w_N}$ definidos em X que são d-hipercíclicos.

Demonstração. Não é difícil ver que dados $v_l \in \mathbb{K}$ ($l \in \{1, \ldots, N\}$) não nulos, existem únicos $y_l \in \mathbb{K}$ não nulos tais que

$$\begin{aligned} &0 < y_1 \in \mathbb{R}, \\ &\max\{|y_1|, \ldots, |y_N|\} = 1, \\ &\frac{v_1}{y_1} = \frac{v_2}{y_2} = \cdots = \frac{v_N}{y_N}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Sejam $\{(z_{1,n}, \ldots, z_{N,n});\ n \in \mathbb{N}\}$ denso em X^N e $\{z_{0,n};\ n \in \mathbb{N}\}$ denso em X tal que cada $z_{l,n} = (z_{l,n,j})_{j \in \mathbb{N}} \in c_{00}$ e satisfaz

$$z_{l,n,j} \neq 0 \text{ se, e só se, } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Seja $m_1 \in \{n_q;\ q \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$2^{m_1 - 1} > \max\{|z_{l,1,1}|;\ 1 \leq l \leq N\}. \tag{7.16}$$

Para cada $l \in \{1, \ldots, N\}$ e cada $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, definamos $w_{l,k} := 2$ e $w_{l,m_1+1} := y_l$. Onde os y_l são obtidos em (7.15) com

$$v_l := \frac{z_{l,1,1}}{w_{l,2} \cdots w_{l,m_1}}.$$

Assim, $x_1 = (x_{1,j})_{j \in \mathbb{N}} \in X$, onde

$$x_{1,j} = \begin{cases} \dfrac{z_{l,1,1}}{w_{l,2} \cdots w_{l,m_1+1}}, & j = m_1 + 1 \\ 0 & j \leq m_1 \end{cases}$$

satisfaz $B_{w_l}^{m_1} x_1 = z_{l,1}$ independente da forma como definamos $w_{l,j},\ j > m_1 + 1$. Por (7.16) e pelo fato de que $\max\{|w_{1,m_1}|, \ldots, |w_{N,m_1}|\} = 1$, segue que $\|x_1\| = |x_{1,m_1+1}| < 1$.

Por indução, suponha que tenhamos escolhido, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ um inteiro $m_k \in \{n_q;\ q \in \mathbb{N}\}$ com $m_k > m_{k-1} + k - 1$, ($2 \leq k \leq n$), um vetor $x_k \in X$ e pesos $w_{l,j} \in \mathbb{K}$ para $l \in \{1, \ldots, N\}$ e $j \in \{1, \ldots, m_n + n\}$ tais que

$$0 < |w_{l,j}| \leq 2,\ l \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, m_n + n\},$$

$$\|x_k\| < \frac{1}{k},\ k \in \{1, \ldots, n\} \text{ e}$$

$$B_{w_l}^{m_k} x_k = z_{l,k},\ l \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Depois de $(n+1)$ aplicações sucessivas de (7.15), obtemos $y_{1,j}, \ldots, y_{N,j} \in \mathbb{K}$, $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, não nulos tais que

$$\max\{|y_{l,j}|; 1 \leq l \leq N\} = 1 \text{ e}$$

$$\frac{z_{1,n+1,j}}{\left(\prod_{i=j+1}^{m_n+n} w_{1,i}\right)\left(\prod_{k=1}^{j} y_{1,k}\right)} = \cdots = \frac{z_{N,n+1,j}}{\left(\prod_{i=j+1}^{m_n+n} w_{N,i}\right)\left(\prod_{k=1}^{j} y_{N,k}\right)}. \tag{7.17}$$

Prosseguindo, seja $m_n + n < m_{n+1} \in \{n_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{2^{m_{n+1}-(m_n+n)}}{(n+1)^2} > \max\left\{\left|\frac{z_{N,n+1,j}}{\left(\prod_{i=j+1}^{m_n+n} w_{N,i}\right)\left(\prod_{k=1}^{j} y_{N,k}\right)}\right|;\ 1 \leq j \leq n+1\right\}. \tag{7.18}$$

Definimos

$$w_{l,k} := \begin{cases} 2, & l \in \{1, \ldots, N\},\ k \in \{m_n+n+1, \ldots, m_{n+1}\} \\ y_{l,j}, & k = m_{n+1}+j\ (1 \leq j \leq n+1) \end{cases}. \tag{7.19}$$

Finalmente, seja $x_{n+1} := (x_{n+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$x_{n+1,k} := \begin{cases} \dfrac{z_{N,n+1,j}}{w_{N,1+j} \cdots w_{N,m_{n+1}+j}}, & \text{se } k = m_{n+1}+j \text{ e } j \in \{1, \ldots, n+1\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{7.20}$$

Por (7.17) e (7.19), $B_{w_l}^{m_{n+1}} x_{n+1} = z_{l,n+1},\ l \in \{1, \ldots, N\}$. E por (7.17), (7.18), (7.19) e (7.20),

$$\|x_{n+1}\| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_{n+1,m_{n+1}+j}| < \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Por (7.17) e (7.19), $0 < |w_{l,j}| \leq 2$ para $l \in \{1, \ldots, N\},\ j \in \{1, \ldots, m_{n+1}+n+1\}$.

Por indução, conseguimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (n_q)_{q\in\mathbb{N}}$, e sequências $w_l = (w_{l,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tais que

(a) $0 < |w_{l,k}| \leq 2$,

(b) $\|x_n\| < \dfrac{1}{n}$ e

(c) $B_{w_l}^{m_n} x_n = z_{l,n}$,

para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$ e todos $n, k \in \mathbb{N}$.

Agora vejamos que $B_{w_1}, \ldots, B_{w_N}$ são d-topologicamente transitivos. Sejam $V_0, \ldots, V_N$ subconjuntos abertos não vazios de X. Como $\{(z_{1,n}, \ldots, z_{N,n});\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X^N e $\{z_{0,n};\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, existem subsequências $(n_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (n_{N,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $k_0, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$ tais que $z_{0,n_{0,k}} \in V_0$, para todo $k \geq k_0$, $\cdots$, $z_{N,n_{N,k}} \in V_N$, para todo $k \geq k_N$. Como $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $B_{w_l}^{m_{n_{l,k}}} z_{0,n_{l,k_0}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, segue que $u_k = z_{0,n_{l,k_0}} + x_{n_{l,k}} \in V_0$ e

$$B_{w_l}^{m_{n_{l,k}}} u_k = B_{w_l}^{m_{n_{l,k}}} z_{0,n_{l,k_0}} + B_{w_l}^{m_{n_{l,k}}} x_{n_{l,k}} = B_{w_l}^{m_{n_{l,k}}} z_{0,n_{l,k_0}} + z_{l,n_{l,k}} \in V_l,$$

para todo $l \in \{1, \ldots, N\}$ e k suficientemente grande. Logo $B_{w_1}, \ldots, B_{w_N}$ são d-topologicamente transitivos e portanto d-hipercíclicos.

$\square$

Capítulo 8

Operadores Hipercíclicos que Não Satisfazem o Critério de Hiperciclicidade

Todo operador hipercíclico satisfaz o critério de hiperciclicidade? Durante um longo tempo, todos os operadores hipercíclicos conhecidos satisfaziam o critério de hiperciclicidade. Por isso era razoável esperar que a pergunta acima possuísse resposta afirmativa. Aproximadamente 15 anos se passaram desde que D. A. Herrero propôs este problema [24] até que M. De La Rosa e C. Read, por volta do ano de 2006, mostraram que existe um espaço de Banach que admite um operador hipercíclico que não satizfaz o critério de hiperciclicidade [15]. Nesta construção, não é óbvio se o espaço obtido pode ser um dos espaços de Banach clássicos, porém F. Bayart e É. Matheron mostraram que uma ampla classe de espaços de Banach torna negativa a resposta do problema proposto por Herrero, incluindo os espaços c_0 e ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ [4]. Este capítulo é dedicado à construção feita por F. Bayart e É. Matheron.

Seja X um espaço de Banach que possui uma base incondicional $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ com $\|v_i\|_X = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por E o subespaço vetorial de X gerado por $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ e tomemos a hipótese adicional de que o operador linear *deslocamento à direita associado a* $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, isto é, $S : E \longrightarrow E$ definido por $Sv_i = v_{i+1}$ é contínuo. Mostraremos que existe um operador hipercíclico $T : X \longrightarrow X$ que não satisfaz o critério de hiperciclicidade.

Podemos estender o operador S a X. De fato, cada $x \in X$ escreve-se de forma única $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$ para uma certa sequência de escalares $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$. Definimos

$$Sx = S\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j S v_j. \tag{8.1}$$

Vejamos que $S : X \longrightarrow X$ está bem definido. Como X é um espaço completo com respeito a sua norma $\|\cdot\|_X$, para mostrarmos que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j S v_j$ converge, basta verificarmos que esta série satisfaz o critério de Cauchy. Como $S : E \longrightarrow E$ é contínuo, existe $C > 0$ tal que $\|Sy\|_X \leq C\|y\|_X$ para todo $y \in E$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n \geq m \geq N$, $\left\|\sum_{j=m}^{n} \alpha_j v_j\right\|_X < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Logo

$$\left\|\sum_{j=m}^{n} \alpha_j S v_j\right\|_X = \left\|S\left(\sum_{j=m}^{n} \alpha_j v_j\right)\right\|_X \leq C\left\|\sum_{j=m}^{n} \alpha_j v_j\right\|_X < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon, \text{ para todos } n \geq m \geq N.$$

Portanto, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j S v_j$ converge.

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, seja v_j^* o funcional coordenada associado a $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, isto é, se $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$, então

$$v_j^*(x) = v_j^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i\right) = \alpha_j.$$

Note que, como v_j^* é contínuo ([28], Corolário 4.1.16) e $\|v_j\|_X = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, a família $(v_j^*)_{j\in\mathbb{N}_0}$ é pontualmente limitada, donde, pelo Teorema de Banach-Steinhaus ([34], Teorema 2.5), $(v_j^*)_{j\in\mathbb{N}_0}$ é limitada.

Agora, sejam $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $b_0 := 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_n &:= 4\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right), \\ b_n &:= 3^n. \end{aligned}$$

Observe que $2 \leq w_n \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja também $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de polinômios em $\mathbb{K}$ satisfazendo:

$$p_0 = 0,\ (p_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ enumera todos os polinômios com coeficientes em } Q,\ \text{um conjunto enumerável denso de } \mathbb{K},\ \text{e } \operatorname{grau}(p_n) < b_{n-1},\ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Vamos construir um operador linear $T : E \longrightarrow E$ da forma

$$Tv_i = \begin{cases} w_{i+1}v_{i+1}, & i \neq b_n - 1,\ \text{para todo } n \in \mathbb{N} \\ \varepsilon_n v_{i+1} + \sum_{k\leq i} \lambda_{k,i} v_k, & i = b_n - 1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8.3}$$

satisfazendo

$$T^{b_n} v_0 = p_n(T)v_0 + \frac{1}{n+1} v_{b_n},\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{8.4}$$

onde ε_n e λ_{k,b_n-1} são escalares. Começamos definindo

$$Tv_i := w_{i+1}v_{i+1},\ \text{para } i \in \{b_{n-1}, \ldots, b_n - 2\},\ n \in \mathbb{N}. \tag{8.5}$$

Agora resta definir apenas $Tv_{b_n-1},\ n \in \mathbb{N}$. Supondo (8.4) verdadeiro, temos

$$\begin{aligned} T^{b_n} v_0 &= T^{b_n - b_{n-1}} T^{b_{n-1}} v_0 \\ &= T^{b_n - b_{n-1}} \left(p_{n-1}(T)v_0 + \frac{1}{n} v_{b_{n-1}} \right) \\ &= T^{b_n - b_{n-1}} p_{n-1}(T)v_0 + \frac{w_{b_{n-1}+1} \cdots w_{b_n-1}}{n} Tv_{b_n-1}. \end{aligned}$$

Assim definimos para $n \in \mathbb{N}$,

$$Tv_{b_n-1} := \varepsilon_n v_{b_n} + z_n,$$

onde $\varepsilon_n = \dfrac{n}{(n+1)w_{b_{n-1}+1} \cdots w_{b_n-1}}$, e

$$z_n = \frac{n}{w_{b_{n-1}+1} \cdots w_{b_n-1}} (p_n(T)v_0 - T^{b_n - b_{n-1}} p_{n-1}(T)v_0). \tag{8.6}$$

Observe que $\varepsilon_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{grau}(p_n) < b_{n-1} < b_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o operador $T : E \longrightarrow E$ está bem definido. Além disso, T satisfaz (8.3) e (8.4).

Definamos $\|\cdot\|_1$ em E por $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|$, se $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$. Não é difícil ver que $\|\cdot\|_1$ é uma norma em E. Denotemos $d_n := \text{grau}(p_n)$ e $|p|_1$ a soma dos módulos dos coeficientes do polinômio p.

Lema 8.1. Se $\|z_k\|_1 \leq 1,$ para todo $k < n$, então

$$\|z_n\|_1 \leq n 4^{\max\{d_n, d_{n-1}\}+1} \left(\frac{|p_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |p_{n-1}|_1 \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right) \right).$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado e suponhamos que $\|z_k\|_1 \leq 1,$ para todo $k < n.$ Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, seja E_j o subespaço vetorial gerado por $\{v_0, \ldots, v_j\}$. Temos que se $x \in E_j$, então $x = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i v_i$. Logo, para cada $j \in \{1, \ldots, b_n - 2\}$ arbitrário, segue que

$$Tx = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i T v_i = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq b_k - 1}}^{j} \alpha_i w_{i+1} v_{i+1} + \sum_{b_k - 1 \leq j} \alpha_{b_k - 1} (\varepsilon_k v_{b_k} + z_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_1 &\leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq b_k - 1}}^{j} \|\alpha_i w_{i+1} v_{i+1}\|_1 + \sum_{b_k - 1 \leq j} \|\alpha_{b_k - 1} (\varepsilon_k v_{b_k} + z_k)\|_1 \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq b_k - 1}}^{j} |\alpha_i w_{i+1}| + \sum_{b_k - 1 \leq j} |\alpha_{b_k - 1}| \|\varepsilon_k v_{b_k} + z_k\|_1 \\
&\leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq b_k - 1}}^{j} |\alpha_i w_{i+1}| + \sum_{b_k - 1 \leq j} |\alpha_{b_k - 1}| 2 \\
&\leq w_{j+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq b_k - 1}}^{j} |\alpha_i| + w_{j+1} \sum_{b_k - 1 \leq j} |\alpha_{b_k - 1}| \\
&= w_{j+1} \sum_{i=0}^{j} |\alpha_i| \\
&= w_{j+1} \|x\|_1,
\end{aligned}$$

pois $(w_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é crescente. A desigualdade também é verdadeira para $x \in E_0$. Logo, $\|Tx\|_1 \leq w_{j+1} \|x\|_1$, para todo $x \in E_j$, para todo $j < b_n - 1$. E como, de (8.4) e (8.5), obtemos que $T^i v_0 \in E_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|T^m v_0\|_1 \leq \prod_{i=1}^{m} w_i, \text{ para todo } m \in \{1, \ldots, b_n - 1\}.$$

Esta desigualdade também é verdadeira para $m = 0$, se convencionarmos que um produto de zero fatores é igual a 1. De (8.6), segue que

$$\|z_n\|_1 \leq \frac{n\left(|p_n|_1 \prod_{i=1}^{d_n} w_i + |p_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} + d_{n-1}} w_i\right)}{w_{b_{n-1}+1} \cdots w_{b_n - 1}}.$$

E como $2 \leq w_i \leq 4,$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e $b_n - b_{n-1} - 1 \geq b_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_1 &\leq n 4^{\max\{d_n, d_{n-1}\}+1} \left(\frac{|p_n|_1}{2^{b_n - b_{n-1} - 1}} + |p_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}}\right) \\
&\leq n 4^{\max\{d_n, d_{n-1}\}+1} \left(\frac{|p_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |p_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}}\right).
\end{aligned}$$

Como $\log\left(\dfrac{1-s}{1-r}\right) \leq r - s$, sempre que $0 \leq r < s < 1$, segue que

$$\frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}} = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{i}}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{i + b_{b_{n-1}}}}\right)} \leq \exp\left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right) \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}} &\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right] \\
&\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_{n-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right] \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{(i + b_{n-1})^{3/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{b_{n-1}} \frac{1}{\sqrt{i + b_{n-1}}}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Podemos escrever T como $T = R + K$, onde R é definido em E por $Rv_i = y_{i+1}v_{i+1}$, com $y_{b_n} = \varepsilon_n$ e, se $i \neq b_n$, $y_i = w_i$ e K é definido em E por $Kv_{b_n-1} = z_n$ e, se $i \neq b_n - 1$, $Kv_i = 0$. Veremos na demonstração da proposição abaixo que, escolhendo uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adequada na definição de $T : E \longrightarrow E$, podemos estender T a X definindo

$$Tx = Rx + Kx \text{ para todo } x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i \in X, \tag{8.7}$$

com $Rx = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Rv_i$ e $Kx = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i Kv_i$, de forma que T será um operador linear contínuo.

Proposição 8.2. Existe uma sequência crescente de números positivos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendendo ao infinito tal que se $\mathrm{grau}(p_n) < u_n$ e $|p_n|_1 \leq u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então o operador $T : X \longrightarrow X$ dado em (8.7) está bem definido e é contínuo.

Demonstração. Como o operador deslocamento à direita associado a $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ($S : X \longrightarrow X$ definido em (8.1)) está bem definido, temos que para cada $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i \in X$, a série $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_{i+1}$ converge. Além disso, como a base $(v_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ é incondicional, esta série converge incondicionalmente. Logo, como $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada, a série $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i y_{i+1} v_{i+1}$ converge ([28], Proposição 4.2.8), donde o operador $R : X \longrightarrow X$ está bem definido. Vejamos que R é contínuo. Seja $((x_n, Rx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos do gráfico de R, G_R, tal que

$$(x_n, Rx_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y), \text{ em } X \times X,$$

onde $x_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n,i} v_i$, $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i$ e $y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i v_i$. Como v_j^* é contínuo para todo $j \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\alpha_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0$$

e

$$\alpha_{n,j-1} y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0,$$

onde definimos $\alpha_{-1} = \alpha_{n,-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $y_0 = 0$ (na verdade, y_0 pode ser qualquer). Logo, $\alpha_{j-1} y_j = \beta_j$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Com isso $y = Rx$ e portanto $(x, y) \in G_R$.

Logo, G_R é fechado em $X \times X$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado ([34], Teorema 2.15), R é contínuo.

Agora, vejamos que $K : X \longrightarrow X$ está bem definido e é contínuo. Como a sequência de números positivos

$$\left(\frac{2^{b_{n-1}} \exp\left(\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right)}{4n2^n \left(2^{b_{n-1}} + \exp\left(\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right) \right)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

tende ao infinito, podemos encontrar uma sequência crescente de números positivos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendendo ao infinito tal que

$$u_n 4^{u_n} \leq \frac{2^{b_{n-1}} \exp\left(\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right)}{4n2^n \left(2^{b_{n-1}} + \exp\left(\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right) \right)}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto é,

$$n 4^{u_n+1} \left(\frac{u_n}{2^{b_{n-1}}} + u_n \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} \sqrt{b_{n-1}} \right) \right) \leq \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se $\mathrm{grau}(p_n) < u_n$ e $|p_n|_1 \leq u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pelo Lema 8.1 e por indução, temos que $\|z_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|v_i\|_X = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, segue que $\|Kv_{b_n-1}\|_X = \|z_n\| \leq \|z_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$. Assim $\sum_{i=0}^{\infty} \|Kv_i\|_X < \infty$. Logo, o operador $K : X \longrightarrow X$ está bem definido. Além disso, se $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i v_i \in X$, como $|\alpha_j| = |v_j^*(x)| \leq \|v_j^*\|_{X^*} \|x\|_X$ e $(v_j^*)_{j \in \mathbb{N}_0}$ é limitada, obtemos

$$\|Kx\|_X \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| \|Kv_i\|_X \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|v_i^*\|_{X^*} \|x\|_X \|Kv_i\|_X \leq A \|x\|_X,$$

para um certo $A > 0$. Concluímos que K é um operador contínuo. Portanto, T é contínuo.

$\square$

Seja M o subespaço vetorial gerado pela órbita de v_0 com respeito ao operador T dado em (8.7), isto é, $M = \{p(T)v_0;\ p \text{ é um polinômio}\}$. Segue imediatamente de (8.3) e (8.4) que $M = E$.

Proposição 8.3. Seja $T : X \longrightarrow X$ como na Proposição 8.2. Então T é hipercíclico.

Demonstração. De (8.2) e (8.4), temos que $M \subset \overline{\text{orb}(v_0, T)}$. Com isso, o resultado segue do fato de que $M = E$.

$\square$

Definimos um produto em $E = M$ da seguinte forma

$$p(T)v_0 \cdot q(T)v_0 := (pq)(T)v_0,$$

onde pq denota o produto usual de funções definidas no corpo de escalares $\mathbb{K}$. Vamos construir um funcional linear não nulo $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que a aplicação $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ é contínua em $E \times E$.

Lema 8.4. Seja $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear. Se $\sum_{\substack{r=0\\s=0}}^{\infty} |\phi(v_r \cdot v_s)| < \infty$, então a aplicação $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ é contínua em $E \times E$.

Demonstração. Sejam $x = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r v_r$ e $y = \sum_{s=0}^{m} \beta_s v_s$ pertencentes a E arbitrários. Temos que

$$|\phi(x \cdot y)| \leq \sum_{\substack{1 \leq r \leq n\\1 \leq s \leq m}} |\alpha_r||\beta_s||\phi(v_r \cdot v_s)| \leq \sum_{\substack{r=0\\s=0}}^{\infty} |\alpha_r||\beta_s||\phi(v_r \cdot v_s)| \leq C^2 \sum_{\substack{r=0\\s=0}}^{\infty} |\phi(v_r \cdot v_s)|\|x\|\|y\|$$

para todo $(x, y) \in E \times E$, onde $C = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \|v_i^*\|$.

$\square$

Fixados $r, s \in \mathbb{N}$ com $r \leq s$ e escrevendo $r = b_k + u$, $s = b_l + v$ com $0 \leq u < b_{k+1} - b_k$ e $0 \leq v < b_{l+1} - b_l$, de (8.4) e (8.5), temos que

$$v_r = \frac{k+1}{w_{b_k+1} \cdots w_{b_k+u}} (T^{b_k} - p_k(T))T^u v_0,$$

e

$$v_s = \frac{l+1}{w_{b_l+1} \cdots w_{b_l+v}} (T^{b_l} - p_l(T))T^v v_0.$$

Portanto, para qualquer funcional linear $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$|\phi(v_r \cdot v_s)| \leq \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} |\phi(y_{(k,u)(l,v)})|,$$

onde

$$y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_k} - p_k(T))(T^{b_l} - p_l(T))T^{u+v}v_0.$$

Denotando $\Lambda := \{(m,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ t < b_{m+1} - b_m\}$, construiremos um funcional linear não nulo $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que a série

$$\sum_{((k,u),(l,v)) \in \Lambda \times \Lambda} \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} |\phi(y_{(k,u)(l,v)})|$$

converge. Como o próximo lema mostra, a requerida propriedade será cumprida se definirmos ϕ como segue. Definimos $\phi(v_0) = 1$ e $\phi(T^i v_0) = 0$ se $1 \leq i < b_1$. Se $b_n \leq i < b_{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\phi(T^i v_0) = \begin{cases} \phi(p_n(T)T^{i-b_n}v_0); & b_n \leq i < \dfrac{3b_n}{2} \text{ ou } 2b_n \leq i < \dfrac{5b_n}{2} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\phi(T^i v_0)$ está bem definido se $\phi(T^j v_0)$ é conhecido para $j < i$, pois, como, $\mathrm{grau}(p_n) + i - b_n < i$, $p_n(T)T^{i-b_n}v_0$ pertence ao subespaço vetorial gerado por $\{T^n v_0;\ 0 \leq n < i\}$.

Lema 8.5. Para todo $k \in \{0, \ldots, l\}$ segue que

(a) $\phi(y_{(k,u)(l,v)}) = 0$, se $u + v < \dfrac{b_l}{6}$.

(b) $|\phi(y_{(k,u)(l,v)})| \leq B_l$,

onde $B_l := \max\limits_{0 \leq j \leq l} \{(1 + |p_j|_1)^2\} \prod\limits_{0 < j \leq l+1} (\max\{1, |p_j|_1\})^2$.

Demonstração. Para provar (a), observe primeiro que, pela definição de ϕ, temos

$$\phi((T^{b_k} - p_k(T))z) = 0$$

sempre que z pertence ao subespaço vetorial gerado por

$$\left\{T^n v_0;\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n < \frac{b_k}{2} \text{ ou } b_k \leq n < \frac{3b_k}{2}\right\}.$$

Agora, suponha que $u + v < \dfrac{b_l}{6}$ $(l \in \mathbb{N})$.

Quando $k = l$, escrevemos

$$y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_k} - p_k(T))T^{b_k+u+v}v_0 - (T^{b_k} - p_k(T))p_k(T)T^{u+v}v_0.$$

Como $b_k + u + v < \dfrac{7b_k}{6} < \dfrac{3b_k}{2}$, o vetor $T^{b_k+u+v}v_0$ pertence ao subespaço vetorial gerado por $\left\{T^n v_0;\ n \in \mathbb{N}, b_k \leq n < \dfrac{3b_k}{2}\right\}$. E como $\operatorname{grau}(p_k)+u+v < \dfrac{b_k}{2}$, o vetor $p_k(T)T^{u+v}v_0$ pertence ao subespaço vetorial gerado por $\left\{T^n v_0;\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq n < \dfrac{b_k}{2}\right\}$. Portanto, $\phi(y_{(k,u)(l,v)}) = 0$.

Quando $k < l$, escrevemos

$$y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_l} - p_l(T))(T^{b_k} - p_k(T))T^{u+v}v_0.$$

Como $l > k$, temos que $l = k+m$ para algum $m \geq 1$, donde $b_l = 3^l = 3^m \times 3^k \geq 3 \times 3^k = 3b_k$. Com isso, $b_k + u + v < \dfrac{b_l}{3} + \dfrac{b_l}{6} = \dfrac{b_l}{2}$. Portanto, $(T^{b_k} - p_k(T))T^{u+v}v_0$ pertence ao subespaço vetorial gerado por $\left\{T^n v_0;\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq n < \dfrac{b_l}{2}\right\}$. Logo, $\phi(y_{(k,u)(l,v)}) = 0$.

Para provar (b), observamos primeiro que se q é um polinômio, então

$$|\phi(q(T)v_0)| \leq |q|_1 \max_{0 \leq j \leq \operatorname{grau}(q)} |\phi(T^j v_0)|. \tag{8.8}$$

Afirmamos que

$$\max_{0 \leq i < b_n} |\phi(T^i v_0)| \leq \prod_{0<j<n} \left(\max\{1, |p_j|_1\}\right)^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{8.9}$$

De fato, seja $K_n := \prod_{0<j<n} \left(\max\{1, |p_j|_1\}\right)^2$. O resultado é verdadeiro para $n = 0$ e $n = 1$, se considerarmos que o produto de 0 fatores é igual a 1. Suponha que a desigualdade é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\max_{b_n \leq i < 2b_n} |\phi(T^i v_0)| &= \max_{b_n \leq i < \frac{3b_n}{2}} |\phi(p_n(T)T^{i-b_n}v_0)| \\
&\leq |p_n|_1 \max_{0 \leq j < \frac{b_n}{2} + \operatorname{grau}(p_n)} |\phi(T^j v_0)| \\
&\leq |p_n|_1 K_n,
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{b_n}{2} + \mathrm{grau}(p_n) < b_n$ (8.10). Similarmente

$$\max_{2b_n \le i < b_{n+1}} |\phi(T^i v_0)| = \max_{2b_n \le i < \frac{5b_n}{2}} |\phi(p_n(T)T^{i-b_n} v_0)| \le |p_n|_1 \max_{b_n \le j < 2b_n} |\phi(T^j v_0)|,$$

pois $\mathrm{grau}(p_n) < \dfrac{b_n}{3}$ (8.10). Com isso,

$$\begin{aligned}
\max_{0 \le i < b_{n+1}} |\phi(T^i v_0)| &= \max\left\{ \max_{0 \le i < b_n} |\phi(T^i v_0)|,\ \max_{b_n \le i < 2b_n} |\phi(T^i v_0)|,\ \max_{2b_n \le i < b_{n+1}} |\phi(T^i v_0)| \right\} \\
&\le \max\left\{ k_n,\ |p_n|_1 k_n,\ |p_n|_1^2 k_n \right\} \\
&= K_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por indução, segue (8.9).

O vetor $y_{(k,u)(l,v)}$ tem a forma $q(T)v_0$, onde q é um polinômio tal que $\mathrm{grau}(q) \le b_k + b_l + u + v < 6b_l < b_{l+2}$ e $|q|_1 \le (1 + |p_l|_1)(1 + |p_k|_1)$. Portanto, o resultado segue de (8.8) e (8.9).

□

Lema 8.6. Existe uma sequência de números positivos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendendo ao infinito tal que se $\mathrm{grau}(p_n) < t_n$ e $|p_n|_1 \le t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, então a aplicação $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ é contínua em $E \times E$.

Demonstração. Do Lema 8.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=0 \\ s=0}}^{\infty} |\phi(v_r \cdot v_s)| &\le \sum_{(k,u),(l,v) \in \Lambda\times\Lambda} \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} |\phi(y_{(k,u)(l,v)})| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \ge k} (l+1)^2 B_l \sum_{u+v \ge \frac{b_l}{6}} \frac{1}{2^{u+v}}.
\end{aligned}$$

Seja $(a_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de números positivos tendendo ao infinito tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \ge k} (l+1)^2 a_l \sum_{u+v \ge \frac{b_l}{6}} \frac{1}{2^{u+v}} < \infty.$$

Da definição de B_l, é claro que podemos encontrar uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendendo ao infinito tal que, se $\mathrm{grau}(p_n) < t_n$ e $|p_n|_1 \le t_n$, então $B_l \le a_l$, para todo $l \in \mathbb{N}_0$. Pelo Lema 8.4, está concluída a demonstração.

$\square$

Observamos que, claramente, podemos escolher na definição de T uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo (8.2), as hipóteses da Proposição 8.2 e as hipóteses do Lema 8.6.

Proposição 8.7. O operador $T : X \longrightarrow X$, dado em (8.7) com a sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo (8.2), as hipóteses da Proposição 8.2 e as hipóteses do Lema 8.6, não satisfaz o critério de hiperciclicidade.

Demonstração. Como a aplicação $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ é contínua e ϕ é linear,

$$A := \{(x, y);\ |\phi(x \cdot y)| < 1\} \text{ e } B := \{(x, y);\ |\phi(x \cdot y)| > 1\}$$

são subconjuntos abertos não vazios de $M \times M$. Além disso,

$$\{x \cdot y;\ (x, y) \in A\} \cap \{x \cdot y;\ (x, y) \in B\} = \emptyset. \tag{8.10}$$

Sejam $U_1, V_1, U_2, V_2 \subset X$ abertos não vazios tais que $(U_1 \times V_2) \cap (\mathrm{orb}(v_0, T) \times \mathrm{orb}(v_0, T)) \subset A$ e $(V_1 \times U_2) \cap (\mathrm{orb}(v_0, T) \times \mathrm{orb}(v_0, T)) \subset B$. De (8.10),

$$\{m + n;\ T^m v_0 \in U_1 \text{ e } T^n v_0 \in V_2\} \cap \{k + l;\ T^k v_0 \in V_1 \text{ e } T^l v_0 \in U_2\} = \emptyset.$$

Logo $\{k - m;\ T^k v_0 \in V_1 \text{ e } T^m v_0 \in U_1\} \cap \{n - l;\ T^n v_0 \in V_2 \text{ e } T^l v_0 \in U_2\} = \emptyset$. Que implica

$$\{r;\ T^r(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset\} \cap \{s;\ T^s(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset\} = \emptyset. \tag{8.11}$$

De fato, se $r \in \mathbb{N}_0$ é tal que $T^r(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, então $W := U_1 \cap (T^r)^{-1}(V_1)$ é aberto não vazio. Logo, existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^p v_0 \in W$, donde $T^{r+p} v_0 \in V_1$ e portanto $r \in \{k - m;\ T^k v_0 \in V_1 \text{ e } T^m v_0 \in U_1\}$. Analogamente, se $T^s(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, então $s \in \{n - l;\ T^n v_0 \in V_2 \text{ e } T^l v_0 \in U_2\}$. De (8.11), temos que $T \times T$ não é hipercíclico. Logo, T não satisfaz o critério de hiperciclicidade. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. A. Albanese, *Construction of operators with prescribed orbits in Fréchet spaces with a continuous norm*, Math. Scand., a aparecer.

[2] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383.

[3] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384-390.

[4] F. Bayart e É. Matheron. *Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces*. J. Funct. Anal. **250** (2007), 426-441.

[5] F. Bayart e É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] B. Beauzamy, *Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l'exemple de P. Enflo*, Integral Equations Operator Theory **8** (1985), 314-384.

[7] L. Bernal-González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1003-1010.

[8] J. Bès e K. C. Chan, *Denseness of hypercyclic operators on a Fréchet space*, Houston J. Math. **29** (2003), 195-206.

[9] J. Bès e K. C. Chan, *Approximation by chaotic operators and by conjugate classes*, J. Math. Anal. Appl. **284** (2003), 206-212.

[10] J. Bès e A. Peris, *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 94-112.

[11] J. Bès e A. Peris, *Disjointness in hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 297-315.

[12] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les functions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[13] J. Bonet e A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 587-595.

[14] K. C. Chan, *The density of hypercyclic operators on a Hilbert space*, J. Operator Theory **47** (2002), 131-143.

[15] M. De La Rosa e C. Read, *A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic*, J. Operator Theory **61** (2009), 369-380.

[16] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math. **158** (1987), 213-313.

[17] R. M. Gethner e J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281-288.

[18] G. Godefroy e J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[19] S. Grivaux, *Construction of operators with prescribed behaviour*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 291-299.

[20] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 345-381.

[21] K.-G. Grosse-Erdmann e A. Peris, *Linear Chaos*, Springer, London, 2011.

[22] D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi e P. Rosenthal, *Most similarity orbits are strongly dense*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 250-252.

[23] I. Halperin, C. Kitai e P. Rosenthal, *On orbits of linear operators*, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), 561-565.

[24] D. A. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[25] D. A. Herrero, *Hypercyclic operators and chaos*, J. Operator Theory **28** (1992), 93-103.

[26] C. Kitai, *Invariant Closed Sets for Linear Operators*, Thesis, Univ. of Toronto, Toronto, 1982.

[27] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952/53), 72-87.

[28] R. E. Megginson, *An Introducion to Banach Space Theory*, Graduate text in mathematics 183, Springer, New York, 1998.

[29] G. Metafune and V. B. Moscatelli, *Dense subspaces with continuous norm in Fréchet spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **37** (1989), 477-479.

[30] C. J. Read, *A short proof concerning the invariant subspace problem*, J. London Math. Soc. **34** (1986), 335-348.

[31] C. J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces*. II. Hypercyclic operators, Israel J. Math. **63** (1988), 1-40.

[32] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17-22.

[33] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[34] W. Rudin, *Functional Analysis*, second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

[35] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[36] P. Y. Wu, *Sums and products of cyclic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1053-1063.