Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Víctor Arturo Martínez León

Integrais primeiras e estabilidade para folheações complexas

Tese
Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

Integrais primeiras e estabilidade para folheações complexas

Víctor Arturo Martínez León

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

CIP - Catalogação na Publicação

L579i

Leon, Victor Arturo Martinez
Integrais Primeiras e Estabilidade para Folheações Complexas / Victor Arturo Martinez Leon. - Rio de Janeiro, 2016.
82 f.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2016.

1. Estabilidade de Lyapunov. 2. Singularidade. 3. Campos de Vetores. 4. Folheação Holomorfa. I. Scárdua, Bruno César Azevedo, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Integrais primeiras e estabilidade para folheações complexas

Víctor Arturo Martínez León

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Bruno César Azevedo Scárdua - IM/UFRJ

Prof. Albetã Costa Mafra - IM/UFRJ

Prof. Walter Teofilo Huaraca Vargas - DMA/UFV

Prof. Hernán Maycol Falla Luza - IME/UFF

Prof. Raimundo Nonato Araújo dos Santos - ICMC/USP

Suplente, Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza - IM/UFRJ

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

In memoriam de Raúl Moisés Izaguirre Maguiña.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por mais uma conquista em minha vida.

A meus pais Ronald Huamani e Elizabeth Leon, por terem sempre incentivado a estudar e por terem acreditado em mim.

A minha esposa Josilda, por ter me dado carinho, força e motivação necessária para poder concluir este trabalho.

A meus amigos Daniel Reis, Rafael Nobrega, José Molina, Abraham Muñoz, Miguel Zamora, Sergio Romaña, Mitchael Plaza e Diego Rodriguez pela amizade e por terem me ajudado em distintos momentos da minha formação acadêmica, sou muito grato por isto.

Aos professores Ademir Pazoto, Maria Jose Pacifico e Bruno Scárdua, por terem me dado a oportunidade de concluir o doutorado.

Aos professores Walter Huaraca Vargas, Raimundo Nonato Araujo dos Santos, Hernan Maycol Falla Luza e Albetã Costa Mafra, por aceitarem participar da banca.

A PEC-PG (CAPES) pelo apoio financeiro.

Finalmente quero agradecer especialmente a meu orientador Bruno Scárdua, pela orientação, dedicação, paciência e por ter contribuído em minha formação matemática nesses 6 anos de estudo (mestrado e doutorado) com quem aprendi muito. Pelas muitas conversas fundamentais em todo este tempo, devo dizer que cada conversa que tive com ele fiquei sempre admirado pelos seus conhecimentos. Além disso ele é um grande amigo e sempre tive seu apoio em todos os momentos que precisei.

Resumo

Esta tese tem como objetivo o estudo das folheações que possuem integral primeira racional e estabilidade da singularidade de um campo vetorial holomorfo.

Primeiramente, apresentamos uma família de exemplos interessantes de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 2)$ nas quais podemos explicitar a integral primeira racional. Em dimensão dois, os elementos dessa família possuem singularidades do tipo Poincaré racional positivo no hiperplano do infinito e em dimensões mais altas, se consideramos uma folheação de codimensão um que possui o hiperplano do infinito invariante e suponhamos que a interseção deste hiperplano com o conjunto singular da folheação é uma componente de Kupka irredutível lisa nós provamos que possui integral primeira meromorfa.

Em segundo lugar, consideremos uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 2)$ que tem um hiperplano invariante o qual intersecta o conjunto singular da folheação numa hipersuperfície irredutível cujo grau é potência de um primo. No caso em que o grupo de holonomia do complementar desta hipersuperfície no conjunto singular não possua elementos tangentes à identidade nós provamos que a folheação possui uma integral primeira racional.

Finalmente, definimos uma noção de estabilidade à Lyapunov para o germe de um campo de vetores holomorfo com singularidade isolada neste ponto. Para tal germe, chamado de singularidade **L-estável**, provamos que, ou a correspondente folheação admite uma integral primeira holomorfa, ou é uma folheação logarítmica real. Por outro lado, para folheações de codimensão um definidas numa variedade complexa, é provado que os grupos de holonomia das folhas L-estáveis são abelianos, num certo tipo adequado. Isto implica a existência de uma forma meromorfa fechada que descreve a folheação em uma vizinhança das folhas L-estáveis. Concluímos considerando o caso de folheações no plano projetivo complexo. Provamos que uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$ adimitindo uma curva algébrica invariante L-estável é o pull-back por alguma aplicação polinomial de uma folheação logaritmica real.

Palavras chaves: Estabilidade de Lyapunov, Singularidade, Campos de Vetores, Folheação Holomorfa.

Abstract

The aim of this thesis is the study of foliations having a rational first integral and the stability of the singularity of a holomorphic vector field.

We begin by showing a family of interesting examples of codimension one foliations in $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 2)$ which we can make explicit the rational first integral. In dimension two, the elements of this family have rational positive Poincaré singularities type in the hyperplane at infinite and in higher dimensions, if we consider a codimension one foliation that has the hyperplane at infinity invariant and suppose that the intersection of this hyperplane with the singular set of the foliation is a flat irreducible Kupka component, we prove that it admits a meromorphic first integral.

Then, we consider a codimension one foliation in $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 2)$ that has an invariant hyperplane which intersects the singular set of the foliation in an irreducible hypersurface whose degree is a power of a prime. In the case where the holonomy group of the complement of this hypersurface in the singular set does not have elements tangent to the identity we prove that the foliation has a rational first integral.

Finally, we define a notion of stability to Lyapunov for the germ of a holomorphic vector field with isolated singularity at this point. For such a germ, called L-stable singularity, we prove that either the corresponding foliation admits a holomorphic first integral, or it is a real logarithmic foliation. On the other hand, for codimension one foliations defined over a complex manifold, it is proved that the holonomy groups of L-stable leaves are abelian, in a certain suitable type. This implies the existence of a meromorphic closed form which describes the foliation in a neighborhood of the L-stable leaves. We conclude considering the case of foliations in the complex projective plane. We prove that a foliation in $\mathbb{C}P(2)$ admitting a L-stable invariant algebraic curve is the pull-back by some polynomial application of a real logarithmic foliation.

Keywords: Lyapunov Stability, Singularity, Vector Fields, Holomorphic Foliation.

Súmario

1 Folheações Holomorfas **8**
1.1 Definições básicas 8
1.1.1 Folheações em superfícies 11
1.1.2 Folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ 15
1.1.3 Singularidades de Kupka 16
1.1.4 Estruturas transversais de folheações 17
1.2 Redução de singularidades em dimensão dois 20
1.3 Holonomia e Estabilidade 21
1.3.1 Holonomia 21
1.3.2 Estabilidade de Reeb e Brunella 25
1.3.3 Holonomia Virtual 25
1.4 O teorema global de extensão 26
1.5 O teorema de Lefschetz e Deligne - Fulton 28

2 Exemplos interessantes de Folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(m)$ **29**
2.1 Folheações holomorfas de codimensão um em $\mathbb{C}P(2)$ com hiperplano do infinito invariante 29
2.2 Folheações holomorfas de codimensão um em $\mathbb{C}P(m)$, $m \geq 3$, com hiperplano do infinito invariante 39

3 Um resultado de existência de integral primeira racional **54**
3.1 Esboço da demonstração do Teorema de Cerveau - Loray 54
3.2 Demonstração do Teorema 3.0.1 57

4 Campos de vetores holomorfos de singularidades estáveis **60**
4.1 Estabilidade de Lyapunov 60
4.2 Grupos de difeomorfismos estáveis 62
4.2.1 Singularidades L-estáveis 63
4.2.2 Caso não-degenerado (irredútivel) 63
4.3 Redução de singularidades estáveis 64
4.4 Germes de folheações L-estáveis 65
4.5 Quadro Global 70
4.5.1 Folhas compactas L-estáveis 70
4.6 Folheações no plano projetivo 71

Introdução

Caso Global

Consideremos um germe de folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão um, singular na origem de $\mathbb{C}^n$. Um tal objeto é definido pelo germe de uma 1-forma holomorfa integrável, isto é,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i; \;\; a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0), \;\; \text{mdc}(a_i) = 1$$

satisfazendo a condição de Frobenius

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

O conjunto singular é definido por

$$\text{sing}\mathcal{F} = \text{sing}\ \omega := \{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\}$$

visivelmente codim sing$\mathcal{F} \geq 2$.

Uma integral primeira holomorfa de $\mathcal{F}$ é um elemento $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ não constante tal que $\omega \wedge df = 0$, ou equivalentemente, de tal modo que as folhas de $\mathcal{F}$ sejam as componentes conexas das fibras de f.

Quando sing$\mathcal{F}$ é pequeno, mas precisamente quando codim sing$\mathcal{F} \geq 3$, $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira holomorfa, isto é o Teorema de Frobenius singular de B. Malgrange [22].

O cone tangente $C(\mathcal{F})$ é definido da seguinte maneira, consideremos o blow-up $E_n : \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n$, onde

$$\widetilde{\mathbb{C}^n} := \{(z, D) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1);\ z \in D\}$$

e $E_n : (z, D) \mapsto z$. Por definição $C(\mathcal{F})$ é interseção do conjunto sing $E_n^{-1}(\mathcal{F})$ e do divisor excepcional $E_n^{-1}(0) \cong \mathbb{C}P(n-1)$; a qual é uma hipersuperfície projetiva (não reduzida).

Definimos nossa folheação $\mathcal{F}$ por ω como acima e desenvolvemos

$$\omega = \omega_\nu + \cdots,$$

onde $\omega_\nu = \sum_{i=1}^{n} \text{In}_\nu(a_i) dx_i$ é a parte inicial de ω a qual é uma 1-forma homogênea integrável de grau ν.

Introduzimos o campo de Euler $R = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e consideremos o polinômio

$$P_{\nu+1} = \omega_\nu(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{In}_\nu(a_i),$$

dizemos que ω é não dicrítica se este polinômio não é identicamente nulo. Neste caso, $E_n^{-1}(0) - C(\mathcal{F})$ é uma folha e $C(\mathcal{F})$ é precisamente a hipersuperfície projetiva ($P_{\nu+1} = 0$).

Dizemos que $\mathcal{F}$ (não dicrítico) tem cone tangente irredutível se o polinômio $P_{\nu+1}$ é irredutível.

Em dimensão dois, uma folheação tem cone tangente irredutível se e somente se ela é não singular (ele possui uma integral primeira). Claramente em dimensão > 2 perdemos esta equivalência, mas colocando condições sobre o cone tangente Cerveau e Loray mostraram o seguinte teorema:

Teorema 1. (Teorema 1 em [11]) Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação não dicrítica na origem de $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que o cone tangente $C(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ é irredutível de grau potência de um primo. Então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira holomorfa.

Pensando o divisor excepcional que define o cone tangente como um hiperplano invariante motivou a seguinte pergunta: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, que possui um hiperplano invariante. Se este hiperplano interseta o conjunto singular obtendo uma hipersuperfíce irredutível de grau potência de um primo então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional?

Provamos o seguinte resultado:

Teorema 2. (Teorema 3.0.1 do capítulo 3) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, que tem um hiperplano H invariante. Suponha que $S = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap H$ é um hipersuperfície irredutível em H de grau potencia de um primo. Se $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, H \setminus S)$ possui um elemento não tangente à identidade então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional.

Na procura pela resposta da pergunta anterior surgiram outras perguntas por exemplo: Se uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, possui um hiperplano invariante então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional?

Assim encontramos uma família de exemplos interessantes de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ ($n \geq 2$) nas quais podemos explicitar a integral primeira racional. Em resumo, provamos o seguintes resultados:

Proposição 1. (Proposição 2.1.1 do capítulo 2) Sejam $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i, j \leq n$. Consideremos a 1-forma homogênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^3$dada por

$$\begin{aligned}\Omega = & \left[-x_1 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} - x_2 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_0 \\ & + x_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right) dx_1 + x_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right) dx_2\end{aligned}$$

Se os coeficientes satisfazem as condições

$$a_{ij} = \frac{i+1}{j} b_{i+1\, j-1} \tag{1}$$

para todo $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k+1$ com $i + j = k + 1$ onde $1 \leq k \leq n$ então a condição (1) garante que Ω é uma 1-forma integrável com $i_{R_3}(\Omega) = 0$, a qual possui uma integral primeira racional $\dfrac{Q}{x_0^{n+1}}$ onde

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k} + x_0^{n+1} \ .$$

Esta 1-forma Ω induz uma folheação de codimensão um de grau n em $\mathbb{C}P(2)$ que tem o hiperplano do infinito invariante e possui uma integral primeira racional explícita.

Proposição 2. (Proposição 2.1.2 do capítulo 2) Nas condições da Proposição 1, suponhamos que $a_{n0} \neq 0$ e $b_{0n} \neq 0$, então a folheação de codimensão um induzida em $\mathbb{C}P(2)$ possui singularidades do tipo Poincaré racional no hiperplano do infinito.

Proposição 3. (Proposição 2.2.1 do capítulo 2) Sejam $a_{i,Q} = a_{i,(j_1 j_2 \ldots j_m)} \in \mathbb{C}$, para todo $0 \leq i \leq m$ e para todo $0 \leq |Q| \leq n$. Consideremos a 1-forma homogênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^{m+1}$

$$\Omega = \left[-\sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} \right) \right] dx_0 + \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j+1} \right] dx_i$$

onde $X^Q = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m}$, $|Q| = j_1 + j_2 + \ldots + j_m$, $j_i \in \mathbb{Z}_0^+$. Se os coeficientes satisfazem as condições

$$j_k a_{i,Q} = (1 + j_i) a_{k, Q_{j_k}^{j_i}} \tag{2}$$

onde $Q_{j_k}^{j_i} = (j_1, \ldots, j_i + 1, \ldots, j_k - 1, \ldots, j_m)$, sempre que $|Q| = j$ e $1 \leq i < k \leq m$ então a condição (2) garante que Ω é uma 1-forma integrável com $i_{R_{m+1}}(\Omega) = 0$, a qual possui uma integral primeira racional $\dfrac{G}{x_0^{n+1}}$ onde

$$G = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_i|=j} \frac{a_{i,Q_i}}{j_1 + 1} X^{(Q_i)^{j_i}} \right) x_0^{n-j} \right) + x_0^{n+1} \ ,$$

onde

$$Q_0 = Q \quad \text{e} \quad Q_i = (j_1, \ldots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \ldots, j_m) \text{ para todo } 1 \leq i \leq m-1.$$

Esta 1-forma Ω induz uma folheação de codimensão um de grau n em $\mathbb{C}P(m)$ que tem o hiperplano do infinito invariante e possui uma integral primeira racional explícita.

Proposição 4. (Proposição 2.2.2 do capítulo 2) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$, que tem algum hiperplano invariante. Suponhamos que a interseção deste hiperplano com o conjunto singular de $\mathcal{F}$ é uma componente de Kupka irredutível lisa então possui integral primeira racional.

Caso local

Agora abordamos o tema da estabilidade para uma singularidade de um campo vetorial holomorfo em dimensão dois complexa. Nós adotamos o ponto de vista das equações diferenciais ordinárias. Mais precisamente, nós introduzimos uma noção natural de singularidade estável inspirado na noção de Lyapunov a qual definiremos brevemente:

Consideremos um campo de vetores X de classe C^1 definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e o sistema autônomo

$$x' = X(x) \tag{$*$}$$

Uma solução φ de $(*)$ definida para $t \geq 0$ diz-se **estável** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de $(*)$ e $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$ então $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso, existir $\delta_1 > 0$ tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ implica $\lim_{t \to +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, então φ diz-se **assintoticamente estável**.

Um ponto singular x_0 do sistema autônomo $(*)$ é **Lyapunov estável** quando para toda vizinhança U de x_0 existe uma vizinhança V de x_0 tal que toda solução φ de $(*)$ com $\varphi(0) \in V$ esta definida para $t \geq 0$ e $\varphi(t) \in U$ para todo $t \geq 0$. Se além disso $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = x_0$, diminuindo V se necessário, então x_0 é **assintoticamente estável**.

Assim tendo em conta o caráter holomorfo, existência de uma separatriz (ver [7]) e a não existência de soluções limitadas conseguimos introduzir uma noção natural de singularidade estável. Na sequência consideramos o quadro global, por uso da teoria de folheações.

Em dimensão dois, há uma ligação natural entre singularidades de campos de vetores e germes de folheações holomorfas (ver [27]). Portanto, nos referimos a um **germe de folheação holomorfa** $\mathcal{F}$ na origem $0 \in \mathbb{C}^2$, como induzida por um par (X, U) onde X é um campo vetorial holomorfo definido numa vizinhança U da origem $0 \in \mathbb{C}^2$, com singularidade isolada na origem $X(0) = 0$. Lembramos que uma **separatriz** é uma curva analítica irredutível invariante que contem a singularidade. Cada singularidade admite uma separatriz (ver [7]). Ao longo deste trabalho só vamos considerar singularidades com um número finito de separatrizes chamadas **não dicríticas**. Neste caso, para qualquer vizinhança U suficientemente pequena da origem, o conjunto de separatrizes $Sep(\mathcal{F}) \cap U$ é um união finita não vazia de curvas analíticas todas elas contendo a origem. Inspirado pelo Teorema de estabilidade local de Reeb para folheações (ver [4]) e pela noção clássica de estabilidade (no sentido de Lyapunov) para as soluções de uma equação diferencial ordinária real, introduzimos a seguinte noção. Dizemos que um germe $\mathcal{F}$ é **L-estável**, se é não-dicritico e, para qualquer vizinhança W de $\mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ existe uma vizinhança $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}) \subset V \subset W$ cujo saturado por $\mathcal{F}$ é contida em W. Nós referimos à Definição 4.2.2 para mais detalhes. Devemos então caraterizar os germes de folheações (L-estáveis). Um germe $\mathcal{F}$ é uma **folheação logaritmica real**, se é definida por uma 1-forma meromorfa fechada

$$\Omega = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

para alguns aplicações holomorfas $f_j \in \mathcal{O}_2$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Assim provamos:

Teorema 3. (Teorema 4.0.1 do capítulo 4) Seja $\mathcal{F}$ um germe de singularidade L-estável em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então temos duas possibilidades:

(1) $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa.

(2) $\mathcal{F}$ é uma folheação logarítmica real singular.

Corolário 1. (Corolário 4.0.1 do capítulo 4) Um germe de folheação não dicrítica na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ admite integral primeira holomorfa se, e somente se, é L-estável e tem alguma folha aberta que não é recorrente. Por exemplo, se alguma folha aberta é fechada fora do conjunto de separatrizes.

Estes resultados estão relacionados com o resultado principal de Mattei-Moussu [16] onde é dada uma caracterização topológica de germes admitindo uma integral primeira holomorfa. Há também alguns pontos de tangência com algumas questões em R. Moussu [19] são encontrados. No entanto, Moussu aborda (Conjectura 3) o caso onde as folhas não contidas nas separatrices, não se acumulam no ponto singular, que é uma situação completamente diferente.

Por outro lado, para folheações de codimensão um definidas numa variedade complexa.

Consideremos $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa na variedade complexa M. Dizemos que uma folha $L_0 \in \mathcal{F}$ é **L-estável** se dada uma vizinhança qualquer W de L_0 em M, existe

uma vizinhança $L_0 \subset V \subset W$ tal que o saturado de V por $\mathcal{F}$ é contida em W. Nesse sentido provamos:

Teorema 4. (Teorema 4.5.1 do capítulo 4) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um definida numa variedade complexa M. Seja $L_0 \in \mathcal{F}$ uma folha compacta que é L-estável. Então temos as seguintes possibilidades:

(i) L_0 tem holonomia finita.

(ii) L_0 tem holonomia tipo círculo (isto é, um grupo abeliano que contem uma aplicação não ressonante linearizável).

No primeiro caso, se M é compacta então todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito. No segundo caso, existe uma vizinhança $\mathcal{F}$-saturada de L_0 onde $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma meromorfa fechada Ω com conjunto de polos de ordem um, $(\Omega)_\infty = L_0$. Neste caso, se $M \setminus L_0$ é Stein, então Ω estende-se até M, a uma 1-forma meromorfa fechada com polos simples, $(\Omega)_\infty = L_0$. Em particular, todas as outras folhas de $\mathcal{F}$ tem holonomia trivial.

Finalmente consideremos agora a noção de L-estabilidade para o caso de folheações algébricas em espaços projetivos complexos. Seja X um campo vetorial polinomial em duas variáveis complexas, com singularidades isoladas. Denotaremos $\mathrm{sing}X \subset \mathbb{C}^2$ ao conjunto de pontos singulares de X. Uma curva integral $l_0 \subset \mathbb{C}^2$ de X é chamada **algébrica** se estiver contida em uma curva algébrica S: $l_0 \subset S \subset \mathbb{C}^2$. Neste caso o conjunto limite $\overline{l_0} \setminus l_0 \subset \mathbb{C}P(2)$ é discreto. Em particular, $l_0 \subset \mathbb{C}^2$ é fechado em $\mathbb{C}^2 \setminus \mathrm{sing}X$. Denotemos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ a folheação holomorfa de dimensão um com singularidade em $\mathbb{C}P(2)$ cujas folhas em $\mathbb{C}^2$ são curvas integrais não singulares de X. Reciprocamente, qualquer folheação holomorfa com singularidades $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ é obtido desta maneira. O conjunto de singularidade da folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ é denotado por $\mathrm{sing}\mathcal{F}$. Seja $S \subset \mathbb{C}P(2)$ uma curva algébrica invariante. Assumimos que $\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$ é não dicritico. Consideremos o conjunto $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S) \subset \mathbb{C}P(2)$, união de todas as folhas contendo separatrizes de $\mathcal{F}$, atraves de pontos singulares $p \in S \cap \mathrm{sing}\mathcal{F}$, e não contidos em S. Desde que $\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$ é não dicritico, qualquer vizinhança suficientemente pequena $U \subset \mathbb{C}P(2)$ **é adaptado** para $\mathcal{F}$ e S, no sentido que $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S) \cap U$ é um subconjunto analítico de dimensão um de U.

Definição 1. Seja $\mathcal{F}, S$ como acima com $S \subset U \subset \mathbb{C}P(2)$ adaptado para S e $\mathcal{F}$. Dizemos que S é **L-estável em relação a $\mathcal{F}$** se ($\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$ é não dicritico e) para qualquer vizinhança $W \subset U$ de $S \cup \mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S)$ existe uma vizinhança suficientemente pequena $S \cup \mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S) \subset V \subset W$ cujo saturado por $\mathcal{F}$ em U está contido em W. Em poucas palavras, se uma folha de $\mathcal{F}$ em U deixa a vizinhança W, então ela não intersecta V.

Veremos que esse comportamento de $\mathcal{F}$ numa vizinhança de S determina a sua classificação final.

Teorema 5. (Teorema 4.0.2 do capítulo 4) Seja X um campo vetorial polinômial em $\mathbb{C}^2$ e $S \subset \mathbb{C}P(2)$ uma curva algébrica invariante. Suponha que S é L-estável em relação a X. Então $\mathcal{F}(X)$ é uma folheação logaritmica real, isto é, dada por uma 1-forma logaritmica $\Omega = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j df_j/f_j$ para algumas funções racionais f_j e alguns coeficientes reais $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Organização do Texto:

No Capítulo 1, apresentamos as definições básicas e resultados de folheações holomorfas no caso local e global.

Na seção 1 do Capítulo 2, apresentamos a família de exemplos interessantes de folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(2)$ que possuem integral primeira racional explícita, aqui provamos também que sob certas condições nos coeficientes, os elementos da família possuem singularidades no hiperplano do infinito do tipo Poincaré racional positivo. Na seção 2 do capítulo 2, estendemos os exemplos interessantes para folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ $(n \geq 3)$ as quais também possuem integral primeira racional explícita. Provamos também nesta seção a Proposição 4.

Na seção 1 do Capítulo 3, damos um esboço do Teorema 3.0.2. Na seção 2 do Capítulo 3, provamos o nosso Teorema 2.

Na seção 1 do Capítulo 4, relembramos a definição de Estabilidade de Lyapunov. Na seção 2 do Capítulo 4, introduzimos as definições L-estabilidade e provamos alguns lemas que serão ferramentas importantes. Na seção 3 do Capítulo 4, damos a definição de L-divisor estável e estudamos a redução de singularidades estáveis. Na seção 5 do Capítulo 4, provamos o Teorema 3 e o Corolário 1. Na seção 5 do Capítulo 4, vemos o quadro global e provamos o Teorema 4. Finalmente, na seção 6 do Capítulo 4, introduzimos a definição de curva algébrica invariante L-estável e provamos o Teorema 4.0.2.

Capítulo 1

Folheações Holomorfas

1.1 Definições básicas

Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$.

Definição 1.1.1. Uma **folheação holomorfa não singular de dimensão** k (ou **codimensão** $n-k$) em M, onde $1 \leq k \leq n-1$, é dada pelo seguinte conjunto de informações:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem; tais que:

sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\alpha\beta}: & \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \to & \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ & (z,w) & \mapsto & \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z,w) = (\varphi_1(z,w), \varphi_2(w)) \end{array}.$$

Cada aberto U_α é chamado de **aberto trivializador** da folheação. Por (b), U_α é decomposto em variedades de dimensão k da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{w_0\})$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, chamadas de **placas**. Por (c), as placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores da seguinte forma: se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, ou $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.
Definimos a seguinte relação de equivalência em M:

$$p \sim q \text{ se existem placas } P_1, \ldots, P_m, \text{ com } p \in P_1 \text{ e } q \in P_m \text{ tais que}$$

$$P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset \text{ para } i = 1, \ldots, m-1.$$

A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é chamada de **folha por** p. Cada folha, com a topologia gerada pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa em M. Uma folheação proporciona, portanto, uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k, duas a duas disjuntas. O **espaço tangente** à folheação $\mathcal{F}$ em $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é definido como o espaço tangente no ponto p à folha passando por esse ponto. Tem, portanto, dimensão k. Dizemos que duas folheações são iguais se todas as suas folhas coincidem.

Exemplo 1.1.1. Se v é um campo de vetores holomorfo não singular em um aberto $U \subset M$, então o teorema do Fluxo Tubular holomorfo implica que U possui uma estrutura

de folheação de dimensão um. Observe que, se $\tilde{U} \subset M$ é aberto com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, admitindo um campo de vetores não singular $\tilde{v}$ que satisfaz

$$v|_{U\cap\tilde{U}} = f\tilde{v}|_{U\cap\tilde{U}}$$

para alguma função $f : U \cap \tilde{U} \to \mathbb{C}^*$ holomorfa, então v e $\tilde{v}$ induzem a mesma folheação em $U \cap \tilde{U}$. Temos assim uma folheação definida em $U \cup \tilde{U}$. Reciprocamente, uma folheação de dimensão um é induzida localmente por campos de vetores não singulares. Basta tomar, em cada aberto trivializador U_α, o campo

$$v_\alpha = D(\Phi_\alpha^{-1})\frac{\partial}{\partial z_1},$$

onde $(z_1, (z_2, \ldots, z_n))$ são coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Observe que, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$v_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p).$$

A função $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ assim definida é holomorfa. Portanto, o seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo não singular v_α em U_α;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função holomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

define uma folheação de dimensão um em M.

Definição 1.1.2. Uma **folheação holomorfa singular de dimensão** k (ou **codimensão** $n-k$), onde $1 \leq k \leq n-1$, em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a 2.

Exigiremos, ainda, que o conjunto S da definição acima seja minimal, no seguinte sentido: não existe subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular em $M \setminus S$ se estenda a $M \setminus S'$. Nessas condições, S é chamado de **conjunto singular** da folheação. O conjunto singular da folheação $\mathcal{F}$ é denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $Sing(\mathcal{F})$ são chamados de **pontos singulares** ou **singularidades**, enquanto os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de **pontos regulares**. As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})}$. Duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são iguais se:

(i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

(ii) as folheações regulares $\mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M\setminus Sing(\mathcal{F}')}$ são iguais.

De agora em diante, usaremos o termo folheação para designar folheação holomorfa singular.

Proposição 1.1.1. (Proposição 6.1.4. em [32]) Toda folheação de dimensão um é induzida localmente por um campo de vetores holomorfo.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um na variedade complexa M. Seja U_α e $U_\beta \subset M$ abertos, com $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, nos quais $\mathcal{F}$ é induzida por campos holomorfos v_α e v_β, respectivamente. Sabemos que existe $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F}) \to \mathbb{C}^*$ holomorfa satisfazendo

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})}.$$

Pelo teorema de extensão de Hartogs, estendemos $f_{\alpha\beta}$ a uma função holomorfa em $U_{\alpha\beta}$, ainda denotada por $f_{\alpha\beta}$. Esta função não se anula. De fato, seu conjunto de zeros, se diferente do vazio, seria uma variedade analítica de codimensão um inteiramente contida em $Sing(\mathcal{F})$, conjunto analítico de codimensão pelo menos 2. Por fim, temos

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}},$$

uma vez que essa relação é satisfeita em $U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F})$.
Resulta dessa discussão que uma folheação de dimensão um em uma variedades complexa M é definida pelo seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo v_α em U_α cujo conjunto singular tem codimensão maior ou igual a 2;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função holomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

Sejam M variedade complexa e $U \subset M$ aberto. Seja ω uma 1-forma diferencial holomorfa em U tal que

$$Sing(\omega) = \{p \in U;\ \omega(p) = 0\}$$

tem codimensão maior ou igual a 2. Dizemos que ω é **integrável** se existe uma folheação $\mathcal{F}$ não singular de codimensão um em $U \setminus Sing(\mathcal{F})$ tal que $T_p\mathcal{F}$ coincide com o núcleo de $\omega(p)$ para todo $p \in U \setminus Sing(\omega)$. O teorema de Frobenius diz que

$$\text{uma 1-forma } \omega \text{ é integrável se, e somente se, } \omega \wedge d\omega = 0$$

(observe que essa condição é trivialmente satisfeita se M tem dimensão 2).
Reciprocamente, seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 1.1.1 para campos de vetores, mostra-se que toda folheação holomorfa de codimensão um é induzida localmente por uma 1-forma holomorfa integrável.

Sejam $U,\ \tilde{U} \subset M$ abertos com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, ω e $\tilde{\omega}$ 1-formas holomorfas em U e $\tilde{U}$, respectivamente, ambas integráveis e com conjunto singular de codimensão pelo menos 2. Suponha existir uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um em $U \cup \tilde{U}$ tal que $\mathcal{F}|_U$ e $\mathcal{F}|_{\tilde{U}}$ são induzidas por ω e $\tilde{\omega}$, respectivamente. Note que, se $p \in (U \cap \tilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\tilde{\omega}))$, então existe $g(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\omega(p) = g(p)\tilde{\omega}(p).$$

A função $g : (U \cap \tilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\tilde{\omega})) \to \mathbb{C}^*$ assim definida é holomorfa estende-se, pelo teorema de Hartogs, a uma função holomorfa $g : U \cap \tilde{U} \to \mathbb{C}^*$ tal que

$$\omega = g\tilde{\omega} \text{ em } U \cap \tilde{U}.$$

Resumindo essa discussão, uma folheação de codimensão um em uma variedade complexa M é definida pelo seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, uma 1-forma holomorfa integrável ω_α em U_α cujo conjunto singular têm codimensão maior ou igual a 2;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função holomorfa $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que

$$\omega_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\omega_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

Definição 1.1.3. Seja $\mathcal{F}$ folheação de dimensão um em uma variedade complexa M. Dado $p \in M$, a **multiplicidade algébrica** ou simplesmente **multiplicidade** de $\mathcal{F}$ em p, denotada por $m_p(\mathcal{F})$, é a multiplicidade em p de algum campo holomorfo que induz $\mathcal{F}$ em torno de p.

Note que a definição independe da escolha do campo de vetores. Alem disso, $m_p(\mathcal{F}) \neq 0$ se, e somente se, $p \in Sing(\mathcal{F})$.

Definição 1.1.4. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em uma variedade complexa M. Dado $p \in Sing(\mathcal{F})$, uma **separatriz** em p é um germe de conjunto analítico V contendo p invariante por $\mathcal{F}$, ou seja, $V \setminus Sing(\mathcal{F})$ é localmente uma união de folhas de $\mathcal{F}$.

1.1.1 Folheações em superfícies

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação (de dimensão um) em uma superfície complexa M (uma variedade complexa de dimensão 2). Uma vez que $\mathcal{F}$ tem, ao mesmo tempo, dimensão e codimensão um, ela é localmente induzida tanto por um campo de vetores holomorfo quanto por uma 1-forma holomorfa. Assim, se $\mathcal{F}$ é definida em uma vizinhança de $p \in M$ por um campo v, escrito em relação a um sistema de coordenadas (x, y) no qual $p = (0, 0)$ na forma

$$v = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2),$$

então $\mathcal{F}$ é também definida pela equação $\omega = 0$, onde ω é a forma dual de v,

$$\omega = -v_2dx + v_1dy.$$

Seja $m = m_p(\mathcal{F})$. Desenvolvemos em séries de Taylor

$$v_1 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{1k} \text{ e } v_2 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{2k},$$

onde v_{1k} e v_{2k} denotam os termos de grau k de v_1 e v_2, respectivamente. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ o Blow-up em p e $E = \pi^{-1}(p)$ o divisor excepcional. Como $\pi|_{\tilde{M}\setminus E} : \tilde{M} \setminus E \to M \setminus \{p\}$ é biholomorfismo, $\mathcal{F}|_{M\setminus\{p\}}$ pode ser transportada a uma folheação em $\tilde{M} \setminus E$, que denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$. Mostraremos a seguir que $\tilde{\mathcal{F}}$ estende-se de maneira natural a $\tilde{M}$. Denotaremos essa extensão por $\pi^{\mathcal{F}}$ e a designaremos por **transformado estrito** de $\mathcal{F}$. Nas coordenadas (x, t), o Blow-up se expressa na forma $\pi(x, t) = (x, xt)$, de onde obtemos

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(x,t) &= -v_2(x,xt)dx + v_1(x,xt)(xdt + tdx) \\ &= (-v_2(x,xt) + tv_1(x,xt))dx + xv_1(x,xt)dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nas coordenadas (u, y), temos $\pi(u, y) = (uy, y)$ e

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(u,y) &= -v_2(uy,y)(udy + ydu) + v_1(uy,y)dy \\ &= (-uv_2(uy,y) + v_1(uy,y))dy - yv_2(uy,y)du. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observe que as 1-formas acimas induzem, fora de E, a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $-xv_{2m} + yv_{1m} \not\equiv 0$.
Nesse caso, p é dita singularidade **não dicrítica**. Fatoramos x^m em (1.1) e obtemos

$$\pi^*\omega(x,t) = x^m\left[(-v_{2m}(1,t) + tv_{1m}(1,t) + xf_1(x,t))dx + x(v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt\right],$$

onde f_1 e g_1 são holomorfas. Multiplicando por $1/x^m$, obtemos a forma holomorfa

$$\tilde{\omega}_1(x,t) = (-v_{2m}(1,t) + tv_{1m}(1,t) + xf_1(x,t))dx + x(v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt.$$

Analogamente, em (1.2) fatoramos y^m. Multiplicando por $1/y^m$, encontramos

$$\tilde{\omega}_2(u,y) = (-uv_{2m}(u,1) + v_{1m}(u,1) + yf_2(u,y))dy + y(-v_{2m}(u,1) + yg_2(u,y))du,$$

onde f_2 e g_2 são holomorfas.
Observe que, na interseção dos abertos coordenados (x,t) e (u,y), isto é, $ut = 1$ e $y = tx$ tem-se

$$\tilde{\omega}_1 = t^m\tilde{\omega}_2.$$

Uma vez que $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ tem singularidades isoladas definem uma folheação $\pi^*\mathcal{F}$ em $\tilde{M}$ que estende $\tilde{\mathcal{F}}$. Ela possui as seguintes propriedades:

(i) E é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.

(ii) As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre E são em número finito, correspondendo às raízes de $-v_{2m}(1,t) + tv_{1m}(1,t)$ e, possivelmente, a uma outra singularidade na origem do sistema de coordenadas (u,y). Se $v_{1m}(0,1) \neq 0$, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre E se encontram no aberto coordenado (x,t). Essa situação é equivalente a v_{1m} possuir um termo em y^m, o que é sempre possível por meio de uma mudança de coordenadas.

Caso 2: $-xv_{2m} + yv_{1m} \equiv 0$.
Nesse caso, dizemos que p é singularidade **dicrítica**. Fatoramos x^{m+1} em (1.1)

$$\pi^*\omega(x,t) = x^{m+1}\left[(-v_{2,m+1}(1,t) + tv_{1,m+1}(1,t) + xf_1(x,t))dx + (v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt\right],$$

onde f_1 e g_1 são holomorfas. Multiplicando por $1/x^{m+1}$, encontramos

$$\tilde{\omega}_1(x,t) = (-v_{2,m+1}(1,t) + tv_{1,m+1}(1,t) + xf_1(x,t))dx + (v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt.$$

Analogamente nas coordenadas (u,y) resulta que

$$\tilde{\omega}_2(u,y) = (-uv_{2,m+1}(u,1) + v_{1,m+1}(u,1) + yf_2(u,y))dy + (-v_{2m}(u,1) + yg_2(u,y))dt,$$

onde f_2 e g_2 são holomorfas.
Uma vez que, na interseção dos abertos coordenados

$$\tilde{\omega}_1 = t^{m+1}\tilde{\omega}_2,$$

as duas formas definem uma folheação $\pi^*\mathcal{F}$ em $\tilde{M}$ que estende $\tilde{\mathcal{F}}$. Nesse caso, $\pi^*\mathcal{F}$ tem as seguintes propriedades:

(i) E não é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.

(ii) As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre E correspondem, nas coordenadas (x,t), às soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} -v_{2,m+1}(1,t) + tv_{1,m+1}(1,t) = 0 \\ \\ v_{1m}(1,t) = 0 \end{cases}$$

e possivelmente, a mais uma singularidade na origem do sistema (u,y). Logo, se $v_{2m}(0,1) \neq 0$, o que corresponde a v_{2m} possuir um termo em y^m, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão no sistema (x,t). Tal situação pode ser obtida por mudança de coordenadas.

(iii) As folhas de $\pi^*\mathcal{F}$ são transversais a E, com excepção das que passam pelos pontos correspondentes às raízes de $v_{1m}(1,t) = 0$ e, possivelmente, daquela que passa por $(u,y) = (0,0)$. Se $v_{2m}(0,1) \neq 0$, então a folha por $(u,y) = (0,0)$ é também transversal a E.

Um germe de **separatriz** de $\mathcal{F}$ em $p \in Sing(\mathcal{F})$ é um germe de curva analítica irredutível $S \ni p$ a qual é invariante por $\mathcal{F}$ (isto é, $S \setminus \{p\}$ está contida numa folha de $\mathcal{F}$).

Um germe de curva analítica S contendo p de equação local $f = 0$ é separatriz em p se, e somente se, $v(f) = 0$ sobre S. Em particular, se S é irredutível e $f = 0$ é equação reduzida,

$$S \text{ é separatriz se, somente se, } v(f) = fg$$

para alguma função holomorfa g. Se ω é a forma dual a v, isso equivale a

$$\omega \wedge df = f\eta,$$

para alguma 2-forma holomorfa η.
Note que, se S é uma separatriz em p então π^*S da origem a separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$ nos pontos $E \cap \pi^*S$. Reciprocamente, se $\tilde{S}$ é uma separatriz de $\pi^*\mathcal{F}$ em $q \in E$ não contida em E então $\pi(\tilde{S})$ é uma separatriz em p. Da discussão acima, segue que uma singularidade dicrítica admite um número infinito de separatrizes, correspondendo às folhas por pontos regulares de E e as separatrizes por singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre E.

Seja $p \in Sing(\mathcal{F})$ tal que $m_p(\mathcal{F}) = 1$. Fixemos um campo holomorfo v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de v em p.

Definição 1.1.5. Dizemos que p é singularidade **reduzida** de $\mathcal{F}$ se alguma das duas situações seguintes ocorre:

(i) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$;

(ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Uma singularidade do tipo (i) é chamada de **simples**, enquanto uma singularidade do tipo (ii) é chamada de **sela-nó**.

Dada uma sequencia finita de Blow-ups em p, ou seja, $\pi = \pi_n \circ \ldots \circ \pi_1$, onde π_1 é o Blow-up em p e π_k é o Blow-up em algum ponto de $(\pi_{k-1} \circ \ldots \circ \pi_1)^{-1}(p)$ para $k = 2, \ldots, n$, podemos definir $\pi^*\mathcal{F}$ iterando os transformados estritos associados a cada Blow-up. O seguinte teorema é devido a Seidenberg [31]:

Teorema 1.1.1. (Teorema de redução de singularidades) Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Então existe um sequencia finita de Blow-ups π em p tal que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ são reduzidas.

Na situação do teorema acima, dizemos que π é um **resolução** de $\mathcal{F}$ em p e que as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ estão **resolvidas**.
Informações a respeito do comportamento da folheação em torno de singularidades reduzidas podem ser obtidas nas seguintes proposições. Demonstrações para esses resultados podem ser encontrados nos capítulos 3 e 4 de [8]. Fixemos $p \in Sing(\mathcal{F})$ com $m_p(\mathcal{F}) = 1$, um campo v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p e ω sua 1-forma dual. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de v em p.

Proposição 1.1.2. (Forma normal de Poincaré) Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ satisfazem

(i) $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ e

(ii) $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^+$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$ e a parte linear de v é diagonalizável,

então existe um biholomorfismo local Φ entre uma vizinhança de p e uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

O conjunto dos pares $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ é chamado de **domínio de Poincaré**.

Proposição 1.1.3. (Forma normal de Siegel) Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ satisfazem $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$, então existe um biholomorfismo local Φ entre uma vizinhança de p e uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = (\lambda_1 x + xyf(x,y))dy - (\lambda_2 y + xyg(x,y))dx,$$

onde $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são funções holomorfas.

O conjunto dos pares $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ é chamado de **domínio de Siegel**.

No caso de uma sela-nó, temos a seguinte forma normal:

Proposição 1.1.4. Forma normal de Dulac Se p é sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas holomorfa Φ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + (y(1 + \lambda x^p) + f(x,y))dx,$$

onde $f(x,y)$ é holomorfa e tem multiplicidade $p+2$.

Para a sela-nó temos ainda a seguinte forma normal formal:

Proposição 1.1.5. Se p é sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas formal Φ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + y(1 + \lambda x^p)dx.$$

Nos resultados acima, temos que

(i) Nas formas normais de Poincaré e Siegel, os eixos coordenados $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são separatrizes.

(ii) Na forma normal de Dulac, temos que o eixo $\{x = 0\}$ é uma separatriz, a chamada **separatriz forte** da sela-nó. Eventualmente, pode haver uma segunda separatriz, correspondente a $\{y = 0\}$ na forma normal formal. Essa será chamada de **separatriz fraca**.

Observação 1.1.1. Uma singularidade admite um número infinito de separatrizes se, e somente se, no processo de resolução ocorrer alguma singularidade dicrítica.

1.1.2 Folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$

Teorema 1.1.2. (Teorema 2.5.1. em [21]) Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathcal{F}^* = \Pi^*(\mathcal{F})$, onde $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(n)$ é a projeção canônica. Então existe uma 1-forma holomorfa integrável em $\mathbb{C}P(n+1)$,

$$\Omega = \sum_{j=0}^{n} \Omega_j dx_j,$$

cujos coeficientes $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ são polinômios homogêneos de mesmo grau, tal que $\Omega = 0$ define $\mathcal{F}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Em particular, para toda carta afim $E \subset \mathbb{C}P(n)$, $\mathcal{F}|_E$ pode ser definida por uma 1-forma polinomial integrável.

Diremos que a forma Ω representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas.

Observação 1.1.2. Como $\Pi^{-1}([p])$ é uma reta que passa pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$ para todo $[p] \in \mathbb{C}P(n)$, as retas que passam pela origem estão contidas nas folhas de $\mathcal{F}^*$. Em termos da forma Ω isto pode ser expresso pela relação

$$i_R(\Omega) = \sum_{j=0}^{n} x_j \Omega_j = 0,$$

onde R denota o campo radial em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Fixemos uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um e uma reta $L \subset \mathbb{C}P(n)$, não invariante por $\mathcal{F}$, isto é, tal que L não esteja contida numa folha de $\mathcal{F}$ nem em $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Seja $p \in L$ e tomemos uma carta afim $\mathbb{C}^n \simeq E$ tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^n$. Seja ω uma 1-forma polinomial que representa $\mathcal{F}$ em E. Dizemos que p é um **ponto de tangência** de $\mathcal{F}$ com L, se a restrição $\omega|_L$ anula-se em 0. A **multiplicidade de tangência** de $\mathcal{F}$ com L em p é, por definição, a ordem de p como zero de $\omega|_L$. Os conceitos acima independem da carta afim E e da forma ω que representa $\mathcal{F}$.

Definição 1.1.6. O **grau** de uma folheação de codimensão um, $\mathcal{F}$, em $\mathbb{C}P(n)$, é o número de tangências, contadas com multiplicidade, de $\mathcal{F}$ com uma reta não invariante por $\mathcal{F}$.

Observação 1.1.3. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau k em $\mathbb{C}P(n)$ e Ω uma 1-forma que representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas. Suponhamos que $\mathrm{cod}(\mathrm{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Então

(a) Se Ω_1 é outra forma que representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas, então $\Omega_1 = a\Omega$, onde $a \neq 0$.

(b) O grau dos coeficientes de Ω é $k+1$.

Observação 1.1.4. Em uma carta afim $(\mathbb{C}^n,\ (x_1, \ldots, x_n))$ ela será representada por uma 1-forma polinomial ω que pode ser escrita como

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{k+1}$$

onde os coeficientes de ω_j são polinômios homogêneos de grau j, $0 \leq j \leq k+1$, e $i_{R_n}(\omega_{k+1}) = 0$, onde

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Observamos ainda que $\omega_{k+1} \equiv 0$ se, e somente se, o hiperplano do infinito desta carta é invariante por $\mathcal{F}$.

1.1.3 Singularidades de Kupka

Definição 1.1.7. Uma subvariedade $S \subset \mathbb{C}P(n)$ de codimensão q é dita uma **intersecção completa** se existem hipersuperfícies algébricas irredutíveis $X_1, \ldots, X_q \subset \mathbb{C}P(n)$ tais que

$$S = X_1 \cap \cdots \cap X_q.$$

Alternativamente, se existem polinômios homogêneos irredutíveis $f_j(z_0, \ldots, z_n)$ $(j = 1, \ldots, q)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ tais que S é dada em coordenadas homogêneas por

$$S = \{[z_0 : \ldots : z_n];\ f_j(z_0, \ldots, z_n) = 0,\ \ j = 1, \ldots, q\}.$$

O seguinte teorema é conhecido por **fenomeno de Kupka**.

Teorema 1.1.3. (Teorema 1.8. em [20]) Seja ω um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forma integrável, $n \geq 3$. Suponha que $0 \in \text{sing}(\omega)$ e que $d\omega(0) \neq 0$. Então existe um sistema de coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2}$ tal que

$$\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

Observação 1.1.5. O teorema 1.1.3 tem a seguinte interpretação geométrica: o germe de folheação $\mathcal{F}(\omega)$, gerada por ω, tem uma **estrutura produto**, isto é, é produto de um germe de folheação regular de codimensão dois por um germe de folheação singular de dimensão um em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Definição 1.1.8. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão n. Dizemos que $p \in Sing(\mathcal{F})$ é um ponto de **Kupka** se $\mathcal{F}$ pode ser representada numa vizinhança de p por uma 1-forma ω tal que $d\omega(p) \neq 0$. Esta condição independe da 1-forma que representa $\mathcal{F}$, uma vez que se $\eta = g \cdot \omega$ onde $g(p) \neq 0$, então

$$d\eta(p) = g(p) \cdot d\omega(p) + dg(p) \wedge \omega(p) = g(p) \cdot d\omega(p) \neq 0.$$

O conjunto dos pontos singulares de **Kupka** de $\mathcal{F}$ será denotado por $K(\mathcal{F})$.
Seja $\mathcal{G}$ um germe de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$. Diremos que $p \in K(\mathcal{F})$ tem tipo transversal $\mathcal{G}$, se $\mathcal{F}$ pode ser representada numa vizinhança de p por uma 1-forma

$$\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx,$$

como no teorema de Kupka, tal que $\mathcal{G}$ coincide com a folheação gerada por

$$P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

Proposição 1.1.6. (Proposição 1.4.1. em [20]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão $n \geq 3$ tal que $\text{cod}(sing(\mathcal{F})) \geq 2$. Então $K(\mathcal{F})$ é uma sub-variedade lisa de codimensão complexa dois.

Definição 1.1.9. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um numa variedade M de dimensão $n \geq 3$. Dizemos que um sub-conjunto analítico S de M é uma componente de Kupka de $\mathcal{F}$, se S é uma componente irredutível de $sing(\mathcal{F})$ tal que $S \subset K(\mathcal{F})$.

Exemplo 1.1.2. Sejam f e g polinômios homogêneos e irredutíveis em $\mathbb{C}^{n+1}$, onde

$$\frac{gr(f)}{gr(g)} = \frac{p}{q} \ \text{ e } \ mdc(p, q) = 1.$$

Vamos denotar por $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(n)$ a projeção canônica. Suponha que as hipersuperfícies $\Pi(f = 0)$ e $\Pi(g = 0)$ são transversais. Esta última condição é equivalente à seguinte:

$$z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\},\ f(z) = g(z) = 0 \Longrightarrow df(z) \wedge dg(z) \neq 0. \tag{1.3}$$

Seja $\mathcal{F}$ a folheação de $\mathbb{C}P(n)$ definida em coordenadas homogêneas pela forma

$$\Omega = qgdf - pfdg.$$

Note que a função meromorfa

$$h = \frac{f^q}{g^p} \circ \Pi \text{ de } \mathbb{C}P(n)$$

é uma integral primeira de $\mathcal{F}$. A sub-variedade de codimensão dois $\Pi(f = g = 0)$ é uma componente de Kupka de $\mathcal{F}$. Isto decorre de (1.3) e de

$$d\Omega = -(p+q)df \wedge dg.$$

Esta **componente de Kupka** tem o tipo transversal do campo de vetores linear

$$px\frac{\partial}{\partial x} + qy\frac{\partial}{\partial y}.$$

A folheação $\mathcal{F}$ será denotada por $\mathcal{F}(f,g)$. Observamos que o grau de $\mathcal{F}(f,g)$ é

$$gr(f) + gr(g) - 2.$$

Teorema 1.1.4. (Proposição 6.11.13. em [21]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$, que possui uma componente de Kupka S. Se S é uma interseção completa então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira meromorfa do tipo

$$\frac{f^q}{g^p},$$

como no exemplo anterior, ou seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f,g)$.

1.1.4 Estruturas transversais de folheações

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão q, $q \geq 1$, em uma variedade complexa M, com conjunto singular sing$\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2. Consideremos $M' = M \setminus \text{sing}\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{M'}$, a folheação não singular associada. Então M' pode ser coberta por abertos U_i, $i \in I$; onde estão definidas submersões holomorfas $f_i : U_i \subset M \to \mathbb{C}^q$ tais que as folhas $\mathcal{F}'|_{U_i} = \mathcal{F}|_{U_i}$, são as componentes conexas das curvas de nível $f_i^{-1}(x)$, de f_i, para todo $i \in I$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $f_i = f_{ij} \circ f_j$ para algum biholomorfismo local

$$f_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q \to f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q.$$

Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então no domínio comum, a condição de cociclo é satisfeita:

$$f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}.$$

O pseudogrupo $\{f_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)\}_{i,j \in I}$ define a **estrutura transversal** de $\mathcal{F}$ em M.

Definição 1.1.10. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 em M. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversalmente afim**, se é possível escolher um atlas de submersões como acima $\{y_j : U_j \to \mathbb{C}\}_{i \in I}$, definindo $\mathcal{F}$ em $M \setminus \text{sing}\,\mathcal{F}$, cujas mudanças de cartas são afins, isto é,

$$y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$$

para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, onde a_{ij}, b_{ij} são constantes.

O problema de decidir se existem estruturas afins para uma dada folheação, em certos casos, é equivalente a um problema em formas diferencias, como mostra o resultado seguinte:

Proposição 1.1.7. (Proposição 6.2.2. em [21]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um numa variedade complexa M. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma fechada meromorfa, isto é, que existe uma 1-forma integrável meromorfa Ω, que define $\mathcal{F}$ fora de seu divisor de polos, $(\Omega)_\infty$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no aberto $U = M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ se, e somente se, existe uma 1-forma meromorfa η em M satisfazendo às seguintes propriedades:

(a) η é fechada.

(b) $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.

(c) $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty$.

(d) A ordem do polo de η ao longo de qualquer componente irredutível de $(\eta)_\infty$ é um.

(e) Para toda componente irredutível L de $(\Omega)_\infty$, temos $\text{Res}(\eta, L) = (\text{ordem de } (\Omega)_\infty|_L)$.

Além disso, dois pares $(\Omega, \eta))$ e (Ω', η') definem a mesma estrutura afim para $\mathcal{F}$ em U se, e somente se, existe uma função meromorfa $g : M \to \overline{\mathbb{C}}$ satisfazendo

$$\Omega' = g \cdot \Omega \quad \text{e} \quad \eta' = \eta + \frac{dg}{g} \text{ em } U.$$

Definição 1.1.11. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 em M. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversalmente projetiva** em M se é possível escolher um atlas de submersões holomorfas $y_j : U_j \to \mathbb{C}$, definindo $\mathcal{F}$ em $M \setminus \text{sing } \mathcal{F} = \cup U_j$ e tendo relações afins,

$$y_i = \frac{a_{ij} y_j + b_{ij}}{c_{ij} y_j + d_{ij}}$$

para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, onde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ são localmente constantes com $a_{ij} d_{ij} - b_{ij} c_{ij} = 1$ em $U_i \cap U_j$.

Assim como no caso transversalmente afim, existe uma formulação da existência de estruturas transversais projetivas em termos de 1-formas diferenciais:

Proposição 1.1.8. (Proposição 1.1 em [29]) Seja $\mathcal{F}$ folheação singular de codimensão um em M dada por uma 1-forma holomorfa integrável Ω, suponha que existe uma 1-forma holomorfa η em M tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M se, e somente se, existe uma 1-forma holomorfa ξ em M satisfazendo:

(i) $d\eta = \Omega \wedge \xi$.

(ii) $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Além disso, dois tais ternos (Ω, η, ξ) e (Ω', η', ξ') definem a mesma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$ se e somente se vale:

$$\Omega' = f\Omega, \;\; \eta' = \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega, \quad \xi' = \frac{1}{f}(\xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega),$$

para algumas funções holomorfas $f, g : M \to \mathbb{C}^*, \mathbb{C}$. Em particular os ternos (Ω, η, ξ) e $\left(f\Omega, \eta + \frac{df}{f}, \frac{1}{f}\xi\right)$ definem a mesma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$. Agora, se Ω e η são meromorfas então temos: Se $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M então existe uma 1-forma meromorfa ξ em M satisfazendo $d\omega = \eta \wedge \omega$ e $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Damos a seguir alguns exemplos importantes de folheações transversalmente projetivas:

Exemplo 1.1.3. [Folheações transversalmente projetivas em variedades simplesmente conexas]. Seja $\mathcal{F}$ definida por uma função meromorfa $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$, que é uma integral primeira de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M como se vê facilmente tomando-se o atlas dado por $z = f$ onde f é holomorfa e $w = 1/f$ numa vizinhança do divisor polar de f. Reciprocamente vale: Qualquer folheação transversalmente projetiva definida em uma variedade simplesmente conexa admite uma integral primeira meromorfa. Com efeito, veremos como consequência da noção de desenvolvimento de uma folheação transversalmente projetiva, que a folheação regular $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{M\setminus Sing(\mathcal{F})}$, admite uma integral primeira meromorfa em $M' = M \setminus Sing(\mathcal{F})$ (que é simplesmente conexa), e que se estende por Hartogs a uma integral primeira meromorfa em M, uma vez que codim(sing$\mathcal{F}$) ≥ 2.

Exemplo 1.1.4. [Folheações de Ricatti]. Uma **folheação de Ricatti** $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ é dada em alguma carta afim por $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P(2)$, por uma 1-forma polinomial

$$\Omega = p(x)dy - (y^2c(x) - yb(x) - a(x))dx,$$

onde p, a, b e c são polinômios. Motivados pelo caso afim definimos a $1-forma$

$$\eta = 2\frac{dy}{y} + \frac{p' + b}{p}dx + \frac{2a}{yp}dx$$

e também a 1-forma

$$\xi = \frac{-2a}{y^2p^2}dx.$$

Então o terno (Ω, η, ξ) satisfaz às relações estabelecidas na Proposição 1.1.8. Em consequência, a folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(2)$ menos o conjunto algébrico

$$\overline{\{x \in \mathbb{C};\ \ p(x) = 0\} \times \mathbb{C}} \cup \overline{\mathbb{C} \times \{y = 0\}}.$$

Agora, exceto pelo caso $a(x) \equiv 0$, temos que apenas a componente $S = \{p(x) = 0\} \times \overline{\mathbb{C}}$ é $\mathcal{F}$-invariante, o que implica que a estrutura transversal projetiva deve se estender a $\mathbb{C}P(2) \setminus S$. Com efeito, de acordo com a Proposição 1.1.8 se definirmos

$$g = \frac{-1}{p(x)y}$$

então

$$\eta' = \eta + 2g\Omega = \frac{p' - b + 2yc}{p}dx$$

e

$$\xi' = \xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega = \frac{2c}{p^2}dx$$

definem um terno (Ω, η', ξ') que é holomorfo em $\mathbb{C}P(2) \setminus S$, e que dá uma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2) \setminus S$ e esta estrutura projetiva coincide com a anterior em

$$\mathbb{C}P(2) \setminus (S \cup \overline{\mathbb{C} \times \{y = 0\}}).$$

A 1-forma η é fechada se, e somente se $a \equiv 0$. Portanto, $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em

$$\mathbb{C}P(2) \setminus (S \cup \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\{y = 0\}})$$

se a reta projetiva $\overline{\{y = 0\}}$ é invariante.

Exemplo 1.1.5. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente projetiva em M como na Proposição 1.1.8 e seja $\pi : N \to M$ uma aplicação holomorfa transversal a $\mathcal{F}$, então a folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ é transversalmente projetiva em N.

Exemplo 1.1.6. Seja α uma 1-forma meromorfa fechada em M e seja $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função meromorfa. Definimos (Ω, η, ξ) por

$$\Omega = df - f^2\alpha, \quad \eta = 2f\alpha \quad \text{e} \quad \xi = 2\alpha.$$

Então (Ω, η, ξ) é um terno projetivo e portanto define uma folheação transversalmente projetiva em M menos um subconjunto analítico de codimensão um, $S \subset M$,

$$S = (\alpha)_\infty \cup (f)_\infty.$$

Esta mesma conclusão vale para $\Omega_\lambda = \Omega + \lambda\alpha$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$. A folheação $\mathcal{F}(\Omega_\lambda)$ é transversalmente afim em algum aberto menor da forma $M \setminus S'$ onde $S \subset S'$, $S' = S \cup (f^2 - \lambda = 0)$. (Temos que

$$\frac{\Omega_\lambda}{f^2 - \lambda} = \frac{df}{f^2 - \lambda} - \alpha$$

é fechada e holomorfa em $M \setminus S'$).

Exemplo 1.1.7. Seja $h : M \to \mathbb{C}^*$ uma função holomorfa tal que

$$d\xi = -\frac{dh}{h} \wedge \xi,$$

onde ξ é holomorfa. Esta condição se escreve também como $d(\sqrt{h}\cdot\xi) = 0$. Seja F qualquer função holomorfa e escrevemos (para $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\Omega = F \cdot \left(\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right) - \left(\frac{F^2}{2} - \frac{\lambda}{2}h\right) \cdot \xi,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{dh}{h} + F \cdot \xi.$$

O terno (Ω, η, ξ) satisfaz às condições da Proposição 1.1.8 e logo $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$ é uma folheação transversalmente projetiva em M.

Proposição 1.1.9. (Proposição 4.1. em [29]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, com conjunto singular de codimensão ≥ 2. Então $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(n)$ se, e somente se, $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.

1.2 Redução de singularidades em dimensão dois

Fixamos um germe de folheação holomorfa com singularidade isolada na origem $0 \in \mathbb{C}^2$. Escolhemos um representante $\mathcal{F}(U)$ para o germe $\mathcal{F}$, definida numa vizinhança aberta U da origem, tal que 0 é a única singularidade de $\mathcal{F}(U)$ em U. Nesta estrutura, o **Teorema de redução de singularidades** ([31]) assegura a existência de uma aplicação holomorfa própria $\sigma\colon \tilde{U} \to U$ a qual é uma composição finita de blow-ups, começando com um blow-up na origem, tal que a folheação induzida pelo pull-back $\tilde{\mathcal{F}} := \sigma^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ por σ satisfaz:

1. O **divisor excepcional** $E = \sigma^{-1}(0) \subset \widetilde{U}$ pode-se escrever $E = \bigcup_{j=1}^m D_j$, onde cada componente irredutível D_j é difeomorfa a uma linha projetiva mergulhada $\mathbb{C}P(1)$ introduzida como um divisor da sequencia de blow-up ([7]).

2. $\text{sing}\tilde{\mathcal{F}} \subset E$ é um conjunto finito, e qualquer singularidade $\tilde{p} \in \text{sing}\tilde{\mathcal{F}}$ é **irredutível**, isto é, pertence a uma das seguintes categorias:

   (a) $xdy - \lambda ydx + \text{h.o.t.} = 0$ e λ não é um número racional positivo, isto é, $\lambda \notin \mathbb{Q}_+$. (**singularidade não-degenerada**),

   (b) $y^{p+1}dx - [x(1 + \lambda y^p) + \text{h.o.t.}]\, dy = 0$, $p \geq 1$. Este caso é chamado **sela-nó** e é extensamente estudada em [18].

Chamamos de levantamento da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ a **redução de singularidades** de $\mathcal{F}$. Observe que $\mathcal{F}$ *é não-dicríto se e somente se* E *é invariante por* $\tilde{\mathcal{F}}$. Quaisquer dois componentes D_i e D_j, $i \neq j$, do divisor excepcional intersectam (transversalmente) no máximo num ponto, o qual é chamada **esquina**. Não há pontos de intersecção triplos. Uma singularidade irredutível

$$xdy - \lambda ydx + \text{h.o.t} = 0$$

pertence ao **domínio de Poincaré** se $\lambda \notin \mathbb{R}_-$ e caso contrário, pertence ao **domínio de Siegel**.

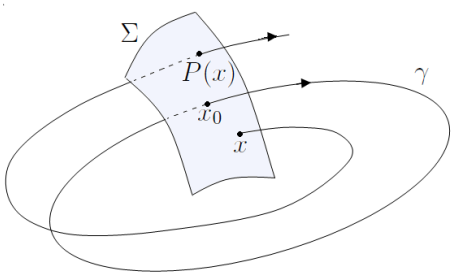
Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **curva generalizada** se no processo de redução de singularidades só tem singularidades não-degeneradas, isto é, não tem sela-nó ([6]).

Um germe de curva generalizada $\mathcal{F}$ na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ é chamado **totalmente ressonante** se cada singularidade que surge na redução de singularidades é uma singularidade ressonante ([27]).

1.3 Holonomia e Estabilidade

1.3.1 Holonomia

O conceito de holonomia de uma folheação é motivado pelo conceito de aplicação de primeiro retorno ou aplicação de Poincaré de uma órbita periódica de um campo vetorial. A "aplicação" $P : (\sigma, x_0) \to (\sigma, x_0),\ x \mapsto P(x)$ como ilustrada acima será, sobre condições



adequadas de diferenciabilidade, um germe de difeomorfismo.

Assim, se γ é uma órbita periódica de um fluxo ϕ e Σ é uma seção transversal a ϕ que corta γ num único ponto $p \in \Sigma$, a holonomia de γ relativa a Σ será um difeomorfismo $f_\gamma : \Sigma^1 \to \Sigma$, onde Σ^1 é uma seção contida em Σ tal que $p \in \Sigma^1$ e para todo ponto $q \in \Sigma^1$ a órbita positiva de q por ϕ corta Σ pelo menos uma vez. Podemos então definir f por

$$f(q) = \text{"primeiro ponto em que a órbita positiva de } \phi \text{ por } q \text{ corta } \Sigma\text{"}.$$

Se Σ^1 for uma seção suficientemente pequena contida em Σ, então f será um difeomorfismo sobre $f(\Sigma^1)$ com um ponto fixo em p. Ocorre que em alguns casos é necessário considerar-

se os retornos seguintes as órbitas dos pontos de Σ, o que consiste em obter o n-ésimo iterado de f, denotado por $f^{(n)}$, e que é definido indutivamente por:

$$f^{(1)} = f \quad \text{e} \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}.$$

Ora, em geral, para $n \geq 2$, $f^{(n)}$ não pode ser definida em todos os pontos de Σ^1, o que nos obriga a tomar domínios cada vez menores $\Sigma^1 \supset \Sigma^2 \supset \ldots \supset \Sigma^n$.

Analogamente, quando desejamos considerar os retornos sucessivos das órbitas negativas, que consiste em obter os iterados negativos de f;

$$f^{(-1)} = f^{-1} \quad \text{e} \quad f^{(-n)} = (f^{-1})^n,$$

somos obrigados a tomar domínios diferentes $\Sigma^{-1} \supset \ldots \supset \Sigma^{-n}$. Observe que o único ponto de Σ no qual podemos garantir que f^n está definida para todo $n \in \mathbb{Z}$, é o ponto p, o qual é ponto fixo de todos os f^n. Com objetivo de permitir a composição de difeomorfismos que têm um ponto fixo em comum, sem ficar a todo momento especificando os domínios, utilizamos a noção de germe.

Como veremos em seguida, a holonomia de uma folha L de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, é uma representação do grupo fundamental de L no grupo de germes de biholomorfismos de uma seção Σ, transversal a $\mathcal{F}$ e que deixam um ponto de Σ fixo.

Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M. Fixemos uma folha L de $\mathcal{F}$ e uma curva continua $\gamma : [0,1] \to L$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão k tais que $p_0 = \gamma(0) \in \Sigma_0$ e $p_1 = \gamma(1) \in \Sigma_1$. As seções Σ_0 e Σ_1 podem ser obtidas através de cartas distinguidas U_0 e U_1 em p_0 e p_1, de tal forma que Σ_j corta cada placa de U_j exatamente uma vez.

Em seguida, consideremos uma cobertura finita de $\gamma([0,1])$ por cartas distinguidas de $\mathcal{F}$, digamos $V_0, \cdots, V_m$, tais que:

(i) $V_0 = U_0$ e $V_m = U_1$.

(ii) Para todo $j = 1, \ldots, m$, $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$.

(iii) Para todo $j = 1, \ldots, m$, existe uma carta trivializadora U de $\mathcal{F}$ tal que $V_{j-1} \cup V_j \subset U$.

(iv) Existe uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1\}$ de $[0,1]$ tal que $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$ para $j = 0, \ldots, m$.

Para cada $j = 1, \ldots, m$ seja Σ'_j, uma seção transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset U_{j-1} \cup U_j$ e Σ'_j corta cada placa de U_{j-1} e cada placa de U_j no máximo em um ponto. Coloquemos também $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ e $\Sigma'_{m+1} = \Sigma_1$.

Utilizando (ii) e (iii), não é difícil ver que se $q \in \Sigma'_j$, então a placa de V_j que contém q, corta Σ'_{j+1} no máximo em um ponto, sendo que se q está numa pequena vizinhança, digamos A_j, de $\gamma(t_j)$ em Σ'_j, então esta placa corta de fato Σ'_{j+1} num ponto, digamos $f_j(q)$. Com isto, podemos definir uma aplicação $f_j : A_j \to \Sigma'_j$ tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Se as seções consideradas são subvariedades holomorfas, o que suporemos de agora em diante, então f_j será também. De fato, f_j será um biholomorfismo sobre sua imagem, já que podemos definir a sua inversa de maneira análoga.

Observe que, em geral não é possível compor f_{j+1} com f_j, mas podemos compor os seus germes, já que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Denotando o germe de f_j em $\gamma(t_j)$ por $[f_j]$, podemos considerar o germe composto:

$$[f]_\gamma = [f_m] \circ \ldots \circ [f_0]$$

que será um germe de biholomorfismo em p_0, onde, em princípio, $[f]_\gamma$ depende da cobertura $V_0, \ldots, V_m$ e das seções intermediárias consideradas. O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [4], mostra que de fato $[f]_\gamma$ não depende das construções auxiliares.

Lema 1.3.1. (Lema 4.1 de [4]) O germe $[f]_\gamma$ depende somente de γ de Σ_0 e de Σ_1.

O germe $[f]_\gamma$ é chamado de **holonomia de γ com respeito às seções Σ_0 e Σ_1**. No caso em que γ é uma curva fechada em L, ou seja $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, $[f]_\gamma$ é um elemento o grupo $\mathrm{Diff}(\Sigma_0, p_0)$ e é chamado de **holonomia de γ com respeito a Σ_0**, ou simplesmente **holonomia** de γ.

Veremos em seguida como se calcula a holonomia de uma curva obtida pela adjunção de duas outras. Sejam $\gamma, \delta : [0,1] \to L$ duas curvas em L tais que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = \delta(0) = p_1$ e $\delta(1) = p_2$. A **adjunção** de γ e δ é por definição, a curva $\alpha : [0,1] \to L$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \\ \delta(2t-1), & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

A curva α definida acima será denotada por $\delta \star \gamma$.

Observação 1.3.1. Na maioria dos textos de teoria da homotopia, a adjunção é definida ao contrário, isto é, o que para nós é definido como $\delta\star\gamma$, nestes textos é definido como $\gamma\star\delta$. Adotamos esta convenção para que a representação de holonomia seja um homomorfismo de grupos e não um anti-homomorfismo.

O resultado seguinte decorre diretamente das definições:

Lema 1.3.2. Sejam γ, δ, p_0, p_1 e p_2 como anteriormente. Fixemos seções transversais a $\mathcal{F}$, Σ_0, Σ_1 e Σ_2 por p_0, p_1 e p_2 respectivamente. Então

$$[f]_{\gamma\star\delta} = [f]_\gamma \circ [f]_\delta$$

onde os germes acima são obtidos como holonomias nas seções Σ_0, Σ_1 e Σ_2.

O resultado a seguir nos permitirá definir o "grupo de holonomia" de uma folha de $\mathcal{F}$.

Lema 1.3.3. (Teorema 4.1 em [4]) Sejam M, $\mathcal{F}$, L, $p_0, p_1 \in L$, Σ_0 e Σ_1 como anteriormente. Se $\gamma, \delta : [0,1] \to L$ são duas curvas tais que $\gamma(0) = \delta(0) = p_0$, $\gamma(1) = \delta(1) = p_1$ e γ e δ são homotópicas em L com extremos fixos, então $[f]_\gamma = [f]_\delta$.

Convém lembrar aqui que duas curvas γ e δ como no enunciado do lema, são **homotópicas** em L com **extremos fixos** se existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to L$ tal que

(i) $H(t,0) = \gamma(t)$ e $H(t,1) = \delta(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

(ii) $H(0,s) = p_0$ e $H(1,s) = p_1$ para todo $s \in [0,1]$.

Usaremos então a notação $\gamma \sim \delta$. No caso em que $p_0 = p_1$ é sabido que $\sim$ é uma relação de equivalência (veja [15]). A classe de equivalência (ou homotopia) de uma curva γ com extremos em p_0 é denotada por $[\gamma]$. O conjunto das classes de equivalência de $\sim$ é, neste caso, chamado de **grupo fundamental** ou de **homotopia de L com base em** p_0. A notação geralmente utilizada para este grupo é $\pi_1(L, p_0)$. A lei de composição deste grupo, que será denotada por $\star$, é definida a seguinte maneira:

Dadas duas classes de homotopia $[\gamma]$ e $[\delta]$ em $\pi_1(L, p_0)$, fixemos representações os

mesmos γ e δ. Definimos então $[\delta] \star [\gamma] = [\delta \star \gamma]$.

É possível demonstrar que a operação $\star$ está bem definida (isto é, $[\delta]\star[\gamma]$ não depende dos representantes escolhidos) e que $\pi_1(L, p_0)$ é um grupo com esta operação. No caso, o elemento unitário é a classe de equivalência da curva constante $e(t) \equiv p_0$, $t \in [0, 1]$. Para mais detalhes recomendamos a referência [15]. Levando-se em conta o Lema 1.3.3, a seguinte definição é natural:

Definição 1.3.1. Sejam M uma variedade complexa, $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M, L uma folha de $\mathcal{F}$, $p \in L$ e Σ uma seção holomorfa transversal a $\mathcal{F}$ tal que $p \in \Sigma$. A **representação de holonomia de L com respeito a p** e a Σ é, por definição, a aplicação $H = H_{L,p,\Sigma} : \pi_1(L, p) \to \mathrm{Diff}(\Sigma, p)$, definida por:

$$H([\gamma]) = [f]_\gamma$$

onde γ é um representante de $[\gamma]$ e $[f]_\gamma$ é o germe de holonomia de γ com respeito a Σ. O Lema 1.3.3 implica que H está bem definida, isto é, não depende do representante γ de $[\gamma]$.

O **grupo de holonomia de L com respeito a p e a Σ** é, por definição a imagem $H(\pi_1(L, p))$.

Usaremos a notação $\mathrm{Hol}(L, p, \Sigma)$ para este conjunto. O seguinte resultado, que decorre o Lema 1.3.2, é fundamental:

Proposição 1.3.1. A representação de holonomia é um homomorfismo de grupos. Mais precisamente, se $a, \in \pi_1(L, p)$, então

$$H(a \star b) = H(a) \circ H(b).$$

Outro fato, cuja prova poder ser encontrada em [15], é o seguinte:

Proposição 1.3.2. (Teorema 4.2 em [4]) Sejam L folha de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão $k, p_0, p_1 \in L$ e Σ_0, Σ_1 seções transversais a $\mathcal{F}$ que contém p_0 e p_1 respectivamente. Fixemos uma curva $\alpha : [0, 1] \to L$ tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$. Seja $[f]_\alpha$ o germe em p_0 de holonomia de α, entre as seções Σ_0 e Σ_1. Então $[f]_\alpha$ conjuga $\mathrm{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$, isto é:

$$\mathrm{Hol}(L, p_0, \Sigma_0) = ([f]_\alpha)^{-1} \circ \mathrm{Hol}(L, p_1, \Sigma_1) \circ [f]_\alpha.$$

Em particular $\mathrm{Hol}(L, p_0, \Sigma_0)$ e $\mathrm{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$ são isomorfos.

Como podemos supor que as seções transversais são biholomorfas a abertos de $\mathbb{C}^k$, a seguinte definição natural:

Definição 1.3.2. Seja L um folha de uma folheação holomorfa de codimensão k. O **grupo de holonomia** de L, denotado por $\mathrm{Hol}(L)$, é a coleção de todos os grupos de germes em $q \in \mathbb{C}^k$, de homeomorfismos de $\mathbb{C}^k$ que deixam q fixo e que são conjugados a $\mathrm{Hol}(L, p, \Sigma)$, onde $p \in L$ e Σ é uma seção transversal a $\mathcal{F}$ passando por p.

Diremos que o grupo de holonomia de L é conjugado a um grupo dado, digamos G, se $G \in \mathrm{Hol}(L)$. Assim, por exemplo, diremos que $\mathrm{Hol}(L)$ é **trivial** se $\{id\} \in \mathrm{Hol}(L)$, onde id é a aplicação identidade.

1.3.2 Estabilidade de Reeb e Brunella

Sejam M uma variedade diferenciável, $\mathcal{F}$ folheação real em M de classe C^∞ não singular e $L_0 \in \mathcal{F}$ folha compacta.

Definição 1.3.3. Dizemos que L_0 é **estável** se existe um sistema fundamental de vizinhanças $W_\nu \supset L_0$ tal que

$$\bigcap_\nu W_\nu = L_0$$

sendo cada vizinhança W_ν $\mathcal{F}$-invariante (isto é, uma união de folhas). Equivalentemente, para todo vizinhança W de L_0 em M existe uma vizinhança $L_0 \subset V \subset W$ que é $\mathcal{F}$-invariante.

O seguinte resultado é conhecido como Teorema de Estabilidade de Reeb:

Teorema 1.3.1. (Teorema 4.2.2. em [30]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 de codimensão q de uma variedade M tendo uma folha L_0 compacta com grupo de holonomia finito então é estável.

Definição 1.3.4. Dizemos que uma folheação de codimensão complexa um é **transversalmente holomorfa** se é dada por uma coleção de submersões sobre conjuntos abertos de $\mathbb{C}$ tal que as funções de transição são holomorfas. Dizemos também que uma folheação $\mathcal{F}$ definida numa variedade compacta é uma **fibração de Seifert** se toda folha de $\mathcal{F}$ é compacta e tem holonomia finita.

O seguinte resultado é conhecido como Teorema de Estabilidade de Brunella:

Teorema 1.3.2. (Teorema em [2]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão complexa um transversalmente holomorfa definida numa variedade compacta conexa M. Suponhamos que existe uma folha compacta $L \in \mathcal{F}$ com grupo de holonomia finita então $\mathcal{F}$ é uma fibração de Seifert.

1.3.3 Holonomia Virtual

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Fixado um ponto $q \in L$, então $q \notin \text{sing}\mathcal{F}$ e podemos considerar um disco transversal Σ centrado em q e a representação de holonomia $\text{Hol} : \pi_1(L, q) \to \text{Diff}(\Sigma, q)$, denotamos $\text{Hol}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$ o representante do grupo de holonomia assim obtido.

Definição 1.3.5. O grupo de **holonomia virtual** da folha L de $\mathcal{F}$ na seção Σ é definido por

$$\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q) := \{f \in \text{Diff}(\Sigma, q);\ L_z = L_{f(z)},\ \text{para todo } z \in \Sigma\}$$

onde, na notação acima L_z denota a folha (global) de $\mathcal{F}$ que passa por z.

O grupo de holonomia virtual de L é a coleção $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$, de todos os grupos holomorficamente conjugados a $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$.

Assim, em outras palavras, o grupo de holonomia virtual consiste dos biholomorfismos locais, f, de Σ, com ponto fixo q e que para cada folha L_1 de $\mathcal{F}$ temos $f(L_1 \cap \Sigma) \subset L_1 \cap \Sigma$.

Pela própria definição de holonomia temos que $\text{Hol}(\mathcal{F}, L)$ é um subgrupo de $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$.

Fixamos agora um germe de folheação holomorfa com singularidade na origem $0 \in \mathbb{C}^2$, com representante $\mathcal{F}(U)$ como acima. Seja Γ a separatriz de $\mathcal{F}$. Pelo Teorema de parametrização de Newton-Puiseaux, $\Gamma \backslash \{0\}$ é biholomorfo a um disco furado $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \backslash \{0\}$.

Em particular, podemos escolher um laço $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ gerando o grupo fundamental $\pi_1(\Gamma\setminus\{0\})$ (localmente). A correspondente aplicação de holonomia h_γ é definida em termos de um germe de difeomorfismos complexos na origem de um disco local Σ transversal a $\mathcal{F}$ e centrado em um ponto não singular $q \in \Gamma \setminus \{0\}$. Esta aplicação é bem definida até por conjugação de germes de difeomorfismos holomorfos, e refere-se genericamente como *holonomia local* da separatriz Γ.

1.4 O teorema global de extensão

Definição 1.4.1. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Dizemos, respectivamente, que f é **harmônica**, **subharmônica**, ou **estritamente subharmônica**, se $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z = 0$, $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z \geq 0$, ou $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z > 0$ em U. Note que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{z}\partial z} = \frac{\Delta f}{4},$$

onde Δ é o Laplaciano em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definição 1.4.2. Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Dizemos que f é, respectivamente, **pluriharmônica**, **plurisubharmônica** ou **estritamente plurisubharmônica**, se para todo $p_0 \in U$ e todo $v \in \mathbb{C}^n$, a função $z \to f(p_0 + z \cdot v)$ é harmônica, subharmônica, ou estritamente subharmônica, no subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ em que está definida.

Usaremos as notações p.h para **pluriharmônica**, p.s.h para **plurisubharmônica** e e.p.s.h para **estritamente plurisubharmônica**. O conjunto das funções de classe C^2 de U em $\mathbb{R}$ será denotado por $C^2(U)$.

Dados uma função $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $p \in U$, denotaremos por $H_f(p)$ a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(p)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Não é difícil ver que $H_f(p)$ é hermitiana, isto é, $H_f(p) = \overline{H_f(p)}^t$, onde $\overline{H_f(p)}^t$ é a transporta conjugada de $H_f(p)$. A matriz H_f é chamada **matriz Hessiana** de f.

Definição 1.4.3. Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Definimos a **forma de Levi** de f, como sendo a forma quadrática L_f abaixo:

$$L_f(p) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(p) dz_i \overline{dz_j},\ p \in U.$$

Com esta notação queremos dizer que a cada $p \in U$ associamos uma forma quadrática, $L_f(p)$, tal que

$$L_f(p)\cdot\omega = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial\overline{z_j}}(p)\omega_i\overline{\omega_j} = \omega \cdot H_f(p) \cdot \overline{\omega^t},$$

para todo $\omega \in \mathbb{C}^n$. Vemos então que f é p.h (resp. p.s.h) (resp. e.p.s.h) se, e somente se, $L_f(p) \equiv 0$ (resp. $L_f(p)$ é não negativa definida) (resp. $L_f(p)$ é positiva definida) para todo $p \in U$.

Proposição 1.4.1. (Proposição 7.4.10. em [21]) Sejam $f \in C^2(U)$ e $\phi : V \to U$, uma aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ são abertos. Então $\phi^*(L_f) = L_{f\circ\phi}$. Em particular, se ϕ é um biholomorfismo, então f é p.h (resp. p.s.h) (resp. e.p.s.h) se, e somente se, $f \circ \phi$ é p.h (resp. p.s.h) (resp. e.p.s.h).

Tendo-se em vista da Proposição 1.4.1, é possível estender os conceitos e função plurisubharmônica e estritamente plurisubharmônica para variedades complexas. Sejam M uma variedade complexa e $f \in C^2(M)$. Definimos a forma de Levi de f utilizando cartas locais: dado $p \in M$ seja $\phi : U \to \mathbb{C}^n$ uma carta holomorfa tal que $p \in U$. A forma de Levi de f em p, é a forma quadrática no espaço tangente $T_p(M)$, definida por

$$L_f(p) \cdot v = L_{f\circ\phi^{-1}}(\phi(p)) \cdot (D\phi(p) \cdot v), \quad \text{para todo } v \in T_pM.$$

Levando-se em conta a Proposição 1.4.1, esta definição não depende da carta holomorfa escolhida.

Definição 1.4.4. Sejam M variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $f \in C^2(M)$. Dizemos que f é **pluriharmônica** (resp. **plurisubharmônica**) (resp. **estritamente plurisubharmônica**) se $L_f \equiv 0$ (resp. $L_f(p)$ é não negativa definida em T_pM, para todo $p \in M$) (resp. $L_f(p)$ é positiva definida em T_pM, para todo $p \in M$).

Dado um inteiro k, $1 \leq k \leq n$, dizemos que f é **k-estritamente plurisubharnônica**, se para todo $p \in M$ existe um subespaço complexo $E \subset T_pM$, de dimensão k, tal que $L_f(p)|_E$ é positiva definida, ou seja, para todo $v \in E$, $v \neq 0$, temos $L_f(p)\cdot v > 0$. Usaremos a notação $k-$ e.p.s.h para k-**estritamente plurisubharmônica**.

Definição 1.4.5. Seja M uma variedade complexa conexa de dimensão $n \geq 1$. Dizemos que M é k-**completa**, se existe uma exaustão $f \in C^2(U)$ de M, $f \in C^2(U)$, tal que f é $k-$ e.p.s.h.

Uma **exaustão** de M é uma função $g \in C^0(M)$ com as seguintes propriedades:

(a) g é limitada inferiormente, digamos $g \geq c$.

(b) Para toda sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ que não tem pontos de acumulação em M (denotaremos este fato por $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$), temos $\lim_{n\to\infty} g(p_n) = +\infty$.

Um resultado conhecido é que em toda variedade de classe C^∞, conexa e não compacta existe uma exaustão de classe C^∞.

Observação 1.4.1. Um fato bem conhecido é que uma variedade complexa e conexa M é de **Stein** se, e somente se, existe em M uma exaustão e.p.s.h de classe C^∞. Este resultado é conhecido como Teorema de Hormander.

Proposição 1.4.2. (Proposição 7.4.18. em [21]) Seja X um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(n)$ definido por k polinômios homogêneos não nulos em $\mathbb{C}^{n+1}$. Então $M = \mathbb{C}P(n) - X$ é l-completa, onde $l = n - k + 1$. Em particular, se X é um subconjunto algébrico de codimensão um de $\mathbb{C}P(n)$, então $M = \mathbb{C}P(n) - X$ é de Stein.

O seguinte teorema é chamado Teorema global de extensão:

Teorema 1.4.1. (Teorema 7.4.19. em [21]) Sejam M uma variedade complexa k-completa, onde $k \geq 2$, e $K \subset M$ um compacto tal que $M - K$ é conexo. Seja E um fibrado vetorial holomorfo com base M. Então toda seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em $M - K$ se estende a uma única seção holomorfa (resp. meromorfa) em M.

A partir da Proposição 1.4.2 e do Teorema 1.4.1, obtemos a seguinte consequência:

Corolário 1.4.1. Sejam E um fibrado vetorial holomorfo sobre $\mathbb{C}P(n)$ e X um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(n)$ definido por k polinômios homogêneos não nulos em $\mathbb{C}^{n+1}$, onde $1 \leq k \leq n-1$. Seja V uma vizinhança conexa de X. Então toda seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em V, se estende a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em $\mathbb{C}P(n)$.

1.5 O teorema de Lefschetz e Deligne - Fulton

Teorema 1.5.1. (Teorema 8.13. em [10]) Sejam $H \subset \mathbb{C}P(n)$ uma hipersuperfície e m um ponto de $\mathbb{C}P(n)$ tal que $m \notin H$. Se L é uma linha geral passando por m, isto é, transversal nos pontos lisos de H, então o morfismo

$$i_L : \pi_1(L - (H \cap L), m) \to \pi_1(\mathbb{C}P(n) - H, m)$$

induzido pela inclusão $i : L - (L \cap H) \hookrightarrow \mathbb{C}P(n) - H$ é sobrejetiva.

Capítulo 2

Exemplos interessantes de Folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(m)$

Neste capítulo apresentamos uma família de exemplos interessantes as quais podemos explicitar a integral primeira racional.

Esta família de exemplos de folheações de codimensão um $\mathbb{C}P(n)$ foram obtidas de forma construtiva pela Observação 1.1.4.

2.1 Folheações holomorfas de codimensão um em $\mathbb{C}P(2)$ com hiperplano do infinito invariante

Exemplo 2.1.1. Para $k \geq 2$, podemos definir uma folheação de grau k em $\mathbb{C}P(2)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$,

$$\Omega = \left[-x^2(y^{k-1} + z^{k-1}) + y^{k+1} - z^{k+1}\right] dx + xy^{k-2}(x^2 - y^2)dy + xz^{k-2}(x^2 + z^2)dz$$

a qual tem o hiperplano do infinito $x = 0$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0 : y : z];\ y^{k+1} - z^{k+1} = 0\}$$

a qual é uma hipersuperfície irredutível de grau $k + 1$.
Também observe que

$$d\left(\frac{\Omega}{F}\right) = 0$$

onde F é o polinômio homogêneo de grau $k + 2$ dado por

$$F = x\left[x^2\left(\frac{y^{k-1}}{k-1} + \frac{z^{k-1}}{k-1}\right) - \frac{y^{k+1}}{k+1} + \frac{z^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}\right].$$

Podemos escrever $F = xQ$, onde Q é o polinômio de grau $k + 1$ dado por

$$Q = x^2\left(\frac{y^{k-1}}{k-1} + \frac{z^{k-1}}{k-1}\right) - \frac{y^{k+1}}{k+1} + \frac{z^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}$$

Assim

$$\Omega = x^{k+2}d\left(\frac{Q}{x^{k+1}}\right) = -(k+1)Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^{k+1}}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

O exemplo anterior motiva o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. Sejam $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i, j \leq n$. Consideremos a 1-forma homogênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^3$dada por

$$\begin{aligned}\Omega = & \left[-x_1 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} - x_2 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_0 \\ & + x_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right) dx_1 + x_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right) dx_2\end{aligned}$$

Se os coeficientes satisfazem as condições

$$a_{ij} = \frac{i+1}{j} b_{i+1\, j-1} \tag{2.1}$$

para todo $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k+1$ com $i+j = k+1$ onde $1 \leq k \leq n$ então a condição (2.1) garante que Ω é uma 1-forma integrável com $i_{R_3}(\Omega) = 0$, a qual possui uma integral primeira racional $\dfrac{Q}{x_0^{n+1}}$ onde

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k} + x_0^{n+1} \ .$$

Esta 1-forma Ω induz uma folheação de codimensão um de grau n em $\mathbb{C}P(2)$ que tem o hiperplano do infinito invariante e possui uma integral primeira racional explícita.

Demonstração. Claramente $i_{R_3}(\Omega) = 0$, agora vejamos que Ω é integrável. Temos que

$$\begin{aligned}d\Omega = & -\left[\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} (1+i)[a_{ij} + b_{i+1\, j-1}] x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_1 \wedge dx_0 \\ & -\left[\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} (1+j)[a_{i-1\, j+1} + b_{ij}] x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_2 \wedge dx_0 \\ & + x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} j a_{ij} x_1^i x_2^{j-1} \right) x_0^{n-k} \right] dx_2 \wedge dx_1 \\ & + \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_0 \wedge dx_1 \\ & + x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} i b_{ij} x_1^{i-1} x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_1 \wedge dx_2 \\ & + \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \right] dx_0 \wedge dx_2\end{aligned}$$

$$d\Omega = -\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}\{(1+i)[a_{ij}+b_{i+1\,j-1}]+(n-k+1)a_{ij}\}\,x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]dx_1\wedge dx_0$$

$$-\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}\{(1+j)[a_{i-1\,j+1}+b_{ij}]+(n-k+1)b_{ij}\}\,x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]dx_2\wedge dx_0$$

$$+x_0\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}[ja_{ij}-(i+1)b_{i+1\,j-1}]x_1^i x_2^{j-1}\right)x_0^{n-k}\right]dx_2\wedge dx_1$$

logo por (2.1) temos

$$d\Omega = -(n+2)\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]dx_1\wedge dx_0-(n+2)\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]dx_2\wedge dx_0$$

pois

$$\begin{aligned}(1+i)[a_{ij}+b_{i+1\,j-1}]+(n-k+1)a_{ij} &= (n-k+i+2)a_{ij}+(i+1)b_{i+1\,j-1}\\ &= (n-k+i+2)a_{ij}+ja_{ij}\\ &= (n-k+(i+j)+2)a_{ij}=(n+2)a_{ij}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1+j)[a_{i-1\,j+1}+b_{ij}]+(n-k+1)b_{ij} &= (1+j)a_{i-1\,j+1}+(n-k+j+2)b_{ij}\\ &= ib_{ij}+(n-k+j+2)b_{ij}\\ &= (n-k+(i+j)+2)b_{ij}=(n+2)b_{ij}\end{aligned}$$

agora para simplificar contas denotemos

$$\Lambda_0 = -x_1\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}-x_2\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}$$

$$\Lambda_1 = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}$$

e

$$\Lambda_2 = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_1^i x_2^j\right)x_0^{n-k}$$

Assim temos

$$\Omega = \Lambda_0 dx_0 + x_0\Lambda_1 dx_1 + x_0\Lambda_2 dx_2$$

e

$$d\Omega = -(n+2)\Lambda_1 dx_1\wedge dx_0 - (n+2)\Lambda_2 dx_2\wedge dx_0$$

daí claramente verifica-se

$$\Omega\wedge d\Omega = 0.$$

Assim Ω é uma 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$. Para provar que Ω tem uma integral primeira racional procuramos encontrar F polinômio homogêneo de grau $n+2$ tal que

$$d\left(\frac{\Omega}{F}\right) = 0$$

o que é equivalente a

$$Fd\Omega = dF \wedge \Omega$$

para simplificar as contas continuaremos utilizando as notações dadas acima (Λ_0, Λ_1 e Λ_2) logo temos que

$$\Omega = \Lambda_0 dx_0 + x_0\Lambda_1 dx_1 + x_0\Lambda_2 dx_2$$

e

$$d\Omega = -(n+2)\Lambda_1 dx_1 \wedge dx_0 - (n+2)\Lambda_2 dx_2 \wedge dx_0$$

assim por um lado temos

$$\begin{aligned} dF \wedge \Omega &= \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0\Lambda_1 dx_0 \wedge dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0\Lambda_2 dx_0 \wedge dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_1}\Lambda_0 dx_1 \wedge dx_0 \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x_1} x_0\Lambda_2 dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Lambda_0 dx_2 \wedge dx_0 + \frac{\partial F}{\partial x_2} x_0\Lambda_1 dx_2 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

organizando temos

$$\begin{aligned} dF \wedge \Omega &= \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0\Lambda_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}\Lambda_0\right] dx_0 \wedge dx_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0\Lambda_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2}\Lambda_0\right] dx_0 \wedge dx_2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} x_0\Lambda_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2} x_0\Lambda_1\right] dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

por outro lado

$$Fd\Omega = -(n+2)F\Lambda_1 dx_1 \wedge dx_0 - (n+2)F\Lambda_2 dx_2 \wedge dx_0 \ .$$

Comparando vemos que na última expressão não temos termos $dx_1 \wedge dx_2$. Portanto temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} x_0\Lambda_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} x_0\Lambda_1$$

agora como F é um polinômio homogêneo de grau $n+2$ então $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ são polinômios homogêneos de grau $n+1$ então temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_0\Lambda_1 \ \text{ e } \ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_0\Lambda_2.$$

Logo substituindo Λ_1 e Λ_2 tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \tag{2.2}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} \ . \tag{2.3}$$

Integrando (2.2) em relação a x_1 temos

$$F = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + h(x_0, x_2) \tag{2.4}$$

onde h é um polinômio. Assim derivando (2.4) em relação a x_2 e usando (2.3) temos

$$x_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{j a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^{j-1} \right) x_0^{n-k} + \frac{\partial h}{\partial x_2} = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k}$$

agora por (2.1) temos

$$x_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{i+1\, j-1} x_1^{i+1} x_2^{j-1} \right) x_0^{n-k} + \frac{\partial h}{\partial x_2} = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k}$$

e como

$$x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{ij} x_1^i x_2^j \right) x_0^{n-k} = x_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i+j=k} b_{i+1\, j-1} x_1^{i+1} x_2^{j-1} \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} x_2^k x_0^{n-k+1}$$

temos então

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \sum_{k=0}^{n} b_{0k} x_2^k x_0^{n-k+1} \tag{2.5}$$

integrando (2.5) em relação a x_2 temos

$$h = \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k+1} + g(x_0) \tag{2.6}$$

onde g é um polinômio. Agora substituindo (2.6) em (2.4) temos

$$F = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k+1} + g(x_0) \ . \tag{2.7}$$

Agora como $Fd\Omega = dF \wedge \Omega$,

$$dF \wedge \Omega = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 \Lambda_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} \Lambda_0 \right] dx_0 \wedge dx_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 \Lambda_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2} \Lambda_0 \right] dx_0 \wedge dx_2$$

e

$$Fd\Omega \ = \ -(n+2) F \Lambda_1 dx_1 \wedge dx_0 - (n+2) F \Lambda_2 dx_2 \wedge dx_0$$

temos em $dx_0 \wedge dx_1$:

$$(n+2) F \Lambda_1 = \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 \Lambda_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} \Lambda_0$$

logo substituindo (2.2), (2.7) e Λ_0 temos

$$(n+2) g = x_0 g'$$

portanto podemos considerar

$$g = x_0^{n+2}$$

substituindo está última igualdade em (2.7) tem-se

$$F = x_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k+1} + x_0^{n+2} \ . \tag{2.8}$$

Podemos escrever $F = x_0 Q$, onde Q é um polinômio homogêneo de grau $n+1$ dado por

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{a_{ij}}{i+1} x_1^{i+1} x_2^j \right) x_0^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_{0k} \frac{x_2^{k+1}}{k+1} x_0^{n-k} + x_0^{n+1} \ .$$

Assim

$$\Omega = x_0^{n+2} d\left(\frac{Q}{x_0^{n+1}} \right) = -(n+1) Q dx_0 + x_0 dQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x_0^{n+1}}$ é uma integral primeira racional de Ω. □

Estudemos o tipo de singularidades da folheação induzida pela Proposição 2.1.1.

Exemplo 2.1.2. Consideremos a folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um e grau 1 em $\mathbb{C}P(2)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$,

$$\Omega = \left[-x(y+z) + y^2 - z^2 \right] dx + x(x-y) dy + x(x+z) dz$$

a qual tem o hiperplano do infinito $x = 0$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$Sing(\mathcal{F}) = \{[0:1:1], [0:-1:1], [1:1:-1]\},$$

agora as singularidades no infinito são

$$L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0:1:1], [0:-1:1]\}.$$

Para saber o tipo destas singularidades, olhemos a carta $z = 1$ em $\mathbb{C}^2$, assim temos

$$\omega = \left[-x(y+1) + y^2 - 1 \right] dx + x(x-y) dy$$

o campo dual a esta 1-forma está dada por

$$X_\omega = x(x-y) \frac{\partial}{\partial x} + \left[x(y+1) - y^2 + 1 \right] \frac{\partial}{\partial y}$$

suas singularidades são

$$Sing(X_\omega) = \{(0,1), (0,-1), (-1,-1)\}$$

a parte linear deste campo esta dada por

$$DX_\omega(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-y & -x \\ y+1 & x-2y \end{bmatrix}$$

observe que duas singularidades são do tipo Poincaré racional positivo e a outra é Siegel, de fato:

$$DX_\omega(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \ DX_\omega(0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ DX_\omega(-1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, seja

$$Q = x(y+z) - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + x^2.$$

Finalmente observe que

$$\Omega = x^3 d\left(\frac{Q}{x^2}\right) = -2Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^2}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

Exemplo 2.1.3. Consideremos a folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um e grau 2 em $\mathbb{C}P(2)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$,

$$\Omega = \left[-x^2(y+z) + y^3 - z^3\right] dx + x(x^2 - y^2)dy + x(x^2 + z^2)dz$$

a qual tem o hiperplano infinito $x = 0$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$Sing(\mathcal{F}) = \{[0:1:1], [0:\xi:1], [1:\xi^2:1], [i:i:1], [-i:-i:1], [i:-i:1], [-i:i:1]\},$$

onde ξ é raiz do polinômio $r^2 + r + 1 = 0$ e $i = \sqrt{-1}$. Agora as singularidades no infinito são

$$L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0:\xi:1], [0:\xi:1]\}.$$

Para saber o tipo destas singularidades, olhemos na carta $z = 1$ em $\mathbb{C}^2$ temos

$$\omega = \left[-x^2(y+1) + y^3 - 1\right] dx + x(x^2 - y^2)dy$$

o campo dual a esta 1-forma está dada por

$$X_\omega = x(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + \left[x^2(y+1) - y^3 + 1\right]\frac{\partial}{\partial y}$$

suas singularidades são

$$Sing(X_\omega) = \{(0,1), (0,\xi), (0,\xi^2), (i,i), (-i,-i), (-i,i), (i,-i)\}$$

a parte linear deste campo esta dada por

$$DX_\omega(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - y^2 & -2xy \\ 2x(y+1) & x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

observe que três singularidades são do tipo Poincaré racional positivo e as outras são Siegel, de fato:

$$DX_\omega(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ DX_\omega(0,\xi) = \begin{bmatrix} -\xi^2 & 0 \\ 0 & -3\xi^2 \end{bmatrix} \text{ e } DX_\omega(0,\xi^2) = \begin{bmatrix} -\xi & 0 \\ 0 & -3\xi \end{bmatrix}.$$

$$DX_\omega(i,i) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2i(i+1) & 2 \end{bmatrix},\ DX_\omega(-i,-i) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2i(1-i) & 2 \end{bmatrix}$$

$$DX_\omega(-i,i) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2i(i+1) & 2 \end{bmatrix} \text{ e } DX_\omega(i,-i) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2i(1-i) & 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, seja

$$Q = x^2(y+z) - \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + x^3.$$

Finalmente observe que

$$\Omega = x^4 d\left(\frac{Q}{x^3}\right) = -3Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^3}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

Exemplo 2.1.4. Consideremos a folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um e grau 3 em $\mathbb{C}P(2)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$,

$$\Omega = \left[-x^2(y^2+z^2)+y^4-z^4\right]dx + xy(x^2-y^2)dy + xz(x^2+z^2)dz$$

a qual tem o hiperplano infinito $x=0$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$\begin{array}{rcl} Sing(\mathcal{F}) & = & \{[0:1:1],[0:-1:1],[0:i:1],[0:-i:1],[1:0:0],[i:0:1],[-i:0:1] \\ & & [1:1:0],[i:i:1],[-i:-i:1],[-1:1:0],[i:-i:1],[-i:i:1]\} \end{array},$$

onde $i=\sqrt{-1}$. Agora as singularidades no infinito são

$$L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0:1:1],[0:-1:1],[0:i:1],[0:-i:1]\}.$$

Para saber o tipo destas singularidades, olhemos na carta $z=1$ em $\mathbb{C}^2$ temos

$$\omega_1 = \left[-x^2(y^2+1)+y^4-1\right]dx + xy(x^2-y^2)dy$$

o campo dual a esta 1-forma está dada por

$$X_{\omega_1} = xy(x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x} + \left[x^2(y^2+1)-y^4+1\right]\frac{\partial}{\partial y}$$

suas singularidades são

$$Sing(X_{\omega_1}) = \{(0,1),(0,-1),(0,i),(0,-i),(i,0),(-i,0),(i,i),(-i,-i),(i,-i),(-i,i)\}$$

a parte linear deste campo esta dada por

$$DX_{\omega_1}(x,y) = \begin{bmatrix} 3yx^2-y^3 & x^3-3y^2 \\ 2x(y^2+1) & 2x^2y-4y^3 \end{bmatrix}$$

observe que quatro singularidades são do tipo Poincaré racional positivo e as outras são Siegel, de fato:

$$DX_{\omega_1}(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\ DX_{\omega_1}(0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$DX_{\omega_1}(0,i) = \begin{bmatrix} i & 3 \\ 0 & 4i \end{bmatrix} \text{ e } DX_{\omega_1}(0,-i) = \begin{bmatrix} -i & 3 \\ 0 & -4i \end{bmatrix}.$$

$$DX_{\omega_1}(i,0) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 2i & 0 \end{bmatrix},\ DX_{\omega_1}(-i,0) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{bmatrix},\ DX_{\omega_1}(i,i) = \begin{bmatrix} -2i & 3-i \\ 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

$$DX_{\omega_1}(-i,-i) = \begin{bmatrix} 2i & i+3 \\ 0 & -2i \end{bmatrix},\ DX_{\omega_1}(i,-i) = \begin{bmatrix} 2i & 3-i \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \text{ e } DX_{\omega_1}(-i,i) = \begin{bmatrix} -2i & 3-i \\ 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

Para ver o tipo de singularidades das singularidades restantes, olhemos na carta $x=1$ em $\mathbb{C}^2$ temos

$$\omega_2 = y^2(1-y^2)dy + z(1+z^2)dz$$

o campo dual a esta 1-forma está dada por

$$X_{\omega_2} = z(1+z^2)\frac{\partial}{\partial y} + y(y^2-1)\frac{\partial}{\partial z}$$

suas singularidades são

$$Sing(X_{\omega_2}) = \{(0,0),(1,0),(-1,0),(0,i),(1,i),(-1,i),(0,-i),(1,-i),(-1,-i)\}$$

a parte linear deste campo esta dada por

$$DX_{\omega_2}(y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1+3z^2 \\ 3y^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

observe que as quatro primeiras singularidades são Siegel (as demais singularidades coincidem com as outras singularidades já estudadas na carta $z=1$) pois

$$DX_{\omega_2}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ DX_{\omega_2}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } DX_{\omega_2}(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, seja

$$Q = \frac{x^2}{2}(y^2+z^2) - \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + x^4.$$

Finalmente observe que

$$\Omega = x^5 d\left(\frac{Q}{x^4}\right) = -4Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^4}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

Todos estes exemplos anteriores motivam o seguinte resultado.

Proposição 2.1.2. Nas condições da Proposição 2.1.1, suponhamos que $a_{n0} \neq 0$ e $b_{0n} \neq 0$, então a folheação de codimensão um induzida em $\mathbb{C}P(2)$ possui singularidades do tipo Poincaré racional no hiperplano do infinito.

Demonstração. Temos que folheação $\mathcal{F}$ de grau $n \geq 0$ induzida em $\mathbb{C}P(2)$ tem o hiperplano do infinito $L = \pi(x_0 = 0)$ invariante por $\mathcal{F}$. Temos também que

$$H = L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0:x_1:x_2];\ \sum_{i+j=n} a_{ij}x_1^{i+1}x_2^j + \sum_{i+j=n} b_{ij}x_1^i x_2^{j+1} = 0\}$$

observe que se $x_1 = 0$ em H temos que $b_{0n}x_2^{n+1} = 0$ como $b_{0n} \neq 0$ (pela hipótese (2) da Proposição 2.1.1) então $x_2 = 0$ o qual é absurdo assim $x_1 \neq 0$ em H logo dividindo por x_1^{n+1} em H

$$\sum_{i+j=n} a_{ij}\frac{x_2^j}{x_1^{n-i}} + \sum_{i+j=n} b_{ij}\frac{x_2^{j+1}}{x_1^{n+1-i}} = 0$$

equivalentemente

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j\,j}\frac{x_2^j}{x_1^j} + \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\frac{x_2^{j+1}}{x_1^{j+1}} = 0$$

seja $\xi = \dfrac{x_2}{x_1}$ então temos

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j\,j}\xi^j + \sum_{j=0}^{n} b_{n-j\,j}\xi^{j+1} = 0 \tag{2.9}$$

o qual podemos escrever como segue

$$a_{n0} + \sum_{j=0}^{n-1}[a_{n-j-1\,j} + b_{n-j\,j}]\xi^{j+1} + b_{0n}\xi^{n+1} = 0$$

o polinômio anterior possui $(n+1)$-raízes digamos $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n+1}$ (contando multiplicidade); portanto H possui $(n+1)$- singularidades

$$[0:1:\xi_1],[0:1:\xi_2],\ldots,[0:1:\xi_{n+1}].$$

Para saber o tipo destas singularidades, olhemos na carta $x_1=1$ em $\mathbb{C}^2$ temos

$$\begin{aligned}\omega = & \left[-\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}-x_2\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]dx_0\\ & +x_0\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}\right)dx_2\end{aligned}$$

o campo dual a esta 1-forma está dada por

$$\begin{aligned}\chi_\omega = & \ x_0\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\\ & +\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}+x_2\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}$$

as singularidades deste campo no infinito $(0,x_2)$ estão dadas pelas equações

$$\sum_{i+j=n}a_{ij}x_2^j+\sum_{i+j=n}b_{ij}x_2^{j+1}=0$$

re-escrevendo

$$\sum_{j=0}^{n}a_{n-j\ j}x_2^j+\sum_{j=0}^{n}b_{n-j\ j}x_2^{j+1}=0$$

a qual por (2.9) possui $n+1-$raízes $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ portanto $(0,\xi_j)$ é singularidade do campo χ_ω para todo $j=1,\ldots,n+1$. Agora olhando a parte linear do campo χ_ω temos

$$D\chi_\omega(x_0,x_2)=\begin{bmatrix}A(x_0,x_2) & B(x_0,x_2)\\ C(x_0,x_2) & D(x_0,x_2)\end{bmatrix}$$

onde

$$A(x_0,x_2)=\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}$$

$$B(x_0,x_2)=x_0\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k,\ j\neq 0}jb_{ij}x_2^{j-1}\right)x_0^{n-k}\right)$$

$$C(x_0,x_2)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\sum_{i+j=k}a_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k-1}+x_2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\sum_{i+j=k}b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k-1}$$

e

$$D(x_0,x_2)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k,\ j\neq 0}ja_{ij}x_2^{j-1}\right)x_0^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k}(j+1)b_{ij}x_2^j\right)x_0^{n-k}.$$

logo

$$D\chi_\omega(0,\xi_l) = \begin{bmatrix} \sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j & 0 \\ C(0,\xi_l) & \sum_{i+j=n,\, j\neq 0} j a_{ij}\xi_l^{j-1} + \sum_{i+j=n}(j+1)b_{ij}\xi_l^j \end{bmatrix}$$

o quociente os autovalores associados a esta singularidade está dado por

$$\frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{\sum_{i+j=n,\, j\neq 0} j a_{ij}\xi_l^{j-1} + \sum_{i+j=n}(j+1)b_{ij}\xi_l^j}$$

agora usando que

$$j a_{ij} = (i+1)b_{i+1\, j-1}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{\sum_{i+j=n,\, j\neq 0} j a_{ij}\xi_l^{j-1} + \sum_{i+j=n}(j+1)b_{ij}\xi_l^j} &= \frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{\sum_{i+j=n,\, j\neq 0} (i+1)b_{i+1\, j-1}\xi_l^{j-1} + \sum_{i+j=n}(j+1)b_{ij}\xi_l^j} \\ &= \frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{\sum_{i+j=n} i b_{ij}\xi_l^j + \sum_{i+j=n}(j+1)b_{ij}\xi_l^j} = \frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{\sum_{i+j=n}(i+j+1)b_{ij}\xi_l^j} \\ &= \frac{\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j}{(n+1)\sum_{i+j=n} b_{ij}\xi_l^j} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

portanto as singularidades são do tipo Poincaré racional positivo. □

2.2 Folheações holomorfas de codimensão um em $\mathbb{C}P(m)$, $m \geq 3$, com hiperplano do infinito invariante

Exemplo 2.2.1. Para $k \geq 2$ e $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}^*$ fixos, podemos definir uma folheação de grau k em $\mathbb{C}P(3)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^4$,

$$\begin{aligned} \Omega &= \left[-x^2(ay^{k-1} + bz^{k-1} + cw^{k-1}) + \alpha y^{k+1} + \beta z^{k+1} + \gamma w^{k+1}\right] dx \\ &\quad + xy^{k-2}(ax^2 - \alpha y^2)dy + xz^{k-2}(bx^2 - \beta z^2)dz + xw^{n-2}(cx^2 - \gamma w^2)dw \end{aligned}$$

a qual tem o hiperplano do infinito $L = \pi(x = 0)$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$S := L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0 : y : z : w];\ \alpha y^{k+1} + \beta z^{k+1} + \gamma w^{k+1} = 0\}$$

a qual é uma hipersuperfície irredutível lisa de grau $k+1$ e também é uma componente de Kupka, pois

$$d\Omega = -(k+2)(ax^2y^{k-2} - \alpha y^k)dy \wedge dx - (k+2)(bx^2z^{k-2} - \beta z^k)dz \wedge dx - (k+2)(cx^2w^{k-2} - \gamma w^k)dw \wedge dx$$

e

$$d\Omega|_S = -(k+2)\alpha y^k dy \wedge dx - (k+2)\beta z^k dz \wedge dx - (k+2)\gamma w^k dw \wedge dx \neq 0.$$

Alem disso,

$$d\left(\frac{\Omega}{F}\right) = 0$$

onde F é o polinômio homogêneo de grau $k+2$ dado por

$$F = x^2\left[x\left(a\frac{y^{k-1}}{k-1} + b\frac{z^{k-1}}{k-1} + c\frac{w^{k-1}}{k-1}\right) - \alpha\frac{y^{k+1}}{k+1} - \beta\frac{z^{k+1}}{k+1} - \gamma\frac{w^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}\right].$$

Podemos escrever $F = xQ$, onde Q é o polinômio de grau k dado por

$$Q = x^2\left(a\frac{y^{k-1}}{k-1} + b\frac{z^{k-1}}{k-1} + c\frac{w^{k-1}}{k-1}\right) - \alpha\frac{y^{k+1}}{k+1} - \beta\frac{z^{k+1}}{k+1} - \gamma\frac{w^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}.$$

Assim

$$\Omega = x^{k+2}d\left(\frac{Q}{x^{k+1}}\right) = -(k+1)Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^{k+1}}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

Exemplo 2.2.2. Para $k \geq 2$ e $a,\ b,\ c,\ d,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \theta \in \mathbb{C}^*$ fixos, podemos definir uma folheação de grau k em $\mathbb{C}P(4)$ dada pela 1-forma integrável em $\mathbb{C}^5$,

$$\begin{aligned}\Omega &= \left[-x^2(ay^{k-1} + bz^{k-1} + cw^{k-1} + du^{k-1}) + \alpha y^{k+1} + \beta z^{k+1} + \gamma w^{k+1} + \theta u^{k+1}\right]dx \\ &\quad + xy^{k-2}(ax^2 - \alpha y^2)dy + xz^{k-2}(bx^2 - \beta z^2)dz \\ &\quad + xw^{k-2}(cx^2 - \gamma w^2)dw + xu^{k-2}(dx^2 - \theta u^2)du\end{aligned}$$

a qual tem o hiperplano infinito $L = \pi(x = 0)$ invariante por $\mathcal{F}$. Note que

$$S := L \cap Sing(\mathcal{F}) = \{[0 : y : z : w : u];\ \alpha y^{k+1} + \beta z^{k+1} + \gamma w^{k+1} + \theta u^{k+1} = 0\}$$

a qual é uma hipersuperfície irredutível lisa de grau $k+1$ e também é uma componente de Kupka, pois

$$\begin{aligned}d\Omega = &-(k+2)(ax^2y^{k-2} - \alpha y^k)dy \wedge dx - (k+2)(bx^2z^{k-2} - \beta z^k)dz \wedge dx \\ &-(k+2)(cx^2w^{k-2} - \gamma w^k)dw \wedge dx - (k+2)(dx^2u^{k-2} - \theta u^k)du \wedge dx\end{aligned}$$

e

$$d\Omega|_S = -(k+2)\alpha y^k dy \wedge dx - (k+2)\beta z^k dz \wedge dx - (k+2)\gamma w^k dw \wedge dx - (k+2)\theta u^k du \wedge dx \neq 0.$$

Analogamente,

$$d\left(\frac{\Omega}{F}\right) = 0$$

onde F é o polinômio homogêneo de grau $k+2$ dado por

$$\begin{aligned}F &= x\left[x^2\left(a\frac{y^{k-1}}{k-1} + b\frac{z^{k-1}}{k-1} + c\frac{w^{k-1}}{k-1} + d\frac{u^{k-1}}{k-1}\right)\right. \\ &\quad \left. -\alpha\frac{y^{k+1}}{k+1} - \beta\frac{z^{k+1}}{k+1} - \gamma\frac{w^{k+1}}{k+1} - \theta\frac{u^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}\right].\end{aligned}$$

Podemos escrever $F = xQ$, onde Q é o polinômio de grau k dado por

$$\begin{aligned} Q &= x^2\left(a\frac{y^{k-1}}{k-1}+b\frac{z^{k-1}}{k-1}+c\frac{w^{k-1}}{k-1}+d\frac{u^{k-1}}{k-1}\right) \\ &\quad -\alpha\frac{y^{k+1}}{k+1}-\beta\frac{z^{k+1}}{k+1}-\gamma\frac{w^{k+1}}{k+1}-\theta\frac{u^{k+1}}{k+1}+x^{k+1} \end{aligned}.$$

Assim

$$\Omega = x^{k+2}d\left(\frac{Q}{x^{k+1}}\right) = -(k+1)Qdx + xdQ$$

portanto $\dfrac{Q}{x^{k+1}}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$.

Os Exemplos 2.2.1 e 2.2.2 motivam o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1. Sejam $a_{i,Q} = a_{i,(j_1 j_2 \ldots j_m)} \in \mathbb{C}$, para todo $0 \leq i \leq m$ e para todo $0 \leq |Q| \leq n$. Consideremos a 1-forma homogênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^{m+1}$

$$\Omega = \left[-\sum_{i=1}^{m} x_i\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}\right)\right]dx_0 + \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j+1}\right]dx_i$$

onde $X^Q = x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_m^{j_m}$, $|Q| = j_1 + j_2 + \ldots + j_m$, $j_i \in \mathbb{Z}_0^+$. Se os coeficientes satisfazem as condições

$$j_k a_{i,Q} = (1+j_i)a_{k,Q_{j_k}^{j_i}} \tag{2.10}$$

onde $Q_{j_k}^{j_i} = (j_1, \ldots, j_i+1, \ldots, j_k-1, \ldots, j_m)$, sempre que $|Q| = j$ e $1 \leq i < k \leq m$ então a condição (2.10) garante que Ω é uma 1-forma integrável com $i_{R_{m+1}}(\Omega) = 0$, a qual possui uma integral primeira racional $\dfrac{G}{x_0^{n+1}}$ onde

$$G = \sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_i|=j}\frac{a_{i,Q_i}}{j_1+1}X^{(Q_i)^{j_i}}\right)x_0^{n-j}\right) + x_0^{n+1} \ ,$$

onde

$$Q_0 = Q \quad \text{e} \quad Q_i = (j_1, \ldots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \ldots, j_m) \text{ para todo } 1 \leq i \leq m-1.$$

Esta 1-forma Ω induz uma folheação de codimensão um de grau n em $\mathbb{C}P(m)$ que tem o hiperplano do infinito invariante e possui uma integral primeira racional explícita.

Demonstração. Claramente $i_{R_{m+1}}(\Omega) = 0$. Derivando temos

$$d\Omega = -\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}\right)dx_i + x_i d\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}\right)\right]\wedge dx_0$$

$$+\sum_{i=1}^{m} d\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j+1}\right)\wedge dx_i.$$

Observe que

$$d\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)=\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{|Q|=j}(n-j)a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j-1}\right)dx_0$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k$$

e

$$d\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j+1}\right)=\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}(n-j+1)a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)dx_0$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_k$$

onde $X^{Q_{j_k}}=x_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_{j_{k-1}}^{j_{k-1}}x_{j_k}^{j_k-1}x_{j_{k+1}}^{j_{k+1}}\dots x_m^{j_m}$. Denotemos

$$X^{Q^{j_k}}=x_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_{j_{k-1}}^{j_{k-1}}x_{j_k}^{j_k+1}x_{j_{k+1}}^{j_{k+1}}\dots x_m^{j_m}\quad\text{e}\quad X^{Q_{j_k}^{j_i}}=x_1^{j_1}\dots x_{j_i}^{j_i+1}\dots x_{j_k}^{j_k-1}\dots x_m^{j_m}.$$

Daí obtemos

$$d\Omega=-\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}dx_i+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}^{j_i}}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k\right]\wedge dx_0$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}(n-j+1)a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)dx_0\wedge dx_i$$

$$+\sum_{1\le i\neq k\le m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_k\wedge dx_i$$

agora como $X^{Q_{j_i}^{j_i}}=X^{Q}$ temos

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}dx_i+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}^{j_i}}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}dx_i+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_i a_{i,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}dx_i$$

$$+\sum_{k=1;k\neq i}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}^{j_i}}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (1+j_i) a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} dx_i + \sum_{k=1;k\neq i}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} j_k a_{i,Q} X^{Q^{j_i}_{j_k}} \right) x_0^{n-j} \right) dx_k$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (1+j_i) a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} dx_i + \sum_{k=1;k\neq i}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (1+j_k) a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} X^Q \right) x_0^{n-j} \right) dx_k$$

onde $a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} = a_{i,j_1 \ldots\, j_k+1\, \ldots\, j_i-1\, \ldots j_m}$ ou $a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} = a_{i,j_1 \ldots\, j_i-1\, \ldots\, j_k+1\, \ldots j_m}$.

Também como $a_{i,Q^{j_i}_{j_i}} = a_{i,Q}$ e $X^{Q^{j_i}_{j_i}} = X^Q$ temos

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} j_k a_{i,Q} X^{Q^{j_i}_{j_k}} \right) x_0^{n-j} \right) dx_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (1+j_k) a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} X^Q \right) x_0^{n-j} \right) dx_k.$$

Agora voltando a $d\Omega$ temos

$$d\Omega = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (1+j_k) a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} X^Q \right) x_0^{n-j} \right) dx_k \right) \wedge dx_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} (n-j+1) a_{i,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} \right) dx_0 \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{1\leq i\neq k\leq m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} j_k a_{i,Q} X^{Q_{j_k}} \right) x_0^{n-j+1} \right) dx_k \wedge dx_i$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \left[\sum_{i=1}^{m} (1+j_k) a_{i,Q^{j_k}_{j_i}} + (n-j+1) a_{k,Q} \right] X^Q \right) x_0^{n-j} \right) dx_k \wedge dx_0$$

$$+ \sum_{1\leq i<k\leq m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} j_k a_{i,Q} X^{Q_{j_k}} \right) x_0^{n-j+1} \right) dx_k \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{1\leq k<i\leq m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} j_k a_{i,Q} X^{Q_{j_k}} \right) x_0^{n-j+1} \right) dx_k \wedge dx_i$$

observe que

$$\sum_{1\leq k<i\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_k\wedge dx_i$$

$$=\sum_{1\leq i<k\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_i a_{k,Q}X^{Q_{j_i}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_i\wedge dx_k$$

$$=\sum_{1\leq i<k\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}(1+j_i)a_{k,Q^{j_i}_{j_k}}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_i\wedge dx_k$$

voltando a $d\Omega$ temos

$$d\Omega=-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\left[\sum_{i=1}^{m}(1+j_k)a_{i,Q^{j_k}_{j_i}}+(n-j+1)a_{k,Q}\right]X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k\wedge dx_0$$

$$+\sum_{1\leq i<k\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}j_k a_{i,Q}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_k\wedge dx_i$$

$$+\sum_{1\leq i<k\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}(1+j_i)a_{k,Q^{j_i}_{j_k}}X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_i\wedge dx_k$$

finalmente

$$d\Omega=-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\left[\sum_{i=1}^{m}(1+j_k)a_{i,Q^{j_k}_{j_i}}+(n-j+1)a_{k,Q}\right]X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k\wedge dx_0$$

$$+\sum_{1\leq i<k\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\left[j_k a_{i,Q}-(1+j_i)a_{k,Q^{j_i}_{j_k}}\right]X^{Q_{j_k}}\right)x_0^{n-j+1}\right)dx_i\wedge dx_k$$

logo por (2.10) temos

$$d\Omega=-(n+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{k,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}\right)dx_k\wedge dx_0$$

pois para $|Q|=\sum_{i=1}^{m}j_i=j$ tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(1+j_k)a_{i,Q^{j_k}_{j_i}}+(n-j+1)a_{k,Q} &= (n+j_k-j+2)a_{k,Q}+\sum_{i=1\ i\neq k}^{m}(1+j_k)a_{i,Q^{j_k}_{j_i}}\\ &= (n+j_k-j+2)a_{k,Q}+\sum_{i=1\ i\neq k}^{m}j_i a_{k,Q}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(1+j_k)a_{i,Q^{j_k}_{j_i}}+(n-j+1)a_{k,Q}=\left[(n+2-j)+\sum_{i=1}^{m}j_i\right]a_{k,Q}=(n+2)a_{k,Q}.$$

Agora para simplificar as contas denotemos

$$\Lambda_0=-\sum_{i=1}^{m}x_i\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}\right)\quad\text{e}\quad\Lambda_i=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}.$$

Assim temos

$$\Omega=\Lambda_0dx_0+\sum_{i=1}^{m}x_0\Lambda_idx_i\quad\text{e}\quad d\Omega=-(n+2)\sum_{i=1}^{m}\Lambda_idx_i\wedge dx_0.$$

Vejamos agora que Ω é integrável, de fato:

$$\begin{aligned}\Omega\wedge d\Omega &= -(n+2)x_0\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Lambda_i\Lambda_kdx_i\wedge dx_k\wedge dx_0=-(n+2)x_0\sum_{1\le i\neq k\le m}\Lambda_i\Lambda_kdx_i\wedge dx_k\wedge dx_0\\ &= -(n+2)x_0\left[\sum_{1\le i<k\le m}\Lambda_i\Lambda_kdx_i\wedge dx_k\wedge dx_0+\sum_{1\le k<i\le m}\Lambda_i\Lambda_kdx_i\wedge dx_k\wedge dx_0\right]\\ &= -(n+2)x_0\left[\sum_{1\le i<k\le m}\Lambda_i\Lambda_kdx_i\wedge dx_k\wedge dx_0+\sum_{1\le i<k\le m}\Lambda_k\Lambda_idx_k\wedge dx_i\wedge dx_0\right]=0.\end{aligned}$$

Assim Ω é uma 1-forma integrável em $\mathbb{C}^{m+1}$. Para provar que Ω tem uma integral primeira racional procuramos encontrar F polinômio homogêneo de grau $n+2$ tal que

$$d\left(\frac{\Omega}{F}\right)=0$$

o que equivalente a

$$Fd\Omega=dF\wedge\Omega$$

para simplificar as contas continuaremo utilizando as notações dadas acima de $\Lambda_0,\ \Lambda_1,$ $\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m$. Assim temos

$$\Omega=\Lambda_0dx_0+\sum_{i=1}^{m}x_0\Lambda_idx_i$$

e

$$d\Omega=-(n+2)\sum_{i=1}^{m}\Lambda_idx_i\wedge dx_0.$$

Observe que por um lado temos

$$\begin{aligned}dF\wedge\Omega &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}dx_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_k}dx_k\right)\wedge\left(\Lambda_0dx_0+\sum_{i=1}^{m}x_0\Lambda_idx_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}\Lambda_idx_0\wedge dx_i+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_0dx_k\wedge dx_0+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_idx_k\wedge dx_i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dF\wedge\Omega &= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_0 - x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}\right]dx_i\wedge dx_0 + \sum_{1\le i\neq k\le m}^{m} x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_i dx_k\wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_0 - x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}\right]dx_i\wedge dx_0 + \sum_{1\le i<k\le m}^{m} x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_i dx_k\wedge dx_i \\
&\quad + \sum_{1\le k<i\le m}^{m} x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_i dx_k\wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_0 - x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}\right]dx_i\wedge dx_0 + \sum_{1\le i<k\le m}^{m} x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_i dx_k\wedge dx_i \\
&\quad + \sum_{1\le i<k\le m}^{m} x_0\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_k dx_i\wedge dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_0 - x_0\frac{\partial F}{\partial x_0}\right]dx_i\wedge dx_0 + \sum_{1\le i<k\le m}^{m}\left[x_0\frac{\partial F}{\partial x_k}\Lambda_i - x_0\frac{\partial F}{\partial x_i}\Lambda_k\right]dx_k\wedge dx_i.
\end{aligned}
$$

Por outro lado

$$Fd\Omega = -(n+2)\sum_{i=1}^{m} F\Lambda_i dx_i\wedge dx_0.$$

Comparando vemos que na última expressão não temos termos $dx_i\wedge dx_k$ com $i\neq k$. Portanto temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}x_0\Lambda_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}x_0\Lambda_i,\ \text{para } 1\le i<k\le m.$$

Como F é um polinômio homogêneo de grau $n+2$ então $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ são polinômios homogêneos de grau $n+1$ e como Λ_i são de grau n temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = x_0\Lambda_i,\ \text{para } 1\le i\le m.$$

Logo substituindo Λ_i temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = x_0\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{i,Q}X^Q\right)x_0^{n-j},\ \text{para } 1\le i\le m. \tag{2.11}$$

Em (2.11) para $i=1$ e integrando em relação a x_1 temos

$$F = x_0\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\frac{a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Q^{j_1}}\right)x_0^{n-j} + f_1(x_0,x_2,\ldots,x_m) \tag{2.12}$$

onde f_1 é um polinômio. Assim derivando (2.12) em relação a x_2 e usando (2.11) para $i=2$ temos

$$x_0\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\frac{j_2 a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Q^{j_1}_{j_2}}\right)x_0^{n-j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_0\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j} a_{2,Q}X^Q\right)x_0^{n-j}$$

agora como

$$j_2 a_{1,Q} = (1+j_1) a_{2,Q_{j_2}^{j_1}}$$

temos

$$x_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{2,Q_{j_2}^{j_1}} X^{Q_{j_2}^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{2,Q} X^Q \right) x_0^{n-j}$$

e como

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{2,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{2,Q_{j_2}^{j_1}} X^{Q_{j_2}^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} a_{2,Q_1} X^{Q_1} \right) x_0^{n-j}$$

onde $Q_1 = (0, j_2, \ldots, j_m)$ então

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} a_{2,Q_1} X^{Q_1} \right) x_0^{n-j+1} \tag{2.13}$$

integrando (2.13) em relação a x_2 temos

$$f_1 = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)^{j_2}} \right) x_0^{n-j+1} + f_2(x_0, x_3, \ldots, x_m) \tag{2.14}$$

onde f_2 é um polinômio. Agora substituindo (2.14) em (2.12) temos

$$\begin{aligned} F &= x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \frac{a_{1,Q}}{j_1+1} X^{Q^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)^{j_2}} \right) x_0^{n-j+1} \\ &\quad + f_2(x_0, x_3, \ldots, x_m) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Assim derivando (2.15) em relação a x_3 e usando (2.11) para $i = 3$ temos

$$x_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \frac{j_3 a_{1,Q}}{j_1+1} X^{Q_{j_3}^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{j_3 a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)_{j_3}^{j_2}} \right) x_0^{n-j+1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

$$= x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{3,Q} X^Q \right) x_0^{n-j}$$

agora como

$$j_3 a_{1,Q} = (1+j_1) a_{3,Q_{j_3}^{j_1}} \quad \text{e} \quad j_3 a_{2,Q_1} = (1+j_2) a_{3,(Q_1)_{j_3}^{j_2}}.$$

Temos

$$x_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{3,Q_{j_3}^{j_1}} X^{Q_{j_3}^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} a_{3,(Q_1)_{j_3}^{j_2}} X^{(Q_1)_{j_3}^{j_2}} \right) x_0^{n-j+1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

$$= x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{3,Q} X^Q \right) x_0^{n-j}$$

agora como

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{3,Q}X^{Q}\right)x_0^{n-j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}a_{3,Q_{j_3}^{j_1}}X^{Q_{j_3}^{j_1}}\right)x_0^{n-j}+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|Q_1|=j}a_{3,(Q_1)_{j_3}^{j_2}}X^{(Q_1)_{j_3}^{j_2}}\right)x_0^{n-j}$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}a_{3,Q_2}X^{Q_2}\right)x_0^{n-j}$$

onde $Q_2=(0,0,j_3,\ldots,j_m)$ então

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}a_{3,Q_2}X^{Q_2}\right)x_0^{n-j+1} \tag{2.16}$$

integrando (2.16) em relação a x_3 temos

$$f_2=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}\frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3}X^{(Q_2)^{j_3}}\right)x_0^{n-j+1}+f_3(x_0,x_4,\ldots,x_m) \tag{2.17}$$

onde f_3 é um polinômio. Agora substituindo (2.17) em (2.15) temos

$$\begin{aligned}F=x_0&\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\frac{a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Qj_1}\right)x_0^{n-j}+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_1|=j}\frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2}X^{(Q_1)^{j_2}}\right)x_0^{n-j+1}\\&+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}\frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3}X^{(Q_2)^{j_3}}\right)x_0^{n-j+1}+f_3(x_0,x_4,\ldots,x_m).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Continuando o mesmo raciocínio de integrar e derivar ate a variável x_{m-1} temos que

$$\begin{aligned}F=x_0&\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\frac{a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Qj_1}\right)x_0^{n-j}+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_1|=j}\frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2}X^{(Q_1)^{j_2}}\right)x_0^{n-j+1}\\&+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}\frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3}X^{(Q_2)^{j_3}}\right)x_0^{n-j+1}+\ldots+\\&+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_{m-2}|=j}\frac{a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}}X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}}\right)x_0^{n-j+1}+f_{m-1}(x_0,x_m)\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde f_{m-1} é um polinômio.

Assim derivando (2.19) em relação a x_m e usando (2.11) para $i = m$ temos

$$x_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \frac{j_m a_{1,Q}}{j_1+1} X^{Q^{j_1}_{j_m}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{j_m a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)^{j_2}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_2|=j} \frac{j_m a_{3,Q_2}}{1+j_3} X^{(Q_2)^{j_3}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_{m-2}|=j} \frac{j_m a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}} X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1}$$

$$+ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} = x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{m,Q} X^Q \right) x_0^{n-j}$$

e como

$$j_m a_{1,Q} = (1+j_1) a_{m,Q^{j_1}_{j_m}} \quad \text{e} \quad j_m a_{i,Q_{i-1}} = (1+j_i) a_{m,(Q_{i-1})^{j_i}_{j_m}}, \text{ para todo } 2 \leq i \leq m$$

temos

$$x_0 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{m,Q^{j_1}_{j_m}} X^{Q^{j_1}_{j_m}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} a_{m,(Q_1)^{j_2}_{j_m}} X^{(Q_1)^{j_2}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_2|=j} a_{m,(Q_2)^{j_3}_{j_m}} X^{(Q_2)^{j_3}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_{m-2}|=j} a_{m,(Q_{m-2})^{j_{m-1}}_{j_m}} X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}_{j_m}} \right) x_0^{n-j+1}$$

$$+ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} = x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{m,Q} X^Q \right) x_0^{n-j}$$

agora como

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{m,Q} X^Q \right) x_0^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} a_{m,Q^{j_1}_{j_m}} X^{Q^{j_1}_{j_m}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} a_{m,(Q_1)^{j_2}_{j_m}} X^{(Q_1)^{j_2}_{j_m}} \right) x_0^{n-j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_2|=j} a_{m,(Q_2)^{j_3}_{j_m}} X^{(Q_2)^{j_3}_{j_m}} \right) x_0^{n-j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|Q_{m-2}|=j} a_{m,(Q_{m-2})^{j_{m-1}}_{j_m}} X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}_{j_m}} \right) x_0^{n-j}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|Q_{m-1}|=j} a_{m,Q_{m-1}} X^{Q_{m-1}} \right) x_0^{n-j}$$

então

$$\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|Q_{m-1}|=j} a_{m,Q_{m-1}} X^{Q_{m-1}} \right) x_0^{n-j+1} \tag{2.20}$$

integrando (2.20) em relação a x_m temos

$$f_{m-1} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|Q_{m-1}|=j} \frac{a_{m,Q_{m-1}}}{1+j_m} X^{(Q_{m-1})^{j_m}} \right) x_0^{n-j+1} + f_m(x_0) \tag{2.21}$$

onde f_m é um polinômio.

Substituindo (2.21) em (2.19) temos

$$\begin{aligned} F = & x_0 \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \frac{a_{1,Q}}{j_1+1} X^{Q^{j_1}} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)^{j_2}} \right) x_0^{n-j+1} \\ & + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_2|=j} \frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3} X^{(Q_2)^{j_3}} \right) x_0^{n-j+1} + \dots \\ & \dots + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_{m-2}|=j} \frac{a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}} X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}} \right) x_0^{n-j+1} + \\ & + \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|Q_{m-1}|=j} \frac{a_{m,Q_{m-1}}}{1+j_m} X^{(Q_{m-1})^{j_m}} \right) x_0^{n-j+1} + f_m(x_0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Agora como $Fd\Omega = dF \wedge \Omega$,

$$dF \wedge \Omega = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \Lambda_0 - x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} \right] dx_i \wedge dx_0 + \sum_{1 \le i < k \le m} \left[x_0 \frac{\partial F}{\partial x_k} \Lambda_i - x_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Lambda_k \right] dx_k \wedge dx_i$$

e

$$Fd\Omega = -(n+2) \sum_{i=1}^{m} F \Lambda_i dx_i \wedge dx_0$$

comparando os coeficientes do termo $dx_0 \wedge dx_1$ tem-se

$$(n+2) F \Lambda_1 = \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 \Lambda_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1} \Lambda_0$$

daí substituindo (2.11) para $i = 1$ temos

$$(n+2) F \Lambda_1 = \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 \Lambda_1 - x_0 \Lambda_1 \Lambda_0$$

portanto obtemos

$$(n+2) F = \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 - x_0 \Lambda_0. \tag{2.23}$$

Derivando agora (2.22) em relação a x_0 temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}(n-j+1)\frac{a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Qj_1}\right)x_0^{n-j}+$$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_1|=j}(n-j+1)\frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2}X^{(Q_1)^{j_2}}\right)x_0^{n-j}$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}(n-j+1)\frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3}X^{(Q_2)^{j_3}}\right)x_0^{n-j}+\ldots \tag{2.24}$$

$$\ldots+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_{m-2}|=j}(n-j+1)\frac{a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}}X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}}\right)x_0^{n-j}$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{|Q_{m-1}|=j}(n-j+1)\frac{a_{m,Q_{m-1}}}{1+j_m}X^{(Q_{m-1})^{j_m}}\right)x_0^{n-j}+f_m'(x_0)$$

logo substituindo (2.22), (2.24) e Λ_0 em (2.23) temos

$$(n+2)f_m = x_0 f_m'$$

portanto obtemos

$$f_m = x_0^{n+2}. \tag{2.25}$$

Substituindo (2.25) em (2.22) tem-se

$$F = x_0\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q|=j}\frac{a_{1,Q}}{j_1+1}X^{Qj_1}\right)x_0^{n-j}+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_1|=j}\frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2}X^{(Q_1)^{j_2}}\right)x_0^{n-j+1}$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_2|=j}\frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3}X^{(Q_2)^{j_3}}\right)x_0^{n-j+1}+\ldots+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{|Q_{m-2}|=j}\frac{a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}}X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}}\right)x_0^{n-j+1} \tag{2.26}$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{|Q_{m-1}|=j}\frac{a_{m,Q_{m-1}}}{1+j_m}X^{(Q_{m-1})^{j_m}}\right)x_0^{n-j+1}+x_0^{n+2}$$

Podemos escrever (2.26) na forma $F = x_0 G$, onde G é um polinômio homogêneo de grau $n+1$ dado por

$$G = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q|=j} \frac{a_{1,Q}}{j_1+1} X^{Qj_1} \right) x_0^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_1|=j} \frac{a_{2,Q_1}}{1+j_2} X^{(Q_1)^{j_2}} \right) x_0^{n-j}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_2|=j} \frac{a_{3,Q_2}}{1+j_3} X^{(Q_2)^{j_3}} \right) x_0^{n-j} + \ldots + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{|Q_{m-2}|=j} \frac{a_{m-1,Q_{m-2}}}{1+j_{m-1}} X^{(Q_{m-2})^{j_{m-1}}} \right) x_0^{n-j} \ .$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|Q_{m-1}|=j} \frac{a_{m,Q_{m-1}}}{1+j_m} X^{(Q_{m-1})^{j_m}} \right) x_0^{n-j} + x_0^{n+1}$$

Assim

$$\Omega = x_0^{n+2} d\left(\frac{G}{x_0^{n+1}}\right) = -(n+1) G dx_0 + x_0 dG$$

portanto $\dfrac{G}{x_0^{n+1}}$ é uma integral primeira racional de Ω. □

Os Exemplos 2.2.1 e 2.2.2 dados anteriormente também motivam a seguinte proposição:

Proposição 2.2.2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$ que tem algum hiperplano invariante. Suponhamos que a interseção deste hiperplano com o conjunto singular de $\mathcal{F}$ é uma componente de Kupka irredutível lisa. Então, possui integral primeira meromorfa.

Demonstração. Consideremos $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(n)$ a projeção natural e $\mathcal{F}^* = \Pi^*(\mathcal{F})$. Sabemos que $\mathcal{F}^*$ é definido por uma 1-forma integrável

$$\omega = \sum_{i=0}^{m} A_j(z) dz_j,$$

onde A_j são polinômios homogêneos do mesmo grau satisfazendo a condição de Euler:

$$\sum_{j=0}^{n} z_j A_j \equiv 0$$

e $\operatorname{codim}(\operatorname{sing}(\omega)) \geq 2$, onde $\operatorname{sing}(\omega)$ é o conjunto singular de ω.

As folhas de $\mathcal{F}$ são da forma $\Pi(L)$, onde L é folha de $\mathcal{F}^*$, a qual é uma solução de codimensão um da equação $\omega = 0$. Agora temos por hipótese que podemos supor que o hiperplano do infinito é invariante, isto é, $\Pi(z_0 = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}$. Temos também que

$$S = \Pi(z_0 = 0) \cap Sing(\mathcal{F})$$

é uma curva irredutível lisa, isto é,

$$S = \{[z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);\ G(z_1, \ldots, z_n) = 0\}$$

onde $G(z_1, \ldots, z_n)$ é um polinômio irredutível tal que para todo $(z_1, \ldots, z_n) \in S$ existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ com

$$\frac{\partial G}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_n) \neq 0.$$

Por outro lado observe que podemos escrever S como

$$S = \Pi(z_0 = 0) \cap \Pi(G = 0) = \Pi(z_0 = G = 0)$$

assim é uma interseção completa. Então pelo Teorema 1.1.4, $\mathcal{F}$ possui uma integral meromorfa do tipo

$$\frac{f^p}{g^q},$$

como no Exemplo 1.1.2, ou seja, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f, g)$. □

Capítulo 3

Um resultado de existência de integral primeira racional

Neste capítulo mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, que tem um hiperplano H invariante. Suponha que $S = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap H$ é um hipersuperfície irredutível em H de grau potencia de um primo. Se $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, H \setminus S)$ possui um elemento não tangente à identidade então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional.

Este resultado teve motivação no artigo [11] no qual afirma o seguinte:

Teorema 3.0.2. (Teorema 1 em [11]) Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação não dicrítica na origem de $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que o cone tangente $C(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ é irredutível de grau potência de um primo. Então $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira holomorfa.

3.1 Esboço da demonstração do Teorema de Cerveau - Loray

Seja $\mathcal{F}$ não dicritico com cone tangente irredutível. A identidade de Euler aplicada a $\omega_\nu/P_{\nu+1}$ mostra que $\omega_\nu/P_{\nu+1}$ é fechada.

De fato, como $\omega_\nu \wedge d\omega_\nu = 0$ então

$$i_R(\omega_\nu \wedge d\omega_\nu) = 0$$

$$i_R(\omega_\nu)d\omega_\nu - \omega_\nu \wedge i_R(d\omega_\nu) = 0$$

daí

$$P_{\nu+1}d\omega_\nu = \omega_\nu \wedge i_R(d\omega_\nu). \tag{3.1}$$

Por outro lado, a derivada de Lie L_R em ω_ν nos dá

$$L_R(\omega_\nu) = i_R(d\omega_\nu) + d\, i_R(\omega_\nu)$$

pela identidade de Euler:

$$L_R(\omega_\nu) = (\nu+1)\omega_\nu$$

assim temos

$$(\nu+1)\omega_\nu = i_R(d\omega_\nu) + dP_{\nu+1}. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) temos

$$P_{\nu+1}d\omega_\nu + dP_{\nu+1} \wedge \omega_\nu = 0. \tag{3.3}$$

Agora por (3.3) temos

$$d\left(\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}\right) = 0$$

portanto $\omega_\nu/P_{\nu+1}$ é fechada. Como $P_{\nu+1}$ é irredutível temos

$$\omega_\nu = \frac{1}{\nu+1} dP_{\nu+1}.$$

Consideremos uma seção geral $\tau : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ no sentido que o mergulho linear $I : \mathbb{C}P(1) \hookrightarrow \mathbb{C}P(n-1)$ induzido por τ corta $C(\mathcal{F})$ nos pontos lisos e transversalmente. O teorema de Lefschetz afirma que I induz uma aplicação sobrejetiva

$$\pi_1(I(\mathbb{C}P(1) - C(\mathcal{F})), m_0) \to \pi_1(\mathbb{C}P(n-1) - C(\mathcal{F}), m_0)$$

onde m_0 é um ponto base escolhido em $I(\mathbb{C}P(1) - C(\mathcal{F}))$. O fato de $C(\mathcal{F})$ ser irredutível implica que $\pi_1(\mathbb{C}P(n-1) - C(\mathcal{F}), m_0)$ é gerado por um elemento γ_1 e suas classes de conjugação (um número finito). Podemos tomar uma laço elementar γ_1 considerando, ou identificando

$$I(\mathbb{C}P(1) - C(\mathcal{F})) \cong \mathbb{C}P(1) - \bigcup_{k=1}^{\nu+1} \{m_k\}.$$

Por [16], $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira holomorfa se e somente $\tau^{-1}(\mathcal{F})$ também a possui (teorema de extensão). A hipótese de transversalidade de τ a $C(\mathcal{F})$ implica que $\tau^{-1}(\mathcal{F})$ se reduz (no sentido de redução e singularidades de folheações [12]) em um blow-up $E_2 : \widetilde{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C}^2$. Como nossas folheações são não dicríticas podemos considerar as representações de holonomia das folhas $E_n^{-1}(0) - C(\mathcal{F})$ por $\mathcal{F}$ e $E_2^{-1}(0) - \bigcup_{k=1}^{\nu+1}\{m_k\}$ por $\tau^{-1}(\mathcal{F})$ (ver [16], [12]).

Mas precisamente via τ, podemos ver E_2 como a restrição de E_n ao transformado estrito $\widetilde{\tau(\mathbb{C}^2)}$ de $\tau(\mathbb{C}^2)$ em $\widetilde{\mathbb{C}^n}$. Nos escolhemos uma seção transversal $(\mathbb{C}, 0) \subset \widetilde{\tau(\mathbb{C}^2)}$ em m_0 a $E_2^{-1}(0)$ (e, por conseguinte, a $E_n^{-1}(0)$) onde nós representamos as nossas holonomias por:

$$\mathrm{Hol}(E_n^{-1}(\mathcal{F}), E_n^{-1}(0) - C(\mathcal{F})) : \pi_1(E_n^{-1}(0) - C(\mathcal{F}), m_0) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

e

$$\mathrm{Hol}\left(E_2^{-1}(\tau^{-1}(\mathcal{F})), E_2^{-1}(0) - \bigcup_{k=1}^{\nu+1}\{m_k\}\right) : \pi_1\left(E_2^{-1}(0) - \bigcup_{k=1}^{\nu+1}\{m_k\}, m_0\right) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

O teorema de Lefschetz implica que as imagens destas duas representações de holonomia coincidem; denotemos por G esta imagem comum, $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Este grupo é gerado pelos elementos $f_1, \ldots, f_{\nu+1}$ os quais são imagens dos laços elementares $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu+1}$ com a relação

$$f_{\nu+1} \circ \cdots \circ f_1 = \mathrm{id}.$$

O fato que $\omega_\nu = (1/(\nu+1))dP_{\nu+1}$ permite calcular as partes lineares dos f_k:

$$f_k'(0) = e^{2\pi i/(\nu+1)}.$$

Alem disso, o grupo G herda a propriedade irredutível de $C(\mathcal{F})$: cada f_k e f_k^{-1} são conjugados com f_1 por um elemento $h_k \in G$.

Agora sabemos ligar a existência de integral primeira às propriedades holonômicas. Especificamente, uma vez que $\tau^{-1}(\mathcal{F})$ é reduzida num blow-up deduzimos a partir de

Mattei-Moussu [16] que $\tau^{-1}(\mathcal{F})$ tem uma integral primeira holomorfa se e somente se G é um grupo finito (equivalente G é conjugado com um grupo finito de rotações). Invocando o teorema de extensão, o Teorema 3.0.2 será verdade se soubermos mostrar a finitude da G.

Quando $\nu = 0$, não há nada para provar desde $\mathcal{F}$ não é singular. Para $\nu = 1$, o cone tangente é uma forma quadrática irredutível. Sabemos que o grupo de Poincaré do complementar desta forma quadrática é $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e necessariamente G é finito. Geralmente, a finitude de G resultará do seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. Seja G um subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ gerado por $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu+1}$. Suponha que:

(1) $f_k(z) = \mu z + \ldots$ com $\mu = e^{\frac{2\pi i}{\nu+1}}$ e $f_{\nu+1} \circ f_\nu \circ \cdots \circ f_1 = \mathrm{id}$

(2) Os f_k são conjugados dois a dois em G.

(3) $\nu + 1 = p^s$ onde p é primo e $s \in \mathbb{N}^*$.

Então G é um grupo finito.

Demonstração. A ideia é provar por um algoritmo formal de G é formalmente linearizável. Especificamente, vamos mostrar que, se G é linear (até por conjugação) a ordem k, isto é,

$$f_l(z) = \mu z + t_l z^{k+1} \mathrm{mod} z^{k+1}, \text{ onde } t_l \in \mathbb{C}.$$

então ou bem os t_l são todo nulos (e o grupo é linearizável até ordem $k+1$) ou bem $\nu+1$ não divide k e $t_1 = \ldots = t_{\nu+1}$. Neste último caso, é possível linearizar G até ordem $k+1$ através da conjugação

$$z + \frac{t_1}{\mu - \mu^{k+1}} z^{k+1}.$$

Isto produz um algoritmo convergente na topologia Krull produzindo um difeomorfismo formal conjugando G a um grupo gerado pela rotação μz.

Suponhamos que $\nu+1$ divide k, assim podemos definir o seguinte morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi : \quad (G, \circ) \quad &\to \quad (\mathbb{C}^*, +) \\ az + bz^{k+1} + \ldots \quad &\mapsto \quad \frac{b}{a} \end{aligned}$$

isto é, $\psi(f \circ g) = \psi(f) + \psi(g)$.

Daí de **(2)** temos que $t_1 = t_2 = \ldots = t_n$ e por **(1)** temos $(\nu+1)t_1 = 0$, portanto $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$.

Se agora $\nu + 1$ não divide k, podemos definir o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (G, \circ) \quad &\to \quad (Aff(\mathbb{C}, 0), \circ) \\ az + bz^{k+1} + \ldots \quad &\mapsto \quad \frac{az+b}{a^{k+1}} \end{aligned}$$

isto é, $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$. A imagem $\varphi(G) = G_0$ herda as propriedade de G: G_0 é gerado pelos elementos $g_1, g_2, \ldots, g_{\nu+1}$ conjugados dois a dois em G_0, onde $g_l(z) = \dfrac{\mu z + t_l}{u^{k+1}}$. Neste caso, o problema se reduz ao seguinte lema provado em [11]:

Lema 3.1.1. Seja α uma raiz n-ésima da unidade ($n > 1$), $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_{r+1} \in \mathbb{C}$ e G_0 o grupo afim gerado pelos transformações $g_k(z) = \alpha z + t_k$, para $k = 1, \ldots, r+1$. Então os g_k são dois a dois conjugados em G_0 se e somente se

- ou bem n possui dois divisores primos distintos
- ou bem $n = p^s$, p primo, $s \in \mathbb{N}^*$ e $t_1 = t_2 = \ldots = t_{r+1}$.

□

3.2 Demonstração do Teorema 3.0.1

Temos que $S \subset H \cong \mathbb{C}P(n-1)$ é uma hipersuperfície de grau $\nu + 1 = p^s$, onde p é primo e $s \in \mathbb{N}^*$. Consideremos uma seção geral

$$\tau : \mathbb{C}P(2) \to \mathbb{C}P(n)$$

no sentido que o mergulho linear

$$I : \mathbb{C}P(1) \hookrightarrow H \cong \mathbb{C}P(n-1)$$

induzido por τ corta H nos pontos lisos e transversalmente. Seja $S^* = I^*(S)$ daí temos

$$I(\mathbb{C}P(1) \setminus S^*) \hookrightarrow H \setminus S$$

Do Teorema 1.5.1 temos que a aplicação anterior induz uma aplicação sobrejetiva

$$\pi_1(I(\mathbb{C}P(1) \setminus S^*), m_0) \to \pi_1(H \setminus S, m_0)$$

onde m_0 é um ponto base escolhido em $I(\mathbb{C}P(1) \setminus S^*)$. O fato de que S é irredutível implica que $\pi_1(H \setminus S, m_0)$ é gerado por um elemento γ_1 e suas classes de conjugações (ver [13]). Também pelo Teorema de Bezout temos que

$$I(\mathbb{C}P(1) \setminus S^*) \cong \mathbb{C}P(1) \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu+1} \{m_i\}.$$

Representemos as holonomias por

$$\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, H \setminus S) : \pi_1(H \setminus S, m_0) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

e

$$\mathrm{Hol}\left(\tau^*(\mathcal{F}), \mathbb{C}P(1) \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu+1} \{m_i\}\right) : \pi_1\left(\mathbb{C}P(1) \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu+1} \{m_i\}, m_0\right) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

O Teorema 1.5.1 implica que as imagens destas duas representações de holonomia coincidem, denotemos por G esta imagem comum, $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Este grupo é gerado por os elementos $f_1, \ldots, f_{\nu+1}$ os quais são imagens dos laços elementares $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu+1}$ com a relação

$$f_{\nu+1} \circ \cdots \circ f_1 = \mathrm{id}. \tag{3.4}$$

Como S é irredutível temos que os pontos lisos de S formam um conjunto conexo e daí

$$\text{os geradores } f_k \text{ são conjugados dois a dois em } G. \tag{3.5}$$

Assim temos $G = \langle f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n \rangle < \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que satisfaz (3.4) e (3.5). Podemos escrever

$$f_k(z) = \mu_k z + \ldots.$$

Agora de (3.5) temos que para $i \neq j$ existe $g \in G$ da forma

$$g(z) = \alpha z + \ldots, \quad \alpha \neq 0$$

tal que

$$f_i \circ g = g \circ f_j$$

daqui obtemos que

$$\mu_i \alpha = \mu_j \alpha$$

então

$$\mu_i = \mu_k := \mu$$

Portanto

$$f_k(z) = \mu z + \ldots$$

Também de (3.4) temos que

$$\mu^{\nu+1} = 1.$$

Assim temos que μ é raiz da $(\nu+1)$-ésima da unidade. Agora por hipótese G possui um elemento que não é tangente à identidade obtemos as hipóteses do Teorema 3.1.1 para G, concluindo que G é finito.

Como G é finito, utilizando os argumentos em do Teorema de Mattei- Mossou ([16]) temos que existe uma vizinhança aberta V de H tal que $\mathcal{F}|_V$ possui uma integral primeira holomorfa. Podemos considerar V suficientemente pequena de tal maneira que seja contrátil á H, assim V é simplesmente conexa e agora por argumentos do Exemplo 1.1.3, $\mathcal{F}$ tem estrutura transversal projetiva em V.

Seja ω a um 1-forma holomorfa integrável que define $\mathcal{F}$ e como existe f em V tal que

$$\omega \wedge df = 0 \quad \text{em } V.$$

Pelo Lema de divisão de De Rham-Saito existe g holomorfa em V (reduzindo se necessário V) tal que

$$df = g\omega \quad \text{em } V.$$

Derivando temos

$$0 = dg \wedge \omega + g d\omega \quad \text{em } V$$

daí tem-se

$$d\omega = \eta \wedge \omega \quad \text{em } V \tag{3.6}$$

onde $\eta = -\dfrac{dg}{g}$ definida em V é holomorfa (considerando uma extensão dela se necessário). Agora como $\mathcal{F}|_V$ tem estrutura transversal projetiva e por (3.6), utilizando a Proposição 1.1.8 existe ξ holomorfa em V tal que

$$d\eta = \omega \wedge \xi \text{ em } V \tag{3.7}$$

e

$$d\xi = \xi \wedge \eta \text{ em } V \tag{3.8}$$

Do Corolário 1.4.1 podemos estender ξ e η a $\mathbb{C}P(n)$, isto é, existem $\hat{\xi}$ e $\hat{\eta}$ 1-formas holomorfas em $\mathbb{C}P(n)$ tal que

$$\hat{\eta}|_V = \eta \quad \text{e} \quad \hat{\xi}|_V = \xi.$$

Note que por (3.6) temos

$$d\omega|_V = \eta \wedge \omega = (\hat{\eta}|_V) \wedge \omega = (\hat{\eta} \wedge \omega)|_V$$

então

$$(d\omega - \hat{\eta} \wedge \omega)|_V = 0$$

como V é aberta e conexa temos que

$$d\omega = \hat{\eta} \wedge \omega \text{ em } \mathbb{C}P(n) \tag{3.9}$$

Observe que por (3.7)

$$d\hat{\eta}|_V = d\eta = \omega \wedge \xi = \omega \wedge (\hat{\xi}|_V) = (\omega \wedge \hat{\xi})|_V$$

então

$$(d\hat{\eta} - \omega \wedge \hat{\xi})|_V = 0$$

como V é aberta e conexa temos que

$$d\hat{\eta} = \omega \wedge \hat{\xi} \text{ em } \mathbb{C}P(n) \tag{3.10}$$

Também observe que por (3.8) temos

$$d\hat{\xi}|_V = d\xi = \xi \wedge \eta = (\hat{\xi})|_V \wedge (\hat{\eta}|_V) = (\hat{\xi} \wedge \hat{\eta})|_V$$

então

$$(d\hat{\xi} - \xi \wedge \eta)|_V = 0$$

como V é aberta e conexa temos que

$$d\hat{\xi} = \hat{\xi} \wedge \hat{\eta} \text{ em } \mathbb{C}P(n) \tag{3.11}$$

Finalmente por (3.9), (3.10), (3.11) e usando a Proposição 1.1.8 temos que $\mathcal{F}$ tem estrutura transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(n)$ e Pela Proposição 1.1.9, $\mathcal{F}$ tem integral primeira racional.

Capítulo 4

Campos de vetores holomorfos de singularidades estáveis

Neste capítulo provamos nosso principal resultado:

Teorema 4.0.1. Seja $\mathcal{F}$ um germe de singularidade L-estável em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então temos duas possibilidades:

(1) $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa.

(2) $\mathcal{F}$ é uma folheação logarítmica real singular.

Para germes $L-$estáveis, podemos assegurar a existência de integral primeira holomorfa, através da análise das **folhas abertas**, isto é, aquelas que não estão contidas no conjunto de separatrizes.

Corolário 4.0.1. Um germe de folheação não dicrítica na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ admite integral primeira holomorfa se, e somente se, é L-estável e tem alguma folha aberta que não é recorrente. Por exemplo, se alguma folha aberta é fechada fora do conjunto de separatrizes.

Também provamos o seguinte resultado global:

Teorema 4.0.2. Seja X um campo vetorial polinômial em $\mathbb{C}^2$ e $S \subset \mathbb{C}P(2)$ uma curva algébrica invariante. Suponha que S é L-estável em relação a X. Então $\mathcal{F}(X)$ é uma folheação logaritmica real, isto é, dada por uma 1-forma logaritmica $\Omega = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j df_j/f_j$ para algumas funções racionais f_j e alguns coeficientes reais $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

4.1 Estabilidade de Lyapunov

Consideremos o sistema autônomo

$$x' = X(x) \tag{4.1}$$

onde $X : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Definição 4.1.1. Uma solução φ de (4.1) definida para $t \geq 0$. Diz-se **estável** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (4.1) e $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$ então $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso, existir $\delta_1 > 0$ tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ implica $\lim_{t \to +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, então φ diz-se **assintoticamente estável**.

Definição 4.1.2. Um ponto singular x_0 do sistema autônomo (4.1) é **estável** quando para toda vizinhança U de x_0 existe uma vizinhança V de x_0 tal que toda solução φ de (4.1) com $\varphi(0) \in V$ esta definida para $t \geq 0$ e $\varphi(t) \in U$ para todo $t \geq 0$. Se além disso $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = x_0$, diminuindo V se necessário, então x_0 é **assintoticamente estável**.

Exemplo 4.1.1. Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear cujos autovalores tem todos parte real negativa. Existem $K > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$|e^{At}| \leq Ke^{\mu t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Não difícil ver que $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular assintoticamente estável do sistema

$$x' = Ax.$$

Exemplo 4.1.2. Seja

$$x' = Ax$$

tal que $0 \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade centro. Observa-se 0 é um singularidade estável mas não assintoticamente estável.

Existem técnicas para poder decidir se uma singularidade é estável ou assintoticamente estável, uma desta técnicas é **o critério de Lyapounov** que é determinado como segue:

Consideremos o sistema autônomo (4.1). Denotemos por $\varphi_x(t)$ a solução de (4.1) passando por x com $\varphi_x(0) = x$.

Seja $V : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definamos

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t)) \mid_{t=0}, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Definição 4.1.3. Seja x_0 um ponto singular de (4.1). Uma **função de Lyapounov** para x_0 é um função $V : U \to \mathbb{R}$ diferenciável definida num aberto W de x_0, satisfazendo as seguintes condições:

(a) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \neq x_0$.

(b) $\dot{V} \leq 0$ em W.

A função de Lyapounov V diz-se **estrita** quando

(c) $\dot{V} < 0$ em $W - \{x_0\}$

O critério de Lyapounov para o sistema (4.1) é:

Teorema 4.1.1. (Teorema 5.1. em [26]) Seja x_0 um ponto singular de (4.1). Se existe uma função de Lyapounov para x_0, então x_0 é estável. Se a função for estrita, x_0 é assintoticamente estável.

Exemplo 4.1.3. Consideremos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2 \end{array} \right. , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A origem $(0, 0)$ é um ponto singular isolado. Definamos

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

temos que

$$V(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x,y) > 0 \quad \text{para todo } (x,y) \neq (0,0).$$

Ainda

$$\dot{V}(x,y) = xx' + yy' = [2(x+y)^2 - 1](x^2 + y^4),$$

onde $\dot{V}(x,y) < 0$ em uma vizinhança de $(0,0)$ (exceto em $(0,0)$). Pelo Teorema 4.1.1, $(0,0)$ é assintoticamente estável.

Exemplo 4.1.4. Consideremos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} x' = y - xy^2 \\ \\ y' = -x^3 \end{array} \right. , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$(0,0)$ é um singularidade estável, pois se definimos

$$V(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

está função de Lyapounov e pelo Teorema 4.1.1 se segue.

4.2 Grupos de difeomorfismos estáveis

Denotemos $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ o grupo de germes de difeomorfismos holomorfos na origem $0 \in \mathbb{C}$. Consideremos um germe $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ escrito na forma

$$f(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}z + a_{k+1}z^{k+1} + \ldots, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}.$$

O germe é **ressonante** se $\lambda \in \mathbb{Q}$, está dinâmica é bem estudada em [1, 3]. Nós chamamos f **hiperbólico** se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Um germe hiperbólico de difeomorfismos é **analiticamente linearizável** (ver [14]), e sua dinâmica é de um atrator ou de um repulsor. Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então dizemos que o difeomorfismo é **não-ressonante (real)**. No caso em que a aplicação é analiticamente linearizável, ela pode ser vista, como uma rotação irracional. No caso não-linearizável Pérez-Marco (ver [23, 24]) dá uma descrição bastante precisa de sua rica dinâmica. Tal aplicação f também será referido neste trabalho como um **germe Pérez-Marco**.

A definição a seguir será útil.

Definição 4.2.1. Um grupo $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ é $L-$**estável** se para qualquer vizinhança $0 \in U \subset \mathbb{C}$ existe uma sub-vizinhança $0 \in V \subset U \subset \mathbb{C}$ tal que dado um ponto $p \in V$ a pseudo-orbita (sob a ação do G) permanece em U.

Um grupo $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ de germes de difeomorfismos holomorfos é chamado **ressonante** se cada aplicação $g \in G$ é um germe ressonante. O subgrupo $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ é dito grupo do **tipo círculo** se for abeliano e contém uma aplicação não-ressonante real analiticamente linearizável. Em particular, o grupo é analiticamente linearizável.
Uma ferramenta importante é:

Lema 4.2.1. Seja $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ um subgrupo L-estável finitamente gerado. Então G é cíclico finito ou tipo círculo. Em particular, qualquer subgrupo ressonante finitamente gerado de um grupo $L-$estável é finito. O grupo G é finito se admite uma pseudo-orbita não-trivial que é fechado fora da origem (ou fechada). Também G é finito sempre que alguma de suas pseudo-orbitas não triviais são não-recorrentes.

Demonstração. O grupo não pode conter elementos planos

$$f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$$

pois eles não satisfazem a condição de L-estabilidade (ver Teorema 1 em [3]). Assim G é abeliano e o subgrupo $G_{res} \subset G$ de elementos ressonantes, é cíclico finito. Pelos mesmos motivos G não pode conter elementos hiperbólicos. Finalmente, um germe de aplicação não-ressonante $f \in G$ deve ser analiticamente linearizável, graças à descrição da dinâmica dada por Pérez-Marco (ver [23, 24]). Isto mostra que tanto G é cíclico finito ou é um produto de um grupo cíclico e um grupo linearizável contendo alguma rotação irracional. Quanto à segunda parte observa-se que, desde que G tem um subgrupo finito cíclico maximal, o qual é normal digamos gerada por $g \in G$, quaisquer duas aplicações periódicas em G são potências de g e portanto comutam. Finalmente, suponha que G tem um pseudo-órbita a qual é fechada fora da origem. Então G não pode conter rotação irracional, e portanto G é finito. O mesmo vale para o caso em que G apresenta alguma pseudo-órbita não-trivial que é não-recorrente. □

4.2.1 Singularidades L-estáveis

Seja $\mathcal{F}, U$ como no inicio da seção1.2:

Definição 4.2.2. Denotemos por $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U)$ o conjunto (analitico) de separatrizes de $\mathcal{F}(U)$ em U. Dizemos que $\mathcal{F}(U)$ é **L-estável** se dada qualquer vizinhança $W \subset U$ de $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U)$ existe uma sub-vizinhança $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U) \subset V \subset W$ tal que o saturado $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V)$ por $\mathcal{F}(U)$ ainda está contido em W, isto é, $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V) \subset W$. Um germe $\mathcal{F}$ é chamado **L-estável** se $\mathcal{F}(U)$ é L-estável para toda vizinhança adaptada arbitrariamente pequena $U = U(\mathcal{F})$ da origem.

Então nós temos:

Lema 4.2.2. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação holomorfa não-dicritico com singularidade na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ e seja Γ uma separatriz de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é L-estável então a aplicação de holonomia $h_\gamma \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é L-estável no sentido da definição 4.2.1.

A prova é padrão obtida a partir de uma simples adaptação na prova do Lema 4.5.1.

4.2.2 Caso não-degenerado (irredútivel)

Vamos considerar um germe de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ na origem $0 \in \mathbb{C}^2$, como um germe irredutivel de singularidade não-degenerada. Em coordenadas locais adequadas podemos escrever $\mathcal{F}$ como dada por

$$x(1 + A(x, y))dy - \lambda y(1 + B(x, y))dx = 0,$$

onde $A(x, y)$, $B(x, y)$ são holomorfas com $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_+$ não nulo. Na forma normal de acima, as separatrizes são os eixos coordenados. Vamos denotar por f à aplicação de holonomia (até sua classe por conjugação holomorfa) da separatriz $(y = 0)$. A partir da correspondência entre as folhas de $\mathcal{F}$ e das órbitas de f ([16, 17, 25]) e de acordo com as propriedades bem conhecidas de f (ver [1, 3] para o caso de germes com parte linear periódica e [23, 24] para o caso de germes não-ressonantes) nós temos:

Lema 4.2.3. Seja $\mathcal{F}$ um germe irredútivel de singularidade L-estável na origem $0 \in \mathbb{C}^2$. Então $\mathcal{F}$ é analiticamente linearizável da forma $xdy - \lambda ydx = 0$ onde $\lambda \in \mathbb{Q}_- \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Demonstração. Temos em mente o Lema 4.2.2. Em primeiro lugar, observamos que a singularidade não é uma sela-nó. De fato, a variedade forte de uma sela-nó exibe uma holonomia não-trivial tangente a identidade, a dizer da forma

$$z \mapsto z + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$$

para algum $a_{k+1} \neq 0, k \in \mathbb{N}$. Assim, a separatriz da variedade forte é não L-estável. Por conseguinte, a singularidade é não-degenerada, da forma

$$xdy - \lambda ydx + \dots = 0$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_+$. Analisando caso por caso nós temos:

1. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ caso hiperbólico: Neste caso a singularidade é analiticamente linearizável. Podemos, portanto, escolher coordenadas locais $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que o germe escreve-se como $xdy - \lambda ydx = 0$. A holonomia de um dos eixos coordenados em relação a um pequeno disco $\Sigma : \{x = a\}$ é dado por

   $$h(y) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda)y.$$

   Assim $|h'(0)| \neq 1$ e portanto a aplicação h é não L-estável.

2. Caso ressonante não-linearizável, $\lambda \in \mathbb{Q}_-$: Neste caso também não pode ocorrer, pois a aplicação de holonomia de uma separatriz é da forma

   $$h(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}n/m}z + h_2z^2 + h_3z^3 + \dots,$$

   para alguns $n, m \in \mathbb{Z}$, $\langle n, m\rangle = 1$. Está aplicação é não-periódica, pois a singularidade é não linearizável (qualquer germe de difeomorfismos periódico é linearizavel). Por outro lado $h^m = h \circ \cdots \circ h$ é (não trivial e) tangente à identidade, em consequência h é não L-estável.

3. Caso não-ressonante, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Se a singularidade pertence ao domínio de Poincaré, isto é, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ então, desde que é não ressonante (pois $\lambda, 1/\lambda \notin \mathbb{N}$) é analiticamente linearizável. Este caso pode ocorrer. Suponha agora que a singularidade pertence ao domínio de Siegel, $\lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}$. Suponha por contradição que a singularidade não é analiticamente linearizável. Então a aplicação de holonomia local de qualquer separatriz mbém não é analiticamente linearizável, isto é, a aplicação de holonomia é não-ressonante e não linearizável(tipo uma aplicação de Pérez-Marco). Em particular, podemos concluir que este aplicação não é L-estável (ver Lema 4.2.1), produzindo uma contradição.

4. Caso ressonante linearizável: Neste caso a folheação é L-estável, ele admite uma integral primeira holomorfa.

□

4.3 Redução de singularidades estáveis

A seguinte noção é útil em nosso trabalho.

Definição 4.3.1 (Divisor L-estável)**.** Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa com singularidades isoladas numa superfície complexa M e $D \subset M$ um subconjunto analítico compacto conexo e invariante de dimensão pura um. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ em D são não dicríticas. Sob estas condições dada uma vizinhança suficientemente pequena

$D \subset U \subset M$, o conjunto de separatrizes locais de $\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}\big|_U$ dos pontos singulares em D junto com D dá um subconjunto analítico de dimensão pura um de U denotado por $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}(U), D) \cup D \subset U$. Então dizemos que D é **L-estável** (em relação a $\mathcal{F}$) se para qualquer vizinhança arbitrariamente pequena U como acima, dada qualquer vizinhança $W \subset U$ de $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}(U), D) \cup D \subset U$ existe uma sub-vizinhança $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U) \subset V \subset W$ tal que seu saturado $\mathrm{Sat}^{\mathcal{F}}_W(V)$ por $\mathcal{F}(U)\big|_W$ ainda está contido em W, isto é, $\mathrm{Sat}^{\mathcal{F}}_W(V) \subset W$.

Lema 4.3.1. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação L-estável. Então $\mathcal{F}$ é uma curva generalizada.

Demonstração. Procedemos por indução sobre o número $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ de blow-ups da redução de singularidades do germe $\mathcal{F}$.
Caso 1. ($r = 0$). Neste caso, a singularidade é já irredutível. O resultado resulta do Lema 4.2.3.
Case 2 (Passo de indução). Assume-se que o resultado é provado para germes de folheações que admitem uma redução das singularidades com um certo número de blow-up menores ou iguais do que r. Suponhamos para um germe $\mathcal{F}$ fixado admita uma redução de singularidades que consistem em $r + 1$ blow-ups. Fixemos uma vizinhança pequena $U \subset \mathbb{C}^2$ da origem, tal que $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U)$ é analítico de dimensão pura um. Para simplificar a notação denotaremos $\mathcal{F}(U)$ por $\mathcal{F}$.

A continuação realizamos um primeiro blow-up $\sigma_1 \colon \tilde{U}(1) \to U$ na origem e obtemos a folheação levantada $\tilde{\mathcal{F}}^1 = \sigma_1^*(\mathcal{F})$ com divisor excepcional (primeiro) $E(1) = \sigma_1^{-1}(0)$ que consiste de uma única linha projetiva invariante mergulhado em $\tilde{U}(1)$ (por hipótese o divisor excepcional é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}^1$). Para qualquer vizinhança $0 \in V \subset U \subset \mathbb{C}^2$ do conjunto de separatrizes $\mathrm{sep}(\mathcal{F}, U)$, a imagem inversa $\tilde{V}(1) := \sigma_1^{-1}(V) \subset \tilde{U}(1)$ é uma vizinhança de $E(1) \cup \mathrm{Sep}(\mathcal{F}(\tilde{U}(1)), E(1))$. Alem disso, $\tilde{V}(1)$ é $\tilde{\mathcal{F}}^1\big|_{\tilde{U}(1)}$-invariante se, e somente se, V é $\mathcal{F}\big|_U$-invariante. Dado uma folha L de $\mathcal{F}$ em U denotamos por $\tilde{L}(1)$ o levantamento $\tilde{L}(1) = \sigma_1^{-1}(L)$ de L em $\tilde{U}(1)$ pela aplicação $\sigma_1 \colon \tilde{U}(1) \to U$. Note-se que para cada singularidade $\tilde{p} \in \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1) \subset E(1)$, o conjunto de separatrizes locais de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ através $\tilde{p}$ é formada pela união em $E(1)$ dos ramos locais através de $\tilde{p}$, do transformado estrito por σ_1 de $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U)$. A partir do fato que o germe $\mathcal{F}$ é L-estável podemos concluir que:

Afirmação 4.3.1. O divisor $E(1)$ é L-estável em relação a $\tilde{\mathcal{F}}^1$.

Dada agora uma singularidade $\tilde{p} \in \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1) \cap E(1)$ observa-se que o germe de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ em $\tilde{p}$ é L-estável. Portanto, pela hipótese de indução, $\tilde{p}$ é uma curva generalizada. Isto mostra que todas as singularidades em $E(1)$ são curvas generalizadas e portanto o germe $\mathcal{F}$ é uma curva generalizada. O lema segue do Princípio de Indução.

□

4.4 Germes de folheações L-estáveis

Nesta seção, vamos provar o Teorema 4.0.1. Contamos com o Lema 4.3.1 e com Lema 4.4.1 abaixo.

Lema 4.4.1. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação não-dicrítica L-estável como no Teorema 4.0.1. Então as seguintes são equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa em alguma vizinhança da origem.
2. $\mathcal{F}$ é totalmente ressonante.

Demonstração. Desde que (1) implica (2) é bem conhecido, provaremos a reciproca. Suponha então que no final do processo de redução todas as singularidades são ressonantes.

Nós procedemos por indução sobre o número $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ de blow-ups na redução de singularidades para o germe $\mathcal{F}$.

Caso 1. $(r = 0)$. Este caso é consequência do Lema 4.2.3.

Caso 2. $(r \implies r+1)$. Suponha que o resultado está provado para germes de folheações que admitem uma redução de singularidades com uma série de Blow-ups menores ou iguais que r. Suponha que o germe $\mathcal{F}$ fixo admite uma redução de singularidades que consistem em $r+1$ blow-ups. Seja U uma pequena vizinhança conexa da origem como na definição de L-estabilidade. Então procedemos como na prova do Lema 4.3.1 de onde podemos importar a notação. Assim começamos com o primeiro blow-up $\sigma_1 \colon \tilde{U}(1) \to U$ na origem e obtemos a folheação levantada $\tilde{\mathcal{F}}^1 = \sigma_1^*(\mathcal{F})$ com divisor excepcional (primeiro) $E(1) = \sigma_1^{-1}(0)$ que consiste de uma única linha projetiva invariante mergulhado em $\tilde{U}(1)$ (pela hipótese o divisor excepcional é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}^1$). Dado uma folha L de $\mathcal{F}$ em U denotamos por $\tilde{L}(1)$ o levantamento $\tilde{L}(1) = \sigma_1^{-1}(L)$ de L em $\tilde{U}(1)$ pela aplicação $\sigma_1 \colon \tilde{U}(1) \to U$. A partir da prova do Lema 4.3.1 sabemos que *o divisor $E(1)$ é L-estável em relação a $\tilde{\mathcal{F}}^1$.*

Pela hipótese de Indução, cada singularidade $\tilde{p} \in \operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ admite uma integral primeira holomorfa digamos $\tilde{f}_{\tilde{p}}$ definida em numa vizinhança suficientemente pequena $\tilde{W}_{\tilde{p}}$. Agora vamos analisar a holonomia da folha $E_0 := E(1) \setminus \operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$. Escolhemos um ponto regular $\tilde{q} \in E_0$ e um disco pequeno transversal Σ a E_0 centrado em $\tilde{q}$. A representação de grupos de holonomia correspondente será denotada por $H := \operatorname{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma, \tilde{q}) \subset \operatorname{Diff}(\Sigma, \tilde{q})$. Este grupo de holonomia é finitamente gerado. Pela invariância de $E(1)$ e pela versão natural do Lema 4.2.2, sabemos que *o grupo de holonomia H é L-estável.* Desde que o grupo de holonomia é gerado por aplicações periódicas, aplicando o Lema 4.2.1 conclui-se que o grupo de holonomia é finito. Uma vez que o grupo de holonomia virtual preserva as folhas da folheação, os argumentos de acima já mostram que *o grupo de holonomia virtual H^{virt} do divisor excepcional é L-estável.* O problema é que nós ainda não sabemos que o grupo de holonomia virtual é ressonante de modo que não podemos concluir que este grupo de holonomia virtual é finito. No entanto, do Lema 4.2.1 obtemos:

Afirmação 4.4.1. Qualquer subgrupo ressonante finitamente gerado H_0 do grupo de holonomia virtual H^{virt} é um grupo finito.

Vamos a proceder como segue: Dadas as singularidades $\{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m\} = \operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1) \subset E(1)$, pela hipótese de indução cada singularidade admite uma integral primeira local. Assim, há pequenos discos $D_j \subset E(1)$, centrados em $\tilde{p}_j$ e tal que em uma vizinhança V_j de $\tilde{p}_j$ no espaço do blow-up $\tilde{\mathbb{C}}_0^2$, do tipo produto $V_j = D_j \times \mathbb{D}_\epsilon$, nós temos uma integral primeira holomorfa *primitiva* $g_j \colon V_j \to \mathbb{C}$, com $g_j(\tilde{p}_j) = 0$. Agora fixamos um ponto $\tilde{p}_0 \in E(1) \setminus \operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$. Desde que $E(1)$ tem a topologia da 2-esfera, podemos escolher um domínio simplesmente conexo $A_j \subset E(1)$ tal que $A_j \cap \{\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m\} = \{\tilde{p}_0, \tilde{p}_j\}$, para qualquer $j = 1, \ldots, m$. Desde que A_j é simplesmente conexo, podemos estender a integral primeira holomorfa local g_j por uma integral primeira holomorfa $\tilde{g}_j$ para $\tilde{\mathcal{F}}^1$ numa vizinhança U_j de $D_j \cup A_j$, podemos assumir que U_j contém V_j. Agora, dada uma seção transversal local Σ_0 entrada em $\tilde{p}_0$ e contida em U_j, podemos introduzir o **grupo de invariância** da restrição $g_j^0 := \tilde{g}_j\big|_{\Sigma_0}$ como o grupo

$$\operatorname{Inv}(g_j^0) := \{f \in \operatorname{Diff}(\Sigma_0, p_0),\ g_j^0 \circ f = g_j^0\}.$$

Em outra palavras, o grupo de invariância de g_j^0 é o grupo de germes de aplicações que preservam as fibras de g_j^0. Claramente $\operatorname{Inv}(g_j^0)$ é um grupo finito(ressonante) (Proposição

1.1. página 475 de [16]). Vamos agora a denotar por $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0) \subset \mathrm{Diff}(\Sigma_0, p_0)$ ao subgrupo gerado pelos grupos de invariância $\mathrm{Inv}(g_j^0)$, $j = 1, \ldots, m$. Nós chamamos $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0)$ o **grupo de invariância global** de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ em relação a (Σ_0, p_0). Então, a partir do acima imediatamente obtemos:

Afirmação 4.4.2. $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0)$ é um grupo finito.

Demonstração. De fato, primeiro note que $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1\Sigma_0)$ é gerado por aplicações periódicas. Desde que $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0)$ preserva as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ temos que

$$\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0) \subset \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0, p_0)$$

e por conseguinte $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_0)$ é um grupo finito.

□

Note-se que este grupo de invariância global contém de forma natural os grupos de invariância local das integrais primeiras locais g_j. Portanto, como observado em [16], uma vez que provamos que o grupo de invariância global $\mathrm{Inv}(\tilde{\mathcal{F}}(1), \Sigma_0)$ é finito, juntamente com o fato de que as singularidades em $E(1)$ exibem integrais primeiras holomorfas locais, concluímos como em [16] que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}^1$ e, portanto, a folheação $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira holomorfa. □

Demonstração do Teorema 4.0.1. Pela hipótese $\mathcal{F}$ é um germe de folheação L-estável, com um representante definido numa vizinhança U da origem. Pelo Lema 4.3.1 $\mathcal{F}$ é uma curva generalizada. Pelo Lema 4.4.1 podemos assumir que o germe não é totalmente ressonante. A redução das singularidades de $\mathcal{F}$ exibe alguma singularidade não ressonante.

Afirmação 4.4.3. Na situação de acima temos:

1. Dada qualquer separatriz Γ que passa pela origem, e um disco transversal Σ a Γ no ponto $0 \neq q = \Sigma \cap \Gamma$, o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, \Sigma, q)$ é um grupo abeliano do tipo círculo linearizável contendo uma aplicação não-ressonante.
2. Em particular, existe uma 1-forma fechada meromorfa Ω tal que:
   (a) Ω é meromorfa com polos simples definida numa vizinhança $0 \in V \subset U$ da singularidade.
   (b) A folheação é definida por $\Omega = 0$, fora do conjunto de polos $(\Omega)_\infty \subset V$.
   (c) Para qualquer coordenada holomorfa $z \in \Sigma$ que lineariza o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, \Sigma)$ nós temos que $\Omega\big|_\Sigma = dz/z$.

Demonstração da Afirmação. Nós procedemos por indução sobre o número $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ de blow-ups na redução de singularidades para o germe $\mathcal{F}$.
Caso 1. ($r = 0$). Neste caso, a singularidade é já irredutível e não-ressonante. O resultado segue do Lema 4.2.3.
Caso 2 (Passo de indução). Suponha que o resultado é provado para germes de folheações (não totalmente ressonante) que admite uma redução de singularidades com um número de blow-ups menores ou iguais a r. Suponha-se que fixamos um germe $\mathcal{F}$ que admite uma redução de singularidades que consistem de $r+1$ blow-ups. Fixemos uma vizinhança pequena $U \subset \mathbb{C}^2$ da origem, tal que $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, U)$ é analítico de dimensão pura um. Para simplificar a notação vamos denotar $\mathcal{F}(U)$ por $\mathcal{F}$. Escrevemos $\mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1) = \{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_\ell\}$. Sabemos da prova do Lema 4.3.1 que o germe da folheação induzida por $\tilde{\mathcal{F}}^1$ em cada ponto singular $\tilde{p}_j$ é L-estável. Se a singularidade $\tilde{p}_j$ é totalmente ressonante então admite

uma integral primeira holomorfa pelo Lema 4.4.1, digamos $g_{\tilde{p}_j}$ é tal integral primeira holomorfa. Colocamos

$$\tilde{\Omega}_j = \frac{dg_{\tilde{p}_j}}{g_{\tilde{p}_j}}$$

e concluímos que, neste caso, existe uma 1-forma fechada meromorfa $\tilde{\Omega}_j$ como polos simples definindo $\tilde{\mathcal{F}}^1$ em uma vizinhança $\tilde{W}_j$ de $\tilde{p}_j$. Suponha agora $\tilde{p}_j$ é não totalmente ressonante. Então, pela hipótese de Indução tem-se:

1. A redução de singularidades de $\tilde{p}_j$ só produz singularidades linearizáveis, com quociente real de autovalores.
2. Dado qualquer separatriz $\tilde{\Gamma}(j)$ passando por $\tilde{p}_j$, e um disco transversal $\tilde{\Sigma}_j$ a $\tilde{\Gamma}(j)$ no ponto $\tilde{p}_j \neq \tilde{q}_j = \tilde{\Sigma}_j \cap \tilde{\Gamma}(j)$, o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\Sigma}_j, \tilde{q}_j)$ é um grupo abeliano do tipo circulo linearizável contendo uma aplicação não-ressonante.
3. Existe uma 1-forma meromorfa fechada $\tilde{\Omega}_j$ definindo $\tilde{\mathcal{F}}^1$ numa vizinhança $\tilde{W}_j$ de $\tilde{p}_j$ e tal que:
   (a) $\tilde{\Omega}$ tem polos simples em $\tilde{W}_j$.
   (b) $\tilde{\Omega}$ define $\tilde{\mathcal{F}}^1$ em $\tilde{W}_j \setminus (\tilde{\Omega}_j)_\infty$.
   (c) Dado um ponto $\tilde{q}_j \in E(1) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$, perto da singularidade $\tilde{p}_j$, e um disco transversal $\Sigma_{\tilde{q}_j}$ a $E(1)$, e qualquer coordenada holomorfa $z_j \in \Sigma_{\tilde{q}_j}$ que lineariza o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1_{\tilde{p}_j}, \Sigma_{\tilde{q}_j})$, do germe de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ no ponto $\tilde{p}_j$, então $\tilde{\Omega}_j\big|_{\Sigma_{\tilde{q}_j}} = dz_j/z_j$.

Agora, também a partir da prova do Lema 4.3.1 sabemos que *o divisor $E(1)$ é L-estável com relação a $\tilde{\mathcal{F}}^1$*. Escolhemos agora um ponto $\tilde{q} \in E(1) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ e um disco transversal local $\Sigma_{\tilde{q}} \ni \tilde{q}$. Então o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_{\tilde{q}}, \tilde{q})$ é L-estável. Pois alguma singularidade $\tilde{p}_j$ não é totalmente ressonante, este grupo contém algum elemento não-ressonante, e, portanto é analiticamente linearizável. Uma vez que tivermos isso, podemos proceder como em [5]. De fato, desde que $E(1)$ é invariante, o elemento não-ressonante (linearizável) na holonomia virtual de um separatriz através de $\tilde{p}$ induz um elemento não ressonante linearizável na holonomia virtual da separatriz através de $\tilde{q}$ induzida pelo divisor excepcional $E(1)$. Isto é feito como se segue. Dado dois pontos $\tilde{q}$ e $\tilde{q}_1$, perto de $\tilde{p}$ e $\tilde{p}_1$ respectivamente, e discos transversais Σ e Σ_1 a $E(1)$ nesses pontos, respectivamente, podemos escolher um caminho simples $\alpha\colon [0,1] \to E(1) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ de $\tilde{q}$ para $\tilde{q}_1$. A aplicação de holonomia $h_\alpha\colon (\Sigma, \tilde{q}) \to (\Sigma_1, \tilde{q}_1)$ associado ao caminho α (lembre-se que $E(1) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ é uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^1$), induz um morfismo natural de grupos de holonomia virtual

$$\alpha^*\colon \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma_1, \tilde{q}_1) \to \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma, q),$$

por $\alpha^* : h \mapsto h_\alpha^{-1} \circ h \circ h_\alpha$. Desde que $h_{\alpha^{-1}} = (h_\alpha)^{-1}$ em termos de aplicações de holonomia, concluímos que o morfismo acima é na verdade um isomorfismo entre os grupos de holonomia virtual. Assim, também o grupo de holonomia virtual associado à separatriz $\tilde{\Gamma}$ de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ através de $\tilde{p}_1$ contém alguma aplicação não-ressonante linearizável.

O fato de que a holonomia virtual de $E(1)$ é analiticamente linearizável dá uma 1-forma fechada meromorfa $\tilde{\Omega}(1)$ definida numa vizinhança $\tilde{W}(1)^*$ da folha $E(1)^* := E(1) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}}^1)$ com as seguintes propriedades: Dado um disco transversal Σ a $E(1)^*$ com coordenada holomorfa $z \in \Sigma$ que lineariza o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma)$, então $\tilde{\Omega}(1)\big|_\Sigma = dz/z$. Desde que o grupo de holonomia virtual

$\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma)$ contém de forma natural o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1_{\tilde{p}_j}, \Sigma_{\tilde{q}_j})$ isto implica que a coordenada que lineariza o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma)$ também lineariza o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1_{\tilde{p}_j}, \Sigma_{\tilde{q}_j})$. Isto mostra que $\tilde{\Omega}(1)$ e $\tilde{\Omega}_j$ coincidem numa vizinhança de $\tilde{q}_j$, e por conseguinte $\tilde{\Omega}(1)$ estende-se a uma vizinhança de $\tilde{p}_j$ como $\tilde{\Omega}_j$. Assim nós construímos a forma $\tilde{\Omega}(1)$ numa vizinhança $\tilde{W}(1)$ de $E(1)$ em $\tilde{U}(1) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2_0$. Agora vamos projetar esta forma em uma 1-forma $\Omega = (\sigma_1^{-1})^*(\tilde{\Omega}(1))$ em $\sigma_1(\tilde{U}(1)) \setminus \{0\}$, e estendemos Ω ao origem pelo Teorema de Hartogs. Agora estamos prestes a completar a prova da afirmação. Para isto, consideremos qualquer separatriz Γ de $\mathcal{F}$ através da origem. Desde que a linha projetiva $E(1)$ no primeiro blow-up é invariante, o levantamento $\tilde{\Gamma}$ é separatriz de alguma singularidade $\tilde{p}_1$ de $\tilde{\mathcal{F}}^1$. Se $\tilde{p}_1$ é não totalmente ressonante, então pelo feito acima, conclui-se que o grupo de holonomia virtual associado a esta separatriz Γ contém uma aplicação não-ressonante. Suponha agora que $\tilde{p}_1$ é totalmente ressonante. Neste caso, temos que demonstrar a existência de uma aplicação não-ressonante na holonomia virtual da separatriz $\tilde{\Gamma}$ por " importação" desta aplicação para algum holonomia virtual de outra singularidade. De fato, por hipótese, alguma singularidade $\tilde{p}$ no primeiro blow-up não é totalmente ressonante. Portanto, a sua holonomia virtual relativamente à separatriz contida na linha de projetiva, contém um aplicação não-ressonante. Lembre-se que o blow-up é um difeomorfismo fora da origem e fora do divisor excepcional, de modo que as aplicações de holonomia virtual de $\tilde{\Gamma}$ induzem aplicações no disco Σ transversal a Γ em $\mathbb{C}^2$, mas que são definidas apenas no disco perfurado, isto é, fora da origem. No entanto, uma vez que estas aplicações projetadas são um a um, o Teorema clássico de extensão de Riemann para aplicações holomorfas limitadas mostra que, de fato tais aplicações induzem germes de difeomorfismos definidos no disco Σ. Estos difeomorfismos são as aplicações de holonomia virtual da separatriz Γ de $\tilde{\mathcal{F}}^1$ avaliada na seção transversal Σ. Assim, projetando as aplicações em $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}^1, \Sigma, \tilde{q})$ obtemos aplicações não-ressonantes neste grupo de holonomia virtual como indicado. Agora aplicamos o Princípio de Indução para terminar a prova da afirmação. □

Desde que a redução do divisor D não tem ciclos podemos construir uma 1-forma fechada $\tilde{\Omega}$ numa vizinhança $\bigcup_{j=0}^{r} U_j$ de D escolhendo $\tilde{\Omega}\big|_{U_j} = c_j \cdot \omega_j$ para alguma escolha adequadas das constantes $c_j \in \mathbb{C}^*$, $j = 0, \ldots, r$.

Então, a projeção de $\tilde{\Omega}$ obtemos uma 1-forma fechada meromorfa Ω com polos simples que define $\mathcal{F}$ numa vizinhança da origem. Pelo lema de Integração (ver [27]) Ω é uma 1-forma logarítmica $\Omega = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j df_j/f_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotemos por Γ_j a separatriz dado por $\{f_j = 0\}$. Dada uma coordenada $z_1 \in \Sigma_1$, um disco transversal a Γ_1 em $p_1 \in \Gamma_1 \setminus \{0\}$, de acordo com [5] as aplicações $z_1 \mapsto \lambda_j/\lambda_1 z_1$ pertencem ao grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, \Sigma_1, p_1)$. Portanto, podemos concluir que $\lambda_j/\lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall j$ e que no caso não-ressonante devemos ter $\lambda_j/\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para algum j. Isto termina a prova do Teorema 4.0.1. □

Demonstração do Corolário 4.0.1. A partir da última parte da prova de acima sabemos que as aplicações $z_1 \mapsto \lambda_j/\lambda_1 z_1$ pertencem ao grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, \Sigma_1, p_1)$. Por hipótese $\mathcal{F}$ tem uma folha que é fechado fora do conjunto de separatrizes, assim este grupo holonomia virtual deve ter uma pseudo-órbita que é fechada fora da origem e, por conseguinte, deve ser ressonante. Por isso, ainda sob a notação da prova do Teorema 4.0.1 devemos ter $\lambda_j/\lambda_1 \in \mathbb{Q}$ para todo j. Assim $\mathcal{F}$ admite uma integral

primeira holomorfa. Argumentos semelhantes provam o caso em que há uma folha aberta que não é recorrente. □

4.5 Quadro Global

Nesta secção todas as variedades são assumidas conexas e as folheações são não singulares. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa na variedade complexa M.

Definição 4.5.1. Uma folha $L_0 \in \mathcal{F}$ é **L-estável** se dada uma vizinhança qualquer W de L_0 em M, existe uma vizinhança $L_0 \subset V \subset W$ tal que o saturado de V por $\mathcal{F}$ é contida em W, isto é, $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V) \subset W$. Isto significa que dada um ponto $p \in V$, a folha de $\mathcal{F}$ que contém p está contido em W. *Em poucas palavras, se uma folha de $\mathcal{F}$ deixa W então ela não intersecta V.*

Teorema 4.5.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um definida numa variedade complexa M. Seja $L_0 \in \mathcal{F}$ uma folha compacta que é L-estável. Então temos as seguintes possibilidades:

(i) L_0 tem holonomia finita.

(ii) L_0 tem holonomia tipo círculo.

No primeiro caso, se M é compacto então todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito. No segundo caso, existe uma vizinhança $\mathcal{F}$-saturada de L_0 onde $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma fechada meromorfa Ω com conjunto de polos de ordem um, $(\Omega)_\infty = L_0$. Neste caso, se $M \setminus L_0$ é Stein, então Ω estende-se até M, fechada meromorfa, com polos simples, $(\Omega)_\infty = L_0$. Em particular, todas as outras folhas de $\mathcal{F}$ tem holonomia trivial.

4.5.1 Folhas compactas L-estáveis

Vamos agora dar a prova do Teorema 4.5.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um definida numa variedade complexa M. Seja $L_0 \in \mathcal{F}$ uma folha compacta que é L-estável. Dado um ponto $p \in L_0$ e um disco transversal pequeno Σ centrado em p afirmamos:

Lema 4.5.1. A holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, L_0, \Sigma, p)$ da folha L_0, é L-estável.

Demonstração. De fato, dado uma pequena vizinhança conexa $p \in U \subset \Sigma$ consideramos a saturação $W := \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U) \subset M$. Esta é uma vizinhança aberta de L_0 em M. Denotemos por $U_p \subset W \cap \Sigma$ a componente conexa de $W \cap \Sigma$ que contem o ponto p. Como U é conexo, temos que $U_p \subset U$. Então nós colocamos $U_1 := \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_p) \cap \Sigma$. Observamos que

$$\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_1) \cap \Sigma \subset \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_p) \cap \Sigma = U_1,$$

pois $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_p)$ já esta saturado. Por outro lado, claramente

$$\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_1) \cap \Sigma \supset U_1 \cap \Sigma = U_1,$$

de modo que

$$\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_1) \cap \Sigma = U_1$$

Assim, por motivos de simplicidade, vamos supor que U_p é conexo e $W = \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U_p)$ é tal que $W \cap \Sigma = U_p$. Finalmente, desde que $U_p \subset U$ podemos considerar $U_p = U$, de modo que $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U) \cap \Sigma = U$.

Desde que, por hipótese, L_0 é L-estável, existe uma vizinhança $L_0 \subset V \subset W$ tal que $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V) \subset W$. Como acima podemos assumir que $V_p := V \cap \Sigma$ é conexo e que $V = \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V_p)$. Em particular, nós temos que $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V) = V$, isto é, V é saturado. Desde que $V \subset W = \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(U)$ nós temos $V \cap \Sigma \subset W \cap \Sigma = U$.

Afirmação 4.5.1. As pseudo-orbitas dos pontos $x \in V_p$ sob o grupo de holonomia virtual $G := \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, L_0, \Sigma, p)$ permanecem em U.

Demonstração. De fato, dado $x \in V_p$ a G-pseudo-orbita de x, $G(x)$ está contido na saturação $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(x)$ do ponto x, e por conseguinte

$$G(x) \subset \mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(V_p) \cap \Sigma = V_p \subset U.$$

□

Isto mostra que o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, L_0, \Sigma, p)$ é L-estável. □

Demonstração o Teorema 4.5.1. De acordo com o Lema 4.2.1 o grupo de holonomia (virtual) $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, L_0)$ é finito ou linearizável contendo alguma rotação irracional (tipo círculo). Isso já mostra a primeira parte do teorema. Vamos considerar o caso (i) e M compacto. Então pelo Teorema de Estabilidade [2] a folheação é compacta com folhas estáveis. Suponha agora que estamos no caso (ii). Então de acordo com a construção principal em [5] existe uma 1-forma fechada meromorfa Ω definida numa vizinhança invariante $\mathcal{W}$ de L_0, com conjunto de polos $(\Omega)_\infty = L_0$ de ordem um e definindo $\mathcal{F}$ em $\mathcal{W} \setminus L_0$. Se M é compacto e $M \setminus L_0$ é uma variedade de Stein então $K := M \setminus \mathcal{W}$ é um subconjunto compacto de $M \setminus L_0$ e Ω é meromorfa em $M \setminus K = \mathcal{W}$, de modo que pelo Teorema de extensão de Levi [5] está forma estende-se a uma 1-forma meromorfa $\overline{\Omega}$ em M. Como a variedade é Stein não pode conter subconjuntos analíticos compactos de dimensão positiva, isto implica que os polos de $\overline{\Omega}$ já estão contidos em $\mathcal{W}$. Assim, excepto por L_0, as folhas de $\mathcal{F}$ tem grupo de holonomia trivial. O Teorema 4.5.1 está provado agora. □

4.6 Folheações no plano projetivo

Nesta seção provaremos o Teorema 4.0.2. Em primeiro lugar realizamos a redução de singularidades de $\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$. Consideremos a redução de singularidades de $\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$. Temos então uma aplicação holomorfo própria $\pi\colon \tilde{M} \to \mathbb{C}P(2)$, onde $\tilde{M}$ é uma superfície projetiva complexa,

$$\pi^{-1}(\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S) = P_1 \cup \cdots \cup P_r$$

é uma união finita de linhas projetivas invariantes $P_j \cong \mathbb{C}P(1)$,

$$\overline{\pi^{-1}(S \setminus \mathrm{sing}\mathcal{F})} = \tilde{S} := P_o$$

é o **transformado estrito** de S,

$$\overline{\pi^{-1}(\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S) \setminus \mathrm{sing}\mathcal{F})} = \mathrm{Sep}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S})$$

é o **transformado estrito** de $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}, S)$ e $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ é uma folheação em $\tilde{M}$ chamada a **redução** de $\mathcal{F}\big|_S$. Nós colocamos

$$D := Div(\mathcal{F}, S) = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_r$$

o **divisor reduzido** de $\mathrm{sing}\mathcal{F} \cap S$ por π. A aplicação π é uma composição finita de Blow-ups quadráticos ([16]). Vamos adotar a seguinte notação. Denotamos por

H_j (respectivamente, por H_j^{virt}) o grupo de holonomia (respectivamente, o grupo de holonomia virtual) da componente P_j do divisor $E(\mathcal{F})$, $j = 1, ..., r$, as quais por hipótese são invariantes. Também denotamos por $P_j^* = P_j \setminus \text{sing}\mathcal{F}$.

Lema 4.6.1. O grupo de holonomia virtual H_j^{virt} é L-estável. Em particular, é finito ou um grupo tipo círculo analiticamente linearizável.

A partir de agora, assumiremos que algum grupo de holonomia virtual contém uma aplicação não-ressonante e, portanto, não é finito do tipo círculo. Mais tarde, trataremos do caso finito.

Do Lema 4.3.1 obtemos imediatamente:

Lema 4.6.2. Todos os pontos singulares em $\text{sing}\mathcal{F} \cap S$ são curvas generalizadas.

Em seguida, seguimos basicamente os principais passos em [28] Capítulo 5, §5 (ver também [12]). No entanto, existem algumas diferenças, devido à ausência de hiperbolicidade em nosso caso. O primeiro passo é então o seguinte lema:

Lema 4.6.3. Dada uma componente $P_j \subset D$ para o qual o grupo de holonomia virtual não é finito, existe uma 1-forma fechada meromorfa ω_j , com polos simples, definida numa vizinhança U_j de P_j , tal que $\widetilde{\mathcal{F}}\big|_{U_j}$ é dada por $\omega_j = 0$ fora de $(\omega_j)_\infty$. A 1-forma ω_j é unicamente determinada pela condição: dado $q \in P_j \setminus \text{sing}\widetilde{\mathcal{F}}$, $\Sigma \ni q$ disco transversal, $\Sigma \cap P_j = q_j$ e uma coordenada holomorfa z em Σ $(z(q) = 0)$ que lineariza a holonomia virtual, então $\omega_j\big|_\Sigma = \dfrac{dz}{z}$.

Demonstração do Lema 4.6.3. A prova deste lema é uma adaptação da prova encontrada em [28] e algumas etapas de [5] também. O ponto-chave é que a holonomia virtual de P_j é abeliana e contém uma aplicação não ressonante analiticamente linearizável. Usando isso obtemos então uma cobertura aberta

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha), (x_\alpha, y_\alpha) \colon U_\alpha \to \mathbb{C}^2\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

de $P_j \setminus \text{sing}(\widetilde{\mathcal{F}})$ satisfazendo (1), (2) and (3) como na Proposição 5.1 em [28]. Podemos também assumir que

(4) se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então $U_\alpha \cap U_\beta$ é conexo.

Usando (3) e a existência de uma aplicação da holonomia virtual não-ressonante, provamos que: se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então nós temos $y_\alpha = c_{\alpha\beta} \cdot y_\beta$ para alguma constante $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}^*$. Portanto as 1-formas meromorfas fechadas $\dfrac{dy_\alpha}{y_\alpha}$ e $\dfrac{dy_\beta}{y_\beta}$ coincidem em $U_\alpha \cap U_\beta$. Isto dá uma 1-forma fechada meromorfa ω_j em $V_j = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$, definida por $\omega_j\big|_{U_\alpha} = \dfrac{dy_\alpha}{y_\alpha}$. Desde que as singularidades em P_j não são sela-nós obtemos como em [28]:

Afirmação 4.6.1. Dado qualquer ponto singular $p_j \in \text{sing}\widetilde{\mathcal{F}} \cap P_j$ a 1-forma ω_j estende-se meromorficamente para uma vizinhança de p_j em $\widetilde{M}$.

□

Agora passamos de (cada) P_j para uma vizinhança de $D = P_0 \cup \cdots \cup P_r$. Para isso observamos que, como na demonstração do Teorema 4.0.1, se existe alguma holonomia virtual que não seja finita, então todos os grupos de holonomia virtuais contêm um elemento não-ressonante. Em particular, nenhum grupo de holonomia virtual será finito.

Assim, para cada P_j podemos então considerar uma 1-forma fechada meromorfa ω_j com polos simples em uma vizinhança U_j de P_j $(j = 0, 1, \ldots, r)$ em $\widetilde{M}$, tal que $\omega_j = 0$ define $\widetilde{\mathcal{F}}$ em $U_j \setminus (\omega_j)_\infty$. Então, se $P_i \cap P_j \neq \phi$ digamos $q = P_i \cap P_j$. Então, em uma vizinhança $U_{ij} \subset U_i \cap U_j$ nós temos $\omega_i = f\omega_j$ para alguma função meromorfa f. Usando novamente argumentos de [28] podemos provar que:

Afirmação 4.6.2. f é constante.

Diferentemente do caso local, a redução do divisor D pode ter ciclos. Ainda assim, para o caso de folheações em $\mathbb{C}P(2)$ obtemos:

Proposição 4.6.1. Sob as hipóteses do Teorema 4.0.2, suponha que algum grupo de holonomia virtual H_j^{virt} não é finito. Então $\mathcal{F}$ é dado por uma 1-forma logarítmica (racional) em $\mathbb{C}P(2)$.

Demonstração. Desde que $\mathcal{F}$ é definida em $\mathbb{C}P(2)$ existe uma 1-forma racional ω que define $\mathcal{F}$ e consideremos $\widetilde{\omega} = \pi^*(\omega)$ a qual é uma 1-forma definindo $\widetilde{\mathcal{F}}$ em M. Pela proposição 5.1 de [28] para cada $j = 0, \ldots, r$ existe uma 1-forma fechada meromorfa $\tilde{\Omega}_j$ numa vizinhança U_j de P_j em M tal que $\widetilde{\mathcal{F}}\big|_{U_j}$ é definido por $\tilde{\Omega}_j$ e se $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \phi$ então em U_{ij} nós temos $\tilde{\Omega}_i = c_{ij}\,\tilde{\Omega}_j$ para alguma $c_{ij} \in \mathbb{C}^*$. Desde que $\widetilde{\Omega}$ define $\widetilde{\mathcal{F}}$, em cada U_j nós temos $\widetilde{\omega} = h_i\tilde{\Omega}_j$ para alguma função meromorfa h_j em U_j. Assim, em $U_{ij} \neq \phi$ nós temos

$$h_i\tilde{\Omega}_i = h_j\tilde{\Omega}_j \Rightarrow \tilde{\Omega}_i = \frac{h_j}{h_i}\,\tilde{\Omega}_j$$

de modo que $\dfrac{h_j}{h_i} = c_{ij}$ e então $\dfrac{dh_i}{h_i} = \dfrac{dh_j}{h_j}$. Definimos então $\widetilde{\eta}$ em $\widetilde{U} \equiv \bigcup_{j=0}^{r} U_j$ como $\widetilde{\eta}\big|_{U_j} := \dfrac{dh_j}{h_j} \cdot$ Existe uma 1-forma fechada meromorfa η em $U = \pi(\widetilde{U})$ tal que $\widetilde{\eta} = \pi^*(\eta)$. Pelo Teorema de extensão de Levi ([5]) a 1-forma η estende-se a uma 1-forma fechada racional em $\mathbb{C}P(2)$.

Afirmação 4.6.3. $\eta = \dfrac{dh}{h}$ para alguma função racional h em $\mathbb{C}P(2)$.

Demonstração da Afirmação 4.6.3. Pela descrição das 1-formas fechadas racionais em $\mathbb{C}P(2)$ (ver [28]) basta observar que:

(1) η tem polos simples em $\mathbb{C}P(2)$

(2) para cada componente H do conjunto de polos de η nós temos $\text{Res}_H\,\eta \in \mathbb{Z}$.

A demonstração de (1) e (2) é uma consequência da descrição local como $\dfrac{dh_j}{h_j}$ de $\widetilde{\eta}$ numa vizinhança de $D = \pi^{-1}(\Lambda)$ e do Teorema de Bézout (cada componente de $(\eta)_\infty$ deve intersectar Λ). Isto prova a Afirmação 4.6.3. □

Finalmente, seja $\widetilde{h} = \pi^*(h) = h \circ \pi$. Então, $\widetilde{\eta} = \dfrac{dh}{\widetilde{h}}$ e $\widetilde{h} = \text{const.}\ h_j$ de modo que $d\left(\dfrac{\widetilde{\Omega}}{\widetilde{h}}\right) = 0$. Portanto $d\left(\dfrac{\Omega}{h}\right) = 0$.

Assim $\Omega := \dfrac{\omega}{h}$ é uma 1-forma fechada raciona a qual define $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$. Nós afirmamos(como é fácil de ver) que Ω tem polos simples para que Ω seja logaritmico em $\mathbb{C}P(2)$. Isto termina a demonstração da Proposição 4.6.1. □

Agora trataremos do caso em que todos os grupos virtuais de holonomia H_j^{virt} são finitos. Nós afirmamos que isso não é possível. De fato, esta é, por exemplo, uma consequência do teorema do Índice de Camacho e Sad ([7]), pois todas as singularidades são não-degeneradas e devem ter índice negativo, mas isso não é possível em $\mathbb{C}P(2)$, onde a primeira classe de Chern da curva S é positivo. Outra maneira de ver isto é que se todos os grupos de holonomia virtuais são finitos então, como na demonstração de Teorema 4.0.1, há uma integral primeira holomorfa para $\mathcal{F}$ definida em uma vizinhança da curva S em $\mathbb{C}P(2)$. Na verdade, isso é provado exatamente como no caso local. Usando agora o Teorema de extensão de Levi obtemos uma integral primeira integral holomorfa para $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$, o que não é possível. Tal função deve ter um polo ou é constante. A intersecção da linha de polos com a linha de zeros (que contém a curva S) consistirá em singularidades dicríticas, contradição. Esta última observação, juntamente com Proposição 4.6.1 completa a prova do Teorema 4.0.2.

Referências

[1] F. Bracci: *Local dynamics of holomorphic diffeomorphisms*. Boll. UMI 7-B (2004), 609-636.

[2] M. Brunella: *A global stability theorem for transversely holomorphic foliations*. Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997), no. 2, 179–186.

[3] C. Camacho: *On the local structure of conformal maps and holomorphic vector fields in* $\mathbb{C}^2$, Jounées Singuliéres de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978, 3, 83–94), Astérisque 59-60, Soc. Math. France, Paris 1978.

[4] C. Camacho and A. Lins Neto: *Geometric theory of foliations*. Birkhauser Inc., Boston, Mass., 1985.

[5] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad:*Foliations with algebraic limit sets*, Ann. of Math. (2) 136 (1992), 429–446.

[6] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*; J. of Diff. Geometry, vol. 20, no. 1 (1984), 143–174.

[7] C. Camacho and P. Sad: *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. 115 (1982), 579–595.

[8] C. Camacho e P. Sad: *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16° Coloquio Brasileiro de Matemática, Publ. do IMPA, 1987.

[9] C. Camacho and B. Scárdua: *Foliations on complex projective spaces with algebraic limit sets*. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995). Astérisque, 261, 57–88, Soc. Math. France, Paris 2000.

[10] F. Cano, D. Cerveau and J. Deserti: *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Éditions Belin, 2013.

[11] D. Cerveau and F. Loray: *Un théorème de Frobenius singulier via l´arithmétique élémentaire*. J. Number Theory, 68(2) (1998), 217-228.

[12] D. Cerveau and J.F. Mattei: *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque 97 (1982).

[13] Deligne: *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien*, Sémin. Bourbaki (Nov. 79).

[14] H. Dulac: *Solutions d'un système de équations différentiale dans le voisinage des valeus singulières*, Bull. Soc. Math. France 40 (1912) 324–383.

[15] E.L. Lima: *Grupo Fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto Euclides, 1993.

[16] J.F. Mattei and R. Moussu: *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), 469–523.

[17] J. Martinet and J-P. Ramis: *Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnants du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 16 (1983), 571–621.

[18] J. Martinet and J-P. Ramis: *Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques, 55 (1982), 63–124.

[19] R. Moussu: *Sur l'existence d'intégrales premières holomorphes.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze 26.4 (1998): 709-717.

[20] A. Lins Neto: *Componentes Irredutívies dos Espaços de Folheações.* 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[21] A. Lins Neto and B. Scárdua: *Folheações algébricas complexas.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[22] B. Malgrange: *Frobenius avec singularités I: codimension 1.* Pub. Maths. I.H.E.S. 46 (1976), 163-173.

[23] R. Pérez-Marco: *Sur une question de Dulac et Fatou.* C.R. Acad. Sci. Paris 321 (1995), 1045-1048.

[24] R. Pérez-Marco: *Fixed points and circle maps.* Acta Math. 179 (1997), 243-294.

[25] R. Pérez-Marco and J.-C. Yoccoz: *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite.* Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992), Astérisque 222 (1994), 7, 345-371.

[26] B. Scárdua: *Equações ordinárias e aplicações.* Coleção textos universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[27] B. Scárdua: *Dynamics and integrability for germs of complex vector fields with singularity in dimension two.* Qualitative Theory of Dynamical Systems, v.13, p.363 - 381, 2014.

[28] B. Scárdua: *A swift introduction to holomorphic foliations with singularities*, course notes, The University of Tokyo, 2016. Available at arXiv.org.

[29] B. Scárdua: *Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), no. 2, 169-204.

[30] B. Scárdua e C. Morales: *Geometry, dynamics and topology of foliated manifolds.* 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA,Rio de Janeiro, 2003.

[31] A. Seidenberg: *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$, Amer. J. Math. 90 (1968), 248–269.

[32] M. Soares e R. Mol: *Índices de campos homolorfos e aplicaões.* 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.