INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Métricas Kähler-Einstein e a Conjectura de Calabi

Jose Rafael Santiago Arellano

Rio de Janeiro, Brasil
2022

Métricas Kähler-Einstein e a Conjectura de Calabi

Jose Rafael Santiago Arellano

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal de Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Andrew Clarke

Rio de Janeiro, Brasil
2022

Dedicado a cada alma gentil que
me encontrei ao longo da
minha existência.

Agradecimentos

A meu orientador Andrew Clarke, pelo apoio incondicional, pela paciência e por ter me ensinado tanto. Não tenho palavras que refletem o agradecido que eu tô.

Agradeço a minha mãe, Migdalia Isabel Arellano Devia, pelo grande esforço para me dar um melhor futuro a pesar das adversidades, pelo carinho e apoio incondicional, e por sobre tudo, por sempre ter acreditado em mim. Te quiero mucho, mamá.

A todos meus amigos, tantos que não tem espaço nessas linhas para eu mencionar, mas que com certeza sabem o importante que foram e estão sendo para mim na minha vida.

A meus professores de graduação, Cosme Duque, Giorgio Bianchi e Marcos Lizana, três grandes pessoas que me motivaram a me maravilhar com cada detalhe nesta incompreendida área de estudos, e por sobre todo a não desistir.

A meus orientadores na minha estancia na Universidade de Münster, Bianca Santoro e Hans-Joachim Hein, por ter me apoiado e me motivado estos últimos meses.

A CAPES e à Universidade de Münster pelo apoio financeiro, fundamental para o desenvolvimento do projeto.

Resumo

Este trabalho estuda uma classe específica de variedades complexas denominadas variedades de Kähler, mais especificamente, estudamos as conjecturas de Calabi e a existência de métricas Kähler-Einstein, desenvolvendo a teoria geométrica necessária para entender os problemas e fornecer uma demostração detalhada de ambas. Finalmente, estudaremos algumas aplicações do resultado principal utilizando a identidade de Bochner.

Palavras chave: variedades de Kähler, forma de Kähler, forma de Ricci, classes de cohomologia, classe de Chern, estimativas a priori, regularidade elíptica, identidade de Bochner.

Abstract

This work studies a specific class of complex manifolds called Kähler manifolds, more specifically, we will study the Calabi conjectures and the existence of Kähler-Einstein metrics, developing the necessary geometric theory to understand the problems and provide a detailed demonstration of both. Finally, we will study some applications of the main result using Bochner's identity.

Keywords: Kähler manifolds, Kähler form, Ricci form, cohomology classes, Chern class, a priori estimates, elliptic regularity, Bochner's identity.

Conteúdo

Introdução

troduccion}

O propósito desta dissertação é desenvolver as ferramentas principais para mostrar a Conjectura de Calabi e a existência de métricas Kähler-Einstein em certos casos. Estes problemas foram conjecturados pelo matemático Eugenio Calabi nos anos 50 e foram resolvidos pelos matemáticos Shing-Tung Yau e Thierry Aubin nos anos 70 em [28] e [1], utilizando técnicas novas na época.

No Capítulo 1 introduzirmos o conceito de variedade complexa, que será nosso objeto principal de estudo. Também desenvolvemos a teoria de fibrados complexos. Posteriormente utilizando as ferramentas desenvolvidas podemos estudar os fibrados holomorfos; estes objetos são ricos em estrutura e nos permitem construir exemplos não triviais.

Por outra parte, sobre uma variedade $2n$-dimensionais M podemos definir uma estrutura quase-complexa, isto é, um endomorfismo no fibrado tangente de una variedade $2n$-dimensional M tal que em $p \in M$:

$$J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM}.$$

Com isto, obtemos uma decomposição não trivial para $TM \otimes \mathbb{C}$ em soma direita dos dois auto-espaços $T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$ dados por J. Assim, obtemos uma decomposição para $(TM \otimes \mathbb{C})^*$ em soma direita dos espaços $\Lambda^{0,1}M$, $\Lambda^{1,0}M$, sendo os fibrados duais dos auto-espaços antes mencionados. Portanto, o conjunto de k-formas diferenciais, denotado por $\mathcal{E}^k(M, \mathbb{C})$, pode-se decompor como:

$$\mathcal{E}^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{l=0}^{k} \mathcal{E}^{l,k-l}(M, \mathbb{C})$$

onde

$$\mathcal{E}^{l,k-l}(M, \mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathcal{E}^k(M, \mathbb{C}) : \alpha(p) \in \Lambda_p^{l,k-l}(M), \text{ para todo } p \in M\}$$

Se M é uma variedade complexa, podemos construir uma estrutura quase-complexa tal que implica que a derivada exterior d estendida para (p,q)-formas é tal que $d = \partial + \bar{\partial}$, onde $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(M, \mathbb{C})$ e $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M, \mathbb{C})$. Dado que $d^2 = 0$, então $\bar{\partial}^2 = 0$, e assim nos permite definir grupos de cohomologia para d e para $\bar{\partial}$ que são dadas por:

$$H^k_{dR}(M,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(d : \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{k+1}(M,\mathbb{C}))}{\mathrm{Im}(d : \mathcal{E}^{k-1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}))},$$

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(\bar\partial : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M,\mathbb{C}))}{\mathrm{Im}(\bar\partial : \mathcal{E}^{p,q-1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}))}.$$

Seguimos com uma breve introdução à Geometria Riemanniana, onde introduzimos as propriedades principais que precisamos, especialmente os conceitos de conexão, curvatura e tensor de Ricci. Analogamente, em Geometria Hermitiana podemos definir métricas sesqui-lineares e conexões sobre fibrados complexos. O fibrado holomorfos $T^{0,1}M$ admite uma métrica sesqui-linear h junto com uma conexão bem comportada ∇ chamada conexão de Chern; com isto, obtemos que o tensor de curvatura F^∇ dessa conexão é tal que

$$\sqrt{-1}\mathrm{tr}(F^\nabla),$$

é uma 2-forma real d-fechada e assim define uma classe de cohomologia em $H^2(M,\mathbb{R})$. Esta classe de cohomologia é chamada classe de Chern da variedade M e denotamos por $c_1(M)$.

Paralelamente, precisamos de ferramentas geométrico-analíticas em uma variedade complexa M. Consideramos uma métrica Hermitiana h sobre o fibrado $T^{1,0}M$; com isto podemos calcular o operado estrela de Hodge definido pela relação

$$\langle\alpha,\beta\rangle dvol = \alpha \wedge *\beta,$$

com $\alpha,\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a extensão da métrica Hermitiana h via os isomorfismos musicais de Berger. Isto nos permite definir um produto L^2 sobre M dado por

$$(\alpha,\beta) = \int_M \langle\alpha,\beta\rangle dvol.$$

Assim, encontramos operadores adjuntos formais para os operadores d, ∂ e $\bar\partial$ denotados por d^*, ∂^* e $\bar\partial^*$ respectivamente. Com isto, definimos os Laplacianos de Hodge

$$\Delta_d = -dd^* - d^*d \quad , \quad \Delta_\partial = -\partial\partial^* - \partial^*\partial \quad , \quad \Delta_{\bar\partial} = -\bar\partial\bar\partial^* - \bar\partial^*\bar\partial.$$

Finalizamos o capítulo estudando as variedades de Kähler. Começamos com uma variedade complexa M com métrica Hermitiana g, isto é, que $g(J\cdot,J\cdot) = g(\cdot,\cdot)$. Assim, definimos a $(1,1)$-forma dada por $\omega = g(J\cdot,\cdot)$, chamada forma de Kähler. Se ω é uma forma d-fechada, então dizemos que a variedade é de Kähler. Como veremos, as seguintes formulações sobre uma variedade de Kähler (M,ω) são equivalentes

- $d\omega = 0$,
- $\dfrac{\partial g_{j\bar k}}{\partial z^i} = \dfrac{\partial g_{i\bar k}}{\partial z^j}$,

- Em cada ponto $p \in M$ existem coordenadas holomorfas ortonormais tais que:

$$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0,$$

- $\nabla J = 0$, onde ∇ é a conexão Levi-Civita de g. Em termos de holonomia, $\mathrm{Hol}(g) \subset U(n)$.

Isto nos fornece tanto de propriedades geométricas quanto analíticas. Entre as propriedades geométricas, obtemos expressões simples e com mais simetrias nos símbolos de Christiffel e no tensor de curvatura R da métrica g estendidos para $TM \otimes \mathbb{C}$. Além disso, utilizando o tensor de Ricci r, definimos uma $(1,1)$-forma chamada forma de Ricci, dada por

$$\mathrm{Ric}(\omega) = r(J\cdot, \cdot),$$

Se mostra que $\mathrm{Ric}(\omega)$ é uma 2-forma d-fechada, e assim define uma classe de cohomologia em $H^2(M, \mathbb{R})$. O ponto importante aqui é que se consideramos o fibrado $T^{1,0}M$ com a métrica hermitiana $h := g(\cdot, \bar{\cdot})$, e a conexão Levi-Civita ∇ de g estendida para $T^{1,0}M$, obtemos que ∇ é a conexão de Chern da métrica h. Além disso

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\mathrm{tr}(F^{\nabla}),$$

isto é, podemos construir a classe de Chern de diferentes formas. Por outro lado, as propriedades analíticas nos fornecem a seguinte relação entre os laplacianos definidos anteriormente

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d.$$

Com isto obtemos a nossa ferramenta analítica principal chamado $\partial\bar{\partial}$-Lema:

Sejam (M, ω) uma variedade de Kähler compacta e α, β $(1,1)$-formas reais d-fechadas, e assim definem classes de cohomología $[\alpha], [\beta] \in H^2(M, \mathbb{R})$. Se $[\alpha] = [\beta]$, então existe uma função $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ tal que $\alpha = \beta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$.

No Capítulo 2 introduzimos os dois problemas que queremos abordar que vem considerando problemas inversos. O primeiro surge naturalmente, para uma variedade de Kähler M temos a existência de uma $(1,1)$-forma ω d-fechada com a que podemos definir a forma de Ricci $\mathrm{Ric}(\omega)$ e a forma de volume $dvol_{\omega}$. Aqui notamos o seguinte, dado que $d\omega = 0$, então ω define uma classe de cohomologia em $H^2(M, \mathbb{R})$. Se $\omega' \in [\omega]$ é uma outra métrica de Kähler, obtemos que $\mathrm{Ric}(\omega') \in [\mathrm{Ric}(\omega)] = c_1(M)$ e também que $\int_M dvol_{\omega} = \int_M dvol_{\omega'}$. Os problemas inversos de estes fatos são conhecidos como Conjecturas de Calabi, que são enunciados como

> Problema 1.
>
> *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler com forma de Ricci $Ric(\omega)$. Seja ρ uma $(1,1)$-forma real em M tal que $\rho \in [Ric(\omega)]$. Então, existe uma outra forma de Kähler $\omega_0 \in [\omega]$ tal que $Ric(\omega_0) = \rho$*

> Problema 2.
>
> *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler compacta com forma de volume $\frac{\omega^n}{n!}$. Seja $F : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n$. Então existe uma forma de Kähler $\omega_0 \in [\omega]$ tal que $\omega_0^n = e^F \omega^n$.*

Utilizando o $\partial\bar{\partial}$-Lema mostramos que são problemas equivalentes. O último problema que emerge é sobre a existência de métricas de Einstein em variedades de Kähler, que chamamos métricas de Kähler-Einstein. Este problema impõe certas condições definindo um sinal sobre a classe $c_1(M)$ e assim obtemos o seguinte problema

> Problema 3.
>
> *Seja M uma variedade de tipo Kähler compacta.*
>
> 1. *Se $c_1(M) < 0$ então existe uma forma de Kähler ω tal que $Ric(\omega) = -\omega$.*
> 2. *Se $c_1(M) = 0$ então existe uma forma de Kähler ω tal que $Ric(\omega) = 0$.*
> 3. *Se $c_1(M) > 0$ então existe uma forma de Kähler ω tal que $Ric(\omega) = \omega$.*

Todos os problemas anteriores, via o $\partial\bar{\partial}$-Lema, são equivalentes a mostrar a existência de soluções de uma equação em derivadas parciais chamada a Equação de tipo Monge-Ampère Complexa, que é dada por

{EQ1}

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\lambda\varphi}\omega^n \quad \text{para } \lambda \in \{-1, 0, 1\} \tag{0.0.1}$$

com a condição extra de que a $(1,1)$-forma $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é positiva. O caso $c_1(M) < 0$ é o caso mais elementar, mas leva a linha de ideias necessárias em geral. Para o caso $c_1(M) = 0$ veremos que é equivalente à conjectura de Calabi, e assim, com técnicas mais refinadas, mas seguindo essencialmente o caso para $c_1(M) < 0$, mostramos a existência de soluções. Para o caso $c_1(M) > 0$, em geral é falso, pois Gang Tian em [24] expõe contraexemplos nesse caso.

Assim, para encontrar soluções da equação Monge-Ampère complexa com $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$ utilizaremos o método da continuidade. Para isto, consideramos a família paramétrica de equações:

$$(*)_t \begin{cases} (\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{tF+\lambda\varphi}\omega_0^n \\ \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ é uma forma positiva.} \end{cases}$$

Denotamos por Φ ao conjunto dos $t \in [0,1]$ tais que $(*)_t$ admite uma solução suave. Nos queremos mostrar que Φ é não vazio, aberto e fechado. Assim $\Phi = [0,1]$, isto é, que $(*)_1$ tem uma solução suave. Dado que $(*)_1$ é equivalente aos problemas que queremos resolver, então obtemos soluções. Com isto, todo nosso trabalho se resume em mostrar que Φ é aberto e fechado.

Para mostrar que é Φ é aberto precisamos de alguns resultados de inversibilidade do operador Laplaciano sobre subespaços de Hölder $C^{3,\alpha}$, para depois obter, pelo teorema da função implícita em espaços de Banach, que, localmente, certo operador é inversível e assim mostrar que para $t \in \Phi$ existe uma vizinhança U de t em $[0,1]$ tal que para $s \in U$, $(*)_s$ tem uma solução suaves, e assim Φ é aberto.

Para mostrar que Φ é fechado, é suficiente mostrar que $\overline{\Phi} \subset \Phi$. Para isto precisamos de uma estimativa a priori $C^{3,\alpha}$ da solução φ, ou seja, estimar o valor da solução com alguma norma em $C^{3,\alpha}$ da tal forma que dependa de fatores fixados na hipóteses. Isto junto com o teorema de Rellich e a regularidade elíptica nós permite mostrar que para toda sequência $t_i \in \Phi$ convergente para t podemos construir uma solução suave φ_t de $(*)_t$ partindo das soluções suaves associadas φ_{t_i} de $(*)_{t_i}$. Assim $\overline{\Phi} \subset \Phi$, e portanto Φ é fechado.

Aqui, notamos que o ponto chave está nas estimativas a priori da solução, junto com as suas derivadas mistas e as derivadas delas, que denotamos como estimativas C^0, C^2 e C^3, respectivamente. Para ambos casos as estimativas C^2 e C^3 são obtidas com um pouco de dificuldade, mas certamente sendo uma aplicação do principio do máximo e deixando em evidência a forte dependência da estimativa C^0; e depois utilizando as estimativas de Schauder para variedades obtemos a estimativa $C^{3,\alpha}$. A principal diferença entre os dois casos que estamos estudando é que para o caso $c_1(M) < 0$ a estimativa C^0 é obtida utilizando o principio do máximo, mas para o caso $c_1(M) = 0$ não conseguimos aplicar o mesmo argumento, pois no lado direito da equação (0.0.1) temos $\lambda = 0$ e portanto a solução φ não aparece. Aqui, precisamos então de uma técnica chamada iteração de Moser para construir a estimativa que precisamos. Foi Yau, em 1978, quem aplicou esta técnica e deu uma resposta afirmativa para o caso $c_1(M) < 0$.

No capítulo 3 mostraremos algumas aplicações das conjecturas de Calabi. Começamos mostrando a identidade de Bochner, e com isto obtemos as primeiras pequenas aplicações sobre campos paralelos e anulamento de classes de cohomologia.

A primeira aplicação substancial vem da conjectura de Calabi, junto com resultados de geometria Riemanniana, geometria complexa, geometria algébrica e o anulamento de classes de cohomologia.

Toda variedade de Fano é simplesmente conexa.

A segunda, e ultima, aplicação substancial vem da existência de métricas Kahler-Einstein para o caso $c_1(M) = 0$, junto com resultados de geometria Riemanniana, topologia algébrica, teoria de holonomia, e uma aplicação da identidade de Bochner sobre grupos e álgebras de Lie. Esse resultado é chamado teorema de decomposição de Beauville-Bogomolov.

Seja M uma variedade de Kähler compacta com curvatura de Ricci nula.

1. *O recobrimento universal $\hat{M}$ é isomorfo, como uma variedade de Kähler, a um produto*

$$\mathbb{C}^k \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$$

onde $\mathbb{C}^k$ é fornecida com a métrica de Kähler padrão, os V_i são variedades de Kähler compactas e simplesmente conexas, de dimensão real $2m_i$ e com grupo de holonomia $SU(m_i) \subset SO(2m_i)$ e X_j são variedades de Kähler compactas e simplesmente conexas de dimensão real $4r_j$ e com grupo de holonomia $Sp(r_j) \subset SO(4r_j)$. Essa decomposição é única ao menos biholomorfismos e troca de ordem dos fatores.

2. *Existe um recobrimento finito M' de M, isomorfo como variedade de Kähler, ao produto*

$$T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$$

onde T é um toro complexo.

onde um toro complexo é um quociente de $\mathbb{C}^n$ com a classe de equivalência definida por um reticulado sobre $\mathbb{C}^n$.

Capítulo 1

Geometria Diferencial e Complexa

.desenlace}

Este capítulo consiste de 3 seções nas quais desenvolveremos as ferramentas geométricas necessárias para enunciar e entender os problemas principais desta dissertação.

Na a seção 1.1 começamos estudando variedades complexas e fibrados complexos desde um ponto de vista geral. Juntando estes dois conceitos obtemos os fibrados holomorfos, que nos fornece de exemplos na seção 1.2. Por último estudaremos localmente em carta de coordenadas as variedades complexas. As principais referencias utilizadas são [13], [16], e [26].

Para a seção 1.2 fazemos uma introdução rápida de geometria Riemanniana expondo os objetos necessários para o resto da dissertação. Depois estudaremos geometria Hermitiana replicando o feito antes, mas estudando mais detalhadamente. Logo estudamos especificamente os fibrados holomorfos, onde, utilizando algumas ferramentas algébricas, obtemos relações entre $\mathbb{CP}^n$ e suas subvariedades. Por último, desenvolvemos a teoria de Hodge sobre o espaço tangente holomorfo. As principais referencias utilizadas são [17], [25], [21], [16], [13] e [26].

Por último, na seção 1.3 vamos definir a condição de Kähler e estudar três equivalências. Depois veremos o comportamento geométrico das variedades de Kähler, donde obteremos localmente muitas expressões explícitas que serão de vital importância no resto da dissertação. Por último estudaremos os aspectos analíticos das variedades de Kähler, onde, via teoria de Hodge, obteremos o Lema-$\partial\bar{\partial}$, que é nossa ferramenta analítica principal deste capítulo. As principais referencias utilizadas são [23], [16], [13] e [26].

1.1 Variedades Complexas e Fibrados Complexos

Uma variedade complexa M é uma variedade suave $2n$-dimensional onde as funções de transição são holomorfas identificando as cartas coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ com $\mathbb{C}^n$. Para isto, precisamos primeiro definir o que é uma atlas holomorfo.

Definição 1.1.1. Um atlas holomorfo para uma variedade M é uma família de cartas $\{(\varphi_i, U_i)\}$, onde $\varphi_i : U_i \to M$, tais que

- $M = \bigcup_i U_i$,
- Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$, então o mapa $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ definido por

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1},$$

  é um biholomorfismo entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^n$. Esta família de cartas são chamadas cartas holomorfas.

Assim, se uma variedade suave M é fornecida com um atlas holomorfo, como acima, então dizemos que M é uma variedade complexa. Propriedades imediatas disto é que M é uma variedade suave real, orientável, de dimensão real $2n$ e de dimensão complexa n.

Definição 1.1.2. Uma função $f : M \to \mathbb{C}^m$ é uma função holomorfa sobre M se para cada carta holomorfa (U, φ), a função $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ é uma função holomorfa.

{Exp1}

Exemplo 1.1.3 (Espaço projetivo complexo)**.** O espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$ é definido como o espaço de linhas complexas de $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem, ou seja, cada ponto de $\mathbb{CP}^n$ são $(n+1)$-tuplas $[Z_0 : \cdots : Z_n]$ onde pelo menos tem uma entrada diferente de zero, e identificando

$$[Z_0 : \cdots : Z_n] = [\lambda Z_0 : \cdots : \lambda Z_n],$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como um espaço topológico, $\mathbb{CP}^n$ herda a topologia quociente de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{(0, ..., 0)\}$ sobre a relação de equivalência mencionada acima. nos chamamos $Z_0, ..., Z_n$ coordenadas homogêneas. Para definir um atlas holomorfo nos precisamos utilizar $n+1$ cartas. Para $i \in \{0, 1, ..., n\}$, seja

$$U_i = \{[Z_0 : \cdots : Z_n] : Z_i \neq 0\}$$

e considere-se

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \to &\quad \mathbb{C}^n \\ [Z_0 : \cdots : Z_n] \mapsto &\quad \left(\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{\hat{Z}_i}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i} \right) \end{aligned}$$

onde o termo $\frac{Z_i}{Z_i}$ é omitido. Facilmente podemos ver que as funções de transição são holomorfas. Sem perda de generalidade consideremos φ_0 e φ_1 definidas em U_0 e U_1, respectivamente. Considerando $\{w^1, ..., w^n\}$ coordenadas em $\mathbb{C}^n$

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(w^1, ..., w^n) = \left(\frac{1}{w^1}, \frac{w^2}{w^1}, ..., \frac{w^n}{w^1} \right)$$

Aqui $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ é uma função holomorfa em cada uma das suas variáveis enquanto as outras variáveis são ficadas, assim é holomorfa. Neste caso obtemos um primeiro exemplo não trivial de uma variedade complexa.

Topologicamente podemos ver $\mathbb{CP}^n$ como o quociente $S^{2n+1} \backslash S^1$, onde $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é a esfera unitária, e S^1 atua como a multiplicação de números complexos de comprimento um. Daqui obtemos que $\mathbb{CP}^n$ é compacto.

Exemplo 1.1.4 (Variedades projetivas)**.** Suponha que f_1,...,f_k são polinômios homogêneos em $Z_0, ..., Z_n$. Notamos que cada f_i não está bem definido como função em $\mathbb{CP}^n$, mas o conjunto de zeros está bem definido. Seja $V \subset \mathbb{CP}^n$ o conjunto de zeros comuns

$$V = \{[Z_0 : \cdots : Z_n] : f_i(Z_0, ..., Z_n)) = 0, \text{ para } i = 1, ..., k\}$$

Se V é uma variedade suave, então também é uma variedade complexa, onde as cartas de coordenadas podem ser construídas usando o teorema da função implícita. Além disso, dado que são subconjuntos fechados dentro de um espaço compacto, vemos que toda variedade projetiva é compacta.

1.1.1 Fibrados Vetoriais Complexos.

{F}

Definição 1.1.5. Sejam M, E variedades suaves. Um mapa suave e sobrejetor $\pi : E \to M$ é chamado um fibrado vetorial complexo de posto k sobre M se

1. Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U_α de p, e um difeomorfismo

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k,$$

   tal que $\pi = \pi_1 \circ \varphi_\alpha$, onde $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to U_\alpha$ é a projeção sobre o primeiro fator.

2. Para $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) dois difeomorfismos como acima, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k & \to & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \\ (p, v) & \mapsto & (p, g_{\beta\alpha}(p)v) \end{array},$$

   onde em cada ponto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ temos que $g_{\beta\alpha}(p) : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ é um isomorfismo linear e $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^k)$ é suave.

O espaço E é chamado o espaço total e o espaço M é chamada base. Os pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ são chamados trivializações locais do fibrados, e os isomorfismos $g_{\alpha\beta}$ são chamados funções de transição do fibrado. Se $k = 1$ dizemos que E é um fibrado de linha. Para $p \in M$, o conjunto $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ é chamado fibra de E em p.

Observação 1.1.6. Os fibrados vetoriais reais são definidos de forma similar, mas mudando $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$.

Da definição obtemos que as aplicações de transição verificam as seguintes condições de co-ciclo:

$$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\alpha}(x) = I \quad , \quad \text{para } x \in U_\alpha \cap U_\beta,$$
$$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = I \quad , \quad \text{para } x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Agora, se nos temos uma cobertura para M, de tal forma que os mapas de transição são difeomorfismos e verificam as condições de co-ciclo, podemos construír um único fibrado com aquelas aplicações de transição. Isto nos proporciona uma primeira equivalência para a Definição 1.1.5. Esta definição também é equivalente a ter uma família $\{E_p\}_{p\in M}$ de espaços vetoriais complexos parametrizados por M, junto com uma estrutura diferenciável (cartas de coordenadas) sobre $E = \cup_{p\in M} E_p$ tais que

- O mapa $\pi : E \to M$ que projeta E_x para x é suave,
- Para todo $p \in M$ existe um conjunto aberto $U_\alpha \subset M$ ao redor de p e um difeomorfismo

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k,$$

  enviando os espaços vetoriais E_x isomorficamente em $\{x\} \times \mathbb{C}^k$ para cada $x \in U$.

Usaremos indiferentemente qualquer uma das duas definições equivalentes da Definição 1.1.5, para construír fibrados seja utilizando as funções de transição com a condição de co-ciclo, ou considerando a união das fibras junto com alguma estrutura diferenciável para dita união.

Definição 1.1.7. Uma seção de um fibrado E sobre um conjunto aberto U é uma função $s : U \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_U$, ou seja, $s(p) \in E_p$ para cada $p \in U$. O conjunto das seções suaves de E sobre U é denotado por $\Gamma(U, E)$. Se U é a variedade M inteira, escrevemos somente $\Gamma(E)$.

Definição 1.1.8. Seja E um fibrado vetorial sobre M de posto k e $U \subset M$ um subconjunto aberto de M. Um referencial de E sobre U é uma família ordenada $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ de seções em $\Gamma(U, E)$, tais que, para todo $p \in U$, $\{\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p)\}$ é uma base para a fibra E_p, vista como $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

Para uma trivialização local de um fibrado complexo E de posto k dada por $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$, considerando $\{e_1, ..., e_{2k}\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^k$, definimos $\sigma_i : U \to \pi^{-1}(U)$ como

$$\sigma_i(p) := \varphi^{-1}(p, e_i) \in E_p.$$

Os elementos $\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p)$ determinam uma base para a fibra E_p. Além disso, dado que φ é um difeomorfismo com a sua imagem, cada $\sigma_i(p)$ varia diferenciavelmente em p, isto é, $\sigma_i \in \Gamma(U, E)$ para todo i. Portanto $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ é um referencial local para E em U.

Podemos construír novos fibrados utilizando operações definidas sobre as fibras. Formalmente, para dois fibrados complexos E, G de posto k, l com funções de transição $g_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ respectivamente sobre M, consideramos o seguinte:

- $E_p \oplus G_p$, soma direita de fibras.
- $E_p \otimes G_p$, produto tensorial de fibras.
- $\bigwedge^i E_p$, produto exterior de fibras.
- E_p^*, o espaço dual da fibra.

Nos podemos fazer isto, pois E_p é um espaço vetorial. Assim, obtemos novos fibrados complexos sobre M dados por

- $E \oplus G =: \bigcup_{p\in M} E_p \oplus G_p$, de posto $k+l$, com funções de transição em $p \in M$

$$j_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(p) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(p) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l),$$

- $E \otimes G =: \bigcup_{p\in M} E_p \otimes G_p$, de posto kl, com funções de transição em $p \in M$

$$j_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \otimes h_{\alpha\beta}(p) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l),$$

- $\bigwedge^s E =: \bigcup_{p\in M} \bigwedge^s E_p$, de posto $\binom{k}{s}$, com funções de transição em $p \in M$

$$j_{\alpha\beta}(p) = \wedge^s g_{\alpha\beta}(p) \in \mathrm{GL}(\wedge^s \mathbb{C}^k),$$

- $E^* =: \bigcup_{p\in M} E_p^*$, de posto k, com funções de transição em $p \in M$

$$j_{\alpha\beta}(p) = ((g_{\alpha\beta}(p))^t)^{-1} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}).$$

Observação 1.1.9. Em particular, para $k = n$, $\wedge^n E$ é um fibrado de linha com função de transição em $p \in M$

$$j_{\alpha\beta}(p) = \det(g_{\alpha\beta}(p)) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} - \{0\}$$

Entre os fibrados complexos mais importantes, que têm mais estrutura, estão os fibrados holomorfos

{FC}

Definição 1.1.10. Um fibrado complexo E sobre uma variedade complexa M de posto k é um fibrado holomorfo se

- E é uma variedade complexa,
- $\pi : E \to M$ é uma aplicação holomorfa,
- Existe uma cobertura de trivializações $(U_{\alpha,}\varphi_\alpha)$ para M tal cada φ_α é uma função biholomorfa.

Isto é equivalente a que as funções de transição induzidas pelas trivializações sejam holomorfas.

Definição 1.1.11. Para um fibrado E sobre M, uma seção $\sigma : U \subset M \to E$ é uma seção holomorfa sobre U se σ for holomorfa como uma aplicação entre variedades complexas. Denotamos o conjunto de seções holomorfas do fibrado E por $\mathcal{O}(E)$.

Observação 1.1.12. O referencial $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ construído acima está constituído por seções holomorfas, pois φ é um biholomorfismo.

Exemplo 1.1.13 (Fibrado Trivial)**.** Para uma variedade complexa M, consideremos $M \times \mathbb{C}^m$ e $\pi : M \times \mathbb{C}^m \to M$ a projeção no primeiro fator. Consideramos um atlas holomorfo de M com cobertura $\{U_\alpha\}$; assim damos uma trivialização para o fibrado $\mathbb{C}^m \to M$ por

$$\begin{aligned} \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) &\to U_i \times \mathbb{C}^n, \\ (p, Z) &\mapsto (p, Z). \end{aligned}$$

Com isto, temos funções de transição

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(x) : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n, \\ w &\mapsto w. \end{aligned}$$

As funções de transição φ_{ij} são funções holomorfas e verificam as propriedades de co-ciclo. Portanto $\mathcal{O}_M$ é um fibrado holomorfo. Se $M = \mathbb{CP}^n$ e $m = 1$, obtemos um fibrado em linha, que denotaremos por $\mathcal{O}(0)_{\mathbb{CP}^n}$, e é isomorfo ao fibrado em linha $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}$ de funções holomorfas globais.

{FT}

Exemplo 1.1.14 (Fibrado Tautológico)**.** Seja o conjunto:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1) : \{(\ell, Z) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : Z \in \ell\}.$$

Consideremos $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1) \to \mathbb{CP}^n$ pela projeção no primeiro fator. Seja $\mathbb{CP}^n = \cup_i U_i$, onde $\{U_i\}$ é a cobertura dada no Exemplo 1.1.3. Uma trivialização canônica para $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1)$ em U_i é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) &\to U_i \times \mathbb{C} \\ (\ell, Z) &\mapsto (\ell, Z_i) \end{aligned}$$

As funções de transição $\varphi_{ij}(\ell) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\ell) : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ w &\mapsto \frac{Z_i}{Z_j} \cdot w \end{aligned}$$

onde $\ell = [Z_0 : \cdots : Z_n]$. Note-se que as funções de transição φ_{ij} são holomorfas e verificam as propriedades de co-ciclo. Por isto, $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1)$ é um fibrado holomorfo de linha sobre $\mathbb{CP}^n$.

1.1.2 Estruturas Quase-Complexas

Definição 1.1.15. Para uma variedade $2m$-dimensional real M, uma estrutura quase-complexa sobre M é um endomorfismo $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ tal que para cada $p \in M$

$$J_p^2 = -\mathrm{Id}|_{T_pM},$$

Exemplo 1.1.16. Para $\mathbb{C}^n$ visto como uma variedade $2n$-dimensional com carta de coordenadas $(z^1, ..., z^n, \bar{z}^1, ..., \bar{z}^n)$, onde $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. Assim, obtemos una estrutura quase complexa J_0 dada por

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto nos motiva a construir estruturas quase-complexas sobre uma variedade complexa M. Seja $p \in M$ e (U, φ) uma carta de coordenadas holomorfas ao redor de p. Dado que o diferencial $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ estabelece um isomorfismo linear, podemos levar a estrutura quase-complexa J_0 em $\mathbb{C}^n$ a T_pM considerando a aplicação $J_p : T_pM \to T_pM$ definida por

$$J_p := d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ J_0 \circ (d\varphi_p).$$

Direitamente se comprova que $J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM}$ e que J_p é uma aplicação suave em p. Por outro lado, utilizando as equações de Cauchy-Riemann, para uma aplicação biholomorfa h entre abertos de $\mathbb{C}^n$, se verifica

$$J_0 dh = dh J_0.$$

Se consideramos uma outra carta de coordenadas holomorfas (V, ψ) ao redor de p, consideramos a função de transição entre cartas $h : (U \cap V) \to (U \cap V)$ dada por $h = \psi \circ \varphi^{-1}$. Como M é uma variedade complexa, h é uma função holomorfa entre abertos de $\mathbb{C}^n$. Dado que $\psi = h \circ \varphi$, mostra-se que J_p independe da escolha da carta de coordenadas holomorfas:

$$\begin{aligned} d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ J_0 \circ d\psi_p &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ J_0 \circ dh_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p \\ &= d(\psi^{-1})_{\psi(p)} \circ dh_{\varphi(p)} \circ J_0 \circ d\varphi_p \ . \\ &= d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ J_0 \circ d\varphi_p \end{aligned}$$

Portanto J está globalmente bem definido em M, e dado que é uma aplicação suave em todo $p \in M$, então $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$. Assim J é uma estrutura quase-complexa de M.

Definição 1.1.17. Para uma variedade $2n$-dimensional real M, uma estrutura quase complexa J é integrável em M se existe um atlas holomorfo para M que induz J partindo da estrutura quase complexa J_0 em $\mathbb{C}^n$.

Observação 1.1.18. Uma estrutura quase-complexa integrável também é chamada de estrutura complexa.

Note-se que a estrutura quase-complexa J construída para uma variedade complexa M é trivialmente induzida pelo atlas holomorfo sobre M. Assim J é integrável.

Definição 1.1.19. Seja M uma variedade $2n$ dimensional real com estrutura quase-complexa J. Definimos o tensor de Nijenhuis $N_J \in \Gamma((\wedge^2 T^*M) \otimes TM)$ da estrutura quase-complexa J, por

$$N_J(X,Y) := [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY].$$

Utilizando coordenadas holomorfas mostra-se facilmente que para uma variedade complexa M com estrutura quase-complexa integrável J, $N_J \equiv 0$. Esta é a primeira implicação do seguinte celebre teorema

Teorema 1.1.20 (Nirenberg-Newlander)**.** *Seja M uma variedade $2n$-dimensional real com uma estrutura-quase complexa J. Então J é integrável se, e somente se, $N_J \equiv 0$.*

A prova da outra implicação é mais elaborada e utiliza ferramentas que não são relevantes para nosso trabalho, por isso deixamos a leitor interessado a referência [15].

Estamos interessados em estudar as implicações geométricas da existência de uma estrutura complexa sobre uma variedade complexa. Assim, seja M uma variedade complexa com estrutura complexa J. Podemos considerar uma complexificação do fibrado tangente para M dada por

$$T_{\mathbb{C}}M = \bigcup_{p \in M} (T_pM \otimes \mathbb{C}).$$

O isomorfismo J_p se estende por linearidade complexa para $T_pM \otimes \mathbb{C}$. Dado que $J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM\otimes\mathbb{C}}$, J_p tem autovalores $\pm\sqrt{-1}$, e assim obtemos os auto-espaços associados dados por

$$T_p^{1,0}M = \{v \in T_pM \otimes \mathbb{C} : J_p(v) = \sqrt{-1}v\},$$
$$T_p^{0,1}M = \{v \in T_pM \otimes \mathbb{C} : J_p(v) = -\sqrt{-1}v\},$$

Isto nos fornece de uma decomposição não trivial para $T_pM \otimes \mathbb{C}$ dada por

$$T_pM \otimes \mathbb{C} = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M.$$

Em coordenadas holomorfas, onde $\frac{\partial}{\partial y^j} = J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial z^i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

geram os espaços $T_p^{1,0}M$ e $T_p^{0,1}M$, respectivamente. Cada um dos espaços $T_p^{1,0}M$ e $T_p^{0,1}M$ são fibras em $p \in M$ dos fibrado sobre M dados por

$$T^{1,0}M := \bigcup_{p \in M} T_p^{1,0}M \quad , \quad T^{0,1}M := \bigcup_{p \in M} T_p^{0,1}M.$$

Assim obtemos uma decomposição em soma direita para o fibrado tangente complexo

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Observação 1.1.21. O fibrado $T^{1,0}M$ é um fibrado holomorfo.

Por outra parte, definimos a complexificação do fibrado cotangente T^*M por

$$\Lambda^1_{\mathbb{C}}M := T^*M \otimes \mathbb{C},$$

Dada a decomposição não trivial em soma direita para $T_{\mathbb{C}}M$, nos obtemos uma decomposição não trivial em soma direita para $\Lambda^1_{\mathbb{C}}M$ dada por

$$\Lambda^1_{\mathbb{C}}M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M.$$

onde

$$\Lambda^{1,0}M := \{\alpha \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}M : \alpha(T^{0,1}M) = 0\} \quad , \quad \Lambda^{0,1}M := \{\alpha \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}M : \alpha(T^{1,0}M) = 0\}.$$

Em cartas de coordenadas holomorfas, as fibras de $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$ são geradas por

$$dz^i = dx^i + \sqrt{-1}dy^i \quad , \quad d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1}dy^i,$$

respectivamente. Consequentemente, podemos considerar o fibrado

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M := \bigwedge^k \Lambda^1_{\mathbb{C}}M$$

Considerando os fibrados $\Lambda^{l,0}M$ e $\Lambda^{0,k-l}M$, dados por

$$\Lambda^{l,0}M := \wedge^l \Lambda^{1,0}M \quad , \quad \Lambda^{0,k-l}M := \wedge^{k-l}\Lambda^{0,1}M.$$

Podemos incluir o produto tensorial deles em $\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ pelo mapa $\mu_l : \Lambda^{l,0}M \otimes \Lambda^{0,k-l}M \to \Lambda^k_{\mathbb{C}}$ dados por

$$\mu_{l,k-l}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta$$

onde $\alpha \in \Lambda^{l,0}M$, $\beta \in \Lambda^{0,k-l}M$. Isto, junto com a formula combinatória

$$\binom{2n}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n}{k-p},$$

nos diz que cada μ_l é um mapa injetivo e que as imagens de dois mapas μ_l diferentes se intersetam somente em 0. Assim, definirmos

$$\Lambda^{l,k-l}M := \mathrm{Im}(\mu_l)$$

Isto nos fornece de uma decomposição para $\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ dada por

{DF}
$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M. \tag{1.1.1}$$

Note-se que em coordenadas holomorfas cada fibra de $\Lambda^{p,q}M$ é gerada por elementos da forma

$$dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q},$$

onde $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$. Esta decomposição em soma direita induz uma deposição em soma direita para o conjunto de k-formas complexas $\mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) := \Gamma(\Lambda^k_{\mathbb{C}}M)$ dada por

{DFF}
$$\mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}), \tag{1.1.2}$$

onde

$$\mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) := \{\alpha \in \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) : \alpha \text{ é uma seção do fibrado } \Lambda^{p,q}M\}.$$

Estendemos a derivada exterior definida em k-formas reais para k-formas complexas utilizando linearidade complexa, e assim obter um operador $d : \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{k+1}(M,\mathbb{C})$. Para $p+q=k$, considerando $\mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C})$, e restingindo d para aquele espaço, obtemos o operador $d : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+q+1}(M,\mathbb{C})$. Isto nos permite definir os operadores $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(M,\mathbb{C})$ e $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M,\mathbb{C})$ dados por

$$\partial = \pi_{p+1,q} \circ d \quad , \quad \bar{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d,$$

onde $\pi_{p+1,q} : \mathcal{E}^{p+q+1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(M,\mathbb{C})$ e $\pi_{p,q+1} : \mathcal{E}^{p+q+1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M,\mathbb{C})$. Em coordenadas holomorfas uma (p,q)-forma s é dada por

$$s = \sum_{I,J} a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

Aplicando a derivada exterior

$$ds = \sum_j^n \sum_{I,J} \left(\frac{\partial a_{IJ}}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial a_{IJ}}{\partial y^j} dy_j \right) \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Dado que para todo j

$$dx^j = \frac{1}{2}(dz^j + d\bar{z}^j) \quad , \quad dy^j = \frac{1}{2i}(dz^j - d\bar{z}^j),$$

então

$$ds = \sum_{j=1}^{n}\sum_{I,J}\frac{\partial a_{IJ}}{\partial z^j}dz^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J + \sum_{j=1}^{n}\sum_{I,J}\frac{\partial a_{IJ}}{\partial \bar{z}^j}d\bar{z}^j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

O primeiro termo é de tipo $(p+1,q)$ e o segundo é de tipo $(p,q+1)$; assim localmente

$$\partial = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z^j}dz^j \quad , \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}d\bar{z}^j.$$

Daqui obtemos que $d = \partial + \bar{\partial}$, e assim $d : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(M,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}^{p,q+1}(M,\mathbb{C})$. Dado que o quadrado da derivada exterior real é zero, então $d^2 = 0$; e isto implica que:

- $\partial^2 = 0$,
- $\bar{\partial}^2 = 0$,
- $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$.

Proposição 1.1.22. *Uma função $f : M \to \mathbb{C}$ é holomorfa se e somente se $\bar{\partial} f = 0$.*

Do anterior, imitando o feito com o grupo de cohomologia de De Rham real de grau k, obtemos o seguinte

Definição 1.1.23. Para o operador d, definimos o grupo de cohomologia de De Rham complexa de grau k como:

$$H^k_{dR}(M,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(d : \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{k+1}(M,\mathbb{C}))}{\mathrm{Im}(d : \mathcal{E}^{k-1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^k(M,\mathbb{C}))}.$$

Note-se que $H^k_{dR}(M,\mathbb{C})$ pode se representado por $H^k_{dR}(M,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

Definição 1.1.24. Para o operador $\bar{\partial}$, definimos o grupo de cohomologia de Dolbeault de bi-grau (p,q) como:

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M,\mathbb{C}))}{\mathrm{Im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q-1}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}))}.$$

1.2 Geometria Diferencial

1.2.1 Geometria Riemanniana: Um Breve Resumo.

Vamos supor que o leitor já sabe sobre a teoria de variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana básica. No entanto, vamos dar um breve resumo das ferramentas necessárias sobre geometria Riemanniana.

Observação 1.2.1. Ao longo do trabalho utilizaremos a convenção de Einstein, pois nos simplifica a notação dizendo que: se aparecem índices repetidos una vez por cima e uma vez por baixo, então somamos naquele índice.

Para uma variedade Riemanniana (M, g), temos a existência da conexão Levi-Civita ∇ sobre o espaço tangente com respeito à métrica g, que em carta de coordenadas está determinada pela avaliação nos vetores tangentes canônicos associados à base

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

onde os Γ_{ij}^k's são chamados símbolos de Chistoffel, e estão dados em termos da métrica g pela expressão

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} + \partial_s g_{ij})g^{sk},$$

onde $g_{ij} = g\left(\partial_i, \partial_j\right)$, (g^{sm}) é a matriz inversa de (g_{sm}). A conexão de Levi-Civita tem associado o tensor de curvatura R dado por

$$R_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]},$$

e que satisfaz ás seguintes propriedades:

- $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$,
- $g(R_{XY}Z, T) = -g(R_{XY}T, Z)$,
- $\nabla_X R_{YZ} + \nabla_Y R_{ZX} + \nabla_Z R_{XY} = 0$, onde ∇ é a conexão induzida em $\mathrm{End}(E) = TM \otimes T^*M$
- $R_{XY}Z + R_{ZX}Y + R_{YZ}X = 0$,
- $g(R_{XY}Z, T) = g(R_{ZT}X, Y)$.

Em carta de coordenadas, R está determinado pelas avaliações nos elementos da base no espaço tangente por:

$$R_{\partial_k \partial_l}\partial_i = R_i{}^j{}_{kl}\partial_j.$$

onde cada $R_i{}^j{}_{kl}$ está determinado pelos símbolos de Christoffel com a equação

{CTSE}
$$R_i{}^j{}_{kl} = \Gamma^t_{li}\Gamma^j_{kt} - \Gamma^t_{ki}\Gamma^j_{lt} + \partial_k\Gamma^j_{li} - \partial_l\Gamma^j_{ki}. \tag{1.2.1}$$

Chamando

{TCD}
$$R_{ijkl} := g\left(R_{\partial_k\partial_l}\partial_i, \partial_j\right) = g_{tj}R_i{}^t{}_{kl}, \tag{1.2.2}$$

as propriedades dadas acima se reescrevem como

- $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,
- $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,
- $\nabla_h R_{klij} + \nabla_k R_{lhij} + \nabla_l R_{hkij} = 0$,
- $R_{ijkl} + R_{ljik} + R_{kjli} = 0$,
- $R_{ijkl} = R_{klij}$.

A partir do tensor R, podemos definir um outro objeto invariante chamado tensor de Ricci, que é um tensor $r \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ definido por

$$r(X, Y) := \mathrm{tr}\{Z \longmapsto R_{ZX}Y\}.$$

Em coordenadas, obtemos que

$$r(X, Y) = g^{kl}g(R_{\partial_l X}Y, \partial_k) = g^{kl}g(R_{X\partial_l}\partial_k, Y).$$

Utilizando ás propriedades do tensor R, $r(X, Y) = r(Y, X)$, assim r é um tensor simétrico. Dado que r é $C^\infty(M)$-linear em X e Y, localmente é determinado pelas direções coordenadas

$$r_{ij} = r(\partial_i, \partial_j) = g^{kl}g(R_{\partial_i\partial_l}\partial_k, \partial_j) = g^{kl}R_{kjil}.$$

Com o tensor r, podemos definir $\mathrm{Ric} \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ a partir de

$$g(\mathrm{Ric}(X), Y) = r(X, Y).$$

Dado que Ric é um tensor, então é determinado localmente numa carta de coordenadas como

$$\mathrm{Ric}(\partial_i) = (g^{sk}r_{ki})\partial_s.$$

Com isto, definimos a curvatura escalar S como

$$S := \mathrm{tr}\{Z \longmapsto \mathrm{Ric}(Z)\},$$

onde localmente, utilizando a convenção de Einstein, temos

$$S = g^{ij} g(\mathrm{Ric}(\partial_i), \partial_j) = g^{ij} g_{sj}(g^{sk} r_{ki}) = g^{ij} \delta_{jk} r_{ki} = g^{ik} r_{ik}.$$

Por outro lado, para uma variedade Riemanniana (M, g), em cada ponto $p \in M$ e $v \in T_pM$, podemos considerar $\hat{g} : T_pM \to T_p^*M$ dado por

$$\hat{g}(v)(w) = g_p(v, w) \quad \text{, com } w \in T_pM.$$

Isto define um isomorfismo entre os espaço tangente e cotangente em p. Mais ainda, se estende para um isomorfismo $\hat{g}$ entre os fibrados TM e T^*M, e isto nos fornece um isomorfismo entre o conjunto de seções $\Gamma(TM)$ e $\Gamma(T^*M)$ dado por

$$\hat{g}(X) = g(X, \cdot).$$

Aqui obtemos uma relação entre campos vetoriais com 1-formas univocamente determinada. Por simplicidade denotamos $\hat{g}(X) = X^\flat \in \Gamma(T^*M)$, e seu inverso por $\hat{g}^{-1}(\omega) = \omega^\sharp \in \Gamma(TM)$, para $\omega \in \Gamma(T^*M)$. Localmente numa carta de coordenadas $(U, x_1, ..., x_n)$ ao redor de um ponto $p \in M$, utilizando a convenção de Einstein, temos que um campo X e uma 1-forma podem-se escrever como

$$X = X^i \partial_i \quad , \quad \omega = \omega_i dx^i.$$

Aplicando $(\cdot)^\flat$ e $(\cdot)^\sharp$ obtemos que

$$X^\flat = X^j g_{ij} dx^i \quad , \quad \omega^\sharp = \omega_j g^{ij} \partial_i.$$

Se denotamos por $X_i = X^j g_{ij}$ e $\omega^i = \omega_j g^{ij}$, vemos que temos uma forma de baixar índices com $(\cdot)^\flat$ e subir índices com $(\cdot)^\sharp$. Com isto, podemos estender a métrica g para o uma métrica Riemanniana sobre ás seções de T^*M considerando para $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$

$$g^*(\alpha, \beta) := g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp).$$

Com isto, se define uma métrica sobre o conjunto das as k-formas da seguinte maneira: Para $\alpha, \beta \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$, existem $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_k$ tais que

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \quad , \quad \beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k.$$

Definimos a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ dada por

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \det(g^*(\alpha_i, \beta_j)).$$

1.2.2 Geometria Hermitiana

Nesta seção, replicaremos as ideias da seção anterior, mas utilizando uma métrica sesqui-linear no segundo fator. Para um fibrado complexo E definimos uma métrica sesqui-linear como:

Definição 1.2.2. Seja E um fibrado complexo sobre uma variedade complexa M. Definimos uma métrica Hermitiana h sobre E como uma família de produtos Hermitianos $h_p : E_p \times E_p \to \mathbb{C}$ tais que para $s, t \in E_p$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- $h_p(s,t) = \overline{h_p(t,s)}$,
- $\lambda h_p(s,t) = h_p(\lambda s, t) = h_p(s, \bar{\lambda} t)$,
- $h(t,t) \geq 0$ e $h(t,t) = 0$ se e somente se $t = 0$,
- Se $\{s_j\}$ é um referencial local suave, então:

$$h_{i\bar{j}}(x) = h_x(s_i(x), s_j(x))$$

  é uma função suave sobre M. Um fibrado complexo E fornecido com uma métrica Hermitiana h é chamado fibrado Hermitiano.

Exemplo 1.2.3 (Métrica num fibrado Trivial)**.** Considere-se o fibrado trivial de posto m dado por $E = M \times \mathbb{C}^m$ com base M. Uma seção σ de E pode ser identificada com uma função $f : M \to \mathbb{C}^m$ pela expressão

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$

Definimos uma métrica hermitiana h para E dada pelo produto hermitiano definido em $\mathbb{C}^m$ da seguinte forma

$$h(\sigma_1, \sigma_2) = f_1 \cdot \bar{f}_2$$

para $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ e f_1, f_2 as funções que definem as seções σ_1, σ_2.

Para $M = \mathbb{CP}^n$ e $m = n+1$, dado que $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1) \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$, podemos restringir a métrica h definida acima para uma métrica sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1)$.

Definição 1.2.4. Para um fibrado complexo E, definimos os conjuntos das k-formas e (p,q)-formas com valores num fibrado E sobre M por

$$\mathcal{E}^k(M,E) = \Gamma(\Lambda^k M \otimes E) \quad , \quad \mathcal{E}^{p,q}(M,E) = \Gamma(\Lambda^{p,q} M \otimes E)$$

Utilizando (1.1.1) obtemos uma decomposição similar a (1.1.2) para $\mathcal{E}^k(M,E)$ em termos de $\mathcal{E}^{p,q}(M,E)$ dada por

$$\mathcal{E}^k(M,E) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{p,q}(M,E).$$

Além disso, se consideramos um referencial para E e $\Lambda^{p,q}M$ em $U \subset M$ dados por $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ e $\{dz^I \wedge d\bar{z}^J\}$, então temos que cada $\psi \in \mathcal{E}^{p,q}(U,E)$ pode ser escrito como

$$\psi = \sum_{I,J} \sum_i f_i^{I,J} \sigma_i \otimes dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

e pode ser simplificado considerando a (p,q)-forma $\omega^i = \sum_{I,J} f_i^{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ para

{FHH}
$$\psi = \sum_i \sigma_i \otimes \omega^i. \tag{1.2.3}$$

Note-se que podemos definir uma conexão num fibrado complexo E da seguinte maneira

Definição 1.2.5. Uma conexão sobre um fibrado complexo E sobre M é uma aplicação linear

$$D : \mathcal{E}^0(M,E) \to \mathcal{E}^1(M,E),$$

que satisfaz a regra de Leibniz, isto é, para cada $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ e $\sigma \in \mathcal{E}^0(M,E)$:

$$D(f\sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot (D\sigma).$$

Dados E, G fibrados complexos com conexões D^E e D^G, para os fibrados

- $E \oplus G$,
- $E \otimes G$,
- $\bigwedge^k E$,
- E^*,

obtemos conexões tal que para $s, s_1, ..., s_k \in \Gamma(E)$, $t \in \Gamma(G)$ e $\alpha \in \Gamma(E^*)$

- $D^{E+G}(s \oplus t) := D^E(s) \oplus D^G(t)$,
- $D^{E \otimes G}(s \otimes t) := D^E(s) \otimes t + s \otimes D^G(t)$,
- $D^{\bigwedge E}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_k) := D^E(s_1) \wedge \cdots \wedge s_k + \cdots + s_1 \wedge \cdots \wedge D^E(s_k)$,
- $D^{E^*}(\alpha)(s) := d(\alpha(s)) - \alpha(D^E(s))$.

Definição 1.2.6. Uma conexão D de um fibrado complexo Hermitiano (E,h) é compatível com a métrica h se para cada $s,t \in \Gamma(E)$

$$dh(s,t) = h(Ds,t) + h(s,\overline{D}t) \in \Gamma(\Lambda_{\mathbb{C}}M),$$

onde $\bar{D}$ é definida para cada $X \in T_{\mathbb{C}}M$ por

$$\overline{D}_X = D_{\overline{X}}.$$

Observação 1.2.7. Em geral esta conexão não é única. No entanto, sempre podemos construir uma. Na seção seguinte encontraremos uma conexão univocamente determinada para fibrados holomorfos Hermitianos.

Partindo de uma conexão D sobre um fibrado Hermitiano (E,h), definimos o tensor de curvatura $F^D \in \Gamma(\Lambda^2_{\mathbb{C}}M \otimes E \otimes E^*)$ respeito á conexão D como

$$F^D_{XY} := [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]} \in \Gamma(E \otimes E^*),$$

onde $X, Y \in T_{\mathbb{C}}M$. O tensor de curvatura F^D verifica as seguintes propriedades:

- $F^D_{XY} = -F^D_{YX}$,
- $h(F^D_{XY}s,t) = -h(s,F^D_{XY}t)$, se verifica somente se D é compatível com h,
- $D_X F^D_{YZ} + D_Y F^D_{ZX} + D_Z F^D_{YZ} = 0$.

Observação 1.2.8. Em contraste com a conexão Levi-Civita, D não verifica as duas últimas propriedades mencionadas na seção anterior, pois não temos um conceito de conexão livre de torsão em geral.

Uma conexão não é um tensor, mas podemos ver sua representação local em carta de coordenadas da seguinte forma: seja E um fibrado complexo Hermitiano sobre uma variedade complexa M, e seja $\sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ um referencial local para o fibrado E sobre um aberto $U \subset M$; dado que $D : \mathcal{E}^0(M,E) \to \mathcal{E}^1(M,E)$, utilizando (1.2.3)

$$D\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \theta_i^j \otimes \sigma_j,$$

onde θ_i^j é uma 1-forma complexa. Assim vemos que localmente a conexão é definida pelo referencial σ e a matriz $\theta = (\theta_i^j)$. Com isto, podemos aplicar a mesma ideia para o tensor F^D. Dado que $F^D\sigma_i \in \Gamma(\Lambda^2_{\mathbb{C}}M \otimes E)$, então existem $\Theta_i^j \in \Gamma(\Lambda^2_{\mathbb{C}}M)$ tais que

$$F^D\sigma_i = \Theta_i^j \sigma_j.$$

Podemos deixar a matriz $\Theta := (\Theta_i^j)$ em termos da matriz θ. Primeiro notemos que localmente

$$\begin{aligned}
D_X D_Y \sigma_i &= D_X(\theta_i^j(Y)\sigma_j), \\
&= d(\theta_i^j(Y))(X)\sigma_j + \theta_i^j(Y)(D_X\sigma_j), \\
&= X(\theta_i^j(Y))\sigma_j + \theta_i^j(Y)\theta_j^k(X)\sigma_k, \\
&= (X(\theta_i^j(Y)) + \theta_i^k(Y)\theta_k^j(X))\sigma_j.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo na expressão de curvatura

$$\begin{aligned}
F_{XY}^D \sigma_i &= (X(\theta_i^j(Y)) + \theta_i^k(Y)\theta_k^j(X) - Y(\theta_i^j(X)) - \theta_i^k(X)\theta_k^j(Y))\sigma_j - D_{[X,Y]}\sigma_i, \\
&= (X(\theta_i^j(Y)) + \theta_i^k(Y)\theta_k^j(X) - Y(\theta_i^j(X)) - \theta_i^k(X)\theta_k^j(Y) - \theta_i^j([X,Y]))\sigma_j, \\
&= ((X(\theta_i^j(Y)) - Y(\theta_i^j(X)) - \theta_i^j([X,Y])) + (\theta_i^k(Y)\theta_k^j(X) - \theta_i^k(X)\theta_k^j(Y)))\sigma_j, \\
&= (d\theta_i^j + \theta_i^k \wedge \theta_k^j)(X,Y)\sigma_j.
\end{aligned}$$

Portanto $\Theta_i^j = d\theta_i^j + \theta_i^k \wedge \theta_k^j$, que em forma matricial escrevemos por $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$.

Exemplo 1.2.9 (Conexão num fibrado trivial)**.** Para o fibrado trivial de posto m dado por $E = M \times \mathbb{C}^m$, para $\sigma \in \Gamma(E)$, definimos uma conexão ∇ em sobre E por

$$(\nabla\sigma)(x) = (x, (df)_x) \in \mathcal{E}^1(M, E),$$

onde $f : M \to \mathbb{C}^m$ é a função que define σ. Considerando a métrica Hermitiana h construída para no fibrado trivial, vemos que ∇ é compatível com a métrica h.

{CFTT}

Exemplo 1.2.10 (Conexão no fibrado tautológico)**.** Podemos definir uma conexão para o fibrado $\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{CP}^n}(-1)$ utilizando o fato de que $\mathcal{O}(-1)_{\mathbb{CP}^n}(-1) \subset \mathbb{CP}^n \otimes \mathbb{C}^{n+1}$. Denotemos por Λ_ℓ a fibra no ponto ℓ do fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1)$. Considere-se a projeção ortogonal $\pi_l : \mathbb{C}^{n+1} \to \Lambda_\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Definimos a conexão ∇ sobre o fibrado tautológico

$$(\nabla\sigma)(\ell) = (\ell, \pi_\ell(d\sigma)).$$

Assim, $\nabla = \pi_l(d\sigma)$, isto é, para $X \in T_\ell\mathbb{CP}^n$, $\nabla_X\sigma = \pi_l(X\sigma)$. Localmente, se $\ell \in U_0$, onde U_0 é dado pela cobertura no Exemplo 1.1.3, então $\ell = [1 : w^1 : \cdots : w^n]$ para um elemento $w = (w^1, ..., w^n) \in \mathbb{C}^n$ unicamente determinado, e o vetor $v = (1, w)$ gera a linha ℓ. Consideremos v como um referencial local holomorfo em U_0. A projeção ortogonal em ℓ é dada por $\pi_l(\xi) = \langle \xi, \frac{v}{|v|}\rangle \frac{v}{|v|} = \frac{\langle \xi, v\rangle}{|v|^2} v$. Para σ uma seção local de $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-1)$, então em U_0, $\sigma = f \cdot v = f \cdot (1, w)$, para alguma função $f : U_0 \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(\nabla\sigma)(\ell) &= \pi_\ell(d\sigma) = df \cdot (1,w) + f\frac{\langle (0,dw), (1,w)\rangle}{1+|w|^2} \cdot (1,w), \\
&= (df + \theta f) \otimes v.
\end{aligned}$$

onde $\theta = \frac{\langle (0,dw),(1,w)\rangle}{1+|w|^2} = \frac{\sum_i \partial_i w^i \cdot \bar{w}^i}{1+|w|^2}$. Esta forma local pode ser reescrita como:

$$\theta = \partial \log(1 + |w|^2) = \partial \log |v|^2,$$

e assim obtemos uma expressão para a curvatura dada por

$$\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta = \bar{\partial}\partial \log |v|^2.$$

Pode-se mostrar utilizando esta expressão que ∇ é compatível com a métrica induzida pela métrica no fibrado trivial para $\mathbb{CP}^n$ de posto $n+1$.

1.2.3 Fibrados Holomorfos Hermitianos

Para um fibrado Hermitiano (E, h) sobre uma variedade complexa M com conexão D, utilizando o fato de que $\mathcal{E}^1(M, E) = \mathcal{E}^{1,0}(M, E) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(M, E)$, temos uma decomposição para D dada por

$$D = D^{1,0} + D^{0,1},$$

Dado que não temos muita estrutura no fibrado E precisaremos de mais hipóteses. Assim, vamos supor que E é um fibrado holomorfo

Uma propriedade extra dos fibrados holomorfos é que podemos estender o operador $\bar{\partial}$ definido em formas com valores em $\mathbb{C}$, para formas com valores num fibrado holomorfo E. Utilizando a notação dada em (1.2.3), escreveremos $\psi \in \mathcal{E}^1(M, E)$ localmente como

$$\psi = \sum_i \sigma_i \otimes \omega^i.$$

Utilizando a definição do σ_i, notamos que em fibrados holomorfos cada σ_i é uma seção holomorfa, portanto obtemos um referencial local de seções holomorfas. Isto nós permite definir um operador $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M, E) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M, E)$, localmente dado por

$$\bar{\partial}\psi := \sum_i \sigma_i \otimes \bar{\partial}\omega^i.$$

Utilizando o fato de que cada σ_i é uma seção holomorfa, vemos que $\bar{\partial}$ independe da escolha de coordenadas holomorfas, e assim dito operador está bem definido. No caso $p = 0$, $q = 0$, $\bar{\partial}$ é um operador entre os mesmos espaços que $D^{0,1}$.

Definição 1.2.11. Seja um fibrado holomorfo E sobre M com conexão D. Dizemos que D é compatível com a estrutura holomorfa sobre E se $D^{0,1} = \bar{\partial}$,

Proposição 1.2.12. *Seja (E, h) um fibrado holomorfo Hermitiano sobre M. Então existe uma única conexão D tal que D é compatível com a métrica Hermitiana h e com a estrutura complexa sobre M. Esta conexão é chamada conexão de Chern.*

Prova.

Para a unicidade, consideramos uma conexão D compatível com h e com a estrutura holomorfa dobre M. Para um referencial local holomorfo $\{e_1, ..., e_n\}$, utilizando a compatibilidade com a métrica temos que

$$dh_{i\bar{j}} = dh(e_i, e_j) = h(De_i, e_j) + h(e_i, De_j).$$

Dado que D é compatível com a estrutura holomorfa, $D = D^{1,0} + \bar{\partial}$. Assim, usando que $D^{1,0} : \mathcal{E}^0(M, E) \to \mathcal{E}^{1,0}(M, E)$ e $\bar{\partial} e_i = 0$, pois as seções e_i são holomorfas:

$$\begin{array}{rcl} dh_{i\bar{j}} & = & h((D^{1,0} + \bar{\partial})e_i, e_j) + h(e_i, (D^{1,0} + \bar{\partial})e_j), \\ & = & h(D^{1,0}e_i, e_j) + h(e_i, D^{1,0}e_j). \end{array} .$$

Note-se que para e_i, $D^{1,0}e_i \in \mathcal{E}^{1,0}(M, E)$, assim

$$D^{1,0}e_i = \theta_i^k \otimes e_k,$$

onde $\theta_i^k \in \mathcal{E}^{1,0}(M, \mathbb{C})$. Assim

$$dh_{i\bar{j}} = \theta_i^k h_{k\bar{j}} + h_{i\bar{k}} \overline{\theta_j^k}.$$

Por outro lado, dado que $d = \partial + \bar{\partial}$, então

$$\partial h_{i\bar{j}} + \bar{\partial} h_{i\bar{j}} = \theta_i^k h_{k\bar{j}} + h_{i\bar{k}} \overline{\theta_j^k}.$$

Comparando as $(1, 0)$-formas

$$\partial h_{i\bar{j}} = \theta_i^k h_{k\bar{j}}.$$

Chamando $\partial h = (\partial h_{i\bar{j}})$, $\theta = (\theta_i^j)$ e $h = (h_{i\bar{j}})$, obtemos que

$$\partial h = \theta^t \cdot h.$$

Daqui, $\theta = (\partial h \cdot h^{-1})^t$. Dado que θ e $\bar{\partial}$ determinam unicamente a conexão D, e θ depende unicamente da métrica h, D é única.

Para a existência, definamos D localmente em coordenadas holomorfas em $U_\alpha \subset M$, com um referencial holomorfo $\{e_1^\alpha, ..., e_n^\alpha\}$, pela matriz $\theta_\alpha = (\partial h \cdot h^{-1})^t$. Podemos ver facilmente que θ é uma matriz de $(1, 0)$-formas que define uma conexão compatível com a métrica h e com a estrutura holomorfa sobre M.

□

Note-se que para as conexões construídas nos exemplos anteriores para o fibrado trivial e o fibrado Tautológico, são conexões de Chern com respeito às respectivas métricas utilizadas.

Exemplo 1.2.13. Para um fibrado holomorfo Hermitiano de linha (E, h) sobre M, num referencial holomorfo $\{e^\alpha\}$, a matriz θ_α que define a conexão de Chern é tal que:

{CFL}
$$\theta_\alpha = \partial \log(f_\alpha), \tag{1.2.4}$$

para f_α uma função real positiva definida num subconjunto aberto de M dada por $f_\alpha = h(e^\alpha, e^\alpha)$.

Considere-se F^D o tensor de curvatura associado à conexão de Chern de um fibrado holomorfo Hermitiano (E, h). Podemos escrever F^D utilizando uma carta de coordenadas holomorfa e um referencial local em E por

$$F^D \quad = \quad \Theta_k^s \otimes e^k \otimes e_s,$$

onde (Θ_k^s) é uma matriz de 2-formas. Note-se que podemos considerar o traço do operador F^D (no sentido análogo ao feito na subseção 1.2.1), que com respeito a um referencial ortonormal de E é dado por

$$\mathrm{tr}(F^D) = h^{ij} h(F^D e_i, e_j) = \Theta_i^i \in \Lambda^2_{\mathbb{C}} M.$$

Entre as principais propriedades para $\mathrm{tr}(F^D)$ é que é uma $(1,1)$-forma real fechada com respeito a d e $\bar{\partial}$. Isto nos permite definir a classe de Chern

$$c_1(E) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\mathrm{tr}(F^D)] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

O fator 2π é um normalizador para obter uma classe de cohomologia integral, que precisaremos depois para relacionar fibrados de linha em $\mathbb{CP}^n$.

Observação 1.2.14. Utilizando a teoria de Chern-Weil se mostra que $c_1(E)$ independe da escolha da conexão D sobre o fibrado Hermitiano holomorfo (E, h). Assim, $c_1(E)$ é invariante para o fibrado E.

Definição 1.2.15. Para uma variedade complexa M com métrica Hermitiana h, denotamos por $c_1(M)$ à classe de Chern do fibrado $T^{1,0}M$ respeito à conexão de Chern da métrica h sobre $T^{1,0}M$

Exemplo 1.2.16. Para um fibrado de linha holomorfo Hermitiano, utilizando a representação de Cartan para a curvatura e a expressão (1.2.4), temos localmente que

$$\mathrm{tr}(F^D) = F^D = \bar{\partial}\partial \log(f_\alpha).$$

Para dois fibrados Hermitianos holomorfos (E, h), (G, g) de posto k, l, com conexões de Chern D^E e D^F respetivamente, temos as seguintes relações

- Considerando o fibrado Hermitiano holomorfo $(E \otimes G, h \otimes g)$, com conexão de Chern $D^{E\otimes G}$ obtemos que

$$c_1(E \otimes G) = lc_1(E) + kc_1(G),$$

- O fibrado dual (E^*, h^*), onde h^* é a métrica estendida de h, é tal que

$$c_1(E^*) = -c_1(E).$$

Vamos supor que o leitor sabe um pouco sobre a teoria de Feixes e as suas relações cohomologicas utilizando a cohomologia de Čech. Note-se que para fibrados holomorfos Hermitianos de linha E, G sobre M, verificamos que $E\otimes G$ é um fibrado de linha, $E\otimes G \cong G\otimes E$ e que $E^* \otimes E \cong \mathcal{O}_M$. Se consideramos a classe de equivalência de fibrados holomorfos de linha, a menos de isomorfismos, obtemos uma estrutura de um grupo abeliano.

Definição 1.2.17. Para uma variedade complexa M, definimos o grupo de Picard $\mathrm{Pic}(M)$ como o conjunto de classes de equivalência de fibrados de linha holomorfos, módulo isomorfismos.

Em termos de cohomologia de feixes, temos que

$$\mathrm{Pic}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}_M^*),$$

onde $\mathcal{O}_M^*$ é o feixe de funções holomorfas não nulas sobre M. Estudando o caso específico $M = \mathbb{CP}^n$, dado que a sequência exponencial de feixes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & & & f & \longmapsto & e^{2\pi f\sqrt{-1}} & & \end{array},$$

é uma sequência exata curta, podemos estender isto para uma sequência exata longa em cohomologia de Čech:

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}) \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}) \longrightarrow \cdots .$$

Aqui notamos os seguintes pontos:

- $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$,
- $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}) = 0$,
- $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}) = 0$.

O primeiro ponto se mostra utilizando as sequências de Mayer-Vietoris, os pontos restantes podem ser obtidos utilizando o teorema de Dolbeault, para relacionar grupos de cohomologias de Čech com grupos de cohomologia de Dolbeault, e o teorema de Decomposição de Hodge. Isto nos simplifica a sequência exata acima para

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{CP}^n}) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Assim, c_1 nós da um um isomorfismo entre $H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{CP}^n})$ e $H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$. Isto nos fornece de um isomorfismo entre $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^n)$ e $\mathbb{Z}$ dado por

$$L \mapsto \int_{\mathbb{CP}^1} c_1(L).$$

No exemplo 1.1.14 nós construímos o fibrado Tautológico em $\mathbb{CP}^n$, denotado por $\mathcal{O}(-1)$. Isto nos permite construir os seguintes fibrados

- $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}(-1)^*$,
- $\mathcal{O}(d) := \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$,
- $\mathcal{O}(-d) := \mathcal{O}(d)^*$.

Assim, utilizando as propriedades de c_1 para fibrados de linha, para todo $d \in \mathbb{Z}$

$$c_1(\mathcal{O}(d)) = -dc_1(\mathcal{O}(-1)).$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(d)) = -d \int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(-1)).$$

Com isto, é suficiente calcular a integral $\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(-1))$. Pelo feito no Exemplo 1.2.10 temos que $c_1(\mathcal{O}(-1)) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\partial\bar{\partial}\log|v|^2]$, e dado que localmente $|v|^2 = 1 + |z|^2$, obtemos que

$$\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2) = \frac{1}{(1+|z|^2)^2} d\bar{z} \wedge dz = \frac{2\sqrt{-1}r}{(1+r^2)^2} dr \wedge d\theta.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(-1)) = \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr d\theta}{(1+r^2)^2} = -1.$$

Com isto, concluímos que para todo $d \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(d)) = d.$$

Portanto $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^n) = \{\mathcal{O}(d) : d \in \mathbb{Z}\}$. Isto implica que cada fibrado em linha holomorfo L sobre $\mathbb{CP}^n$ é isomorfo a algum $\mathcal{O}(d)$. Assim, como o fibrado canônico $K_{\mathbb{CP}^n}$ é um fibrado holomorfo de linha, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $K_{\mathbb{CP}^n} \cong \mathcal{O}(k)$.

Proposição 1.2.18. *Em Pic*$(\mathbb{CP}^n)$*, o fibrado canônico* $K_{\mathbb{CP}^n}$ *é isomorfo ao fibrado* $\mathcal{O}(-n-1)$.

Uma prova desse resultado pode ser encontrada em [16] Proposição 2.4.3. Nosso objetivo agora é estudar hipersuperfícies sobre $\mathbb{CP}^n$. Para isto, iremos introduzir o conceito de divisor sobre uma variedade complexa M. Primeiro definimos o que é uma hipersuperfície analítica e uma hipersupefície irredutível.

Definição 1.2.19. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n. Uma hipersupefície analítica $V \subset M$ é um subconjunto de M tal que para cada ponto $p \in V$ existe uma vizinhança $U \subset M$ ao redor de p e uma função holomorfa f definida em U tal que os zeros de f são o elementos de $U \cap V$.

A definição acima implica que num ponto p, se existi-re uma função holomorfa g definida em p que se anula em V, então f divide a g numa vizinhança de V ao redor de p. A função f é chamada função de definição de V e esta é única ao menos multiplicação por uma função diferente de zero em p

Definição 1.2.20. Uma variedade analítica V é irredutível se não se escreve como união de subvariedades analíticas.

Com isto definimos os divisores

Definição 1.2.21. Um divisor D de uma variedade complexa M é uma combinação linear formal localmente finita

$$D = \sum_i a_i \cdot V_i,$$

onde os $a_i \in \mathbb{Z}$ e os V_i são hipersupefícies analíticas irredutíveis de M. Denotamos por $\mathrm{Div}(M)$ ao conjunto de divisores de M, que tem naturalmente uma estrutura de grupo abeliano sobre a adição.

A condição de localmente finita é no sentido de que para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ ao redor de p tal que intercepta uma quantidade finita de V_i's, e assim aparecem na soma com coeficientes não nulos.

Em termos de cohomologia de feixes, temos que

$$\mathrm{Div}(M) \cong H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*),$$

onde $\mathcal{O}^*$ e $\mathcal{M}^*$ são os feixes de funções meromorfas e holomorfas não nulas sobre M, respectivamente.

Nós obtemos uma correspondência entre $\mathrm{Div}(M)$ e $\mathrm{Pic}(M)$ utilizando o fato que um divisor D tem relacionadas funções meromorfas localmente definidas onde seu quociente é holomorfo.

Isto nos permite construir um fibrado em linha utilizando dito quociente de funções meromorfas como funções de transição. Assim obtemos um homomorfismo $[\cdot] : \mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M)$ tal que para $D,\ D' \in \mathrm{Div}(M)$

$$[D + D'] = [D] \otimes [D'].$$

Observação 1.2.22. Em geral, nós temos uma inclusão de $\mathrm{Div}(M)$ sobre $\mathrm{Pic}(M)$ dado pela sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{M}^* \longrightarrow 1,$$

que é levado a uma sequência exata em cohomologia

$$H^0(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

No espaço projetivo $\mathbb{CP}^n$ nós temos o seguinte resultado

{FD}

Proposição 1.2.23. *Para $k \geq 0$, o espaço de seções holomorfas globais do fibrado $\mathcal{O}(k)$ é canonicamente isomorfo ao espaço $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_k$ de todos os polinômios homogêneos de grau k.*

Isto se mostra utilizando teorema de Hartong (ver [16] para uma demostração).

Observação 1.2.24. Lembre-se que uma variedade algébrica é gerada, localmente, pelo conjunto de zeros de uma família de polinômios em $\mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$.

Teorema 1.2.25 (Teorema de Chow)**.** *Toda subvariedade analítica de $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade algébrica.*

Este teorema nos diz que a função de definição para uma variedade analítica irredutível V é um polinômio irredutível p de um certo grau d. Assim, em $\mathbb{CP}^n$ para que V esteja bem definida, o polinômios p tem que ser um polinômio homogêneo de grau d. Por outra parte consideramos o fibrado $\mathcal{O}(d)$, pela Proposição 1.2.23, podemos considerar um polinômio homogêneo q de grau d como seção de $\mathcal{O}(d)$. Considerando o polinômio $F = p/q$, vemos que é uma função meromorfa global. Se vemos V como um divisor e consideramos o fibrado em linha $[V]$ associado, obtemos então que F é uma função meromorfa global que é seção do fibrado $[V] \otimes \mathcal{O}(-d)$; assim deve ser isomorfo ao fibrado trivial. Com isto, temos que em $\mathrm{Pic}(M)$ a classe de equivalência gerada pelo fibrado $\mathcal{O}(d)$ é a mesma que a classe gerada pelos fibrados associados às hipersuperfícies de grau d.

Nosso objetivo agora é relacionar os fibrados canônicos de $\mathbb{CP}^n$ com suas hipersupefícies irredutíveis. Para isto, precisamos do seguinte

Definição 1.2.26. Seja M uma variedade complexa e $V \subset M$ uma hipersupefície. Definimos o fibrado normal N_V como:

$$N_V = \frac{T^{1,0}M|_V}{T^{1,0}V}.$$

Com isto, definimos o fibrado conormal como N_V^*.

Note-se que como $T^{1,0}M$ e $T^{1,0}V$ são fibrados holomorfos, então N_V é um fibrado holomorfo. Utilizando isto, se pode mostrar o seguinte

Teorema 1.2.27 (Formulas de Adjunção.)**.** *Para uma hipersupefície irredutível V de $\mathbb{CP}^n$ obtemos as seguintes formulas:*

- $N_V^* = [-V]|_V$,
- $K_V = (K_{\mathbb{CP}^n} \otimes [V])|_V$.

Como todo o trabalho feito até agora obtemos o resultado principal desta subseção:

{FCR}

Proposição 1.2.28. *Para V uma hipersupefície de grau d sobre $\mathbb{CP}^n$, o fibrado canônico de V é tal que*

$$K_V \cong \mathcal{O}(-n-1+d)|_V.$$

Prova.
Pela formula de Adjunção temos que

$$K_V \cong (K_{\mathbb{CP}^n} \otimes [V])|_V$$

Como V é uma hipersupefície de grau d, então pelo feito acima, obtemos que $[V] = \mathcal{O}(d)$. Assim, dado que $K_{\mathbb{CP}^n} \cong \mathcal{O}(-n-1)$

$$\begin{aligned} K_V &\cong (\mathcal{O}(-n-1) \otimes \mathcal{O}(d))|_X \\ &\cong \mathcal{O}(-n-1+d)|_V. \end{aligned}$$

□

Observação 1.2.29. Se a hipersupefície é de grau $d = n+1$, então o fibrado canônico K_X é isomorfo ao fibrado holomorfo trivial.

1.2.4 Teoria de Hodge em Geometria Hermitiana

Seja M uma variedade complexa com um produto Hermitiano h. Considere-se os fibrados $\Lambda^{p,q}M$ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto hermitiano definido pela extensão de h para aquele fibrado. Nós obtemos uma relação entre os fibrados $\Lambda^{p,q}M$ e $\Lambda^{n-p,n-q}M$ dada pelo isomorfismo de fibrados $* : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{n-p,n-q}M$ definido por

{Hod}

$$\langle \alpha, \beta \rangle dvol = \alpha \wedge *\beta, \tag{1.2.5}$$

com $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}M$. O isomorfismo $*$ é bem definido notando que os produtos $\langle \alpha, \beta \rangle dvol$ e $\alpha \wedge \gamma$, como $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}M$ e $\gamma \in \Lambda^{n-p,n-q}M$ são não degenerados, no sentido de que para todo α diferente de 0 existem β e γ tais que $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ e $\alpha \wedge \gamma \neq 0$, respectivamente.

A primeira propriedade que notamos para $*$ é que para $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, $*(f\alpha) = \bar{f}(*\alpha)$, pois temos que

$$\alpha \wedge *(f\beta) = \langle \alpha, f\beta \rangle dvol = \bar{f}\langle \alpha, \beta \rangle dvol = \bar{f}(\alpha \wedge *\beta) = \alpha \wedge (\bar{f}(*\beta)).$$

Utilizando o fato que o produto $\alpha \wedge \gamma$ é não degenerado, obtemos o desejado. Com isto mostramos o seguinte

Proposição 1.2.30. *Para $\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$:*

$$*^2\beta = (-1)^{p+q}\beta.$$

Prova.

Isto será feito pontualmente. Seja $x \in T_xM$, e considere-se $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1} = J(e_1), ..., e_{2n} = J(e_n)\}$ uma base ortonormal para T_xM, e assim temos uma base ortonormal $\{e^1, ..., e^{2n}\}$ para T_x^*M. Utilizando isto, construímos uma base ortonormal para a fibra em x do fibrado $T^{1,0}M$ dada por $\{\epsilon^j = 1/2(e_j + \sqrt{-1}J(e_j))\}$, isto nos fornece de uma base para a fibra em x do fibrado $\Lambda^{1,0}M$ dada por $\{\varphi_j = e^j + \sqrt{-1}e^{j+n}\}$. Note-se que $|\varphi_j| = \sqrt{2}$. Se consideramos o fibrado $\Lambda^{p,q}M$, vemos que uma fibra no ponto x é gerada por elementos da forma

$$\varphi^{IJ} = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar{\varphi}_{j_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j_q},$$

para $I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ e $J = \{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n\}$. Assim, é suficiente mostrar o resultado para cada elemento da base. Utilizando a equação (1.2.5) e o fato de que

$$dvol = \left(\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)^n \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_1 \cdots \wedge \bar{\varphi}_n,$$

obtemos que

$$*\varphi^{IJ} = (\sqrt{-1})^{n^2}\epsilon_{IJ}2^{-\frac{2n-p-q}{2}}\varphi_{i'_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i'_{n-p}} \wedge \bar{\varphi}_{j'_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j'_{n-q}},$$

onde $I' = \{1, ..., n\}/I$ e $J' = \{1, ..., n\}/J$ e ϵ_{IJ} é o produto das permutações de $\{I, J\}$ $\{I', J'\}$ para $\{1, ..., n\}$. Assim aplicando $*$ de novo e utilizando a sesqui-linearidade de $*$

$$\begin{aligned}
*^2(\varphi^{IJ}) &= *(*\varphi^{IJ}) \\
&= \overline{i^{n^2}}\epsilon_{IJ}2^{-\frac{2n-p-q}{2}} * (\varphi_{i'_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i'_{n-p}} \wedge \bar{\varphi}_{j'_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j'_{n-q}}) \\
&= \overline{(\sqrt{-1})^{n^2}}\epsilon_{IJ}2^{\frac{2n-p-q}{2}}(\sqrt{-1})^{n^2}\epsilon_{I'J'}2^{\frac{2n-(n+q)-(n+p)}{2}}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar{\varphi}_{j_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j_q} \\
&= |(\sqrt{-1})^{n^2}|\epsilon_{IJ}\epsilon_{I'J'}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar{\varphi}_{j_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j_q} \\
&= \epsilon_{IJ}\epsilon_{I'J'}\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar{\varphi}_{j_1} \cdots \wedge \bar{\varphi}_{j_q}
\end{aligned}$$

Dado que $\epsilon_{IJ}\epsilon_{I'J} = (-1)^{p+q}$, concluímos que $*^2(\varphi^{IJ}) = (-1)^{p+q}\varphi^{IJ}$

□

Nós queremos encontrar algumas propriedades na nossa variedade M utilizando $*$. Seja

{pin}
$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dvol. \tag{1.2.6}$$

Dado que M é uma variedade compacta, $(\cdot, \cdot)$ define uma norma L_2 em $\mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$. Assim se $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q-1}(M, \mathbb{C})$ e $\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$, consideremos:

$$(\overline{\partial}\alpha, \beta) = \int_M \langle \bar{\partial}\alpha, \beta \rangle dvol = \int_M \bar{\partial}\alpha \wedge *\beta.$$

Notemos que

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge *\beta) = \bar{\partial}\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p+q-1}\alpha \wedge \bar{\partial} * \beta,$$

então

{eq:1}
$$(\overline{\partial}\alpha, \beta) = \int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge *\beta) + (-1)^{p+q} \int_M \alpha \wedge \bar{\partial} * \beta. \tag{1.2.7}$$

Como $d = \bar{\partial}$ em $\mathcal{E}^{n,n-1}(M, \mathbb{C})$, $\bar{\partial}(\alpha \wedge *\beta) = d(\alpha \wedge *\beta)$. Dado que M é uma variedade sem bordo, aplicando o teorema de Stokes

{eq:2}
$$\int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge *\beta) = 0. \tag{1.2.8}$$

Por outro lado, como $\bar{\partial} * \beta \in \Lambda^{n-p,n-q+1}$

{eq:3}
$$* * (\bar{\partial} * \beta) = (-1)^{(n-p)+(n-q+1)}(\bar{\partial} * \beta) = (-1)^{2n-p-q+1}(\bar{\partial} * \beta) = -(-1)^{p+q}(\bar{\partial} * \beta). \tag{1.2.9}$$

Substituindo (1.2.8) e (1.2.9) em (1.2.7)

$$(\overline{\partial}\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *(- * \bar{\partial} * \beta) = (\alpha, - * \bar{\partial} * \beta).$$

Denotemos por $\bar{\partial}^*$ ao operador $- * \bar{\partial} *$, ele é chamado operador adjunto formal de $\bar{\partial}$. O operador $\bar{\partial}^*$ não é um operador adjunto no sentido de espaços de Hilbert, ele é obtido somente por propriedades geométricas. De forma similar obtemos operadores adjuntos formais para ∂, d e d^c dados por

$$\partial^* = - * \partial * \quad , \quad d^* = - * d *$$

respectivamente. Isso nos permite definir os operadores Laplacianos de Hodge dados por

$$\Delta_d := -dd^* - d^*d \quad , \quad \Delta_\partial := -\partial\partial^* - \partial^*\partial \quad , \quad \Delta_{\bar{\partial}} := -\bar{\partial}\bar{\partial}^* - \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Observação 1.2.31. Esta notação é não padrão, nos ajuda a evitar carregar um sinal $-$ nos cálculos locais e pontuais.

Notemos que para $f \in C^\infty(M)$, $\Delta_{\bar\partial} f = -\bar\partial^*\bar\partial f$, pois $\bar\partial^* f = 0$. Por outra parte, para $\alpha \in \mathcal{E}^{0,1}(M,\mathbb{C})$, localmente temos que:

$$\bar\partial^*\alpha = -g^{k\bar l}\partial_k \alpha_{\bar l} - \alpha_{\bar l}\partial_k g^{k\bar l}.$$

Como $\bar\partial f$ localmente é $\partial_{\bar l} f dz^{\bar l}$, então

{LG}

$$\Delta_{\bar\partial} f = -\bar\partial^*\bar\partial f = -\bar\partial^*\left(\partial_{\bar l} f dz^{\bar l}\right) = g^{k\bar l}\partial_k\partial_{\bar l} f + \partial_{\bar l} f\left(\partial_k g^{k\bar l}\right). \tag{1.2.10}$$

Exemplo 1.2.32. Consideremos $\mathbb{C}^n$ com carta de coordenadas $(x^1, y^1, ..., x^n, y^n)$ e métrica canônica g. Podemos construir uma carta de coordenadas $(z^1, ..., z^n)$ com $z^k = x^k + \sqrt{-1}y^k$ de tal forma que $\{\partial_1, ..., \partial_n, \partial_{\bar 1}, ..., \partial_{\bar n}\}$ forma uma base para la complexificação $T\mathbb{C}^n_{\mathbb{C}}$, onde

$$\partial_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^k}\right),$$

$$\partial_{\bar k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^k}\right).$$

Logo podemos estender g para $T_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ e obter que

$$g_{k\bar l} = g(\partial_k, \partial_{\bar l}) = \frac{1}{2}\delta^l_k.$$

Com isto

$$g^{k\bar l} = 2\delta^l_k.$$

Assim para uma função $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ localmente temos que:

$$\Delta_{\bar\partial} f = 2\sum_k \partial_k\partial_{\bar k} f,$$

$$\Delta_{\bar\partial} f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x^k)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(y^k)^2}\right).$$

Essa última expressão é igual (ao menos uma constante) ao operador laplaciano Δ definido em $\mathbb{C}^n$. Daí bem a nossa intuição de generalizar aquele operador dessa forma.

É bem conhecido que a equação de Laplace $\Delta u = 0$ tem sido muito estudada ao longo do tempo. Existem muitas ferramentas que dão existência, unicidade e regularidade (suavidade) de soluções. Isso nos dá um indício do potencial que pode ter a teoria de Hodge. Os resultados a partir de agora serão feitos para o operador $\bar\partial$, mas também são verificados para os operadores d e ∂.

Definição 1.2.33. Uma forma $\psi \in \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ é chamada harmônica se $\Delta_{\bar\partial}\psi = 0$. O conjunto das formas harmônicas em $\mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ é denotado por $\mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}$.

No fundo nós estamos interessados no núcleo dos operadores Laplacianos de Hodge. Uma caracterização de formas harmônicas é dada por

{PFFH}

Proposição 1.2.34. *Uma forma $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ e $\Delta_{\bar\partial}$-harmônica se e somente se $\bar\partial\alpha = \bar\partial^*\alpha = 0$.*

Prova.
Suponha que α é $\bar\partial$-harmônica. Assim considerando $(\Delta_{\bar\partial}\alpha, \alpha)$ obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta_{\bar\partial}\alpha, \alpha) \\ &= -(\bar\partial\bar\partial^*\alpha, \alpha) - (\bar\partial^*\bar\partial\alpha, \alpha) \\ &= -(\bar\partial^*\alpha, \bar\partial^*\alpha) - (\bar\partial\alpha, \bar\partial\alpha) \\ &= -||\bar\partial^*\alpha||^2 - ||\bar\partial\alpha||^2. \end{aligned}$$

Assim $||\bar\partial^*\alpha|| = ||\bar\partial\alpha|| = 0$, e portanto, $\bar\partial^*\alpha = \bar\partial\alpha = 0$.

Suponha agora que $\bar\partial\alpha = \bar\partial^*\alpha = 0$. Aplicando $\bar\partial^*$ a $\bar\partial\alpha$ e $\bar\partial$ a $\bar\partial^*\alpha$ obtemos que

$$\bar\partial\bar\partial^*\alpha = 0 \quad , \quad \bar\partial^*\bar\partial\alpha = 0.$$

Somando isso concluímos que $\Delta_{\bar\partial}\alpha = 0$. Portanto α é $\bar\partial$-harmônica.

□

{DDBC1}

Proposição 1.2.35. *Seja (M,ω) uma variedade complexa Hermitiana compacta e conexa. Toda função $f \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta_{\bar\partial} f = 0$ é constante.*

Prova.
Como $\Delta_{\bar\partial} f = 0$, pela Proposição 1.2.34 temos que $||\bar\partial f|| = 0$. Assim f é uma função holomorfa. Como que M é uma variedade compacta, cada função holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$ é continua, e em particular atinge um máximo em algum ponto $p \in M$. Se (U_i, φ_i) é uma carta de coordenadas holomorfa ao redor de p, então $f \circ \varphi_i^{-1}$ é localmente constante pelo principio de máximo aplicado em $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$. Como M é conexa e f contínua, concluímos que f é constante em M.

□

{TDH}

Teorema 1.2.36 (Teorema de Hodge)**.** *Seja M uma variedade complexa com uma métrica Hermitiana h. Então para o Laplaciano $\Delta_{\bar\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ temos que o espaço de (p,q)-formas holomorfas $\mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}$ é de dimensão finita e existem o operador projeção harmônica $H_{\bar\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}$ e o operador de Green $G : \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$ tais que*

- *G age como inverso de $\Delta_{\bar\partial}$ sobre o complemento ortogonal $(\mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial})^\perp$, com respeito à normal L^2, definida pela métrica h.*

- $Id_{\mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})} = H_{\bar\partial} + \Delta_{\bar\partial} \circ G = H_{\bar\partial} + G \circ \Delta_{\bar\partial}$,
- $\bar\partial \circ G = G \circ \bar\partial$ *e* $\bar\partial^* \circ G = G \circ \bar\partial^*$.

A prova deste resultado é complexa, pois se precisam da teoria de espaços de Sobolev via transformadas de Fourier sobre variedades junto com análise funcional e algumas estimativas. Uma prova pode ser encontrada em [13](pag. 84).

{TFFH2}

Proposição 1.2.37. *Para* $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(M,\mathbb{C})$

$$H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha) = 0 \quad , \quad H_{\bar\partial}(\bar\partial^*\alpha) = 0.$$

Prova.
Pelo Teorema 1.2.36 aplicado a $\bar\partial\alpha$

$$\bar\partial\alpha = H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha) - \Delta_{\bar\partial} G_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha).$$

Aplicando o produto (1.2.6)

$$(\bar\partial\alpha, H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)) = ||H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)||^2 - (\Delta_{\bar\partial} G_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha), H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)).$$

Como $H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)$ é uma forma harmônica, pela Proposição 1.2.34 temos que $\bar\partial^* H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha) = 0$. Assim, utilizando o anterior junto com o fato de que $\Delta_{\bar\partial} = \Delta^*_{\bar\partial}$ e que $\Delta_{\bar\partial} H_{\bar\partial}(\beta) = 0$

$$(\bar\partial\alpha, H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)) = (\alpha, \bar\partial^* H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)) = 0,$$
$$(\Delta_{\bar\partial} G_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha), H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)) = (G_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha), \Delta_{\bar\partial} H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)) = 0.$$

Assim $||H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha)|| = 0$. Portanto, $H_{\bar\partial}(\bar\partial\alpha) = 0$. Por uma prova essencialmente igual se mostra que $H_{\bar\partial}(\bar\partial^*\alpha) = 0$.

□

Observação 1.2.38. Este resultado se verifica para d e ∂ de forma semelhante.

1.3 Geometria de Kähler

Seja M uma variedade complexa com estrutura complexa J. Nós queremos estudar métricas Riemannianas que são compatíveis com a estrutura complexa.

Definição 1.3.1. Uma métrica Riemanniana g sobre M é Hermitiana respeito à estrutura complexa J se $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$. Em outras palavras, J deve ser uma transformação ortogonal em cada espaço tangente

Observação 1.3.2. A palavra Hermitiana neste contexto é sobre métricas Riemannianas J-invariantes, não Hermitiana no sentido de um produto skew-linear sobre uma fibrado complexo.

Vamos supor que g é uma métrica Hermitiana, e consideremos $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$. Dado que g é uma forma bilinear simétrica e uma métrica Hermitiana, obtemos as seguintes propriedades para ω: Para $X, Y \in TM$ e $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

- $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$,
- $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$,
- $\omega(f_1 X, f_2 Y) = f_1 f_2 \omega(X, Y)$.

Assim, ω é uma 2-forma que é invariante por J.

Definição 1.3.3. Uma métrica Hermitiana g é uma métrica de Kähler se a forma ω associada a g é tal que $d\omega = 0$. A forma ω é chamada forma de Kähler, mas chamaremos indiferentemente de métrica de Kähler para não mencionar g.

Definição 1.3.4. Uma variedade complexa M é chamada uma variedade de tipo Kähler se M admite uma métrica de Kähler. Denotamos por (M, ω) uma variedade de Kähler com forma de Kähler ω, e chamamos à classe de cohomologia definida pela métrica de Kähler ω como classe de Kähler de ω.

Observação 1.3.5. Note-se que a notação (M, ω) inclui uma estrutura complexa J para M junto com uma métrica Hermitiana g respeito a J sobre M.

Exemplo 1.3.6 (Métrica de Fubini-Study)**.** Seja $\mathbb{CP}^n = \cup_{i=1}^n U_i$ a cobertura dada no Exemplo 1.1.3, e

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ [Z_0 : \cdots : Z_n] & \mapsto & \left(\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{\hat{Z}_i}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i}\right) \end{array}$$

Assim, podemos definir

$$\omega_i := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\sum_{l=0}^{n} \left| \frac{Z_l}{Z_i} \right|^2 \right) \in \Lambda^{1,1} U_i$$

Primeiro vamos mostrar que $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$, isto nos diz que ω_i é uma representação local de uma forma global. Isto se obtém notando que

$$\log\left(\sum_{l=0}^{n}\left|\frac{Z_l}{Z_i}\right|^2\right) = \log\left(\left|\frac{Z_j}{Z_i}\right|^2\sum_{l=0}^{n}\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2\right) = \log\left(\left|\frac{Z_j}{Z_i}\right|^2\right)+\log\left(\sum_{l=0}^{n}\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2\right),$$

e o fato de que $\partial\bar{\partial}\log(|\frac{Z_j}{Z_i}|^2)=0$ em $U_i\cap U_j$. Com isto obtemos uma $(1,1)$-forma global ω_{FS} tal que localmente em U_i é igual a ω_i. Pela representação local de ω_{FS} temos que $\omega_{FS}=\overline{\omega_{FS}}$ e que ω_{FS} é uma $(1,1)$-forma d-fechada. Uma propriedade menos evidente é que ω_{FS} é uma $(1,1)$-forma positiva definida. Verificamos isto localmente em cada U_i; note-se que

$$\partial\bar{\partial}\log\left(1+\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right) = \frac{\sum dw_i\wedge\bar{w}_i}{1+\sum|w_i|^2}-\frac{(\bar{w}_i dw_i)\wedge(w_i d\bar{w}_i)}{(1+\sum|w_i|^2)^2} = \frac{1}{(1+\sum|w_i|^2)^2}\sum h_{ij}dw_i\wedge d\bar{w}_i,$$

com $h_{ij}=(1+\sum|w_i|^2)\delta_{ij}-\bar{w}_iw_j$. A matriz (h_{ij}) é positiva definida, pois para $u\neq 0$ utilizando a inequação de Cauchy-Schwarz para o produto Hermitiano padrão $(\cdot,\cdot)$ em $\mathbb{C}^n$

$$u^{\perp}(h_{ij})\bar{u}=(u,u)+(w,w)(u,u)-|(w,v)|^2\geq 0$$

.

Nas seguintes seções desenvolveremos consequências geométricas e analíticas das métricas de Kähler. Por enquanto estudaremos localmente g e ω quando estendemos g para o fibrado tangente complexo.

{Isotro}

Proposição 1.3.7. *A extensão da métrica Hermitiana g para o fibrado tangente complexo é tal que*

$$g(T^{1,0}M,T^{1,0}M)=g(T^{0,1}M,T^{0,1}M)=0.$$

Prova.

Seja $X,Y\in T^{0,1}M$. Dado que $JZ=\sqrt{-1}Z$ para todo $Z\in T^{0,1}M$, utilizando o fato de que g é uma métrica Hermitiana

$$g(X,Y)=g(JX,JY)=(\sqrt{-1})^2g(X,Y)=-g(X,Y)$$

Assim, $g(X,Y)=0$ para todo $X,Y\in T^{1,0}M$. Portanto $g(T^{1,0}M,T^{1,0}M)=0$. Por um argumento similar se mostra que $g(T^{0,1}M,T^{0,1}M)=0$.

□

Assim g em $T_{\mathbb{C}}M$ não é mais uma métrica, mas podemos considerar uma métrica Hermitiana h sobre o fibrado $T^{1,0}M$ definida por

$$h(X,Y) = g(X,\overline{Y}).$$

Em carta de coordenadas holomorfas, consideremos

$$g_{j\bar{k}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) \quad , \quad g_{\bar{k}j} = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right).$$

Como g é uma forma bilinear simétrica, na extensão $\overline{g_{j\bar{k}}} = g_{k\bar{j}}$, é dizer $(g_{j\bar{k}})$ é uma matriz Hermitiana. Isto nos permite escrever g e h localmente como

$$g = g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j),$$

$$h = g_{j\bar{k}} dz^j \otimes dz^k.$$

Observação 1.3.8. A extensão da métrica g é denotada por g, para não sobrecarregar a notação.

Com isto, estendendo ω, utilizando o fato de que $J\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z^k}$ e $J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, e a Proposição 1.3.7, obtemos localmente que é representada por:

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

Assim ω é uma $(1,1)$-forma real.

Definição 1.3.9. Uma $(1,1)$-forma α sobre M é positiva (resp. negativa) se

$$-\sqrt{-1}\alpha(v,\bar{v}) > 0 \text{ (resp. } < 0) \quad , \quad \text{com } v \in T^{1,0}M$$

Proposição 1.3.10. *A forma de Kähler ω é uma $(1,1)$-forma positiva.*

Prova.
Para isto é suficiente mostrar que para $X \in \Gamma(T^{1,0}M)$, $-\sqrt{-1}\omega(X,\bar{X}) = g(X,\bar{X}) > 0$ e igual a 0 somente se $X \equiv 0$. Isto se mostra direitamente do fato de que h é uma métrica Hermitiana.

$\square$

Notemos que para qualquer variedade complexa (M,g), J induz uma orientação para M. Assim, para variedades de Kähler (M,g) temos a existência de uma forma de volume $dvol$, que pode ser representada em termos de ω.

Proposição 1.3.11. *Para uma variedade complexa M com forma de Kähler ω, a forma de volume $dvol$ de M é tal que*

$$dvol = \frac{\omega^n}{n!}.$$

Prova.

Seja $p \in M$. Consideremos $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ uma base ortonormal para T_pM respeito à métrica g tal que $J_{e_{2j-1}} = e_{2j}$ e $Je_{2j} = -e_{2j-1}$. Assim, seja $\{e^1, ..., e^{2n}\}$ a base dual, isto gera o espaço T_p^*M. Com respeito a essa base temos que

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} e^{2j-1} \wedge e^{2j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \omega^n &= \left(\sum_{i_1} e^{2i_1-1} \wedge e^{2i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n} e^{2i_n-1} \wedge e^{2i_n}\right) \\ &= n! e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n} \end{aligned}.$$

Dado que $dvol = e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}$, concluímos o resultado.

$\square$

1.3.1 Equivalências da Condição de Kähler

Seja M uma variedade de Kähler com métrica de Kähler ω, lembrando que $d\omega = 0$. Esta condição global pode ser reinterpretado localmente por

{P122}

Proposição 1.3.12. *Uma métrica ω sobre M é de Kähler se e somente se*

{IEQ}

$$\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j} \tag{1.3.1}$$

Prova.

Notemos que:

{p121}

$$\begin{aligned} d\omega &= \sqrt{-1} \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k + \sqrt{-1} \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \\ &= \sqrt{-1} \sum_{k} \sum_{i<j} \left(\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j} \right) dz^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k + \\ &\qquad \sqrt{-1} \sum_{j} \sum_{i<k} \left(\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i} - \frac{\partial g_{j\bar{i}}}{\partial \bar{z}^k} \right) d\bar{z}^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^k \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Suponha-se que g é uma métrica de Kähler, assim $d\omega = 0$. Por isto, cada coeficiente de (1.3.2) se anula, e assim se verifica a condição (1.3.1). Reciprocamente, Suponha-se que

$$\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$$

Aplicando as propriedades de conjugação e o anterior

$$\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i} = \overline{\frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i}} = \overline{\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}} = \frac{\partial g_{j\bar{i}}}{\partial \bar{z}^k}$$

Substituindo isto em (1.3.2) obtemos que $d\omega = 0$. Por tanto ω é uma métrica de Kähler.

□

Isto nos da uma primeira equivalência local para a condição de Kähler. Uma equivalência mais pratica na hora de fazer cálculos pontuais, que será de vital importância no resto do manuscrito, dada pela seguinte proposição

{TCN}

Proposição 1.3.13. *Seja M uma variedade complexa com métrica Hermitiana g. Assim, g uma métrica de Kähler se, e somente se, ao redor de cada ponto $p \in M$ podemos escolher coordenadas holomorfas $z^1, \ldots, z^n$ tais que as componentes de g em p satisfazem*

{p122} $$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0, \tag{1.3.3}$$

onde δ_{jk} é a matriz identidade. Este tipo de carta de coordenadas é chamado carta de coordenadas holomorfos normais.

Prova.

Notemos que (1.3.3) aplicando a expansão de Taylor é equivalente a que a forma de Kähler se escreve como

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + O\left(|z|^2 \right) \right) dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

onde $O\left(|z|^2\right)$ denota os termos que são de decrescimento quadrático em $z^i, \bar{z}^i$. Primeiro escolhemos coordenadas w^i tais que

{p1221} $$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_l \left(a_{j\bar{k}l} w^l + a_{j\bar{k}\bar{l}} \bar{w}^l \right) + O\left(|w|^2 \right) \right) dw^j \wedge d\bar{w}^k \tag{1.3.4}$$

Agora definimos novas coordenadas z^i numa pequena vizinhança na origem que satisfaz

$$w^i = z^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{ijk} z^j z^k$$

Para alguns coeficientes b_{ijk} tais que $b_{ijk} = b_{ikj}$. Então

$$dw^i = dz^i - \sum_{j,k} b_{ijk} z^j dz^k$$

Substituindo o troco de variáveis

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{j,k}\left(\delta_{jk} + \sum_{l}\left(a_{j\bar{k}l}z^l + a_{j\bar{k}\bar{l}}\bar{z}^l - b_{klj}z^l - \overline{b_{jlk}}\bar{z}^l\right) + O\left(|z|^2\right)\right) dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

Como g é uma métrica de Kähler, pela Proposição 1.3.12 e (1.3.4), temos que $a_{j\bar{k}l} = a_{l\bar{k}j}$; assim definimos $b_{klj} := a_{j\bar{k}l}$, e obtemos

$$a_{j\bar{k}\bar{l}} = \overline{a_{k\bar{j}l}} = \overline{b_{jlk}}$$

Portanto todos os termos lineares se cancelam e obtemos o resultado. Agora suponha-se que em cada ponto p temos coordenadas holomorfas normais. Assim, para cada ponto $p \in M$ existem coordenadas holomorfas normais tais que

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0.$$

Utilizando (1.3.2) obtemos que $d\omega(p) = 0$. Dado que obtemos isto para p arbitrário, concluímos que ω é uma métrica de Kähler.

□

A terceira e última equivalência é um pouco menos evidente, mas será de vital importância para entender como interage J com a conexão de Levi-Civita de g. Para isto, precisamos primeiro de seguinte resultado

Lema 1.3.14. *Seja M uma variedade $2n$-dimensional com estrutura quase-complexa J. Seja g uma métrica Hermitiana respeito a J e seja ω a 2-forma associada a g e J. Então para $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$*

{EJP}

$$d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) = 2g(JY, (\nabla_Z J)X) - g(N_J(X, Y), Z), \tag{1.3.5}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica g estendida para o fibrado End(TM).

Este resultado é fácil de mostrar utilizando as seguintes expressões

$$(\nabla_Z J)X = \nabla_Z(JX) - J(\nabla_Z X),$$

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) \quad = \quad & X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ & -\omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

e lembrando que N_J é o tensor de Nijenhuis associado à estrutura quase-complexa J. Dado que estamos trabalhando em variedades complexas, $N_J = 0$. Assim (1.3.5) é um pouco mais simples, pois o fator $g(N_J(X, Y), Z) = 0$. Portanto obtemos a terceira equivalência da condição de Kähler.

Proposição 1.3.15. *Seja M uma variedade complexa com estrutura complexa J e métrica Hermitiana g. Então a forma ω associada a g e J é tal que $d\omega = 0$ se, e somente se, $\nabla J = 0$, onde ∇ é a extensão da conexão de Levi-Civita para g sobre o fibrado End(TM).*

Prova.
Suponha-se primeiro que $d\omega = 0$; assim por (1.3.5) obtemos que

$$g(JY, (\nabla_Z J)X) = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in TM.$$

Isto implica que $\nabla J = 0$. Por outra parte, vamos supor que $\nabla J = 0$; assim por 1.3.5 temos que

$$d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in TM.$$

Avaliando em JX, Y, Z obtemos que

$$d\omega(X, Y, Z) = -d\omega(JX, JY, Z) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in TM.$$

Por outra parte, dado que ω é J invariante, então $d\omega(JX, JY, Z) = d\omega(X, Y, Z)$. Juntando isto obtemos que

$$d\omega(X, Y, Z) = -d\omega(X, Y, Z) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in TM$$

Portanto $d\omega = 0$, é assim ω é uma métrica de Kähler.

□

1.3.2 Propriedades Geométricas das Variedades de Kähler

Seja M uma variedade de Kähler com métrica ω. Sabemos que ω vem de uma métrica Hermitiana g sobre M. Assim, consideremos ∇ a conexão de Levi-Civita de g, e estendamos-la, por bilinearidade complexa, para uma conexão no fibrado complexo $T_{\mathbb{C}}M$. Lembremos que, em carta de coordenadas holomorfas $z^1, ..., z^n$, as fibras de $T_{\mathbb{C}}M$ estão geradas por os elementos da forma

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

Aqui nós utilizaremos a seguinte notação

$$\nabla_i = \nabla_{\partial/\partial z^i} \quad , \quad \nabla_{\bar{i}} = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}^i} \quad , \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i} \quad , \quad \partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}.$$

Dado que ω é uma métrica de Kähler, então $\nabla J = 0$. Assim, obtemos que

$$J\left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k}\right) = \nabla_j \left(J\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)\right) = \sqrt{-1}\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k}.$$

Com isto obtemos que $\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} \in T^{1,0}M$ e então podemos definir os símbolos de Christoffel Γ^i_{jk} por

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Pela mesma razão $\nabla_{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial z^k} \in T^{1,0}M$; e por um argumento similar obtemos que $\nabla_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \in T^{0,1}M$ e $\nabla_{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \in T^{0,1}M$. No entanto, já que ∇ é livre de torsão

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \nabla_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Com isto temos que $\nabla_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ e $\nabla_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z^j}$ pertencem a $T^{1,0}M \cap T^{0,1}M$, ou seja, eles zeram. Além disso, dado que para cada tensor T, $\overline{\nabla_j T} = \nabla_{\bar{j}} \bar{T}$, concluímos que a conexão ∇ está totalmente determinada pelos coeficientes Γ^i_{jk}. Note-se que

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \quad , \quad \overline{\Gamma^i_{jk}} = \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}$$

Dado que temos completamente determinada a conexão ∇ em $T_{\mathbb{C}}M$, podemos estendê-la para $\Lambda^1_{\mathbb{C}}M$ utilizando a definição de uma conexão para o espaço dual, que satisfaz

$$\begin{aligned}
(\nabla_j dz^k)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) &= d\left(dz^k\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)\right) - dz^k\left(\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)\right) \\
&= -dz^k\left(\Gamma^s_{ji}\frac{\partial}{\partial z^s}\right) \\
&= -\Gamma^k_{ji}.
\end{aligned}$$

De forma similar se mostra que $\nabla_j dz^k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right) = 0$. Assim

$$\nabla_j dz^k = -\Gamma^k_{ji} dz^i.$$

Por outra parte temos que $\nabla_j d\bar{z}^k = \nabla_{\bar{k}} dz^j \equiv 0$. Com isto, podemos aplica derivada covariante sobre qualquer espaço tensorial de $T_{\mathbb{C}}M$.

{CDRR}

Exemplo 1.3.16 (Cálculo de Ricci)**.** Seja $a_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. Podemos calcular a derivada covariante deste tensor utilizando a conexão ∇ sobre o fibrado $\Lambda^1_{\mathbb{C}} \otimes \Lambda^1_{\mathbb{C}}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{p}}(a_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j) &= (\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}}) dz^i \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}}(\nabla_{\bar{p}} dz^i) \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}} dz^i \otimes (\nabla_{\bar{p}} d\bar{z}^j), \\
&= (\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}}) dz^i \otimes d\bar{z}^j - a_{i\bar{j}} dz^i \otimes (\Gamma^{\bar{l}}_{\bar{p}\bar{j}} d\bar{z}^l), \\
&= (\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} - a_{i\bar{l}} \Gamma^{\bar{j}}_{\bar{p}\bar{l}}) dz^i \otimes d\bar{z}^j.
\end{aligned}$$

Escrevemos sucintamente como

$$\nabla_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} - a_{i\bar{l}} \Gamma^{\bar{j}}_{\bar{p}\bar{l}}.$$

De forma geral esta ideia é levada para representar a derivada covariante de um tensor qualquer.

{CSELC}

Lema 1.3.17. *Em termos de $g_{j\bar{k}}$ os símbolos de Christoffel são dados por*

$$\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}}\partial_j g_{k\bar{l}}.$$

onde $g^{i\bar{l}}$ é a componente (i,l) da matriz inversa de $(g_{j\bar{k}})$.

Prova.
Lembremos que

$$g = g_{k\bar{l}}(dz^k \otimes d\bar{z}^l + d\bar{z}^l \otimes dz^k).$$

Dado que g é compatível com a métrica Hermitiana g, $\nabla g = 0$. Assim, por um lado

$$\nabla_j g = 0.$$

Por outra parte, localmente utilizando ∇ como no exemplo anterior

$$\nabla_j g = (\partial_j g_{k\bar{l}} - g_{i\bar{l}}\Gamma^i_{jk})(dz^k \otimes d\bar{z}^l + d\bar{z}^l \otimes dz^k).$$

Assim $g_{i\bar{l}}\Gamma^i_{jk} = \partial_j g_{k\bar{l}}$. Utilizando um argumento matricial se conclui que $\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}}\partial_j g_{k\bar{l}}$. □

Dado que ∇ é uma conexão em $T_{\mathbb{C}}M$, consideramos o tensor de curvatura R desta conexão. Como $\nabla J = 0$, temos que $R_{XY}\frac{\partial}{\partial z^i} \in T^{1,0}M$ e $R_{XY}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \in T^{0,1}M$. Por outra parte, como R é um tensor em todas as suas entradas, ele localmente está determinado pela avaliação nas direções dadas pela carta holomorfa.

Primeiro notamos que $R_{\partial_k\partial_l}\frac{\partial}{\partial z^i} \equiv 0$. Dado que R é um tensor, podemos mostrar isto pontualmente. Seja $p \in M$; pela Proposição 1.3.13 encolhemos uma carta de coordenadas holomorfas normais ao redor de p, que são tais que $\partial_i g_{j\bar{k}}(p) = \partial_{\bar{i}} g_{j\bar{k}}(p) = 0$. Por outra parte note-se que

$$\begin{aligned}
\nabla_k\nabla_l\frac{\partial}{\partial z^i} &= \nabla_k\left(\Gamma^j_{li}\frac{\partial}{\partial z^j}\right)\\
&= (\partial_k\Gamma^j_{li})\frac{\partial}{\partial z^j} + \Gamma^j_{li}\nabla_k\frac{\partial}{\partial z^j}\\
&= \left(\partial_k\Gamma^j_{li} + \Gamma^s_{li}\Gamma^j_{ks}\right)\frac{\partial}{\partial z^j}
\end{aligned}$$

Assim $R_{\partial_k\partial_l}\frac{\partial}{\partial z^i} = (\partial_k\Gamma^j_{li} - \partial_l\Gamma^j_{ki})\frac{\partial}{\partial z^j}$. Pelo Lema 1.3.17 temos que

$$\begin{aligned}
\partial_k\Gamma^j_{li} - \partial_l\Gamma^j_{ki} &= \partial_k(g^{j\bar{t}}\partial_l g_{i\bar{t}}) - \partial_l(g^{j\bar{t}}\partial_k g_{i\bar{t}})\\
&= (\partial_k g^{j\bar{t}})\partial_l g_{i\bar{t}} + g^{j\bar{t}}(\partial_k\partial_l g_{i\bar{t}}) - (\partial_l g^{j\bar{t}})\partial_k g_{i\bar{t}} - g^{j\bar{t}}(\partial_l\partial_k g_{i\bar{t}})\\
&= (\partial_k g^{j\bar{t}})\partial_l g_{i\bar{t}} - (\partial_l g^{j\bar{t}})\partial_k g_{i\bar{t}}
\end{aligned}$$

Como em p as derivadas da métrica se anulam, obtemos que $\partial_k \Gamma^j_{li} - \partial_l \Gamma^j_{ki} = 0$. Portanto em p, $R_{\partial_k \partial_l} \frac{\partial}{\partial z^i} = 0$, e dado que o ponto p é arbitrário, concluímos que $R_{\partial_k \partial_l} \frac{\partial}{\partial z^i} \equiv 0$. Por um argumento similar se mostra que $R_{\partial_{\bar{k}} \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i} \equiv 0$.

Por outra parte temos que $\overline{R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i}} = -R_{\partial_l \partial_{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$. Assim, o tensor de curvatura R é totalmente determinado pelos coeficientes de $R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i}$, que escrevemos como:

$$R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i} = R_i{}^j{}_{k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

{EDC}
Lema 1.3.18. *Em termos de* Γ^i_{jk} *os coeficientes do tensor de curvatura* $R_i{}^j{}_{k\bar{l}}$ *são dados por*

$$R_i{}^j{}_{k\bar{l}} = -\partial_{\bar{l}} \Gamma^j_{ki}.$$

Prova.
Por um lado temos que

$$R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i} = R_i{}^j{}_{k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z^j}$$

Por outra parte

$$\begin{aligned} R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \tfrac{\partial}{\partial z^i} &= (\nabla_k \nabla_{\bar{l}} - \nabla_{\bar{l}} \nabla_k) \tfrac{\partial}{\partial z^i} \\ &= -\nabla_{\bar{l}} \nabla_k \tfrac{\partial}{\partial z^i} \\ &= -\nabla_{\bar{l}} (\Gamma^j_{ki} \tfrac{\partial}{\partial z^j}) \\ &= (-\partial_{\bar{l}} \Gamma^j_{ki}) \tfrac{\partial}{\partial z^j} - \Gamma^j_{ki} \nabla_{\bar{l}} \tfrac{\partial}{\partial z^j} \\ &= (-\partial_{\bar{l}} \Gamma^j_{ki}) \tfrac{\partial}{\partial z^j} \end{aligned}$$

Comparando coeficientes concluímos que $R_i{}^j{}_{k\bar{l}} = -\partial_{\bar{l}} \Gamma^j_{ki}$

□

Com isto podemos calcular os coeficientes da conexão no fibrado cotangente complexo como segue

$$\begin{aligned} R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} dz^i &= -\nabla_{\bar{l}} (-\Gamma^i_{kj} dz^j) \\ &= \partial_{\bar{l}} \Gamma^i_{kj} dz^j + \Gamma^i_{kj} \nabla_{\bar{l}} dz^j \\ &= \partial_{\bar{l}} \Gamma^i_{kj} dz^j \\ &= -R_j{}^i{}_{k\bar{l}} dz^j \end{aligned}$$

Assim, os tensores de curvatura de todos os campos tensoriais definidos partindo de $T_{\mathbb{C}}M$ estão totalmente determinados pelos coeficientes $R_j{}^i{}_{k\bar{l}}$. Com isto, seja

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} := g\left(R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \frac{\partial}{\partial z^i}, \partial_{\bar{j}}\right) = g_{s\bar{j}} R_i{}^s{}_{k\bar{l}}.$$

{CC2E}

Lema 1.3.19. *Em termos de $g_{j\bar{k}}$ podemos escrever $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ como*

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_k \partial_{\bar{l}} g_{i\bar{j}} + g^{p\bar{q}}(\partial_k g_{i\bar{q}})(\partial_{\bar{l}} g_{p\bar{j}}).$$

Prova.

Pelos Lemas 1.3.18 e 1.3.17 obtemos que

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}k\bar{l}} &= g_{p\bar{j}} R_i{}^p{}_{k\bar{l}}, \\ &= -g_{p\bar{j}} \partial_{\bar{l}} \Gamma^p_{ki}, \\ &= -g_{p\bar{j}} \partial_{\bar{l}} (g^{p\bar{q}} \partial_k g_{i\bar{q}}), \\ &= -g_{p\bar{j}} (\partial_{\bar{l}} g^{p\bar{q}})(\partial_k g_{i\bar{q}}) - g_{p\bar{j}} g^{p\bar{q}} \partial_{\bar{l}} \partial_k g_{i\bar{q}}. \end{aligned}$$

Dado que $g_{p\bar{j}} g^{p\bar{q}} = \delta^q_j$, onde $(\delta^q_j) = \mathrm{Id}$, obtemos que $\partial_l (g_{p\bar{j}} g^{p\bar{q}}) = 0$. Assim

$$(\partial_{\bar{l}} g_{p\bar{j}}) g^{p\bar{q}} = -g_{p\bar{j}} (\partial_{\bar{l}} g^{p\bar{q}}).$$

Utilizando um argumento matricial obtemos que

{IM}

$$\partial_{\bar{l}} g^{p\bar{q}} = -g^{p\bar{t}} (\partial_{\bar{l}} g_{h\bar{t}}) g^{h\bar{q}}. \tag{1.3.6}$$

substituindo na expressão do começo

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}k\bar{l}} &= -g_{p\bar{j}} (-g^{p\bar{t}} (\partial_{\bar{l}} g_{h\bar{t}}) g^{h\bar{q}})(\partial_k g_{i\bar{q}}) - \delta^q_j \partial_{\bar{l}} \partial_k g_{i\bar{q}}, \\ &= \delta^t_j g^{h\bar{q}} (\partial_{\bar{l}} g_{h\bar{t}})(\partial_k g_{i\bar{q}}) - \partial_{\bar{l}} \partial_k g_{i\bar{j}}, \qquad . \\ &= g^{h\bar{q}} (\partial_{\bar{l}} g_{h\bar{j}})(\partial_k g_{i\bar{q}}) - \partial_{\bar{l}} \partial_k g_{i\bar{j}}. \end{aligned}$$

Reordenando e nomeando os índices obtemos o resultado.

□

Por fins ilustrativos, faremos a prova do seguinte Lema em coordenadas, mas isto pode ser demonstrado utilizando a segunda identidade de Bianchi dada na subseção 1.2.2.

{PCK}

Lema 1.3.20. *O tensor $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ é tal que*

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{j}i\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}} = R_{k\bar{l}i\bar{j}},$$

$$\nabla_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \nabla_i R_{p\bar{j}k\bar{l}}.$$

Prova.

As primeiras equações se mostram utilizando a Proposição 1.3.12 junto com o Lema 1.3.19 de forma direita. Para a ultima equação precisamos calcular explicitamente. Aplicando a derivada covariante temos que

$$\nabla_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \partial_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} - R_{s\bar{j}k\bar{l}} \Gamma^s_{pi} - R_{i\bar{j}s\bar{l}} \Gamma^s_{pk}$$

Utilizando os Lemas 1.3.17 e 1.3.19 junto com a Proposição 1.3.12 obtemos que

$$\partial_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_p\partial_k\partial_{\bar{l}} g_{ij} - g^{a\bar{b}} g^{c\bar{d}}(\partial_p g_{a\bar{d}})(\partial_k g_{i\bar{b}})(\partial_{\bar{l}} g_{c\bar{j}}) + g^{c\bar{b}}(\partial_p\partial_k g_{i\bar{b}})(\partial_{\bar{l}} g_{c\bar{j}}) + g^{c\bar{b}}(\partial_k g_{i\bar{b}})(\partial_p\partial_{\bar{l}} g_{c\bar{j}}).$$

$$-R_{i\bar{j}s\bar{l}}\Gamma^s_{pk} = g^{c\bar{b}}(\partial_k g_{p\bar{b}})(\partial_i\partial_{\bar{l}} g_{c\bar{j}}) - g^{a\bar{b}} g^{c\bar{d}}(\partial_i g_{a\bar{d}})(\partial_k g_{p\bar{b}})(\partial_{\bar{l}} g_{c\bar{j}})$$

Calculando agora $\nabla_i R_{p\bar{j}k\bar{l}}$, utilizando a Proposição 1.3.12 e notando que $\Gamma^s_{ip} = \Gamma^s_{pi}$, concluímos que $\nabla_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \nabla_i R_{p\bar{j}k\bar{l}}$.

□

Utilizando $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ definimos

{RC} $$R_{i\bar{j}} := g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}. \tag{1.3.7}$$

{EPCdR}

Lema 1.3.21. *Para uma variedade de Kähler (M,ω), em carta de coordenadas cada $R_{i\bar{j}}$ se expressa como:*

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i\partial_{\bar{j}} \log\det(g_{p\bar{q}}).$$

Prova.
Primeiro, lembremos que para uma matriz $A(x)$

$$\partial_t \det(A(t)) = A(t)\mathrm{tr}(A(t)^{-1}(\partial_t A(t))).$$

Utilizando isto, junto com os Lemas 1.3.17 e 1.3.18 obtemos que

$$\begin{aligned} -\partial_i\partial_{\bar{j}} \log\det(g_{p\bar{q}}) &= -\partial_{\bar{j}}(g^{p\bar{q}}\partial_i g_{p\bar{q}}) \\ &= -\partial_{\bar{j}}\Gamma^p_{ip} \\ &= R_p{}^p{}_{i\bar{j}} \end{aligned}$$

Por outra parte, utilizando o Lema 1.3.20 e a definição dos coeficientes $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$, obtemos que

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}} &= g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \\ &= g^{k\bar{l}} R_{k\bar{l}i\bar{j}} \\ &= g^{k\bar{l}} g_{q\bar{l}} R_k{}^q{}_{i\bar{j}} \\ &= \delta_{kq} R_k{}^q{}_{i\bar{j}} \\ &= R_k{}^k{}_{i\bar{j}} \end{aligned}$$

Portanto $R_{i\bar{j}} = -\partial_i\partial_{\bar{j}} \log\det(g_{p\bar{q}})$.

□

Propriedade imediata disto é que $\overline{R_{j\bar{i}}} = R_{i\bar{j}}$. Lembremos que para uma variedade Riemanniana podemos considerar r o tensor de Ricci. Dado que tanto a métrica g como a conexão ∇ são estendidas para $T_{\mathbb{C}}M$, podemos estender a definição de r utilizando a conexão estendida e calculando o traço respeito à g lembrando que na extensão não é mais uma métrica. Assim localmente em carta de coordenadas

$$
\begin{aligned}
r(X,Y) &= \operatorname{tr}\{Z \to R_{ZX}Y\} \\
&= g^{kl}g(R_{\partial_l X}Y, \partial_k) + g^{k\bar{l}}g(R_{\partial_{\bar{l}} X}Y, \partial_k) + g^{\bar{k}l}g(R_{\partial_l X}Y, \partial_{\bar{k}}) + g^{\bar{k}\bar{l}}g(R_{\partial_{\bar{l}} X}Y, \partial_{\bar{k}}), \\
&= g^{kl}g(R_{X\partial_l}\partial_k, Y) + g^{k\bar{l}}g(R_{X\partial_{\bar{l}}}\partial_k, Y) + g^{\bar{k}l}g(R_{X\partial_l}\partial_{\bar{k}}, Y) + g^{\bar{k}\bar{l}}g(R_{X\partial_{\bar{l}}}\partial_{\bar{k}}, Y).
\end{aligned}
$$

onde na ultima igualdade utilizamos as simatrias do tensor de curvatura (ver seção 1.2.1).Note-se que os fatores g^{kl} e $g^{\bar{k}\bar{l}}$ são nulos, assim

$$
r(X,Y) = g^{k\bar{l}}g(R_{X\partial_{\bar{l}}}\partial_k, Y) + g^{\bar{k}l}g(R_{X\partial_l}\partial_{\bar{k}}, Y).
$$

Por outro lado, para $X, Y \in T^{1,0}M$ ou $X, Y \in T^{0,1}M$, temos que $r(X,Y) = 0$, pois g se anula nesses espaços. Assim, localmente r, é determinado por $r(\partial_i, \partial_{\bar{j}})$ e $r(\partial_{\bar{i}}, \partial_j)$. Calculando, nós temos:

$$
\begin{aligned}
r(\partial_i, \partial_{\bar{j}}) &= g^{k\bar{l}}g(R_{\partial_i\partial_{\bar{l}}}\partial_k, \partial_{\bar{j}}) + g^{\bar{k}l}g(R_{\partial_i\partial_l}\partial_{\bar{k}}, \partial_{\bar{j}}) \\
&= g^{k\bar{l}}g(R_{\partial_i\partial_{\bar{l}}}\partial_k, \partial_{\bar{j}}) \\
&= g^{k\bar{l}}R_{k\bar{j}i\bar{l}} \\
&= g^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}} \\
&= R_{i\bar{j}}. \\
r(\partial_{\bar{i}}, \partial_j) &= g^{k\bar{l}}g(R_{\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{l}}}\partial_k, \partial_j) + g^{\bar{k}l}g(R_{\partial_{\bar{i}}\partial_l}\partial_{\bar{k}}, \partial_j) \\
&= g^{\bar{k}l}g(R_{\partial_{\bar{i}}\partial_l}\partial_{\bar{k}}, \partial_j) \\
&= \overline{g^{k\bar{l}}g(R_{\partial_i\partial_{\bar{l}}}\partial_k, \partial_{\bar{j}})} \\
&= \overline{g^{k\bar{l}}R_{k\bar{j}i\bar{l}}} \\
&= \overline{g^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}}} \\
&= \overline{R_{i\bar{j}}} \\
&= R_{j\bar{i}}.
\end{aligned}
$$

Assim localmente o tensor r é escrito como:

$$
\begin{aligned}
r &= R_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j + R_{j\bar{i}}d\bar{z}^i \otimes dz^j \\
&= R_{i\bar{j}}(dz^i \otimes d\bar{z}^j + d\bar{z}^j \otimes dz^i)
\end{aligned}
$$

Com esta expressão, podemos definir o seguinte

Definição 1.3.22. Seja (M, ω) uma variedade de Kähler. Então definimos a $(1,1)$-forma de Ricci $\operatorname{Ric}(\omega)$ associada à forma ω como

$$
\operatorname{Ric}(\omega) := r(J\cdot, \cdot),
$$

onde r é o tensor de Ricci associado à conexão de Levi-Civita da métrica ω.

Utilizando o Lema 1.3.21, e o fato de que $dz^j \circ J = \sqrt{-1}dz^j$ e $d\bar{z}^j \circ J = -\sqrt{-1}d\bar{z}^j$, podemos escrever $\mathrm{Ric}(\omega)$ como

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(\omega) &= \sqrt{-1}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{j\bar{k}}) \end{aligned}$$

Observação 1.3.23. Em alguns textos $\det(g_{j\bar{k}})$ é denotado por $\frac{\omega^n}{n!}$ identificando $\mathbb{R}$ com o espaço de $2n$-formas.

Assim obtemos que $\mathrm{Ric}(\omega)$ é uma $(1,1)$-forma real d-fechada e $\bar{\partial}$-fechada. Portanto define uma classe de cohomologia em $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$ e $H^{1,1}_{\bar{\partial}}(M,\mathbb{R})$.

Em contraste, com os cálculos feitos até agora, podemos obter $\mathrm{Ric}(\omega)$ por outros meios. Para isto, lembremos da métrica Hermitiana h, sobre o fibrado $T^{1,0}M$, dada por

$$h(X,Y) = g(X,\bar{Y}),$$

onde $X, Y \in T^{1,0}M$. Se utilizamos a conexão de Levi-Civita ∇ sobre (M,g), e por linearidade complexa estendemos ∇ para $T_{\mathbb{C}}M$, vemos que dita conexão em $T^{1,0}M$ é a conexão de Chern da métrica h. Com isto, temos que o tensor de curvatura F^∇ no fibrado $T^{1,0}M$ é o mesmo que o tensor de curvatura R em (M,g) estendido para $T_{\mathbb{C}}M$ que definimos antes, mas restrito para $T^{1,0}M$. Assim, obtemos a $(1,1)$-forma

$$\mathrm{tr}(F^\nabla) = h^{k\bar{l}}h(F^\nabla\partial_k, \partial_l),$$

determinada pelos valores da forma $\mathrm{tr}(F^\nabla)(\partial_i, \partial_{\bar{j}})$, que explicitamente são dados por

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(F^\nabla)(\partial_i, \partial_{\bar{j}}) &= h^{k\bar{l}}h(F^\nabla_{\partial_i\partial_{\bar{j}}}\partial_k, \partial_l) \\ &= g^{k\bar{l}}g(F^\nabla_{\partial_i\partial_{\bar{j}}}\partial_k, \partial_{\bar{l}}) \\ &= g^{k\bar{l}}R_{k\bar{l}i\bar{j}} \\ &= g^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}} \\ &= R_{i\bar{j}}. \end{aligned}$$

Assim

$$\mathrm{tr}(F^\nabla) = R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Com esta expressão notamos que $i\mathrm{tr}(F^\nabla) = \mathrm{Ric}(\omega)$. Ou seja

$$c_1(T^{1,0}M) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(\omega)].$$

Por outro lado, se consideramos agora o fibrado anti-canônico $K_M^{-1} = \bigwedge^n T^{1,0}M$, vemos que é um fibrado holomorfo de linha, onde podemos levar a métrica h hermitiana sobre $T^{1,0}M$

para K_M^{-1} via os isomorfismos musicais de Berger. Assim, levando a conexão de Chern de $(T^{1,0}M, h)$ para (K_M^{-1}, h), obtemos a conexão de Chern desse fibrado com métrica hermitana h. Com isto, podemos calcular a classe de Chern de K_M^{-1}, que é tal que

$$c_1(K_M^{-1}) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Ric}(\omega)$$

Portanto obtemos que

$$c_1(K_M^{-1}) = c_1(T^{1,0}M).$$

O ponto chave disto é que a classe de Chern pode ser obtida de diferentes formas. Ambas construções serão necessárias já que a primeira nos fornece de propriedades locais e pontuais para estimar, e a segunda nos permite falar em globalidade, além de que é mais simples para construir exemplos utilizando a linguajem de fibrados junto com as Formulas de adjunção.

1.3.3 Propriedades Analíticas das Variedades de Kähler

Seja (M, g) uma variedade complexa compacta e conexa com métrica Hermitiana g. Com estas hipóteses, podemos construir uma forma de Kähler ω, lembrando que não necessariamente é d-fechada. Com isto, definimos o operador L de Lefschetz com seu adjunto formal.

{ODL}

Definição 1.3.24. Em uma variedade complexa compacta e conexa (M, g) com métrica Hermitiana g e forma de Kähler ω, definimos o operador de Lefschetz $L : \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q+1}(M, \mathbb{C})$ por

$$L(\alpha) = \alpha \wedge \omega.$$

Por (1.2.6), podemos considerar $\Lambda : \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p-1,q-1}(M, \mathbb{C})$ como o operador adjunto formal de L, via a $*$ de Hodge, que é dado por

$$(L\alpha, \beta) = (\alpha, \Lambda\beta).$$

e que podemos escrever explicitamente como $\Lambda = *L*$. Com esta expressão, deduzimos a seguinte proposição

{DDBC}

Proposição 1.3.25. *Seja (M, g) uma variedade complexa compacta e conexa com métrica Hermitiana g e forma de Kähler ω. Toda função $f \in C^\infty(M)$, tal que $\partial\bar{\partial} f = 0$, é constante.*

Prova.

Dado que M é uma variedade compacta, existe p tal que $f(p)$ é o valor mínimo da função f. Considere-se o conjunto

$$K = \{x \in M : f(x) = f(p)\}.$$

Como $p \in M$, então K é não vazio. Note-se que K é um conjunto fechado, por como se definiu. Agora, para ver que é um conjunto aberto, seja $\Lambda\partial\bar{\partial}$ e uma carta de coordenadas holomorfas ortonormais (U, φ) ao redor de p. Se restringimos o produto $(\cdot, \cdot)$ para U, e sem perda de generalidade, supondo que $\mathrm{Vol}(U) = 1$ (podemos supor isto multiplicando $\frac{\omega^n}{n!}$ por $\mathrm{Vol}(U)$), vemos que

$$\begin{aligned}
(\Lambda\partial\bar{\partial}f) &= (1, \Lambda\partial\bar{\partial}f) \\
&= (L(1), \partial\bar{\partial}f), \\
&= (\omega, \partial\bar{\partial}f), \\
&= g_{i\bar{j}} \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(dz_i \wedge d\bar{z}_j, dz_l \wedge d\bar{z}_k), \\
&= \left(4 \sum_{ij} g_{i\bar{j}} \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{j}^l}\right).
\end{aligned}$$

Com esta expressão vemos que $\Lambda\partial\bar{\partial}$ localmente é um operador elíptico de ordem 2, sem termo linear em U, e tal que $\Lambda\partial\bar{\partial}f = 0$. Dado que o máximo de f em U está num ponto interior p, pelo Teorema do máximo de Hopf vemos que f é uma função constante em U, e assim, $f(x) = f(p)$ par todo $x \in U$. Portanto $U \in K$, é dizer K é um conjunto aberto.

Dado que M é uma variedade conexa, $K = M$. Portanto f é constante sobre M.

□

Agora, supondo que temos uma variedade de Kähler (M, ω), podemos mostrar o seguinte:

{IDK} **Teorema 1.3.26.** *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler, então*

{IDK22}
$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^* \quad , \quad [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*. \tag{1.3.8}$$

Prova.

Primeiro mostrarmos o resultado para $\mathbb{C}^n$

Seja $p \in \mathbb{C}^n$, e consideremos $z^1, ..., z^n$ coordenadas normais holomorfas. Note-se que em $\mathbb{C}^n$ ditas coordenadas funcionam para todo $\mathbb{C}^n$, e assim os cálculos independem do ponto p. Assim, nessas coordenadas temos que

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j,k} \delta_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k,$$

Para $k = 1, \ldots n$, definamos sobre o conjunto de formas com suporte comparto, denotados por $\mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, os operadores $e_k : \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ e $\bar{e}_k : \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dados localmente por

$$e_k(\alpha) = dz^k \wedge \alpha \quad , \quad \bar{e}_k(\alpha) = d\bar{z}^k \wedge \alpha,$$

Denotemos por i_k e $\bar{i}_k$ aos operadores adjuntos formais de e_k e $\bar{e}_k$ respectivamente, com respeito ao produto interno (1.2.6), onde este produto é bem definido neste caso, pois consideramos apenas o produto sobre as formas com suporte compacto. Notemos que e_k, $\bar{e}_k$, i_k e $\bar{i}_k$ são lineares, pois o produto exterior é linear. Achando explicitamente i_k e $\bar{i}_k$ e avaliado em cada um dos elementos do referencial local de $\mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ (1.2.6) obtemos as seguintes relações para k e l

{P1K}
$$\begin{array}{cc} i_k e_k + e_k i_k = 1 & \bar{i}_k \bar{e}_k + \bar{e}_k \bar{i}_k = 1 \\ i_l \bar{e}_k + \bar{e}_k i_l = 0 & \bar{i}_l e_k + e_k \bar{i}_l = 0 \end{array}, \tag{1.3.9}$$

e para $k \neq l$

{P2K}
$$i_l e_k + e_k i_l = 0 \quad , \quad \bar{i}_l \bar{e}_k + \bar{e}_k \bar{i}_l = 0 \tag{1.3.10}$$

Definamos operadores $\partial_k : \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ e $\bar{\partial}_k : \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}) \to \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$, localmente por

$$\partial_k \left(\sum_{I,J} \alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \right) = \sum_{I,J} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial z^k} dz^I \wedge d\bar{z}^J \quad , \quad \bar{\partial}_k \left(\sum_{I,J} \alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J \right) = \sum_{I,J} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}^k} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

Pelas propriedades do produto exterior temos que ∂_k e $\bar{\partial}_k$ comutam com e_k, $\bar{e}_k$, i_k e $\bar{i}_k$; também temos que ∂_k e $\bar{\partial}_k$ comutam pelo teorema de Schwarz. Uma outra propriedade importante desses operadores é que $-\bar{\partial}_k$ é o operador adjunto formal de ∂_k respeito a (1.2.6). Para ver isso, consideramos $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$, e seja $(-\bar{\partial}_k(\alpha),\beta)$; assim pela bilinearidade do produto interno e (1.2.6)

$$(-\bar{\partial}_k(\alpha),\beta) = \int_{\mathbb{C}^n} \left\langle -\frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}^k} dz^I \wedge d\bar{z}^J, \beta_{KL} dz^K \wedge d\bar{z}^L \right\rangle \, dvol.$$

Pelos isomorfismos musicais temos $\langle f dz^I \wedge d\bar{z}^J, g dz^K \wedge d\bar{z}^L \rangle = f\bar{g}\delta_{IK}\delta_{JL}$, assim

$$(-\bar{\partial}_k(\alpha),\beta) = \int_{\mathbb{C}^n} -\frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}^k} \bar{\beta}_{IJ} \, dvol.$$

Pelo fato de $\mathbb{C}^n$ ser uma variedade sem bordo, e as formas serem de suporte compacto, aplicando integração por partes

$$\begin{aligned} (-\bar{\partial}_k(\alpha),\beta) &= \int_{\mathbb{C}^n} \alpha_{IJ} \frac{\partial \bar{\beta}_{IJ}}{\partial \bar{z}^k} \, dvol, \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} \alpha_{IJ} \overline{\left(\frac{\partial \beta_{IJ}}{\partial z^k} \right)}. \, dvol \end{aligned}$$

Pela definição do produto L^2

$$(-\bar{\partial}_k(\alpha),\beta) = \left(\alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J, \frac{\partial \beta_{KL}}{\partial z^k} dz^K \wedge d\bar{z}^L \right).$$

Assim

$$(-\bar{\partial}_k(\alpha), \beta) = (\alpha, \partial_k(\beta)).$$

Como isso acontece para todo α, $\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ de suporte compacto, concluímos que $-\bar{\partial}_k$ é o operador adjunto formal de ∂_k. Notemos que os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ podem ser escritos como

$$\partial = \sum_k \partial_k e_k \quad \text{e} \quad , \quad \bar{\partial} = \sum_k \bar{\partial}_k e_k.$$

Então obtemos os operadores adjuntos a ∂ e $\bar{\partial}$

$$\partial^* = -\sum_k \bar{\partial}_k i_k \quad \text{e} \quad \bar{\partial}^* = -\sum_k \partial_k \bar{i}_k.$$

Com isso já temos as ferramentas necessárias para mostrar as identidades de Kähler. Operador de Lefchetz dado na Definição 1.3.24 em $\mathbb{C}^n$ na carta de coordenadas considerada é escrito como

$$L = \sqrt{-1} \sum_{j,k} (\delta_{jk}) e_j \bar{e}_k = \sqrt{-1} \sum_k e_k \bar{e}_k.$$

Então obtemos que o operador adjunto Λ se escreve localmente como

$$\Lambda = -\sqrt{-1} \sum_{j,k} (\delta_{jk}) \bar{i}_k i_j = \sqrt{-1} \sum_k i_k \bar{i}_k.$$

Agora, consideramos

{1K}

$$\begin{aligned} \Lambda\partial &= -\sqrt{-1}\left(\sum_{j,k} \bar{i}_j i_j \partial_k e_k\right), \\ &= -\sqrt{-1}\left(\sum_{j,k} \partial_k \bar{i}_j i_j e_k\right), \\ &= -\sqrt{-1}\left(\sum_k \partial_k \bar{i}_k i_k e_k + \sum_{j \neq k} \partial_k \bar{i}_j i_j e_k\right). \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Vamos re-escrever os dois termos dentro do parêntesis na equação acima. Para o primeiro, utilizando (1.3.9)

{2K}

$$\begin{aligned} -\sqrt{-1}\sum_k \partial_k \bar{i}_k i_k e_k &= \sqrt{-1}\sum_k \partial_k \bar{i}_k e_k i_k - \sqrt{-1}\sum_k \partial_k \bar{i}_k, \\ &= -\sqrt{-1}\sum_k \partial_k e_k \bar{i}_k i_k - \sqrt{-1}\sum_k \partial_k \bar{i}_k, \\ &= -\sqrt{-1}\left(\sum_k \partial_k e_k \bar{i}_k i_k\right) + \sqrt{-1}\bar{\partial}^*. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Para o segundo termo por (1.3.10) e (1.3.9)

{3K}
$$
\begin{aligned}
-\sqrt{-1}\sum_{j\neq k}\partial_k\bar{i_j}i_je_k &= \sqrt{-1}\sum_{j\neq k}\partial_k\bar{i_j}e_ki_j, \\
&= \sqrt{-1}\sum_{j\neq k}\partial_ke_k\bar{i_j}i_j.
\end{aligned}
\tag{1.3.13}
$$

Substituindo (1.3.12) e (1.3.13) em (1.3.11)

$$
\begin{aligned}
\Lambda\partial &= -\sqrt{-1}\left(\sum_k\partial_ke_k\bar{i_k}i_k + \sum_{j\neq k}\partial_ke_k\bar{i_j}i_j\right) + \sqrt{-1}\bar{\partial}^*, \\
&= -\sqrt{-1}\left(\sum_{j,k}\partial_ke_k\bar{i_j}i_j\right) + \sqrt{-1}\bar{\partial}^*.
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos que

$$\Lambda\partial = \partial\Lambda + \sqrt{-1}\bar{\partial}^*.$$

Portanto

$$[\Lambda, \partial] = \Lambda\partial - \partial\Lambda = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*.$$

Logo, aplicando conjugação e também utilizando o fato de que L é um operador real, concluímos que

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*.$$

Seja agora (M, ω) uma variedade de Kähler, e consideremos $p \in M$. Pela Proposição 1.3.13 existe uma carta de coordenadas holomorfa (U, φ) tais que ao redor de p tal que $g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}$ e $\partial_l g_{j\bar{k}}(p) = \partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}}(p) = 0$. Podemos construir os operadores e_k $\bar{e_k}$, ∂_k, $\bar{\partial_k}$, e seus adjuntos sobre U utilizando as coordenadas φ da mesma forma que acima, e com isto escrevemos L e Λ como

$$L = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}}e_j\bar{e_k} \quad , \quad \Lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}}i_j\bar{i_k}.$$

Note-se que os operadores e_k, $\bar{e_k}$, i_k, $\bar{i_k}$ são operadores algébricos, isto é, independem de derivadas dos coeficientes das formas diferenciais; por outra parte os operadores ∂_k e $\bar{\partial_k}$ são de primeira ordem, isto é, que dependem de derivadas parciais de ordem um. Assim, dado que em p a métrica g é tal que $g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}$ e $\partial_l g_{j\bar{k}}(p) = \partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}}(p) = 0$, as formulas acima 1.3.8 em p se reduzem a ser calculadas para $\mathbb{C}^n$. Com isto finaliza a prova.

□

Uma consequência direita disso é o seguinte:

{IDL}

Corolário 1.3.27. *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler compacta. Então, verifica-se a seguintes identidades:*

- $\bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial} = 0$,
- $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$,
- $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$.

Prova.

- $\bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial} = 0$.

  Pelo Teorema 1.3.26, $[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*$, assim

  $$-\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial^* - \sqrt{-1}\partial^*\bar{\partial} = \bar{\partial}[\Lambda, \bar{\partial}] + [\Lambda, \bar{\partial}]\bar{\partial}.$$

  Como $[\Lambda, \bar{\partial}] = \Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda$:

  $$-\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial^* - \sqrt{-1}\partial^*\bar{\partial} = \bar{\partial}\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\bar{\partial}\Lambda + \Lambda\bar{\partial}\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda\bar{\partial}.$$

  Dado que $\bar{\partial}^2 = 0$

  $$-\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial^* - \sqrt{-1}\partial^*\bar{\partial} = 0.$$

  Dividendo por $-\sqrt{-1}$ concluímos que

  $$\bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial} = 0.$$

- $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$.

  $$\begin{aligned}
  \sqrt{-1}\Delta_\partial &= -\sqrt{-1}\partial\partial^* - \sqrt{-1}\partial^*\partial, \\
  &= \partial[\Lambda, \bar{\partial}] + [\Lambda, \bar{\partial}]\partial && \text{pois } [\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*, \\
  &= \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda + \Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial, \\
  &= \partial\Lambda\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial\Lambda - \Lambda\partial\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda\partial && \text{pois } \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial, \\
  &= -[\Lambda, \partial]\bar{\partial} - \bar{\partial}[\Lambda, \partial], \\
  &= -\sqrt{-1}\bar{\partial}^*\bar{\partial} - \sqrt{-1}\bar{\partial}\bar{\partial}^* && \text{pois } [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*, \\
  &= \sqrt{-1}\Delta_{\bar{\partial}}.
  \end{aligned}$$

  Portanto $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$.

- $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_d &= -dd^* - d^*d \\
&= -(\partial + \bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) - (\partial^* + \bar\partial^*)(\partial + \bar\partial), \\
&= \Delta_\partial - (\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) - (\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial) + \Delta_{\bar\partial}, \\
&= \Delta_\partial - (\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) - \overline{(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial)} + \Delta_{\bar\partial}, \\
&= \Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial} && \text{pelo item anterior,} \\
&= 2\Delta_{\bar\partial}.
\end{aligned}$$

Portanto $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial}$

□

Os dois últimos item nos diz que os operadores Laplacianos Δ_d, Δ_∂, $\Delta_{\bar\partial}$ têm o mesmo núcleo, pois

$$\Delta_\partial = \Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta_d.$$

Utilizando o Teorema 1.2.36 vemos que os operadores de Green G_d, G_∂, $G_{\bar\partial}$ e as projeções H_d, H_∂, $H_{\bar\partial}$ dos operadores Δ_d, Δ_d, Δ_d respectivamente, são tais que

$$2G_d = G_\partial = G_{\bar\partial},$$

$$H_d = H_\partial = H_{\bar\partial}.$$

Assim, chamemos $G = G_\partial = G_{\bar\partial}$ e $H = H_\partial = H_{\bar\partial}$. Portanto para uma forma $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$ aplicando o Teorema 1.2.36

{112}
$$\alpha = H\alpha + \Delta_\partial G\alpha = H\alpha + \partial\partial^* G\alpha + \partial^*\partial G\alpha \tag{1.3.14}$$

{111}
$$\alpha = H\alpha + \Delta_{\bar\partial} G\alpha = H\alpha + \bar\partial\bar\partial^* G\alpha + \bar\partial^*\bar\partial G\alpha \tag{1.3.15}$$

{TDDB}

Teorema 1.3.28. *Seja $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$ em uma variedade de Kähler compacta. Se α é d-, ∂-, ou $\bar\partial$-exata e d, ∂ e $\bar\partial$-fechada, então*

$$\alpha = \partial\bar\partial\beta,$$

para alguma forma $\beta \in \mathcal{E}^{p,q}(M, \mathbb{C})$

Prova.
Faremos o argumento supondo que α é $\bar\partial$-exata, o caso para ∂ é essencialmente igual e o caso para d segue, pois $d = \partial + \bar\partial$. Pela Proposição 1.2.37 temos que $H(\alpha) = 0$. Utilizando (1.3.15), e que $\bar\partial G = G\bar\partial$:

{EDCE}
$$\begin{aligned}\alpha &= \bar\partial\bar\partial^* G\alpha + \bar\partial^*\bar\partial G\alpha,\\ &= \bar\partial\bar\partial^* G\alpha + \bar\partial^* G\bar\partial\alpha,\\ &= \bar\partial\bar\partial^* G\alpha.\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

Consideremos agora $\bar\partial^* G\alpha$. utilizando o primeiro item de 1.3.27 e o fato de que α é ∂-fechada

$$\begin{aligned}\partial(\bar\partial^* G\alpha) &= -\bar\partial^*(\partial G\alpha),\\ &= -\bar\partial^*(G\partial\alpha),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.2.37 temos que $H(\bar\partial^* G\alpha) = 0$. Assim, Utilizando (1.3.14)

$$\begin{aligned}\bar\partial^* G\alpha &= \partial\partial^* G(\bar\partial^* G\alpha) + \partial^*\partial G(\bar\partial^* G\alpha)\\ &= \partial\partial^* G(\bar\partial^* G\alpha) + \partial^* G(\partial\bar\partial^* G\alpha)\\ &= \partial\partial^* G(\bar\partial^* G\alpha)\end{aligned}$$

Substituindo isto em (1.3.16)

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar\partial\bar\partial^* G\alpha\\ &= \bar\partial(\partial\partial^* G(\bar\partial^* G\alpha))\\ &= \partial\bar\partial(-G^2(\partial^*\bar\partial^*\alpha))\end{aligned}$$

Considerando $\beta = -G^2(\partial^*\bar\partial^*\alpha)$ obtemos o resultado.

□

Com isto mostramos o $\partial\bar\partial$-Lema

{DDBR}

Corolário 1.3.29. *Seja α uma $(1,1)$-forma real d-, ∂-, ou $\bar\partial$-exata, então $\alpha = \sqrt{-1}\partial\bar\partial f$, para f uma função real.*

Prova.
Pela Proposição 1.3.28 temos que existe $\beta \in C^\infty(M,\mathbb{C})$ tal que

$$\alpha = \partial\bar\partial\beta.$$

Assim, aplicando conjugação

$$\overline{\alpha} = -\partial\bar\partial\overline{\beta}.$$

Agora, como α é uma forma real

$$\begin{aligned}2\alpha &= \alpha + \overline{\alpha}\\ &= \partial\bar\partial(\beta - \overline{\beta})\\ &= 2\sqrt{-1}\partial\bar\partial\mathrm{Im}(\beta)\end{aligned}$$

Note-se que $\mathrm{Im}(\beta)$ é um função real. Portanto chamando $f = \mathrm{Im}(\beta)$ concluímos que existe uma função real f tal que $\alpha = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f$.

□

Com isto podemos relacionar elementos em classes de cohomologia

{DDBLL}

Corolário 1.3.30. *Sejam (M, ω) uma variedade de Kähler compacta e α, β $(1,1)$-formas reais d-fechadas, e assim definem classes de cohomologia $[\alpha], [\beta] \in H^2(M, \mathbb{R})$. Se $[\alpha] = [\beta]$, então existe uma função $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $\alpha = \beta + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f$.*

Prova.

Como $[\alpha] = [\beta]$, então $\alpha - \beta$ é uma forma d-exata. Dado que α e β são formas reais, então pela Proposição 1.3.29, existe uma função real f tal que

$$\alpha - \beta = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f.$$

□

Este último corolário relaciona elementos de uma mesma classe em $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, em especial será de utilidade para relacionar formas reais na classe de Chern.

Capítulo 2

Equação de Tipo Monge-Ampère Complexa em Geometria

.desenlace}

Este Capítulo será dividido em três seções, e seguiremos essencialmente o livro [23], desenvolvendo em mais detalhe os argumentos e deixando em evidência os pontos chaves para ter uma visão geral da prova.

Na seção 2.1, partimos com (M, ω) uma variedade de Kähler compacta, e deduzimos os problemas geométricos que queremos resolver. Para resolve-los é suficiente demostrar a existência de soluções de uma equação em derivadas parciais, chamada equação de tipo Monge-Ampére complexa, que é dada por

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\lambda\varphi}\omega^n,$$

com F uma função real suave, $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, e $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ sendo uma $(1,1)$-forma positiva. Assim, tudo se resume em encontrar soluções para as equações associadas aos diferentes valores possíveis de λ. Estes casos podem ser parafraseados em termos da classe de Chern $c_1(M)$ notando que podemos definir um sinal para a classe, como veremos nesta seção. Assim, para $\lambda = -1$ e $\lambda = 0$ obtemos as condições $c_1(M) < 0$ e $c_1(M) = 0$. O caso $\lambda = 1$ é equivalente a ter a condição $c_1(M) > 0$, mas neste caso a equação em geral pode não ter solução, como mostra Gang Tian em [24].

Nas seções 2.2 e 2.3 daremos uma prova detalhada nos casos $c_1(M) < 0$ e $c_1(M) = 0$, e deixando claro qual é a essência do argumento, que é utilizar o **Método da Continuidade**.

A referencia canônicas, para o caso $c_1(M) < 0$ são [1] e [28], e para o caso $c_1(M) = 0$ é [28]; mas utilizaremos fortemente [23].

2.1 Conjecturas

As ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior têm como finelidade relacionar problemas geométricos com problemas analíticos. Em especifico, nossos problemas geométricos serão relacionados com encontrar soluções para um tipo de equação de equação diferencial em derivadas parciais chamada equação de tipo Monge-Ampère complexa.

2.1.1 A Conjetura de Calabi

Seja (M,ω) uma variedade de Kähler compacta. Pelo capítulo anterior temos que para uma forma de Kähler ω, associamos a forma de Ricci $\mathrm{Ric}(\omega)$ e a forma de volume $dvol$ dadas por

{ric}

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega^n}{n!} = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega^n + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log n! = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega^n, \tag{2.1.1}$$

{dvol}

$$dvol_\omega = \frac{\omega^n}{n!}. \tag{2.1.2}$$

Seja ω_0 uma outra forma de Kähler associada à uma outra métrica Hermitiana g'. Utilizando 2.1.1, comparamos as formas de Ricci das métricas de Kähler ω e ω_0:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\omega_0) - \mathrm{Ric}(\omega) &= \sqrt{-1}\left(\partial\bar{\partial}(\log\omega^n) - \partial\bar{\partial}(\log\omega_0^n)\right)\\
&= \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(\log\omega^n - \log\omega_0^n)\\
&= -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega_0^n}{\omega^n}.
\end{aligned}$$

Para as formas de volume, por 2.1.2, fazendo identificação das (n,n)-forma com as funções suaves sobre M, obtemos

$$\omega_0^n = \omega_0^n\frac{\omega^n}{\omega^n} = \frac{\omega_0^n}{\omega^n}\omega^n.$$

Note-se que $\frac{\omega_0^n}{\omega^n}$ é uma função global onde localmente é escrita por

$$\frac{\omega_0^n}{\omega^n} = \frac{\det(g'_{j\bar{k}})}{\det(g_{j\bar{k}})}.$$

Dado que as matrizes Hermitianas $(g_{j\bar{k}})$ e $(g'_{j\bar{k}})$ são matrizes positivas definidas, então $\frac{\omega^n}{\omega_0^n} > 0$. Assim, existe $F : M \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\frac{\omega_0^n}{\omega^n} = e^F.$$

Utilizando as propriedades da função logaritmo obtemos as seguintes relações

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) = \mathrm{Ric}(\omega) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F,$$

$$\omega_0^n = e^F \omega^n.$$

Aplicando a derivada exterior na primeira equação e integrando sobre a variedade M na segunda

$$[\mathrm{Ric}(\omega_0)] = [\mathrm{Ric}(\omega)],$$

$$\int_M \omega_0^n = \int_M e^F \omega^n.$$

A primeira equação nos diz que a forma de Ricci de qualquer forma de Kähler pertence à mesma classe de cohomologia em $H^2(M,\mathbb{R})$. A segunda equação a priori não tem muita informação; no entanto, se consideramos $\omega_0 \in [\omega]$, temos então que os volumes da variedade associados a ω e ω_0 são iguais, e assim

$$\int_M \omega^n = \int_M \omega_0^n = \int_M e^F \omega^n.$$

Isso nós permite perguntar o que acontece no sentido inverso para ambos casos.

{PVCC}

Conjectura 2.1.1 (Primeira versão da Conjectura de Calabi)**.** *Seja (M,ω) uma variedade de Kähler compacta com forma de Ricci $Ric(\omega)$. Seja ρ uma $(1,1)$-forma real em M tal que $\rho \in [Ric(\omega)]$. Então, existe uma métrica g' em M com forma de Kähler $\omega_0 \in [\omega]$ tal que $Ric(\omega_0) = \rho$.*

{SVCC}

Conjectura 2.1.2 (Segunda versão da Conjectura de Calabi)**.** *Seja (M,ω) uma variedade de Kähler compacta com forma de volume $\frac{\omega^n}{n!}$. Seja $F : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n$. Então existe uma forma de Kähler $\omega_0 \in [\omega]$ tal que $\omega_0^n = e^F \omega^n$.*

Utilizando o $\partial\bar{\partial}$-Lema 1.3.25 vemos que as conjecturas acima são equivalentes

Proposição 2.1.3. *As Conjecturas 2.1.1 e 2.1.2 são equivalentes.*

Prova.
Seja (M,ω) uma variedade de Kähler compacta. Vamos mostrar primeiro que a Conjectura 2.1.1 implica a Conjectura 2.1.2.

Seja $F : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que

{1edpp}

$$\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n. \tag{2.1.3}$$

Dado que $-i\partial\bar{\partial}\log e^F$ e $\mathrm{Ric}(\omega)$ são $(1,1)$-formas globais, podemos considerar a $(1,1)$-forma ρ dada por

{Eqric}
$$\rho - \mathrm{Ric}(\omega) = -i\partial\bar{\partial}\log e^{F}. \tag{2.1.4}$$

Assim $\rho \in [\mathrm{Ric}(\omega)]$. Dado que F é uma função real, ρ é uma $(1,1)$-forma real, então pela Conjectura 2.1.1 existe uma métrica g' com forma de Kähler ω_0 tal que $\mathrm{Ric}(\omega_0) = \rho$. Assim, por (2.1.1)

$$\rho = -i\partial\bar{\partial}\log \omega_0^n.$$

Juntando a equação anterior com (2.1.4)

$$\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{e^F\omega^n}{\omega_0^n}\right) = 0.$$

Pelo Corolário 1.3.25, existe uma constante C tal que $\log\frac{e^F\omega^n}{\omega_0^n} = C$, e assim

$$e^F\omega^n = e^C\omega_0^n.$$

Considerando ω^n e ω_0^n como formas podemos integrar sobre M, assim

$$\int_M e^F\omega^n = e^C\int_M \omega_0^n.$$

Por (2.1.3) obtemos que $C = 0$. Assim $\omega_0^n = e^F\omega^n$, e portanto a Conjectura 2.1.2 é satisfeita.

Por outro lado, seja ρ uma $(1,1)$-forma real em M tal que $\rho \in [\mathrm{Ric}(\omega)]$. Pelo Corolário 1.3.30 considerando $\alpha = \mathrm{Ric}(\omega)$ e $\beta = \rho$, existe uma função real F tal que

$$\rho = \mathrm{Ric}(\omega) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F.$$

Dado que $\mathrm{Ric}(\omega) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega^n$

$$\rho = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log e^F\omega^n.$$

Como M é uma variedade compacta e F é uma função diferenciável sobre M, temos que e^F é uma função positiva. Assim, integrado respeito á forma de volume para ω

$$\int_M e^F dvol_\omega > 0.$$

Considerando $\mathrm{Vol}(M) = \int_M dvol_\omega$, ajustamos por uma constante $C \in \mathbb{R}$ à função F para que verifique

$$\int_M e^C e^F dvol_\omega = \mathrm{Vol(M)}.$$

Pela Conjectura 2.1.2, existe uma métrica g' com forma de Kähler ω_0 tal que $dvol_{\omega_0} = e^C e^F dvol_\omega$. Como

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega_0^n.$$

Substituindo valores

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(e^C e^F \omega^n) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log e^F \omega^n.$$

Assim $\rho = \mathrm{Ric}(\omega_0)$. Portanto a Conjectura 2.1.1 é satisfeita.

□

Aqui notamos o seguinte: Para resolver a Conjectura 2.1.2 é suficiente mostrar o a existência de uma solução para o seguinte problema

{TVCC}

Conjectura 2.1.4 (Problema 1)**.** *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler compacta. Seja $F : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n$. Então existe uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ suave tal que*

- $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ *uma* $(1,1)$*-forma positiva.*
- $(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F\omega^n$ *em* M*.*

Vemos que o Problema 1 implica a Conjectura 2.1.2, pois $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é uma forma de Kähler tal que pertence a classe de cohomologia $[\omega] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, e é tal que

{EMA11}
$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F\omega^n. \tag{2.1.5}$$

O Problema 1 termina sendo equivalente à Conjectura 2.1.2 utilizando o Corolário 1.3.30 diretamente, mas é suficiente com a implicação explicitada antes. Além disso, obtemos unicidade a menos de constante.

{UCC}

Proposição 2.1.5. *Se existir uma solução para a Conjectura 2.1.4, então é única ao menos uma constante.*

Prova.
Consideremos $\varphi_1, \varphi_2 : M \to \mathbb{R}$ funções suaves tais que

$$\omega_1 = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1 \quad \text{e} \quad \omega_2 = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2,$$

onde ω_1, ω_2 são $(1,1)$-formas positivas e tais que

$$\omega_1^n = e^F\omega^n = \omega_2^n.$$

Consideremos então

$$\omega_1^n - \omega_2^n = (\omega_1 - \omega_2) \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1}).$$

Pela parte acima temos que $\omega_1 - \omega_2 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$, com $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Substituindo isso

$$\omega_1^n - \omega_2^n = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1}).$$

Como $\omega_1^n - \omega_2^n = 0$, temos que

{uni}

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1}) = 0. \tag{2.1.6}$$

Consideremos agora

$$\partial(\sqrt{-1}\varphi\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1})).$$

Por 2.1.6 isso é igual a

$$\sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1}).$$

Integrando e aplicando o teorema de Stokes

{uni1}

$$\int_M \sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \cdots + \omega_1 \wedge \omega_2^{n-2} + \omega_2^{n-1}) = 0. \tag{2.1.7}$$

Trabalhando localmente num ponto p, pela Proposição 1.3.13 aplicada à métrica associada à forma de Kähler ω

$$\omega_1 = \sqrt{-1}(\delta_{jk} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_1)dz^j \wedge d\bar{z}^k \quad e \quad \omega_2 = \sqrt{-1}(\delta_{jk} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_2)dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

Com isto, utilizando o teorema espectral, podemos considerar as matrizes $(\partial_j\partial_k\varphi_1)$ e $(\partial_j\partial_k\varphi_2)$ como matrizes diagonais em p. Escrevendo cada forma $\sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \omega_1^{n-1+j} \wedge \omega_2^j$ em p, e utilizando o fato de que a forma de Kähler é definida positiva, obtemos

$$\sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \omega_1^{n-1+j} \wedge \omega_2^j = F_j\omega^n,$$

com $F^j \geq 0$, e para $j = 0$

$$F_0 = \frac{1}{n}|\partial\varphi|^2.$$

Assim, substituindo isso em 2.1.7

$$\int_M (F_0 + \cdots + F_{n-1})\omega^n = 0.$$

Pelo anterior, e o fato de que $F_0 + \cdots + F_{n-1} \geq 0$, temos $F_0 + \cdots + F_{n-1} = 0$. Assim, como cada $F_i \geq 0$, concluímos que cada $F_i = 0$; e especificamente que $F_0 = 0$, ou seja, $\partial\varphi = 0$. Logo $\partial\bar{\partial}\varphi = 0$. Pelo Corolário 1.3.25, φ é constante. Portanto $\varphi_1 = \varphi_2 + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

$\square$

2.1.2 Existência de Métricas Kähler-Einstein

O estudo de métricas de Kähler-Einstein está muito motivado pela teoria das cordas, que é um modelo físico-matemático de nosso universo mas que não tem sido verificado fisicamente. Mesmo assim é uma área de estudo bastante ativa hoje, e que ajuda a ter um melhor entendimento das teorias matemáticas utilizadas. Assim começamos definindo o que é uma métrica de Einstein.

Definição 2.1.6. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. A métrica g é chamada métrica de Einstein se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$r = \lambda g,$$

onde r é o tensor de Ricci da métrica g.

Se além disso g é uma métrica de Kähler, então dizemos que g é uma métrica de Kähler-Einstein. Assim, obtemos uma relação entre a forma de Kähler e a forma de Ricci dada por

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega.$$

Consideremos $\omega' = |\lambda|\omega$, temos que Ric é invariante por dilatação, pois

$$\mathrm{Ric}(\omega') = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log|\lambda|^n\omega^n = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega^n = \mathrm{Ric}(\omega).$$

Assim obtemos que

$$\mathrm{Ric}(\omega') = \mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega = \frac{\lambda}{|\lambda|}\omega'.$$

Por causa disso simplificamos obtendo uma forma ω tal que verifica uma das condições seguintes

{asdd}

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega \quad , \quad \mathrm{Ric}(\omega) = 0 \quad , \quad \mathrm{Ric}(\omega) = \omega. \tag{2.1.8}$$

Nós dizemos que a classe $c_1(M)$ é positiva(negativa), denotado por $c_1(M) > 0$ (< 0), se existe uma $(1,1)$-forma positiva (negativa). Por outro lado, se $c_1(M)$ contém a classe de cohomologia $[0] \in H^2(\mathbb{C}, M)$, dizemos que $c_1(M) = 0$. É fácil ver, pelo Teorema de Stokes e o fato de que as formas de volume não se anulam, que essas definições são mutuamente excludentes. Assim, dado que ω é uma $(1,1)$-forma positiva, deixamos (2.1.8) em termos da classe de Chern

$$c_1(M) < 0 \quad , \quad c_1(M) = 0 \quad , \quad c_1(M) > 0,$$

respectivamente. Isso nos permite perguntar o problema inverso para cada uma das condições acima.

{<0}

Conjectura 2.1.7. *Seja M uma variedade de tipo Kähler compacta.*

1. *Se* $c_1(M) < 0$ *então existe uma forma de Kähler* ω *tal que* $Ric(\omega) = -\omega$.
2. *Se* $c_1(M) = 0$ *então existe uma forma de Kähler* ω *tal que* $Ric(\omega) = 0$.
3. *Se* $c_1(M) > 0$ *então existe uma forma de Kähler* ω *tal que* $Ric(\omega) = \omega$.

Notemos que para o primeiro e terceiro caso as classes de cohomologia onde estão as formas de Kähler, caso existirem, estão nas classes $-c_1(M)$ e $c_1(M)$ respectivamente. Por outro lado, para o segundo caso, não tem uma classe específica. Este caso está muito relacionado com a conjectura de Calabi, que é um pouco mais geral, mas que a prova é utilizando as mesmas técnicas.

Para o caso $c_1(M) = 0$ temos que é resolvido utilizando a primeira versão da Conjectura de Calabi 2.1.1 para $\rho = 0$, pois dado que $0 \in c_1(M)$, então existe uma métrica ω_0 tal que $\mathrm{Ric}(\omega_0) = 0$.

Para o caso $c_1(M) < 0$ é suficiente encontrar uma solução para o seguinte problema:

{CRN1}

Conjectura 2.1.8 (Problema 2)**.** *Seja* (M, ω) *uma variedade de Kähler compacta com* $c_1(M) < 0$, *e* $F : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Então existe uma função* $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *suave, tal que:*

- $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ *uma* $(1,1)$*-forma positiva.*
- $(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\varphi}\omega^n$ *em* M.

Isto implica o caso $c_1(M) < 0$ notando o seguinte:

- Dado que $c_1(M) < 0$, então existe uma métrica de Kähler ω_0 tal que $-\omega_0 \in c_1(M)$.
- Dado que $\mathrm{Ric}(\omega_0)$ e $-\omega_0$ são $(1,1)$-formas reais e pertencem à mesma classe de cohomologia, pelo Corolário 1.3.30, existe uma função rela F tal que

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) = -\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F.$$

Aplicando o Problema 2 para a variedade de Kähler (M, ω_0) e a função F dada acima, obtemos uma métrica de Kähler dada por $\omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$. Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(\omega) &= \mathrm{Ric}(\omega_0) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega_0^n}{\omega^n}, \\
&= \mathrm{Ric}(\omega_0) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(e^{-F-\varphi}), \\
&= -\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(-F-\varphi), \\
&= -(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi), \\
&= -\omega.
\end{aligned}$$

Da mesma forma ao dito na seção anterior, podemos mostrar que o Problema 2 é equivalente ao caso $c_1(M) < 0$, mas para nosso fim não é necessário. Além disso, neste caso temos unicidade:

{LU}

Lema 2.1.9. *Seja (M, ω) variedade de Kähler compacta tal que $c_1(M) < 0$. Então, existe no máximo uma métrica $\omega \in -c_1(M)$ tal que $Ric(\omega) = -\omega$*

Prova.

Vamos supor que existem duas métricas ω_1 e ω_2 em $-c_1(M)$ tais que

$$\mathrm{Ric}(\omega_1) = -\omega_1 \quad , \quad \mathrm{Ric}(\omega_2) = -\omega_2.$$

Pelo Corolário 1.3.30, existe φ uma função real tal que $\omega_1 = \omega_2 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$. Por outro lado, pelo Lema 1.3.21, temos que

$$\mathrm{Ric}(\omega_2) - \mathrm{Ric}(\omega_1) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega_1^n}{\omega_2^n}.$$

Assim, dado que $\mathrm{Ric}(\omega_1) = -\omega_1$ e $\mathrm{Ric}(\omega_2) = -\omega_2$

$$\omega_1 - \omega_2 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega_1^n}{\omega_2^n}.$$

Juntando isto, obtemos

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\varphi - \log\frac{\omega_1^n}{\omega_2^n}\right) = 0.$$

Pela Proposição 1.3.25, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\varphi - \log\frac{\omega_1^n}{\omega_2^n} = C$$

.

Com isto, obtemos que

$$\omega_1 = e^{\varphi - C}\omega_2.$$

Dado que $\omega_1 = \omega_2 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$, e que $\partial\bar{\partial}C = 0$, podemos ajustar φ de tal forma que $C = 0$. Assim, obtemos a seguinte equação que relaciona as formas de volume de ω_1 e ω_2

$$(\omega_2 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{\varphi}\omega_2^n.$$

Como M é uma variedade compacta, e a solução deve ser suave, então φ atinge um máximo em algum ponto $p \in M$. Pela Proposição 1.3.13 aplicado em p, temos que existe uma carta de coordenadas holomorfas $z^1, \ldots, z^n$ tal que a métrica g associada à ω_2 satisfaz $g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}$. Assim a equação acima em p fica como

{1}
$$\det(\delta_{jk} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)(p) = e^{\varphi(p)} \det(\delta_{jk})(p). \tag{2.1.9}$$

Por outro lado, como p é um ponto máximo de φ, obtemos que a matriz $(\partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)(p)$ é semidefinida negativa, é dizer, os autovalores $\lambda_i(p)$ dessa matriz não são positivos. Pelo Teorema Espectral podemos obter uma base ortonormal respeito à métrica definida por ω_2 tal que existe M uma matriz invertível que verifica

$$(\partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)(p) = M \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(p) \end{pmatrix} M^{-1} = MC(p)M^{-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \det(\delta_j^k + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)(p) &= \det(I + MCM^{-1})(p) \\ &= \det(MM^{-1} + MCM^{-1})(p) \\ &= \det(I + C)(p) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(p)) \end{aligned}.$$

Como $\lambda_i \leq 0$,

{2}
$$\det(\delta_j^k + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)(p) \leq \prod_{i=1}^{n} 1 = \det(I)(p) = \det(\delta_j^k)(p). \tag{2.1.10}$$

Por (2.1.9) e (2.1.10)

$$e^{\varphi(p)} \leq 1,$$

então $\varphi(p) \leq 0$. Dado que p é o ponto máximo, então $\varphi \leq 0$ em M. Por um argumento semelhante, mas com o ponto mínimo obtemos que $\varphi \geq 0$. Portanto $\varphi = 0$, ou seja $\omega_1 = \omega_2$.

$\square$

Podemos resumir o feito até agora com os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Problema 1} \arrow[dl] & & \text{Problema 2} \arrow[d] \\
\text{Conjectura 2.1.1} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Conjectura 2.1.2} \arrow[dl] & & \text{Caso } c_1(M) < 0 \\
\text{Caso } c_1(M) = 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Vemos assim que, em geral, as conjeturas de Calabi e da existência de métricas de Kähler-Einstein são equivalentes a encontrar soluções de equações de tipo Monge-Ampère complexa. Isto será resolvida pelo método da continuidade, com seus detalhes para cada caso, já que a existência de uma solução depende de estimativas a priori C^0, C^2 e C^3 e da teoria de regularidade elíptica para espaços de Hölder.

Veremos na seção seguinte que, para o caso $c_1(M) < 0$, obteremos as estimativas a priori C^0, C^2 e C^3 com relativa facilidade, as quais foram dadas por Thierry Aubin e Shing-Tung Yau. Para o caso $c_1(M) = 0$ a estimativas C^2 e C^3 são obtidas de forma semelhante, porém dependem da estimativa C^0, que se obtém com outras técnicas mais complexas. Foi Yau em 1978 que solucionou o problema, utilizando o método de iteração de Moser.

Para o caso $c_1(M) > 0$ não se teve tanta sorte. Em 1982 Akito Futaki mostrou que a existência de campos vetoriais holomorfos obstrui a existência de métricas Kähler-Einstein. Em 1997 Tian Gang em [24] deu exemplos de variedades de Kähler que não admitem campos vetoriais holomorfos e também não admitem métricas de Kähler-Einstein, mostrando que o problema é mais profundo. Assim, por ideias dadas por Yau, Tian define o conceito de K-estabilidade, e mostra que toda variedade que admite uma métrica de Kähler-Einstein é K-estável. Em 2002 Simon Donaldson, em [10], modificou e estendeu a definição de K-estabilidade dada por Tian e além disso conjecturou que a K-estabilidade seria suficiente para obter existência de métricas Kähler-Einstein, a qual foi conhecida como conjectura de Yau-Tian-Donaldson. Uma prova dessa conjectura foi dada por Xiuxiong Chen, Donaldson e Song Sun, em [7], em 2012.

2.2 Caso $c_1(M) < 0$

Como mostramos na seção anterior, a existência de métricas de Kähler-Einstein com $c_1(M) < 0$ pode ser obtida mostrando-se a Conjectura 2.1.8 (Problema 2). Vimos, pelo principio do máximo, que se existir uma solução, ela deve ser única. Assim vamos nos preocupar por mostrar a existência de soluções.

2.2.1 Estratégia

Lembremos que a equação que queremos resolver é

{EMA}
$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\varphi}\omega^n, \tag{2.2.1}$$

com a condição extra de que $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é uma $(1,1)$-forma positiva.

O método que utilizaremos para mostrar a existência de soluções é chamado **Método da Continuidade**. Ele é aplicado introduzindo uma família paramétrica de equações dependendo continuamente de um parâmetro $t \in [0,1]$, que denotaremos por $\{(*)_t\}$, de tal forma que para $t = 1$ obtemos a equação que queremos resolver. Depois, considerando o conjunto

$$\Phi = \{t \in [0,1] : (*)_t \text{ admite uma solução } \varphi_t \in C^\infty(M)\}.$$

e mostrando que

1. $\Phi \neq \emptyset$,
2. Φ é aberto em [0,1],
3. Φ é fechado em [0,1],

obtemos então que $\Phi = [0,1]$ e portanto $(*)_1$, que é a equação que queremos resolver, admite uma solução suave. Com isto, nós usaremos a família paramétrica de equações constituída por

$$(*)_t = \begin{cases} (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{tF+\varphi}\omega^n \\ \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ é uma forma positiva.} \end{cases}$$

Note-se que $\Phi \neq \emptyset$ pois para $t = 0$, $\varphi_0 = 0$ é uma solução suave de $(*)_0$. Assim, mostremos que Φ é aberto e fechado em $[0,1]$.

{12}

Lema 2.2.1. *O conjunto Φ é aberto em* $[0,1]$.

Prova.
Consideramos o operador $\Theta : C^{3,\alpha} \times [0,1] \to C^{1,\alpha}$, onde $C^{n,\alpha}$ são espaços de Hölder[1] de funções reais sobre M, dado por

{EAAA} $$\Theta(\varphi, t) = \log \frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\omega^n} - \varphi - tF, \tag{2.2.2}$$

que localmente é da forma

{asd} $$\log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi) - \log\det(g_{j\bar{k}}) - \varphi - tF. \tag{2.2.3}$$

Fixemos $t \in \Phi$. Assim, existe φ_t que é solução suave de $(*)_t$. Nosso objetivo é utilizar o teorema de função implícita para espaços de Banach no ponto (t, φ_t). Dado que φ_t é uma solução de $(*)_t$, utilizando as propriedades de logaritmo se mostra que $\Theta(t, \varphi_t) = 0$. Assim, somente temos que mostrar que o mapa $L : C^{3,\alpha} \to C^{1,\alpha}$ dado por

$$L(\psi) = D\Theta_{(\varphi_t, t)}(\psi, 0)$$

é um isomorfismo. Para isto, calculemos $D\Theta_{(\varphi_t,t)}(\psi, 0)$ explicitamente, onde denotamos por g_t a métrica associada à forma de Kähler $\omega_t = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t$

[1]Para mais informação sobre isto, ler o apêndice.

$$
\begin{aligned}
D\Theta_{(\varphi_t,t)}(\psi,0) &= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Theta(\varphi_t+s\psi,t)\\
&= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0}\big(\log\det(g_{j\bar{k}}+\partial_j\partial_{\bar{k}}(\varphi_t+s\psi))-\log\det(g_{j\bar{k}})-\varphi_t-s\psi-tF\big)\\
&= \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0}\big(\log\det(g_{j\bar{k}}+\partial_j\partial_{\bar{k}}(\varphi_t+s\psi))\big)-\psi\\
&= \mathrm{tr}((g_{j\bar{k}}+\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t)^{-1}(\partial_r\partial_{\bar{k}}\psi))-\psi\\
&= \mathrm{tr}(((g_t)^{j\bar{k}})(\partial_r\partial_{\bar{k}}\psi))-\psi\\
&= (g_t)^{r\bar{k}}\partial_r\partial_{\bar{k}}\psi-\psi\\
&= \Delta_t\psi-\psi.
\end{aligned}
$$

Observamos que Δ_t é o Laplaciano com respeito à métrica g_t. Notemos que o operador $L = \Delta_t - 1 : C^{3,\alpha} \to C^{1,\alpha}$ é um operador inversível. Para isto, vejamos que L é um operador bijetivo.

Primeiro mostremos que L é injetivo. Suponha-se que existe ψ tal que $L\psi = 0$, assim $\Delta_t\psi = \psi$. Utilizando o anterior, o produto L^2 associado à métrica ω_t, o fato de que Δ_t é um operador autoadjunto com respeito ao produto L^2 e o teorema de Stokes, obtemos que

$$0 \leq \int_M |\psi|^2 dvol_{\omega_t} = \int_M \psi\Delta_t\psi dvol_{\omega_t} = -\int_M |\nabla\psi|^2 dvol_{\omega_t} \leq 0$$

Portanto $\psi = 0$, e assim L é um operador injetivo.

Para a sobrejetividade de L, precisamos mostrar que $\mathrm{Im}(L) = C^{1,\alpha}$. A primeira inclusão $\mathrm{Im}(L) \subset C^{1,\alpha}$ é imediata pela definição de L. Por outra parte, seja $f \in C^{1,\alpha}$; utilizando o método de discretização dado em [18](Pag. 60), podemos construir uma função g de classe C^2 tal que

$$Lg = f.$$

Utilizando a regularidade elíptica (A.0.10), concluímos que $g \in C^{3,\alpha}$, e então $f \in \mathrm{Im}(L)$. Portanto, L é um operador sobrejetivo.

Assim L é um isomorfismo entre os espaços de Banach $C^{3,\alpha}$ e $C^{1,\alpha}$. Com isto, aplicando o teorema de função implícita para espaços de Banach, obtemos a existência de conjuntos abertos $U \subset [0,1]$ e $V \subset C^{3,\alpha}$ ao redor de t e φ_t respectivamente, e a existência de uma única função $f : U \to V$ tal que $\Theta(s, f(s)) = 0$, para todo $s \in U$. Dado que $f(s) \in C^{3,\alpha}$, e $f(t) = \varphi_t$, nos temos suficiente regularidade para considerar um aberto $U' \subset U$ ao redor de t tal que

$$\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(f(s)),$$

seja uma $(1,1)$-forma positiva em U'. Assim, se definimos $\varphi_s := f(s) \in C^{3,\alpha}$, φ_s é uma solução $C^{3,\alpha}$ para $(*)_s$.

Agora precisamos que nossa solução φ_s de $(*)_s$, que a priori é uma função com regularidade $C^{3,\alpha}$, é realmente uma função suave. Sabemos que $\Theta(\varphi_s, s) = 0$, assim por (2.2.3) localmente

$$\log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s) - \log\det(g_{j\bar{k}}) - \varphi_s - sF = 0.$$

Como $\varphi_s \in C^{3,\alpha}$ e a métrica g é suave, então podemos diferenciar com respeito a z^l, e usando um procedimento análogo ao feito acima para a derivada do primeiro termo,

$$(g_s)^{j\bar{k}} \left(\partial_l g_{j\bar{k}} + \partial_l \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s\right) - \partial_l \log\det(g_{j\bar{k}}) - \partial_l \varphi_s - s\partial_l F = 0,$$

onde $(g_s)^{j\bar{k}}$ é a inversa da métrica $(g_s)_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s$. Re-escrevendo

{EDPA} $$(g_s)^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} (\partial_l \varphi_s) - \partial_l \varphi_s = s\partial_l F + \partial_l \log\det\left(g_{j\bar{k}}\right) - (g_s)^{j\bar{k}} \partial_l g_{j\bar{k}}. \qquad (2.2.4)$$

A equação acima pode ser entendida como um operador diferencial linear $E = (g_s)^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} - 1$ tal que $E(\partial_l \varphi_s) = h$, onde

$$h = s\partial_l F + \partial_l \log\det\left(g_{j\bar{k}}\right) - (g_s)^{j\bar{k}} \partial_l g_{j\bar{k}}.$$

Como $\varphi_s \in C^{3,\alpha}$, E tem coeficientes de classe $C^{1,\alpha}$, e $h \in C^{1,\alpha}$. Pela regularidade elíptica (A.0.10) obtemos que $\partial_l \varphi_s \in C^{3,\alpha}$. De forma Semelhante, obtemos que $\partial_{\bar{l}} \varphi_s \in C^{3,\alpha}$ e então $\varphi_s \in C^{4,\alpha}$. Indutivamente aplicando o mesmo argumento obtemos que φ_s é suave.

Assim obtemos que o aberto U de t é tal que para cada $s \in U$ se tem uma solução suave para $(*)_s$, isto é, $U \subset \Phi$. Portanto Φ é um conjunto aberto.

□

Observação 2.2.2. O método indutivo para ganhar a regularidade é chamado de bootstraping elíptico.

Para mostrar que o conjunto Φ é fechado precisamos ter controle uniforme sobre t com a norma de Hölder $C^{3,\alpha}$ pela métrica associada à forma de Kähler fixada, que denotaremos por $||\cdot||_{C^{3,\alpha}}$. Este tipo de de controle das soluções é chamado estimativa a priori. Para obter isto, precisamos da existência de uma constante $A \geq 0$, que dependem somente de parâmetros fixados, tal que para todo $t \in [0,1]$

- $||\varphi_t||_0 \leq A$,
- $\left|\left|\dfrac{\partial^2 \varphi_t}{\partial z^j \bar{z}^k}\right|\right|_0 \leq A$,
- $\left|\left|\dfrac{\partial}{\partial z^l}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_t}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}\right)\right|\right|_0 \leq A$ e $\left|\left|\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_t}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}\right)\right|\right|_0 \leq A$,

onde $||\cdot||_0$ é a norma do supremo sobre M. Estas estimativas são chamadas estimativas C^0, C^2 e C^3, respectivamente. Utilizando isto, junto com algumas ferramentas mais sofísticas de equações em derivadas parciais elípticas, obtemos o seguinte resultado.

{Teoremao}

Proposição 2.2.3. *Existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de M, ω, e $||F||_{C^0}$ tal que se φ_t satisfaz a equação*

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = e^{tF+\varphi_t}\omega^n,$$

para algum $t \in [0, 1]$, então

$$(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t) > C^{-1}(g_{j\bar{k}}),$$

e

$$||\varphi_t||_{C^{3,\alpha}(M)} \leq C,$$

onde $||.||_{C^{3,\alpha}(M)}$ é a norma de Hölder com respeito à métrica que define ω_0.

{MDP}

Observação 2.2.4. O tipo de desigualdade $(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi) > C^{-1}(g_{j\bar{k}})$ é no sentido matricial dizendo que a matriz $(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi) - C^{-1}g_{j\bar{k}})$ é uma matriz positiva definida. Portanto, isto independe da escolha de coordenadas.

A prova da ultima proposição é mais elaborada, por isso será feita nas subseções seguintes para não quebrar a linha dos argumentos. Supondo que se verifica a Proposição 2.2.3, mostramos que Φ é fechado.

{Fechado2}

Lema 2.2.5. *O conjunto Φ é fechado em $[0, 1]$.*

Prova.
Seja $t \in \bar{\Phi}$, assim existe uma sequência de $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em Φ tal que $t_i \to t$. Para cada t_i existe uma função $\{\varphi_{t_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ solução de $(*)_{t_i}$. Pela Proposição 2.2.3 existe uma constante $C > 0$ tal que $||\varphi_{t_i}||_{C^{3,\alpha}(M)} \leq C$, para cada i. Pelo teorema de Rellich para espaços de Hölder (A.0.8), temos que $C^{3,\alpha} \hookrightarrow C^{3,\alpha'}$, com $\alpha' < \alpha$, é um mergulho compacto. Por causa disso a sequência $\{\varphi_{t_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $\{\varphi_{t_{i_j}}\}_{j\in N}$ convergente para alguma função $\varphi \in C^{3,\alpha'}$ e tal que $t_{i_j} \to t$. Notemos que φ é suficientemente suave para que aplicando limite na primeira equação de $(*)_{t_{i_j}}$ se tenha que

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{tF+\varphi}\omega^n.$$

Por outro lado, temos pela Proposição 2.2.3 que as formas positivas $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_{t_i}$ são todas limitadas uniformemente pela forma positiva ω que é fixada. Aplicando o limite obtemos então que $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t$ é também uma forma positiva.

Assim obtemos uma solução $\varphi \in C^{3,\alpha'}$ para $(*)_t$. Logo pela mesma técnica para mostrar a regularidade da solução no Lema 2.2.1, obtemos que φ é suave e assim $t \in \Phi$. Portanto $\bar{\Phi} \subset \Phi$, o que é dizer que Φ é fechado.

□

Como Φ é um subconjunto não vazio aberto e fechado do conjunto conexo $[0,1]$, obtemos que $\Phi = [0,1]$. Por causa disso $1 \in \Phi$, e assim existe uma solução suave para $(*)_1$. Portanto a Conjectura 2.1.8 é satisfeita. Assim, somente precisamos dar uma prova para a Proposição 2.2.3. No entanto, a prova não é elementar. Nas subseções seguintes mostraremos os lemas necessárias para dar uma prova detalhada de dita proposição.

2.2.2 Estimativas a Priori C^0 e C^2

Para mostrar a Proposição 2.2.3 nós vamos considerar o sistema de equações $(*)_1$ dado por

{EMA1}
$$(*)_1 = \begin{cases} (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\varphi}\omega^n. \\ \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ é uma forma positiva.} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Depois, substituindo F por tF, com $t \in [0,1]$, e notando que $||tF||_0 \leq ||F||_0$, obtemos estimativas a priori para as soluções φ_t de $(*)_t$. Assim, partimos supondo que existe uma solução suave φ para (2.2.5).

{EC0}

Lema 2.2.6 (Estimativa C^0)**.** *A solução φ é tal que* $\sup_M |\varphi| \leq \sup_M |F|$.

Prova.
Como M é uma variedade compacta, existe $p \in M$ tal que $\varphi(p) \geq \varphi(x)$ para todo $x \in M$. Em coordenadas locais, a matriz $(\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi)$ é negativo definido em p. Assim, pelo mesmo argumento que na prova do Lema 2.1.9, obtemos que

$$\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi)(p) \leq \det(g_{j\bar{k}})(p).$$

Por outro lado, pela equação obtemos localmente que

$$\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi)(p) = e^{F(p)+\varphi(p)}\det(g_{j\bar{k}})(p).$$

Juntando as duas expressões

$$e^{F(p)+\varphi(p)}\det(g_{j\bar{k}})(p) \leq \det(g_{j\bar{k}})(p).$$

Dado que $\det(g_{j\bar{k}})(p) \neq 0$

$$e^{F(p)+\varphi(p)} \leq 1.$$

Assim $F(p) + \varphi(p) \leq 0$, e então $\varphi(p) \leq -F(p)$. Como φ atinge seu valor máximo em p, e F é uma função suave sobre M, temos que para todo $x \in M$

$$\varphi(x) \leq -F(p) \leq \sup_M |F|.$$

De maneira semelhante, utilizando o ponto mínimo de φ em M, obtemos para todo $x \in M$

$$\varphi(x) \geq -\sup_M |F|.$$

Com isto concluímos que

$$|\varphi(x)| \leq \sup_M |F|.$$

Logo tomando o supremo sobre $x \in M$ concluímos que $\sup_M |\varphi| \leq \sup_M |F|$.

□

No cálculo de estimativas de ordem superior veremos a importância da estimativa C^0, ela aparece naturalmente nos cálculos e, portanto, é o cerne do argumento. Estamos supondo que φ é solução de (2.2.5), assim $\omega_\varphi = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é uma forma de Kähler. Com isto, consideramos a métrica g' associada à forma de Kähler ω_φ, que localmente em coordenadas holomorfas, é escrita como

$$g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi.$$

Notemos que tendo estimativas para g', teremos as estimativas C^2 que precisamos. Assim, para fixar notação, denotemos por

$$\mathrm{tr}_g g' = g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}} \quad , \quad \mathrm{tr}_{g'} g = g'^{j\bar{k}} g_{j\bar{k}},$$

Observação 2.2.7. Note-se que $\mathrm{tr}_g g' = n + \Delta\varphi$, onde Δ é o Laplaciano respeito à métrica fixada g.

{C221}

Lema 2.2.8. *Existe uma constante B dependendo somente de M e g tal que*

$$\Delta' \log \mathrm{tr}_g g' \geq -B \mathrm{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\mathrm{tr}_g g'},$$

onde $R'_{j\bar{k}}$ é a curvatura de Ricci de g'.

Prova.

Seja $p \in M$. Pela Proposição 1.3.13 aplicado à métrica g em p obtemos coordenadas holomorfas normais tais que $g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}(p)$ e as derivadas de $g_{j\bar{k}}$ em p se anulam. Pelo Teorema Espectral para operadores Hermitianos, podemos assumir que, em coordenadas holomorfas a matriz associada a g' é diagonal em p, pois podemos escolher auto-vetores de $(g'_{j\bar{k}})$ sendo $(g_{j\bar{k}})$ conformado por vetores ortonormais. Em particular, no ponto p

$$\mathrm{tr}_g g' = \sum_i g'_{i\bar{i}} \quad , \quad \mathrm{tr}_{g'} g = \sum_j g'^{j\bar{j}} = \sum_j \frac{1}{g'_{j\bar{j}}}.$$

Pela expressão local do operador Laplaciano com respeito a uma métrica de Kähler, e logo por (1.3.19), em p

$$\begin{aligned}\Delta'\mathrm{tr}_g g' &= g'^{p\bar{q}}\partial_p\partial_{\bar{q}}(g^{j\bar{k}}g'_{j\bar{k}}),\\ &= g'^{p\bar{q}}(\partial_p\partial_{\bar{q}}g^{j\bar{k}})g'_{j\bar{k}} + g'^{p\bar{q}}g^{j\bar{k}}\partial_p\partial_{\bar{q}}g'_{j\bar{k}},\\ &= g'^{p\bar{q}}(\partial_p\partial_{\bar{q}}g^{j\bar{k}})g'_{j\bar{k}} - g'^{p\bar{q}}g^{j\bar{k}}R'_{j\bar{k}p\bar{q}} + g'^{p\bar{q}}g^{j\bar{k}}g'^{a\bar{b}}(\partial_j g'_{p\bar{b}})(\partial_{\bar{k}}g'_{a\bar{q}}).\end{aligned}$$

Como g' é diagonal em p

$$g'^{p\bar{q}}(\partial_p\partial_{\bar{q}}g^{j\bar{k}})g'_{j\bar{k}} \;=\; \textstyle\sum_{p,j} g'^{p\bar{p}}g'_{j\bar{j}}\partial_p\partial_{\bar{p}}g^{j\bar{j}}.$$

Note-se primeiro que $\partial_p\partial_{\bar{p}}g^{j\bar{j}} = -\partial_p\partial_{\bar{p}}g_{j\bar{j}}$ por (1.3.6) e (1.3.19). Por outro lado, por (1.3.19), $R_{j\bar{j}p\bar{p}} = -\partial_p\partial_{\bar{p}}g_{j\bar{j}}$. Assim

$$\begin{aligned}g'^{p\bar{q}}(\partial_p\partial_{\bar{q}}g^{j\bar{k}})g'_{j\bar{k}} &= -\textstyle\sum_{p,j} g'^{p\bar{p}}g'_{j\bar{j}}R_{j\bar{j}p\bar{p}}\\ &\geq -\textstyle\sum_{p,j} g'^{p\bar{p}}g'_{j\bar{j}}|R_{j\bar{j}p\bar{p}}|,\end{aligned}$$

Para todo $q \in M$, consideramos

$$|R_{j\bar{j}p\bar{p}}| \leq \max\{|g(R_{XJX}Y, JY)| : X, Y \in T_qM\otimes\mathbb{C}\ ,\ g(X,\bar{X}) = g(Y,\bar{Y}) = 1\} = B_q.$$

O máximo existe pois por um lado, como $g(R_{XJX}Y, JY)$ é suave em M, então $|g(R_{XJX}Y, JY)|$ é uma função continua em M; por outra parte X, Y podem ser vistos como elementos na esfera S^{2n-1} que é um conjunto compacto. Agora, dado que a função máximo é uma função continua, B_q é uma função continua sobre M. Assim, como M é uma variedade compacta, podemos considerar $B = \max_{x\in M} B_x$, e assim

$$|R_{j\bar{j}p\bar{p}}| \leq B.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}g'^{p\bar{q}}(\partial_p\partial_q g^{j\bar{k}})g'_{j\bar{k}} &\geq -B\sum_{p,j} g'^{p\bar{p}}g'_{j\bar{j}},\\ &= -B(\mathrm{tr}_{g'}g)(\mathrm{tr}_g g').\end{aligned}$$

Por outro lado, por (1.3.7), $g'^{p\bar{q}}R'_{j\bar{k}p\bar{q}} = R'_{j\bar{k}}$, então em p

{E3} $$\Delta'\mathrm{tr}_g g' \geq -B(\mathrm{tr}_{g'}g)(\mathrm{tr}_g g') - g^{j\bar{k}}R'_{j\bar{k}} + \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}}g'^{a\bar{a}}|\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2. \tag{2.2.6}$$

Assim, considerando $\Delta'\log\mathrm{tr}_g g'$

{E2}

$$
\begin{aligned}
\Delta' \log \mathrm{tr}_g g' &= \frac{\Delta' \mathrm{tr}_g g'}{\mathrm{tr}_g g'} - \frac{g'^{p\bar{q}}(\partial_p \mathrm{tr}_g g')(\partial_{\bar{q}} \mathrm{tr}_g g')}{(\mathrm{tr}_g g')^2}, \\
&\geq -B\mathrm{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\mathrm{tr}_g g'} + \frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2, \\
&- \frac{1}{(\mathrm{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}).
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

Note-se que basta agora mostrar que

$$
\frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 - \frac{1}{(\mathrm{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \geq 0.
$$

Para isto, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz duas vezes temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) &= \sum_{a,b} \sum_p \sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) \sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \\
&\leq \sum_{a,b} \left(\sum_p g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_q g'^{q\bar{q}} |\partial_q g'_{b\bar{b}}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_a \left(\sum_p g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
&= \left(\sum_a \sqrt{g'_{a\bar{a}}} \left(\sum_p g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leq \left(\sum_a g'_{a\bar{a}} \right) \left(\sum_{b,p} g'^{p\bar{p}} g'^{b\bar{b}} |\partial_p g'_{b\bar{b}}|^2 \right) \\
&\leq (\mathrm{tr}_g g') \left(\sum_{b,p} g'^{p\bar{p}} g'^{b\bar{b}} |\partial_p g'_{b\bar{b}}|^2 \right).
\end{aligned}
$$

Assim, se segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(\mathrm{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) &\leq \frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{a,p} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2, \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{a,p,j} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2,
\end{aligned}
$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{a,p,j} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2 - \frac{1}{(\mathrm{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \geq 0.$$

Pela Proposição 1.3.12 obtemos que $\partial_p g'_{j\bar{a}} = \partial_j g'_{p\bar{a}}$, e assim

$$\frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \sum_{a,p,j} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 - \frac{1}{(\mathrm{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})(\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \geq 0.$$

Substituindo isto em (2.2.7) obtemos o desejado.

□

No prova seguinte vai ficar em evidência a importância da estimativa a priori C^0.

{C2E}

Lema 2.2.9 (Estimativa C^2). *Existe uma constante $C > 0$ que depende somente de M, ω, $\sup_M(\varphi)$ e um limite inferior para ΔF tal que a solução φ de (2.2.5) satisfaz*

$$C^{-1}(g_{j\bar{k}}) \leq (g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) \leq C(g_{j\bar{k}}).$$

Prova.
Utilizando a notação $g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$ como antes, pela equação (2.2.5), o Lema 1.3.21 e lembrando que $\frac{\omega^n}{n!} = \det(g_{p\bar{q}})$

{CR} $$-R'_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi - R_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + g'_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}} - R_{j\bar{k}}. \tag{2.2.8}$$

Utilizando o Lema 2.2.8

{dddd} $$\Delta' \log \mathrm{tr}_g g' \geq -B \mathrm{tr}_{g'} g + \frac{\Delta F + \mathrm{tr}_g g' - n - R}{\mathrm{tr}_g g'}, \tag{2.2.9}$$

onde R é a curvatura escalar de g. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, em p

$$n^2 = \left(\sum_i g'_{i\bar{i}} g'^{i\bar{i}} \right)^2 \leq \left(\sum_i \sqrt{(g'_{i\bar{i}})^2} \right) \left(\sum_j \sqrt{(g'^{j\bar{j}})^2} \right) = (\mathrm{tr}_g g')(\mathrm{tr}_{g'} g).$$

Assim, no ponto p

$$-\frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \geq -\frac{\mathrm{tr}_{g'} g}{n^2}.$$

Dado que F e R são funções suaves sobre uma variedade compacta, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\Delta F - n - R \geq -C_1.$$

Como $\mathrm{tr}_g g' > 0$ por g e g' serem métricas, multiplicando por $\frac{1}{\mathrm{tr}_g g'}$ à desigualdade acima

$$\frac{\Delta F - n - R}{\mathrm{tr}_g g'} \geq -\frac{C_1}{\mathrm{tr}_g g'} \geq -\frac{C_1}{n^2}\mathrm{tr}_{g'} g.$$

Aplicando isso em (2.2.9), e chamando $C = \frac{C_1}{n^2}$

$$\Delta' \log \mathrm{tr}_g g' \geq -B\mathrm{tr}_{g'} g - C\mathrm{tr}_{g'} g + 1 \geq -B\mathrm{tr}_{g'} g - C\mathrm{tr}_{g'} g.$$

Pela expressão do operador Laplaciano para g' e o fato de que $g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$

$$\Delta' \varphi = g'^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi = g'^{j\bar{k}} (g'_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) = n - \mathrm{tr}_{g'} g.$$

Assim, considerando $A = B + C + 1$

$$\Delta'(\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi) \geq \mathrm{tr}_{g'} g - An.$$

Agora suponha-se que $\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi$ atinge um máximo em algum ponto $p \in M$, então

$$0 \geq \Delta'(\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi)(p) \geq \mathrm{tr}_{g'} g - An.$$

Assim

$$\mathrm{tr}_{g'} g(p) \leq An.$$

Encolhendo coordenadas normais para g em p tal que g' é diagonal em p, como na prova anterior, então a equação acima implica que em p para cada i

$$\frac{1}{g'_{i\bar{i}}} = g'^{i\bar{i}} \leq \sum_i g'^{i\bar{i}} = \mathrm{tr}_{g'} g(p) \leq An.$$

Por outro lado, a primeira equação de (2.2.5) se escreve no ponto p como

$$\prod_{i=1}^{n} g'_{i\bar{i}} = e^{F(p)+\varphi(p)}.$$

Como M é compacta, existe $C_3 > 0$ dependendo da estimativa C^0 de φ e F tal que

$$\frac{1}{C_3} \leq e^{F(p)+\varphi(p)} \leq C_3.$$

Então,

{ddddd}

$$\frac{1}{C_3} \leq \prod_{i=1}^{n} g'_{i\bar{i}}(p) \leq C_3. \tag{2.2.10}$$

Assim, chamando $C_4 = (An)^{n-1} C_3$, para cada i obtemos

$$g'_{i\bar{i}} \leq \frac{C_3}{\prod_{j \neq i} g'_{j\bar{j}}} \leq C_4.$$

Em particular

$$\mathrm{tr}_g g'(p) = \sum_{i=1}^{n} g'_{i\bar{i}} \leq \sum_{i=1}^{n} C_4 = nC_4.$$

Como $\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi$ atinge um máximo em p

$$\log \mathrm{tr}_g g'(x) - A\varphi(x) \leq \log \mathrm{tr}_g g'(p) - A\varphi(p) \leq \log(nC_4) - A\varphi(p),$$

para todo $x \in M$. Assim obtemos uma constante C_5 dependendo da estimativa C^0 de φ e F tal que

$$\sup_M \log \mathrm{tr}_g g' \leq C_5.$$

Agora consideremos $x \in M$, pelo teorema de coordenadas normais aplicado para g, de tal forma que g' seja diagonal em x, obtemos uma estimativa superior para $g'_{i\bar{i}}(x)$ para cada i, pois

$$g'_{i\bar{i}}(x) \leq \sum_{i=1}^{n} g'_{i\bar{i}}(x) = \mathrm{tr}_g g'(x) \leq e^{\log \mathrm{tr}_g g'(x)} \leq e^{C_5}.$$

Como (2.2.10) continua-se verificando para todo $x \in M$, para cada i, podemos reescreve-lha para obter uma estimativa inferior de $g'_{i\bar{i}}$ da seguinte forma

$$g'_{i\bar{i}}(x) \geq \frac{1}{C_3 \prod_{j \neq i} g'_{j\bar{j}}} \geq \frac{1}{C_3 e^{(n-1)C_5}}.$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo i e todo $x \in M$

$$\frac{1}{C} \leq g'_{i\bar{i}}(x) \leq C$$

Por causa disso, pela Observação 2.2.4, se consideramos uma base qualquer sobre qualquer ponto x, obtemos então

$$\frac{1}{C}(g_{j\bar{k}}) \leq (g'_{j\bar{k}}) \leq C(g_{j\bar{k}}).$$

que é o que queríamos mostrar.

□

A última proposição nos fornece das estimativas a priori C^2 sobre as soluções da família paramétrica de equações $\{(*)_t\}_{t\in[0,1]}$. Isto nos conserva a positividade da $(1,1)$-forma $\omega + \partial\bar{\partial}\varphi_s$ quando aplicamos limite sobre s.

2.2.3 Estimativa C^3

Também podemos obter estimativas a priori C^3 da solução de 2.2.5. Para isso, vamos a mudar um pouco a nossa notação para não sobrecarregar de aspas em cada uma das desigualdades. Escrevemos $\hat{g}_{j\bar{k}}$ a métrica fixada e $g_{j\bar{k}} = \hat{g}_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$. Usaremos a equação (2.2.8), que simplificaremos da seguinte forma

{C31}
$$R_{j\bar{k}} = -g_{j\bar{k}} + T_{j\bar{k}}, \tag{2.2.11}$$

onde $R_{j\bar{k}}$ é a curvatura de Ricci da métrica g e $T_{j\bar{k}} = \hat{g}_{j\bar{k}} + \hat{R}_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} F$, que é um tensor dependendo de objetos fixado. Também usaremos a estimativa do Lema 2.2.9, assim sabemos que existe $\Lambda > 0$ uma constante tal que

{C32}
$$\frac{1}{\Lambda}(\hat{g}_{j\bar{k}}) \leq (g_{j\bar{k}}) \leq \Lambda(\hat{g}_{j\bar{k}}). \tag{2.2.12}$$

Nós queremos estimativas das terceiras derivadas mistas de φ. Dado que, por (2.2.12), temos controle das segundas derivadas de φ em termos da métrica $\hat{g}_{j\bar{k}}$, é natural pensar ter controle das terceiras derivadas tendo controle nas derivadas da métrica, que é equivalente a ter estimativas a priori dos símbolos de Christoffel $\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}}$. Assim, consideremos

{S1}
$$S^i_{j\bar{k}} = \Gamma^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}, \tag{2.2.13}$$

onde $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ são os símbolos de Christoffel da conexão Levi-Civita de $\hat{g}$. Podemos escrever mais compactamente os termos S^i_{jk} num tensor S de assinatura $(1,2)$ da seguinte forma

{S2}
$$S = S^i_{jk} dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_i. \tag{2.2.14}$$

Além disso, utilizando a métrica Hermitiana g estendida para o fibrado correspondente obtemos

{S3}
$$|S|^2 = g(S, \overline{S}) \tag{2.2.15}$$

Nosso objetivo é obter uma estimativa uniforme para $|S|$, e assim teremos controle em cada fator S^i_{jk}.

Observação 2.2.10. As constantes C, que apareceram nas provas seguintes, não necessariamente são igual para cada uma das desigualdades, porém, o importante é saber que são constantes que depende somente dos objetos fixados M, T, $\hat{g}$ e Λ.

{C3E}

Lema 2.2.11. *Suponha que g satisfaz a equação (2.2.11) com a estimativa (2.2.12). Então existe uma constante $C > 0$ dependendo de M, T, $\hat{g}$ e Λ tal que*

$$\Delta_{\bar{\partial}} |S|^2 \geq -C|S|^2 - C,$$

onde $|S|$ é a norma do tensor S respeito à g e Δ é o Laplaciano de g.

Prova.

Antes de começar a prova, por simplicidade não escreveremos a somatória em p, mas vamos supor que em cada equação estamos somando em p quando aparece p e $\bar{p}$ duas vezes.

Para simplificar nossa prova, vamos aplicar a Proposição 1.3.13 para a métrica g num ponto $q \in M$ escolhendo carta de coordenadas locais, tais que $g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{j\bar{k}}$, e consideremos a conexão Levi-Civita ∇ da métrica g. Notemos que podemos estender ∇ para o fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$. Por outra parte, para funções, por (1.2.10), sabemos que ∇ em p é tal que

$$\Delta_{\bar{\partial}} = g^{j\bar{k}}\partial_j\partial_{\bar{k}} = \partial_p\partial_{\bar{p}}.$$

Consideremos $\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2$. Utilizando (2.2.15) junto com a compatibilidade de ∇ com a métrica g, em q obtemos

{Delta}

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 &= \partial_p(\partial_{\bar{p}}g(S,\bar{S})),\\
&= \partial_p(g(\nabla_{\bar{p}}S,\bar{S}) + g(S,\nabla_{\bar{p}}\bar{S})),\\
&= g(\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S,\bar{S}) + g(\nabla_{\bar{p}}S,\nabla_p\bar{S}) + g(\nabla_pS,\nabla_{\bar{p}}\bar{S}) + g(S,\nabla_p\nabla_{\bar{p}}\bar{S}),\\
&= |\nabla S|^2 + g(\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S,\bar{S}) + g(S,\nabla_p\nabla_{\bar{p}}\bar{S}),\\
&\geq g(\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S,\bar{S}) + g(S,\nabla_p\nabla_{\bar{p}}\bar{S}).
\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

Utilizando o calculo de Ricci em p com as coordenadas ortonormais, vemos que

$$g(\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S,\bar{S}) = (\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk})\overline{S^i_{jk}},$$
$$g(S,\nabla_p\nabla_{\bar{p}}\bar{S}) = S^i_{jk}(\overline{\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk}}).$$

Assim

{eqp}

$$\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 \geq (\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk})\overline{S^i_{jk}} + S^i_{jk}(\overline{\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk}}).\tag{2.2.17}$$

Agora, considerando o tensor de curvatura $R_{\partial_p\partial_{\bar{p}}}$ da conexão ∇ sobre o fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$ avaliado no tensor S obtemos que

$$R_{\partial_p\partial_{\bar{p}}}(S^i_{jk}) = \nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk} - \nabla_{\bar{p}}\nabla_pS^i_{jk}.$$

Então

{C36}

$$|\nabla_{\bar{p}}\nabla_pS^i_{jk}| \leq |\nabla_p\nabla_{\bar{p}}S^i_{jk}| + |R_{\partial_p\partial_{\bar{p}}}(S^i_{jk})|.\tag{2.2.18}$$

Utilizando o calculo de Ricci, dado no Exemplo 1.3.16

$$\begin{aligned} R_{\partial_p \partial_{\bar{p}}}(S^i_{jk}) &= -R_j{}^m{}_{p\bar{p}} S^i_{mk} - R_k{}^m{}_{p\bar{p}} S^i_{jm} + R_m{}^i{}_{p\bar{p}} S^m_{jk}, \\ &= -R_j{}^m S^i_{mk} - R_k{}^m S^i_{jm} - R_m{}^i S^m_{jk}, \end{aligned}$$

onde $R^m_j = g^{m\bar{k}} R_{j\bar{k}}$ é o tensor de Ricci de g com um índice acima. Assim,

$$|R_{\partial_p \partial_{\bar{p}}}(S^i_{jk})| \leq |R_j{}^m||S^i_{mk}| + |R_k{}^m||S^i_{jm}| + |R_m{}^i||S^m_{jk}|$$

Como $R^j_i = g^{j\bar{k}} R_{i\bar{k}}$, por (2.2.11) e (2.2.12), existe $C > 0$ tal que

$$|R^j_i| \leq C.$$

Por outro lado, note-se que $|S^i_{jk}| \leq |S|$. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|R_{\partial_p \partial_{\bar{p}}}(S^i_{jk})| \leq C|S|.$$

Substituindo isso em (2.2.18)

{C37} $$|\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S^i_{jk}| \leq |\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}| + C|S|. \tag{2.2.19}$$

Por outro lado, dado que $\nabla_{\bar{p}}(dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_i) = 0$, utilizando o calculo de Ricci obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S &= \nabla_p \nabla_{\bar{p}}(S^i_{jk}), \\ &= \nabla_p(\partial_{\bar{p}}(\Gamma^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk})). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.3.18

$$\partial_{\bar{p}} \Gamma^i_{jk} = R_k{}^i{}_{j\bar{p}} \quad , \quad \partial_{\bar{p}} \hat{\Gamma}^i_{jk} = \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}},$$

onde $R_k{}^i{}_{j\bar{p}}$ e $\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}$ são os coeficientes dos tensores de curvatura de g e $\hat{g}$ dadas pelas conexões Levi-Civita ∇ e $\hat{\nabla}$ respectivamente. Substituindo o anterior

$$\begin{aligned} \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S &= -\nabla_p(R_k{}^i{}_{j\bar{p}} - \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}), \\ &= -\nabla_p R_k{}^i{}_{j\bar{p}} + \hat{\nabla}_p \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}} + (\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}. \end{aligned}$$

Pela segunda identidade de Bianchi $\nabla_p R_k{}^i{}_{j\bar{p}} = \nabla_j R_k{}^i{}_{p\bar{p}} = \nabla_j R_k{}^i$. Assim

$$\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S = -\nabla_j R_k{}^i + \hat{\nabla}_p \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}} + (\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}.$$

Considerando a norma disso dada pela métrica g obtemos que

{EqP} $$|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S| \leq |\nabla_j R_k{}^i| + |\hat{\nabla}_p \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}| + |(\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}|. \tag{2.2.20}$$

Nós queremos controlar o lado direito da equação acima. Para isso, vamos olhar cada fator por separado. Para o primeiro fator dado que $R_k{}^i = g^{i\bar{s}} R_{k\bar{s}}$, o calculo de Ricci, o fato de ter coordenadas holomorfas normais em q, e (2.2.11)

$$\begin{aligned}
\nabla_j R_k{}^i &= \partial_j R_k{}^i, \\
&= \partial_j (g^{i\bar{s}} R_{k\bar{s}}), \\
&= R_{k\bar{s}}(\partial_j g^{i\bar{s}}) + g^{i\bar{s}}(\partial_j R_{k\bar{s}}), \\
&= g^{i\bar{s}} \partial_j(-g_{k\bar{s}} + T_{k\bar{s}}), \\
&= -g^{i\bar{s}}(\partial_j g_{k\bar{s}}) + g^{i\bar{s}}(\partial_j T_{k\bar{s}}), \\
&= g^{i\bar{s}}(\partial_j T_{k\bar{s}}).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.2.9 e o fato de que T, g' são tensores fixos, existe uma constante $C > 0$ tal que

{Eq1}
$$|\nabla_j R_k{}^i| \leq C. \tag{2.2.21}$$

Para o segundo fator $|\hat{\nabla}_p \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}|$, pelo fato de $\hat{g}$ ser a métrica fixada e M ser compacta, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

{Eq2}
$$|\hat{\nabla}_p \hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}| \leq C. \tag{2.2.22}$$

Para o terceiro fator $|(\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}|$ temos

$$\begin{aligned}
|(\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}| &= |-\hat{R}_s{}^i{}_{j\bar{p}} S^s_{pk} + \hat{R}_k{}^s{}_{j\bar{p}} S^i_{ps} - \hat{R}_k{}^i{}_{s\bar{p}} S^s_{pj}| \\
&\leq |\hat{R}_s{}^i{}_{j\bar{p}} S^s_{pk}| + |\hat{R}_k{}^s{}_{j\bar{p}} S^i_{ps}| + |\hat{R}_k{}^i{}_{s\bar{p}} S^s_{pj}|.
\end{aligned}$$

Note que os fatores $\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}$ são fixos; assim utilizando a compacidade de M existe uma constante $C > 0$ tal que

{Eq3}
$$|(\nabla_p - \hat{\nabla}_p)\hat{R}_k{}^i{}_{j\bar{p}}| \leq C|S|. \tag{2.2.23}$$

Juntando (2.2.21), (2.2.22) e (2.2.23) e substituindo isto em (2.2.20) obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

{C34}
$$|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}| \leq C|S| + C. \tag{2.2.24}$$

Substituindo isto em (2.2.19), obtemos una constante $C > 0$ tal que

{C38}
$$|\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S^i_{jk}| \leq C|S| + C. \tag{2.2.25}$$

Por último, por (2.2.17)

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 &\geq -|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}||S| - |S||\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}| \\
&\geq |S|(-|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}| - |\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}|).
\end{aligned}$$

Substituindo (2.2.24) e (2.2.25)

$$\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 \geq |S|(-(C|S| + C) - (C|S| + C)).$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

{fim}
$$\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 \geq -C|S|^2 - C|S|. \tag{2.2.26}$$

Consideremos, para uma constante $C_1 > C$, o polinômio $(C - C_1)x^2 + Cx - C_1$. Utilizando ferramentas de cálculo vemos que o polinômio não é positivo. Assim

$$Cx^2 + Cx \leq C_1x^2 + C_1.$$

Avaliando em $|S|$, podemos substituir em (2.2.26), e concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$\Delta_{\bar{\partial}}|S|^2 \geq -C_1|S|^2 - C_1.$$

Dado que isto é feito para um ponto $q \in M$ arbitrário, obtemos o resultado.

□

Assim, estamos prontos para mostrar nossas estimativas C^3.

{EC3}
Lema 2.2.12 (Estimativa C^3)**.** *Suponha que g satisfaz a equação (2.2.11) e a estimativa (2.2.12). Então existe uma constante $C > 0$ dependendo de M, T, $\hat{g}$ e Λ tal que $|S| \leq C$*

Prova.

Vamos trabalhar localmente num ponto $p \in M$. Assim, podemos supor que $(\hat{g}_{j\bar{k}})$ é a identidade, e $(g_{j\bar{k}})$ é uma matriz diagonal. Lembremos a desigualdade (2.2.6), mas reescrita com a notação auxiliar

$$\Delta \mathrm{tr}_{\hat{g}} g \geq -B(\mathrm{tr}_g \hat{g})(\mathrm{tr}_{\hat{g}} g) - \hat{g}^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}} + \sum_{p,j,a} g^{p\bar{p}} g^{a\bar{a}} |\partial_j g_{p\bar{a}}|^2.$$

Pelo Lema 2.2.9, temos estimativas a priori para o primeiro fator de desigualdade acima. Pelo mesmo Lema e por (2.2.11) obtemos uma estimativa a priori do segundo fato. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

{aaaa}
$$\Delta \mathrm{tr}_{\hat{g}} g \geq -C + \sum_{p,j,a} g^{p\bar{p}} g^{a\bar{a}} |\partial_j g_{p\bar{a}}|^2. \tag{2.2.27}$$

Como $\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}}$ e $(g_{j\bar{k}})$ é diagonal, temos que $\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{i}} \partial_j g_{k\bar{i}}$. Assim, dado que $g^{a\bar{a}} g_{a\bar{a}} = 1$

$$g^{p\bar{p}} g^{a\bar{a}} |\partial_j g_{p\bar{a}}|^2 = g^{p\bar{p}} g_{a\bar{a}} (g^{a\bar{a}} \partial_j g_{p\bar{a}}) \overline{(g^{a\bar{a}} \partial_j g_{p\bar{a}})} = g^{p\bar{p}} g_{a\bar{a}} |\Gamma^a_{jp}|^2.$$

Substituindo isso em (2.2.27)

$$\Delta \mathrm{tr}_{\hat{g}} g \geq -C + \sum_{p,j,a} g^{p\bar{p}} g_{a\bar{a}} |\Gamma^a_{jp}|^2.$$

Dado que em p com as coordenadas escolhidas temos que $\partial_l \hat{g}_{j\bar{k}} = \partial_{\bar{l}} \hat{g}_{j\bar{k}} = 0$, então $S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$ em p, assim

$$|S|^2 = \sum_{p,j,k} g^{j\bar{j}} g^{p\bar{p}} g_{a\bar{a}} |\Gamma^a_{jp}|^2.$$

Pelo Lema 2.2.9 temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|S|^2 \leq C \sum_{p,j,a} g^{p\bar{p}} g_{a\bar{a}} |\Gamma^a_{jp}|^2.$$

Juntando isso temos que existe uma constante $C > 0$

$$\Delta \mathrm{tr}_{\hat{g}} g \geq -C + C|S|^2.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.2.11 existe $C > 0$ tal que

$$\Delta |S|^2 \geq -C|S|^2 - C.$$

Considerando $A = \dfrac{C+1}{C} > 0$ temos

$$\begin{aligned} \Delta(|S|^2 + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g) &\geq -C|S|^2 - C + \left(\frac{C+1}{C_3}\right)(-C + C|S|^2), \\ &\geq |S|^2 - \left(C + C\frac{C+1}{C}\right). \end{aligned}$$

Assim existe $C > 0$ tal que

$$\Delta(|S|^2 + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g) \geq |S|^2 - C.$$

Suponhamos agora que $|S|^2 + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g$ atinge um máximo em $p \in M$. Então

$$0 \geq \Delta(|S|^2(p) + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(p)) \geq |S|^2(p) - C,$$

e assim $|S|^2(p) \leq C$. Dado que $A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(x) \geq 0$ para todo $x \in M$, obtemos que

$$|S|^2(x) \leq |S|^2(x) + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(x) \leq |S|^2(p) + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(p) \leq C + A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(p).$$

Pelo Lema 2.2.9 temos que existe $C > 0$ tal que $A\mathrm{tr}_{\hat{g}} g(p) \leq C$. Assim, para todo $x \in M$

$$|S|^2(x) \leq 2C.$$

Dado que tanto C é uma estimativa dada pelo Lema 2.2.9, e é uma estimativa a priori, temos então uma estimativa a priori para $|S|^2$ que é o que queríamos provar.

□

Voltemos agora a nossa notação padrão. Utilizando os Lemas 2.2.9 e 2.2.12 já podemos dar uma prova da Proposição 2.2.3.

Prova da Proposição 2.2.3

Pelo Lema 2.2.9 obtemos que $g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t$ é uniformemente equivalente a $g_{j\bar{k}}$ para todo t, é dizer, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}(g_{j\bar{k}}) \leq (g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t) \leq C(g_{i\bar{k}}).$$

para todo t.

A parte acima implica que temos estimativas a priori C^0 para $\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t$. Por outro lado, pelo Lema 2.2.12, temos estimativas a priori C^0 das terceiras derivadas mistas $\partial_l\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t$ e $\partial_{\bar{l}}\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t$, que é equivalente a ter estimativas a priori C^0 das primeiras derivadas de segundas derivadas mistas $\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t$. Assim, pela propriedade de Log-concavidade das normas de Hölder (A.0.5), obtemos estimativas a priori para $||\partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t||_{C^{0,\alpha}}$

Como vimos na seção 2.2.1, a equação (2.2.4) pode ser vista como E_s, onde E_s um operador linear elíptico de ordem 2, e que é tal que $E_t(\partial_i\varphi_t) = h_{i,t}$, com $h_{i,t} \in C^{0,\alpha}$. Assim pelas estimativas de Schauder (A.0.9) existe uma constante $B > 0$ tal que

$$||\partial_i\varphi_t||_{C^{2,\alpha}} \leq B(||\partial_i\varphi_t||_{L_1} + ||h_{i,t}||_{C^{0,\alpha}}).$$

Notemos que B é uniforme pois os coeficientes dos diferentes operadores E_s têm a mesma constante de elipticidade que é dada pela primeira parte da prova. Dado que temos estimativas a priori para $||\partial_i\partial_j\varphi_t||_{C^{0,\alpha}}$, temos estimativas a priori para $||h_t||_{C^{0,\alpha}}$. Por ultimo, pela desigualdade de Hölder e o fato de trabalhar num variedade compacta temos que

$$||\partial_i\varphi_t||_{L_1} \leq \left(\int_M dvol\right)^{\frac{1}{2}} ||\partial_i\varphi_t||_{L_2} = \mathrm{Vol}(M)^{\frac{1}{2}}||\partial_i\varphi_t||_{L_2}.$$

Por outro lado considerando $\varphi_t(\omega^n_{\varphi_t} - \omega^n)$ temos que

$$\varphi_t\left(\omega^n_{\varphi_t} - \omega^n\right) = \varphi_t(e^{F+\varphi_t} - 1)\omega^n.$$

Integrando

$$\int_M \varphi_t\left(\omega^n_{\varphi_t} - \omega^n\right) = \int_M \varphi_t(e^{F+\varphi_t} - 1)\omega^n.$$

Dado que temos estimativas C^0 a priori para F e φ, obtemos que existe $C_3 > 0$ tal que $||\varphi_t(e^{F+\varphi_t} - 1)||_0 \leq C_3$. Assim

$$\int_M \varphi_t(\omega^n_{\varphi_t} - \omega^n) \leq \mathrm{Vol}(M)C_3.$$

Agora, utilizando a mesma técnica para a prova da unicidade de soluções da Conjectura 2.1.4

$$\int_M \varphi_t(\omega_{\varphi_t}^n - \omega^n) \geq \int_M \sqrt{-1}\partial\varphi_t \wedge \bar{\partial}\varphi_t \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n}\int_M |\partial\varphi_t|^2\omega^n.$$

Assim obtemos estimativas a priori L_1 para as primeiras derivadas de φ. Isso nos permite conseguir uma constante $C_2 > 0$ tal que para todo i

$$||\partial_i\varphi_t||_{C^{2,\alpha}} \leq B(||\partial_i\varphi_t||_{L_1} + ||h_{i,t}||_{C^{0,\alpha}}) \leq BC_2,$$
$$||\partial_{\bar{i}}\varphi_t||_{C^{2,\alpha}} \leq B(||\partial_{\bar{i}}\varphi_t||_{L_1} + ||h_{\bar{i},t}||_{C^{0,\alpha}}) \leq BC_2.$$

Dado que temos estimativas a priori C^0 de φ_t, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que pata todo t

$$||\varphi_t||_{C^{3,\alpha}} \leq C.$$

onde C é uma estimativa a priori.

□

2.3 Caso $c_1(M) = 0$

Como mostramos no começo do capítulo, a existência de métricas de Kähler-Einstein no caso $c_1(M) = 0$ é resolvido mostrando a Conjectura 2.1.4 (Problema 1). Vimos, de forma mais técnica, que neste caso temos unicidade de soluções a menos de uma constante. Assim, vamos nos preocupar pela existência.

Como veremos, o Problema 1 é resolvido de maneira semelhante ao Problema 2, mas com alguns detalhes menores que devem ser tomados em conta; e a principal diferença, que é a estimativa C^0 da solução.

2.3.1 Estratégia

Lembremos que a equação que queremos resolver é

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F\omega^n$$

com a condição extra de que $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é uma $(1,1)$-forma positiva

A estratégia é semelhante ao caso anterior, porém o método de continuidade é aplicado de forma diferente. Começamos considerando a família de equações paramétricas $\{(*)_t\}$, com $t \in [0,1]$, dada por

$$(*)_t = \begin{cases} (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = (e^F t + (1-t))\omega^n. \\ \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ é uma forma positiva.} \end{cases}$$

Aqui já vemos a primeira diferença respeito ao caso anterior, pois o caminho utilizando para conectar os sistemas de equações $(*)_0$ com $(*)_1$ é diferente. A principal razão de escolher um outro caminho é pelo fato que o volume da variedade é mantido para todo $t \in [0, 1]$, pois dado que por hipóteses $\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n$, então

$$\begin{aligned}\int_M (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n &= \int_M (e^F t + (1-t))\omega^n, \\ &= t\left(\int_M e^F \omega^n - \int_M \omega^n\right) + \int_M \omega^n, \\ &= \int_M \omega^n.\end{aligned}$$

Por outro lado, vemos que a estimativa C^0 não pode ser obtida pelas mesmas ideias dadas para o caso $c_1(M) < 0$, pois o lado direito da equação Monge-Ampère independe da solução. A estimativa C^0 é mais complicado de obter nesta caso, mas como veremos na seguinte seção, utilizando algumas ferramentas analíticas extra, conseguimos mostrar de maneira concreta o resultado.

Seguindo com a linha de ideias como na prova para o caso $c_1(M) < 0$, consideramos o conjunto $\Phi \subset [0, 1]$, com respeito à família paramétrica de equações dada por $(*)_t$; em particular Φ é não vazio, pois $0 \in \Phi$ pela mesma razão que no caso anterior.

Para mostrar que Φ é um aberto de $[0, 1]$, seguimos essencialmente a prova do Lema 2.2.1, mas com algumas modificações na função Θ dada em (2.2.2). Consideremos $\Theta : (C^{3,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^{\perp}(\Delta_0)) \times [0, 1] \to \mathrm{Ker}^{\perp}(\Delta_0)$ uma função entre espaços de Banach dada por

$$\Theta(\varphi, t) = \frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\omega^n} - (e^F t + (1-t)),$$

onde o $\bar{\partial}$-Laplaciano Δ_0 e $(.)^{\perp}$ o complemento ortogonal L^2 são respeito à métrica ω fixada. Localmente podemos escrever Θ como

{asddl}

$$\Theta(\varphi, t) = \frac{\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t)}{\det(g_{j\bar{k}})} - (e^F t + (1-t)). \tag{2.3.1}$$

Consideremos $t \in \Phi$, assim existe φ_t solução suave de $(*)_t$ tal que $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t$ é uma forma de Kähler. Derivando Θ na direção φ, no ponto (φ_t) obtemos $D\Theta_{\varphi_t,t}(\varphi, 0) : C^{3,\alpha} \to C^{1,\alpha}$ tal que

$$L(\psi) = D\Theta_{\varphi_t,t}(\psi, 0) = \frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n}{\omega^n}\Delta_t \psi.$$

onde Δ_t é o $\bar{\partial}$-Laplaciano respeito à métrica $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t$. Mostremos que $L : (C^{3,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^{\perp}(\Delta_0)) \to C^{1,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^{\perp}(\Delta_0)$ é um difeomorfismo.

Vamos ver a injetividade de L. Pela Proposição 1.2.35, temos que

$$\mathrm{Ker}(\Delta_t) = \mathrm{Ker}(\Delta_0) = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{C}) : f \text{ é constante}\}.$$

Paralelamente temos que $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_t)$. Assim $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_0)$. Por outra parte, pela definição de L temos que $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Portanto $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$. Assim, dado que L é linear, concluímos que é injetiva.

Para a sobrejetividade de L, temos que mostrar que $\mathrm{Im}(L) = C^{1,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Seja $g \in \mathrm{Im}(L)$, pela definição do operador L temos que $g \in C^{1,\alpha}$. Por outro lado, existe $f \in C^{3,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$ tal que $L(f) = g$. Note-se que

$$\begin{aligned}
\int_M g\omega^n &= \int_M L(f)\omega^n \\
&= \int_M \frac{(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n}{\omega^n} \Delta_t f \omega^n \\
&= \int_M \Delta_t f (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n
\end{aligned}$$

Dado que $\mathrm{Ker}(\Delta_t) = \mathbb{R}$, e que Δ_t é um operador autoadjunto com respeito ao produto L^2 definido pela métrica $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t$

$$\int_M \Delta_t f (\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = (\Delta_t f, 1)_{\omega_t} = (f, \Delta_t(1))_{\omega_t} = 0$$

Assim $\int_M g\omega^n = 0$, e então $g \in \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Portanto $g \in C^{1,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Inversamente, seja $f \in C^{1,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Por um argumento semelhante ao dado no caso $c_1(M) < 0$, obtemos uma solução $g \in C^{3,\alpha}$ tal que $Lg = f$. Diretamente notamos que $g \in \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$, e assim $g \in C^{3,\alpha} \cap \mathrm{Ker}^\perp(\Delta_0)$. Portanto $f \in \mathrm{Im}(L)$.

Assim, L é um isomorfismo entre espaços de Banach; e como tanto ω como φ_t variam suavemente sobre M, concluímos que L é um difeomorfismo. Portanto, podemos aplicar o teorema da função implícita para espaços de Banach e seguir com o argumento dado na prova do Lema 2.2.1.

Para mostrar que Φ é um conjunto fechado de $[0, 1]$ segue-se da mesma forma que no Lema 2.2.5, mas utilizando um lema que é análogo ao Lema 2.2.3 para este caso.

Teoremao1}

Proposição 2.3.1. *Existe uma constante $C > 0$ dependendo somente de M, ω, e $||F||_{C^0}$ tal que se φ_t satisfaz a equação*

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = (e^F t + (1-t))\omega^n$$

para algum $t \in [0, 1]$, então

$$(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t) > C^{-1}(g_{j\bar{k}})$$

e

$$||\varphi_t||_{C^{3,\alpha}(M)} \leq C$$

onde $||.||_{C^{3,\alpha}(M)}$ *é a norma de Hölder com respeito à métrica que define* ω*.*

No resto deste capítulo vamos nos preocupar com a estimativa a priori C^0. Isso junto com as estimativas C^2 e C^3 obtidas anteriormente nos permite mostrar a Proposição acima; e como consequência obtemos uma prova da Conjectura 2.1.4 que engloba a existência de métricas Kähler-Einstein no caso $c_1(M) = 0$ e a Conjectura de Calabi.

2.3.2 Estimativas a Priori

Supondo que temos uma estimativa C^0 de φ, as estimativas a priori C^2 e C^3 são obtidas de forma similar aos Lemas 2.2.9 e 2.2.12, com certos detalhes que não mudam o desenvolvimento da provas. O ponto chave aqui é a dependência da estimativa C^0 para as soluções φ da equação de Monge-Ampère. Yau em [28] da uma prova desse fato, sendo hoje uma das grandes conquistas do século passado. Nós vamos seguir uma prova um pouco mais refinada dada em [23], que vem da aproximação dada por Błocki [4] da prova de Yau, com algumas simplificações feitas por Kazdan, Bourguignon, e Aubin.

Lema 2.3.2 (Estimativa C^0)**.** *Suponha que* $F, \varphi : M \to \mathbb{R}$ *são funções suaves numa variedade de Kähler compacta* (M, ω) *tal que* $\omega - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ *é positiva e*

$$(\omega - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n$$

Então existe uma constante C *dependendo somente da variedade* M*, de* ω *e de* $\sup_M F$ *tal que*

$$\sup_M \varphi - \inf_M \varphi < C$$

Prova.

Esta prova é baseada uma técnica chamada iteração de Morse, que originalmente foi utilizada no contexto de equações lineares; ver no Teorema 8.15 de [12]. O método é estimar as normas L^p

$$||\varphi||_p = \left(\int_M |\varphi|^p \omega^n \right)^{1/p}$$

iterativamente para p maior e então tomar o limite quando $p \to \infty$. Usaremos $\omega - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ em vez de $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ para remover sinais negativos no argumento da prova. Dado que pela unicidade no caso $c_1(M) = 0$ temos que φ é uma solução única ao menos uma constante, podemos tomar φ tal que $\inf_M \varphi = 1$; também podemos normalizar ω de tal foma que $\int_M \omega^n = 1$.

Com essas condições, para $p \leq q$ temos que existe $s \geq 0$ tal que $p/q + 1/s = 1$, assim pela desigualdade de Hölder

$$\int_M |\varphi|^p \omega^n \leq \left(\int_M (|\varphi|^p)^{q/p} \omega^n \right)^{p/q} \left(\int_M \omega^n \right)^{1/s} = \left(\int_M |\varphi|^q \omega^n \right)^{p/q}$$

dado que a função $x^{1/p}$ é crescente concluímos que $||\varphi||_p \leq ||\varphi||_q$.

As constantes $C > 0$ que tomaremos daqui em diante podem ser diferentes conforme avançamo, mas C denota sempre uma constante que depende somente de M, ω e $\sup_M F$.

Dado que $\omega - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ é uma $(1,1)$-forma positiva, obtemos uma métrica g' localmente dada por $g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} - \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$. Notemos que $(g'_{j\bar{k}})$ e $(g_{j\bar{k}})$ são matrizes definida positiva. Assim obtemos que, em um ponto p onde $g_{j\bar{k}} = \delta_{jk}$

$$g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}} = n - \Delta\varphi > 0$$

onde Δ é o Laplaciano com respeito à métrica g. Seja $s \in M$ tal que $\varphi(s) = 1$, e seja $G(x, y)$ a função de Green do Laplaciano Δ (A.0.13). Pelo teorema de Stokes e as identidades de Green

$$\varphi(s) = \int_M \varphi\omega^n - \int_M G(x,s)\Delta\varphi(x)\omega^n(x)$$

Podemos assumir que $G \geq 0$ e que $G(x, s)$ é integrável na variável x. Assim

$$1 = \varphi(s) \geq \int_M \varphi\omega^n - n \int_M G(x,s)\omega^n(x) \geq \int_M \varphi\omega^n - C$$

Para alguma constante $C > 0$. Assim $||\varphi||_1 \leq C$. Agora chamemos $\omega_\varphi = \omega - i\partial\bar{\partial}\varphi$ e consideremos

$$\begin{aligned}
\int_M \varphi(\omega_\varphi^n - \omega^n) &= \int_M \varphi(\omega_\varphi - \omega) \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}), \\
&= \int_M -\varphi\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}), \\
&= \int_M \sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}).
\end{aligned}$$

Por um argumento similar ao dado na Proposição 2.1.5

{X1}
$$\int_M \varphi(\omega_\varphi^n - \omega^n) \geq \frac{1}{n} \int_M |\partial\varphi|^2 \omega^n, \tag{2.3.2}$$

Por outro lado, como $\omega_\varphi^n - \omega^n = (e^F - 1)\omega^n$, obtemos que

{X2}
$$\int_M \varphi(\omega_\varphi^n - \omega^n) = \int_M \varphi(e^F - 1)\omega^n \leq C \int_M \varphi\omega^n = C||\varphi||_1. \tag{2.3.3}$$

Juntando (2.3.2) e (2.3.3) obtemos que

{X3}

$$\int_M |\partial\varphi|^2\omega^n \leq C||\varphi||_1. \tag{2.3.4}$$

Se agora consideramos a função $\varphi - ||\varphi||_1$, entramos nas hipóteses da desigualdade de Poincaré para variedades (A.0.11). Assim, utilizando isto junto com (2.3.4)

$$\begin{aligned}\int_M (\varphi - ||\varphi||_1)^2\omega^n &\leq C\int_M |\partial(\varphi - ||\varphi||_1)|^2\omega^n,\\ &\leq C\int_M |\partial\varphi|^2\omega^n,\\ &\leq C||\varphi||_1.\end{aligned}$$

Dado que temos controle de $||\varphi||_1$, desenvolvendo o quadrado dentro da integral no fator do lado esquerdo, e levando os termos que contem o fator $||\varphi||_1$ para o lado direito da desigualdade, concluímos que existe $C > 0$ tal que $||\varphi||_2 \leq C$. Por um cálculo similar, para cada $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\int_M \varphi^{p-1}\left(\omega_\varphi^n - \omega^n\right) &= \int_M -\varphi^{p-1}\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \left(\omega_\varphi^{n-1} + \cdots + \omega^{n-1}\right),\\ &= \int_M (p-1)\sqrt{-1}\varphi^{p-2}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \left(\omega_\varphi^{n-1} + \cdots + \omega^{n-1}\right),\\ &= \frac{4(p-1)}{p^2}\int_M \sqrt{-1}\partial\varphi^{\frac{p}{2}} \wedge \bar{\partial}\varphi^{\frac{p}{2}} \wedge \left(\omega_\varphi^{n-1} + \cdots + \omega^{n-1}\right),\\ &\geq \frac{4(p-1)}{np^2}\int_M |\partial\varphi^{\frac{p}{2}}|^2\omega^n.\end{aligned}$$

Assim, dado que $\omega_\varphi^n - \omega^n = (e^F - 1)\omega^n$ e $\varphi \geq 0$

$$||\partial\varphi^{\frac{p}{2}}||_2^2 \leq C\frac{p^2}{p-1}\int_M \varphi^{p-1}(\omega_\varphi^n - \omega^n) = C\frac{p^2}{p-1}\int_M \varphi^{p-1}(e^F - 1)\omega^n \leq C\frac{p^2}{p-1}||\varphi||_{p-1}^{p-1},$$

com C uma constante que independe de p. Dado que para $p \geq 2$ temos $\frac{p^2}{p-1} \leq 2p$, concluímos que

$$||\partial\varphi^{\frac{p}{2}}||_2^2 \leq Cp||\varphi||_{p-1}^{p-1},$$

onde C uma constante que independe de p. Agora lembremos a desigualdade de Sobolev para variedades (A.0.2), que diz que para toda função f sobre M, existe uma constante $C_S > 0$, que depende somente de M e ω, tal que

$$||f||_{\frac{2n}{n-1}}^2 \leq C_S(||f||_2^2 + ||\partial f||_2^2)/$$

Aplicando isto para $f = \varphi^{\frac{p}{2}}$

$$\begin{aligned} ||\varphi^{\frac{p}{2}}||^2_{\frac{2n}{n-1}} &\leq C_S(||\varphi^{\frac{p}{2}}||_2^2 + ||\partial\varphi^{\frac{p}{2}}||_2^2), \\ &\leq C_S(||\varphi||_p^p + Cp||\varphi||_{p-1}^{p-1}), \\ &\leq Cp||\varphi||_p^p. \end{aligned}$$

Dado que

$$||\varphi||^p_{\frac{np}{n-1}} = \left(\int_M \varphi^{\frac{np}{n-1}}\omega^n\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\left(\int_M (\varphi^{\frac{p}{2}})^{\frac{2n}{n-1}}\omega^n\right)^{\frac{n-1}{2n}}\right)^2 = ||\varphi^{\frac{p}{2}}||^2_{\frac{2n}{n-1}},$$

obtemos

$$||\varphi||^p_{\frac{np}{n-1}} \leq Cp||\varphi||_p^p.$$

Assim

$$||\varphi||_{\frac{np}{n-1}} \leq (Cp)^{\frac{1}{p}}||\varphi||_p.$$

Escrevendo $p_k = \left(\frac{n}{n-1}\right)^k p$, e considerando o k suficientemente grande tal que, para todo $k' \geq k$, se verifique que $(Cp_{k'})^{\frac{1}{p_{k'}}} \geq 1$

$$||\varphi||_{p_k} \leq (Cp_{k-1})^{\frac{1}{p_{k-1}}}||\varphi||_{p_{k-1}} \leq \cdots \leq ||\varphi||_p \prod_{i=0}^{k-1}(Cp_i)^{\frac{1}{p_i}} \leq ||\varphi||_p \prod_{i=0}^{\infty}(Cp_i)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Pelo fato de que $\prod_{i=0}^{\infty} a_i$ converge se e somente se $\sum_{i=0}^{\infty}|\log(a_i)|$ converge e depois utilizando o critério da raiz, obtemos que o produto $\prod_{i=0}^{\infty}(Cp_i)^{\frac{1}{p_i}}$ converge, e dado que cada $(Cp_i)^{\frac{1}{p_i}}$ é diferente de zero, concluímos que o produto converge a um valor positivo. Agora, para $p = 2$, tomando $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty}||\varphi||_{p_k} = \sup_M \varphi \leq C||\varphi||_2.$$

Como $||\varphi||_2$ é limitado uniformemente, obtemos o desejado.

□

Obtendo isto, obtemos as estimativas a priori necessárias para mostrar a Proposição 2.3.1 utilizando o mesmo argumento dado na prova da Proposição 2.2.3.

Capítulo 3

Consequências das Conjecturas

.desenlace}

Um ponto importante de toda a teoria feita até agora e os resultados mostrados é a sua aplicabilidade em outros problemas geométricos, assim pode-se ver a relevância das conjecturas e até onde pode ser levada em prática. Neste capítulo vamos ver duas aplicações sustanciais, uma sobre variedades com $c_1(M) > 0$, e outra sobre variedades com $c_1 = 0$. Para isto vamos precisar de uma identidade, que relaciona o Laplaciano de Hodge de uma função sobre a variedade com a curvatura Ricci, que é chamada Identidade de Bochner. Vamos nós encarregar disto na secção seguinte.

3.1 Identidade de Bochner

Nesta secção vamos utilizar o principalmente o livro de [29], mas desenvolvendo em maior detalhe as contas. Consideremos (M, ω) uma variedade de Kähler, e X um campo vetorial holomorfo. Numa carta de coordenadas holomorfas, escrevemos X como

$$X = X^i \partial_i.$$

Assim, por propriedades do tensor de curvatura R e o tensor de Ricci r:

$$\begin{aligned}
r(X, \bar{X}) &= X^i \bar{X}^j R(\partial_i, \partial_{\bar{j}}) \\
&= X^i \bar{X}^j R_{i\bar{j}} \\
&= X^i \bar{X}^j \overline{R_{j\bar{i}}} \\
&= X^i \bar{X}^j \overline{g^{k\bar{l}} R_{j\bar{i}k\bar{l}}} \\
&= X^i \bar{X}^j \overline{g^{k\bar{l}} g(R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} \partial_j, \partial_{\bar{i}})} \\
&= \overline{g^{k\bar{l}} g(R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} X, \bar{X})} \\
&= \overline{g^{k\bar{l}}} g(X, \overline{R_{\partial_k \partial_{\bar{l}}} X}).
\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.3.13 em um ponto $x \in M$, obtemos que a expressão acima se simplifica em x como $r(X, \bar{X}) = \sum_p g(X, \overline{R_{\partial_p \partial_{\bar{p}}} X})$. Com isto obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1 (Identidade de Bochner para Campos)**.** *Seja (M,ω) uma variedade de Kähler, temos a seguinte relação para $|X|^2$, onde X é um campo holomorfo.*

$$\Delta_{\bar{\partial}}|X|^2 = |\nabla X|^2 - r(X,\overline{X}).$$

Prova.

A prova será feita pontualmente. Seja $x \in M$ e considere-se coordenadas holomorfas normais no ponto p dadas pela Proposição 1.3.13; assim $g_{j\bar{k}}(x) = \delta_{jk}(x)$ e $\partial_l g_{j\bar{k}}(x) = \partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}}(x) = 0$. Dado M é uma variedade de Kähler, em x utilizando a expressão (1.2.10) o Laplaciano $\Delta_{\bar{\partial}}$ aplicado em funções se escreve como

$$\Delta_{\bar{\partial}} f = \sum_p \partial_p \partial_{\bar{p}} f.$$

Seja X campo holomorfo dado localmente na carta de coordenadas holomorfas normais por

$$X = X^i \partial_i.$$

Calculando $\Delta_{\bar{\partial}}|X|^2$ em x como em (2.2.16) obtemos que

{EB}

$$\Delta_{\bar{\partial}}|X|^2 = \sum_p (g(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} X, \overline{X}) + |\nabla_{\bar{p}} X|^2 + |\nabla_p X|^2 + g(X, \overline{\nabla_{\bar{p}} \nabla_p X})). \tag{3.1.1}$$

Dado que X é um campo holomorfo, $|\nabla_{\bar{p}} X|^2 \equiv 0$, pois pela definição de conexão

$$\nabla X = dX^i \otimes \partial_i + X^i \otimes \nabla \partial_i.$$

Derivando na direção $\partial_{\bar{k}}$, obtemos que $dX^i(\partial_{\bar{k}}) = \partial_{\bar{k}} X^i \equiv 0$ por X ser holomorfo, e $\nabla_{\partial_{\bar{k}}} \partial_i \equiv 0$. Assim $|\nabla_p X|^2 = |\nabla X|^2$ e $g(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} X, X) = 0$. Substituindo isso em (3.1.1)

$$\Delta_{\bar{\partial}}|X|^2 = |\nabla X|^2 + \sum_p g(X, \overline{\nabla_{\bar{p}} \nabla_p X}).$$

Dado que $R_{p\bar{p}} X = -\nabla_{\bar{p}} \nabla_p X$ e pela expressão simplificada obtida no começo desta seção concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{\partial}}|X|^2 &= |\nabla X|^2 - \textstyle\sum_p g(X, \overline{R_{p\bar{p}} X}) \\ &= |\nabla X|^2 - r(X, \bar{X}). \end{aligned}$$

$\square$

Isto pode ser estendido para tensores holomorfos, levando a conexão no espaço tangente para o espaço tensorial correspondente. Assim obtemos o seguinte resultado

Teorema 3.1.2 (Identidade de Bochner para Formas)**.** *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler, obtemos a seguinte relação para $|\alpha|^2$, onde α é uma k-forma holomorfa:*

$$\Delta|\alpha| = |\nabla\alpha|^2 + r(\alpha, \overline{\alpha})$$

Observação 3.1.3. A mudança no sinal no tensor $r(X, \bar{X})$ vem da mudança de sinal da conexão de Levi-Civita estendida para o espaço cotangente (Espaço de 1-formas).

Aqui obtemos as primeiras pequenas aplicações da conjectura de Calabi, que será de utilidade nas seguintes seções.

{1B}

Teorema 3.1.4. *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler compacta com $c_1(M) > 0$. Então para $0 < k \leq n$, $dim_{\mathbb{C}} H^{k,0}_{\bar{\partial}}(M) = 0$.*

Prova.

Dado que $c_1(M) > 0$, existe uma $(1,1)$-forma positiva $\rho \in H^{1,1}_{\bar{\partial}}(M, \mathbb{C})$. Pela conjectura de Calabi obtemos uma métrica ω_ρ tal que a sua curvatura de Ricci é ρ. Considere $|.|$ a norma tensorial dado pela métrica ω_ρ.

Seja α uma $(k,0)$-forma holomorfa e consideremos $|\alpha|^2$. Isto é uma função suave a valores reais sobre M; assim, dado que M é compacta, existe p tal que

$$\Delta|\alpha|^2 \leq 0$$

Por outro lado, pela Identidade de Bochner para Formas

$$\Delta|\alpha|^2 = |\nabla\alpha|^2 + r(\alpha, \overline{\alpha})$$

Dado que ρ é uma $(1,1)$-forma positiva, temos que $r(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$, assumindo que $\alpha \neq 0$. Assim

$$\Delta|\alpha|^2 > |\nabla\alpha|^2 \geq 0$$

Juntando tudo o anterior

$$0 \geq \Delta|\alpha|^2 > 0$$

e isso é uma contradição. Portanto $\alpha \equiv 0$. Agora como o conjunto de $(k,0)$-formas holomorfas é igual ao conjunto de $(k,0)$-formas harmônicas, que pelo teorema de Hodge é igual ao conjunto $H^{k,0}_{\bar{\partial}}(M)$, concluímos que $\dim_{\mathbb{C}} H^{k,0}_{\bar{\partial}}(M) = 0$.

$\square$

Também utilizando a identidade de Bochner obtemos resultados com respeito a campos paralelos.

Definição 3.1.5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja ∇ uma conexão. Dizemos que um campo X é paralelo se $\nabla X = 0$.

Observação 3.1.6. Notemos que X pode ser um campo em $(TM)^k \otimes (TM^*)^s$, onde ∇ é a conexão levada naquele fibrado.

{2B}

Teorema 3.1.7. *Seja (M, ω) uma variedade de Kähler compacta com $c_1(M) \geq 0$. Assim, toda $(k, 0)$-forma α é paralela.*

Prova

A prova é essencialmente igual ao Teorema 3.1.4, com a diferença que temos que em p, $r(\alpha, \bar{\alpha}) \geq 0$, assim

$$0 \geq \Delta|\alpha|^2 \geq |\nabla\alpha|^2 \geq 0$$

e portanto $\nabla\alpha = 0$, ou seja, α é uma $(k, 0)$-forma α é paralela.

□

Isto nos permite mostrar o teorema.

{7}

Corolário 3.1.8. *Seja M uma variedade de Kähler compacta, com $c_1(M) = 0$ e simplesmente conexa. Então o grupo de isometrias de M é finito.*

Prova.

Seja $\mathrm{Iso}(M)$ o grupo de isometrias de M. Como M é compacto, pelo Teorema 3.4 no capítulo VI em [19], $\mathrm{Iso}(M)$ é compacto.

Agora, dado que $\mathrm{Iso}(M)$ é um grupo de Lie, podemos considerar $\mathrm{Iso}_0(M)$ a componente conexa de $\mathrm{Iso}(M)$ que contem a identidade e. Dado que $c_1(M) = 0$, pela conjectura de Calabi temos que existe uma métrica ω que tem curvatura de Ricci nula. Assim, entramos nas hipóteses do Corolário 2.2 em [11], e então $\dim(\mathrm{Iso}_0(M)) = b_1(M)$. Por outro lado, dado que M é simplesmente conexa, o grupo fundamental $\pi_1(M) = \{\mathrm{Id}\}$. Pelo Teorema 2A.1 em [14], o grupo de homologia $H_1(M, \mathbb{Z}) = [\pi_1(M), \pi_1(M)] = \{\mathrm{Id}\}$. Assim, como

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

então $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Portanto $b_1(M) = 0$. Juntando todo, temos que $\dim(\mathrm{Iso}_0(M)) = 0$, é dizer, $\mathrm{Iso}(M)$ é um conjunto discreto. Assim, dado que $\mathrm{Iso}(M)$ é compacto, concluímos que $\mathrm{Iso}(M)$ é um conjunto finito.

□

Nesta seção, desenvolve alguns resultados sobre campos paralelos, que via o principio de holonomia se relaciona direitamente com a holonomia sobre M. Isto nos sugere uma forma de decompor a cobertura universal de variedades de Kähler com $c_1(M) = 0$ utilizando diferentes resultados de geometria Riemanniana, como veremos na subseção 3.3.

3.2 Variedades de Fano

Vamos supor M uma variedade de Kähler compacta. Nós dizemos que M é uma variedade de Fano se existe uma forma $\rho \in c_1(M)$ que é positiva. O teorema central nesta secção é

{VF}

Teorema 3.2.1. *Toda variedade de Fano é simplesmente conexa.*

Antes de demostrar este resultado, vamos ver como construir exemplos.

Exemplo 3.2.2. No espaço projetivo $\mathbb{CP}^n$, obtemos uma quantidade de exemplos de variedades de Fano estudando as hipersuperfícies em $\mathbb{CP}^n$. Seja $V \subset \mathbb{CP}^n$ uma hipersuperfície de grau d. Note-se que V é uma variedade de Kähler

$$c_1(V) = c_1(T^{1,0}V) = c_1(K_V^{-1}).$$

Agora, como $K_V^{-1} = (K_V)^*$, e dado que $c_1(K_V) = -c_1((K_V)^*)$, concluímos que

$$c_1(V) = -c_1(K_V).$$

Assim, utilizando a Proposição 1.2.28

$$c_1(V) = c_1(\mathcal{O}(n+1-d)|_V).$$

Como $c_1(\mathcal{O}(1)) = \omega_{FS}$, então

$$c_1(V) = (n+1-d)c_1(\omega_{FS}|_V).$$

Dado que ω_{FS} é uma $(1,1)$-forma positiva, então $\omega_{FS}|_V$ é uma $(1,1)$-forma positiva. Assim, se consideramos $d < n+1$, $(n+1-d)\omega_{FS}|_V$ é uma $(1,1)$-forma positiva. Portanto $c_1(V) > 0$.

Vamos primeiro enunciar os teoremas principais que utilizamos para mostrar o Teorema 3.2.1. O primeiro resultado que precisaremos é um corolário do Teorema de Bonnet-Meyers, que pode ser encontrado do em [9].

Corolário 3.2.3 (Corolário do Teorema de Bonnet-Meyers)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $Ric_p(v) \geq \delta > 0$, para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$. Então, o recobrimento universal de M é compacto. Em particular, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.*

O seguinte resultado que precisamos é chamado de Teorema de Dolbeault, que relaciona certos grupos de cohomologia respeito ao operador $\bar{\partial}$. Isso pode ser encontrado em [13].

Teorema 3.2.4 (Teorema de Dolbeault)**.** *Para M uma variedade complexa,*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

O último teorema que precisaremos é o famoso Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch, que relaciona a característica de Euler holomorfa de um fibrado E definida por

$$\chi(E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}} \left(H^k(M, E) \right)$$

com a integral de um produto wedge do carácter de Chern de E com a classe de Todd de TM denotadas por $ch(E)$ e $\mathrm{Td}_n(TM)$, para mais informação ler [29].

Teorema 3.2.5 (Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch))**.** *Para uma variedade complexa compacta M de dimensão n e um fibrado vetorial E sobre M, verifica-se que*

$$\chi(E) = \int_M ch(E) \wedge Td(TM)_n$$

Prova do Teorema 3.2.1.

Pela conjectura de Calabi, temos que existe uma métrica de Kähler ω tal que $\mathrm{Ric}(\omega) = \rho$. Em particular, a métrica definida por ω tem curvatura de Ricci positiva. Pelo teorema de Bonnet-Myers, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito de ordem d. Agora consideremos a característica de Euler holomorfa $\chi(\mathcal{O}_M)$. Pelo teorema de Dolbeault, temos que para todo k

$$H^k(M, \mathcal{O}_M) \cong H^{0,k}_{\bar{\partial}}(M) \cong \overline{H^{k,0}_{\bar{\partial}}(M)} \cong \overline{H^0(M, \Omega^k_M)}$$

Pelo Corolário 3.1.4 temos que $H^0(M, \Omega^k_M = 0)$, para $k > 0$. Assim,

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{O}_M) = \dim_{\mathbb{C}} H^{0,0}_{\bar{\partial}}(M)$$

Como para uma variedade de Kähler, o conjunto de funções harmônicas é isomorfo ao conjunto $H^{0,0}_{\bar{\partial}}(M)$ e as únicas funções harmônicas em M são as funções constantes em $\mathbb{C}$, obtemos que $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{O}_M) = 1$, e assim, $\chi(\mathcal{O}_M) = 1$. Dado que $\pi_1(M)$ tem ordem d, o recobrimento universal $\hat{M}$ de M herda a compacidade de M. Também obtemos que o fibrado canônico de $\hat{M}$ é positivo. Isso se obtém puxando para trás a métrica hermitiana em K_M^{-1} e vendo que o representante na classe de Chern dessa métrica é positiva. Assim, obtemos que $\hat{M}$ é também uma variedade de Fano. Agora, pelo teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_{\hat{M}}) &= \int_{\hat{M}} ch(\mathcal{O}_{\hat{M}}) \wedge \mathrm{Td}_n(T\hat{M}) \\
&= \int_{\hat{M}} \pi^*(ch(\mathcal{O}_M) \wedge \mathrm{Td}_n(TM)) \\
&= d \int_M ch(\mathcal{O}_M) \wedge \mathrm{Td}_n(TM) \\
&= d\chi(\mathcal{O}_M)
\end{aligned}$$

Note-se que $\chi(\mathcal{O}_{\hat{M}})$ e $\chi(\mathcal{O}_M)$ são iguais a 1, já que M e $\hat{M}$ são variedades de Fano. Assim, obtemos que $d = 1$, ou seja, $|\pi_1(M)| = 1$. Portanto M é uma variedade simplesmente conexa. □

3.3 Teorema de Decomposição de Beauville

Nesta última seção, vamos demostrar o seguinte resultado, dado por Beauville em [3], sobre a decomposição de certos espaços de recobrimento de uma variedade de Kähler com $c_1(M) = 0$.

{TB}

Teorema 3.3.1 (Teorema de Decomposição de Beauville).

Seja M uma variedade de Kähler compacta com curvatura de Ricci nula.

1. *O recobrimento universal $\widehat{M}$ é isomorfo, como uma variedade de Kähler, a um produto*

$$\mathbb{C}^k \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$$

onde $\mathbb{C}^k$ é fornecida com a métrica de Kähler padrão, os V_i são variedades de Kähler compactas e simplesmente conexas, de dimensão real $2m_i$ e com grupo de holonomia $SU(m_i) \subset SO(2m_i)$ e X_j são variedades de Kähler compactas e simplesmente conexas de dimensão real $4r_j$ e com grupo de holonomia $Sp(r_j) \subset SO(4r_j)$. Essa decomposição é única ao menos biholomorfismos e troca da ordem dos fatores.

2. *Existe um recobrimento finito M' de M, isomorfo como variedade de Kähler, ao produto*

$$T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$$

onde T é um toro complexo.

Observação 3.3.2. Definimos um reticulado Λ sobre $\mathbb{C}^n$ como

$$\Lambda = \left\{ \sum_i e_i a_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

onde $\{e_n\}$ é a base canônico de $\mathbb{C}^n$. Isto define uma classe de equivalência sobre $\mathbb{C}^n$ no sentido de que $a_i + m \equiv a_i$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Assim, definimos um toro complexo como $\mathbb{C}^n$ quocientado pela classe de equivalência dada no reticulado.

Temos M uma variedade de tipo Kähler com $c_1(M) = 0 \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M, R)$. Assim, pela Conjectura de Calabi, em qualquer classe de Kähler existe uma forma de Kähler ω com $\mathrm{Ric}(\omega) = 0$. Seja g a métrica associada à forma ω. Primeiro vamos enunciar alguns conceitos e teoremas importantes para mostrar o Teorema de decomposição Beauville.

Para uma variedade Riemanniana (M, g), dizemos que $l : \mathbb{R} \to M$ é uma linha sobre M, se para todo $s, t \in \mathbb{R}$, existe uma geodésica γ tal que é uma curva minimizante entre os pontos

$\gamma(s)$ e $\gamma(t)$. também dizemos que $c : [0, \infty) \to M$ é um raio sobre M, se para todo $s, t \in [0, \infty]$, existe uma geodésica γ tal que é uma curva minimizante entre os pontos $\gamma(s)$ e $\gamma(t)$.

Enunciaremos alguns teoremas fundamentais que serão necessários para a demostração do Teorema 3.3.1. O primeiro deles é um teorema de decomposição isométrica dado por Cheeger e Gromoll em [6], e também pode ser encontrado em [22].

{CG}

Teorema 3.3.3 (**Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll**).
Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de curvatura de Ricci não negativa. Então M é isométrica ao produto $\overline{M} \times \mathbb{R}^k$, onde $\overline{M}$ não contem nenhuma linha e onde $\mathbb{R}^k$ tem a métrica euclideana plana.

O seguinte é um teorema mais algébrico, mas que é importante no desenvolvimento da prova do Teorema 3.3.1. Uma prova pode ser encontrada em [27] ou [5]. Para isto, precisaremos da seguinte definição

Definição 3.3.4. Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio fundamental de um subgrupo discreto G de isometrias de $\mathbb{R}^n$, se D é aberto em $\mathbb{R}^n$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\alpha \in G$ tal que $\alpha x \in \bar{D}$, e se para $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq y$, não existe $\alpha \in G$ tal que $\alpha x = y$. Dizemos que D é um domínio fundamental compacto se $\mathbb{R}^n / G$ é compacto com a topologia quociente.

Observação 3.3.5. Um reticulado Λ sobre $\mathbb{C}^n$ tem um domínio fundamental compacto.

{B}

Teorema 3.3.6 (**Teorema de Bieberbach**).

Seja G um grupo discreto de isometrias de $\mathbb{R}^n$, com domínio fundamental compacto. Então o subgrupo H de G, formado pelas translações de $\mathbb{R}^n$ em G, contem n translações linearmente independentes. O subgrupo H é um grupo livre, de índice finito em G, e é o único subgrupo normal abeliano maximal de G.

Agora usaremos a noção de holonomia, veja [22] ou [19] para uma definição justo com propriedades básicas. Como consequência da teoria podemos obter os seguintes teoremas. O primeiro, um teorema de decomposição, e o segundo, em certas condições dadas, nos fornece de uma classificação das possíveis holonomias que pode ter a variedade.

{DDR}

Teorema 3.3.7 (**Teorema de Decomposição de De Rham**).

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa. Então M é isométrica a um produto $M_0 \times \cdots \times M_k$, onde M_0 é um espaço euclideano e M_i são irredutíveis para $i \geq 1$. Essa decomposição é única (ao menos ordem). Seja $p = (p_0, ..., p_k)$ um ponto em

M, e seja H_i o grupo de holonomia de M_i em p_i. Então o grupo de holonomia de M em p é $H_0 \times \cdots \times H_k$, agindo em $T_pM = T_{p_1}M_1 \oplus \cdots \oplus T_{p_k}M_k$ pela representação produto,ou seja, para cada i, H_i age somente em $T_{p_i}M_i$.

{TBB}

Teorema 3.3.8 (**Teorema de Classificação de Berger**).

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana irredutível, simplesmente conexa e de dimensão real n. Suponha que M não é localmente simétrica. Então o grupo de holonomia $H \subset SO(n)$ é isomorfo a um dos subgrupos seguintes

1. $SO(n)$.
2. $U(m)$, *para* $n = 2m$.
3. $SU(m)$, *para* $n = 2m$.
4. $Sp(r)$, *para* $n = 4r$.
5. $Sp(r) \cdot Sp(1)$, *para* $n = 4r$.
6. G_2, *para* $n = 7$.
7. $Spin(7)$, *para* $n = 8$.

Observação 3.3.9. Para ver uma definição de cada um dos grupos acima, e do produto " $\cdot$ " no caso do grupo $Sp(r) \cdot Sp(1)$, veja [8] no capítulo 5.

Dado isto, lembremos da definição de uma extensão de grupos:

Definição 3.3.10. Se diz que G é a extensão de um grupo H por K, se existe uma sequência exata curta dada por:

$$1 \to K \to G \to H \to 1$$

Se K é um subgrupo de H, definimos o índice da extensão de grupos H por K como

$$[H : K] = |\{ab : a \in K \text{ e } b \in H\}|.$$

Tendo esta definição, vamos mostrar o seguinte teorema dado em [6], e também em [22], que embora não sendo necessário para a demostrar o Teorema de Beauville, ajuda a entender como interagem alguns objetos e ferramentas que utilizaremos posteriormente.

{CG1}

Teorema 3.3.11. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de curvatura de Ricci não negativa. Então o recobrimento universal $\widehat{M}$ de M se decompõe isometricamente em $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$, com $\overline{M}$ uma variedade compacta; e o grupo fundamental $\pi_1(M,x_0)$, com $x_0\in M$, contem um subgrupo normal finito ψ, tal que, $\pi_1(M,x_0)/\psi$ seja a extensão de um grupo finito por um reticulado Λ de R^k isomorfo ao reticulado $\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^k$.*

Prova.
Vamos dividir a prova em duas afirmações:

Afirmação 1. O recobrimento universal de M se decompõe isometricamente em $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$, onde $\overline{M}$ é compacta.

Seja $\widehat{M}$ o recobrimento universal de M, com projeção $p:\widehat{M}\to M$. Como M é compacta, ela é completa. Por outro lado, a métrica p^*g é uma isometria local de $\widehat{M}$ para M. Assim $\widehat{M}$ é completa e, além disso, a curvatura de Ricci da métrica p^*g é não-negativa. Pelo Teorema 3.3.3, $\widehat{M}$ é isométrica ao produto $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$, onde $\overline{M}$ não contem nenhuma linha e $\mathbb{R}^k$ tem a métrica euclidiana plana. Assim se consideramos $c(t)$ uma geodésica em $\widehat{M}$, existem $c_1(t)\in\overline{M}$, $c_2(t)\in\mathbb{R}^k$ tais que $c(t)=(c_1(t),c_2(t))$, isso implica que c_1, c_2 são geodésicas; também se c é uma linha em $\widehat{M}$, então existem linhas $c_1\in\overline{M}$ e $c_2\in\mathbb{R}^k$ tais que $c(t)=(c_1(t),c_2(t))$. Dado que $\overline{M}$ não contem linhas, temos que as linhas em $\widehat{M}=\overline{M}\times\mathbb{R}^k$ são da forma $c(t)=(x,c_2(t))$, com $x\in\overline{M}$ e c_2 uma linha em $\mathbb{R}^k$, em particular, $\pi_{\overline{M}}(c(t))$ é constante para qualquer linha em $\widehat{M}$.

Veremos agora que $\mathrm{Iso}(\widehat{M})=\mathrm{Iso}(\overline{M})\times\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$. Seja $F\in\mathrm{Iso}(\widehat{M})$, dado que $\widehat{M}=\overline{M}\times\mathbb{R}^k$, podemos considerar $F:\overline{M}\times\mathbb{R}^k\to\overline{M}\times\mathbb{R}^k$. Assim existem $F_1:\overline{M}\times\mathbb{R}^k\to\overline{M}$ e $F_2:\overline{M}\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ tais que

$$F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y)).$$

Notemos que $F_1(x,y)$ não depende da variável y e $F_1\in\mathrm{Iso}(\overline{M})$. Fixemos x e consideremos

$$DF_{1(x,y)}(0,v)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}F_1(x,y+tv)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\pi_{\overline{M}}(F(x,y+tv)).$$

Logo como as linhas em $\mathbb{R}^k$ são da forma $y+tv$, $c(t)=(x,y+tv)$ é uma linha em $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$. Como F é uma isometria, $F(c(t))$ é uma linha em $\overline{M}\times\mathbb{R}^k$. Dado que $\overline{M}$ não contem linhas, temos que $\pi_{\overline{M}}(F(c(t)))=\pi_{\overline{M}}(F(x,y+tv))$ é constante. Assim,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}F_1(x,y+tv)=0.$$

Portanto para cada dois pontos $y,y'\in\mathbb{R}^k$, temos que $F_1(x,y')=F_1(x,y)$. Então, $F_1:\overline{M}\to\overline{M}$ verifica que

$$F(x,y) = (F_1(x), F_2(x,y)).$$

Como $g = \bar{g} + g_{euc}$, com $\bar{g}$ uma métrica em $\overline{M}$ de g_{euc} a métrica euclideana plana em $\mathbb{R}^k$, então pelo fato de F ser uma isometria, F_1 é um difeomorfismo e para $v, w \in T_x\overline{M}$

$$F_1^*\bar{g}(v,w) = F^*g((v,0),(w,0)) = g((v,0),(w,0)) = \bar{g}(v,w).$$

Assim $F_1 \in \mathrm{Iso}(\overline{M})$.

Por outro lado, vejamos que $F_2(x,y)$ não depende da variável x e $F_2 \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$. Para $(x,y) \in \overline{M} \times \mathbb{R}^k$, $DF_{(x,y)}$ tem a forma

$$DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} D_xF_{1(x,y)} & D_xF_{2(x,y)} \\ 0 & D_yF_{2(x,y)} \end{pmatrix}.$$

Como F é uma isometria e DF leva o subespaço $T_x\overline{M}$ em $T_{F_1(x)}\overline{M}$, então DF leva $(T_x\overline{M})^\perp = T_y\mathbb{R}^k$ em $(T_{F_1(x)}\overline{M})^\perp = T_{F_2(x,y)}\mathbb{R}^k$. Assim $D_yF_{2(x,y)}$ é um isomorfismo, e $D_xF_{2(x,y)} = 0$. Portanto F_2 não depende de x. Por contas similares às anteriores, mostramos que $F_2 \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$. Portanto $\mathrm{Iso}(\widehat{M}) = \mathrm{Iso}(\overline{M}) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$.

Como $\widehat{M}$ é o recobrimento universal de M, temos que para um ponto $x_0 \in M$ o grupo fundamental $\pi_1(M, x_0)$ é isomorfo ao grupo π de automorfismos do recobrimento de $\widehat{M}$. Notemos que os elementos de π são invariantes com respeito à métrica, assim obtemos que $\pi \subset \mathrm{Iso}(\widehat{M})$. Dado que $\mathrm{Iso}(\widehat{M}) = \mathrm{Iso}(\overline{M}) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$, consideremos $p_{\overline{M}} : \mathrm{Iso}(\overline{M}) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k) \to \mathrm{Iso}(\overline{M})$ a projeção no primeiro fator e consideremos $S = p_{\overline{M}}(\pi_1(M)) \subset \mathrm{Iso}(\overline{M})$. Como M é compacto e $\widehat{M}/\pi = M$, temos que π age cocompactamente sobre $\widehat{M}$. Isso é equivalente à existência de um compacto $K \subset \widehat{M}$ tal que $GK = \cup_{g \in G} gK = \widehat{M}$. Utilizando essa equivalência e o fato mostrado no parágrafo anterior, temos a existência de um compacto $K' \subset \overline{M}$ tal que $SK' = \overline{M}$. Em particular, para cada sequência de pontos $p_i \in \overline{M}$, podemos escolher $F_i \in S$ tal que todo ponto $F_i(p_i)$ pertença ao compacto K'. Vamos utilizar esse fato para mostrar que $\overline{M}$ é compacta.

Suponha-se que $\overline{M}$ não é compacta. Dado que a curvatura de Ricci é não negativa, pelo Lema 7.3.1 de [22], para todo ponto $p \in \overline{M}$ existe um raio $c : [0, +\infty) \to \overline{M}$, com $r(0) = p$. Assim, podemos considerar $t_i \to \infty$ e $F_i \in S$ tal que $F_i(c(t_i))$ fique num conjunto compacto. Então, a menos de passar a uma subsequência, assumimos que $F_i(c(t_i))$ converge para algum ponto $q \in K' \subset \overline{M}$. Por outro lado, como $|\dot{c}(t_i)| = 1$ e F_i é uma isometria, $|DF_i(\dot{c}(t_i))| = 1$. Assim, ao menos uma subsequências, $DF_i(\dot{c}(t_i))$ converge para um vetor unitário $v \in T_q\overline{M}$. Isto implica que, se consideramos os raios $c_i : [-t_i, \infty] \to \overline{M}$, definidos por $c_i(t) = F_i(c(t + t_i))$, converge à $\exp_q(tv)$. Note-se que cada c_i é um raio definido sobre $[-t_i, \infty)$, então aplicando o limite sobre i, $\exp_q(tv)$ é uma linha, pois para $s, t \in \mathbb{R}$

$$d(\exp_q(tv), \exp_q(sv)) = \lim_{i\to\infty} d(c_i(t), c_i(s)) = \lim_{i\to\infty} |s - t| = |s - t|.$$

mas isso contradiz que $\overline{M}$ não contem uma linha. Portanto, $\overline{M}$ é compacto. Assim $\widehat{M}$ se decompõe isometricamente em $\overline{M} \times \mathbb{R}^k$, com $\overline{M}$ compacta.

Afirmação 2. O grupo fundamental $\pi_1(M, x_0)$ contém um subgrupo normal finito ψ, tal que, $\pi_1(M)/\psi$ é a extensão de um grupo finito por um reticulado Λ de $\mathbb{R}^k$ isomorfo ao reticulado $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^k$.

Consideremos $p_{\mathbb{R}^k} : \mathrm{Iso}(\overline{M}) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k) \to \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$ a projeção no segundo fator e chamemos de $\psi = \mathrm{Ker}(p_{\mathbb{R}^k})$. Dado que $\overline{M}$ é compacta, $\mathrm{Iso}(\overline{M})$ é compacto com a topologia compacta-aberta. Como ψ age livre e discretamente sobre $\overline{M}$, obtemos que ψ é um conjunto discreto em $\mathrm{Iso}(\overline{M})$. Assim ψ é um grupo finito. Por outro lado ψ age fielmente em $\overline{M}$, pois π age fielmente em $\widehat{M}$.

Dado que ψ é um subgrupo finito de π cuja ação age fiel e discretamente sobre $\widehat{M}$, obtemos que o quociente $\tilde{M} = \widehat{M}/\psi$ é uma variedade suave. Como ψ age trivialmente em $\mathbb{R}^k$, obtemos que $\tilde{M} = (\overline{M}/\psi) \times \mathbb{R}^k = M_1 \times \mathbb{R}^k$, com M_1 uma variedade compacta. A métrica de $\widehat{M}$ desce para uma métrica em $\tilde{M}$ mantendo as propriedades, então $\tilde{M}$ tem uma métrica com $\mathrm{Ric} \geq 0$. Por um argumento parecido à primeira parte da prova, M_1 não contem linhas, e assim $\mathrm{Iso}(\tilde{M}) = \mathrm{Iso}(M_1) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$. Sabemos que ψ é um subgrupo normal de π, então $\tilde{M}$ é uma cobertura normal de M tal que o grupo π^* de automorfismos do recobrimento $\tilde{M}$ é isomorfo a π/ψ (ver em [14](Pág 80, exercício 17)). Por isso, $\pi/\psi \subset \mathrm{Iso}(\tilde{M}) = \mathrm{Iso}(M_1) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$, e então podemos considerar a projeção no segundo fator $\varphi^* : \pi^* \to \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^k)$. Notemos que φ^* é um isomorfismo sobre a sua imagem e que π^* é um conjunto discreto em $\mathrm{Iso}(\tilde{M})$ por ser o grupo de automorfismos do recobrimento $\tilde{M}$. Assim $\varphi^*\pi^*$ é um subgrupo discreto de isometrias euclideanas. Por outro lado, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} = M_1 \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{R}^k \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sim} \\ M = \tilde{M}/\pi^* & \xrightarrow{\rho'} & \mathbb{R}^k/\varphi^*\pi^* \end{array}$$

onde ρ é a projeção de $\tilde{M}$ por $\mathbb{R}^k$, $\tilde{p}$ é a aplicação de recobrimento, $\sim$ é aplicação quociente de $\mathbb{R}^k$ sobre $\varphi^*\pi^*$ e ρ' é a única aplicação continua de M para $\mathbb{R}^k/\varphi^*(\pi^*)$ tal que o diagrama acima comuta. Como ρ' é continua e M é compacta, $\mathbb{R}^k/\varphi^*(\pi^*)$ é compacto. Pelo Teorema de Bieberbach, existe $\Gamma' \lhd \varphi^*(\pi^*)$ tal que $[\Gamma' : \varphi^*(\pi^*)] < \infty$ e $\Gamma' \cong \mathbb{Z}^k$. Dado que φ^* é um isomorfismo com sua imagem, $\Gamma = (\varphi^*)^{-1}(\Gamma')$ é tal que $\Gamma \lhd \pi/\psi$, $[\Gamma : \pi/\psi] < \infty$ e $\Gamma \cong \mathbb{Z}^k$. Portanto π contem um subgrupo normal finito ψ tal que π/ψ seja a extensão de um grupo finito pelo reticulado $\mathbb{Z}^k$.

$\square$

A prova desse ultimo teorema vai nós ajudar entender melhor a provar da segunda parte do Teorema de Decomposição de Beauville, quais técnicas são utilizadas e como interagem.

(Prova do Teorema 3.3.1)

Seja M uma variedade de Kähler com $c_1(M) = 0$. Vamos dividir a prova em duas partes:

Afirmação 1 Vale a primeira parte do Teorema 3.3.1

Seja M uma variedade de Kähler compacta tal que $c_1(M) = 0$. Pelo teorema de Yau obtemos a existência de uma métrica Ricci plana g. Seja $\widehat{M}$ o cobrimento universal, assim g induz uma métrica $\widehat{g}$ em $\widehat{M}$ Ricci plana. Pelo Teorema 3.3.3, $\widehat{M}$ se decompor isometricamente como

$$\widehat{M} = \mathbb{R}^s \times \overline{M}.$$

onde $\overline{M}$ é uma variedade que não contem linhas. Isso implica, por uma argumento dado na prova do Teorema 3.3.11, que $\overline{M}$ é uma variedade compacta. Assim $\overline{M}$ é uma variedade completa e além disso simplesmente conexa pois $\widehat{M}$ ser simplesmente conexa. Assim pelo Teorema 3.3.7 Existem variedades irredutíveis M_i tais que $\overline{M}$ se descompor isometricamente como

$$\overline{M} = M_1 \times \cdots \times M_s.$$

Dado que $\overline{M}$ é compacta, para cada i, M_i é compacto e a variedade M_0 dada no Teorema 3.3.7 não aparece na decomposição. Assim temos que $\widehat{M}$ se descompor isometricamente da seguinte forma

$$\widehat{M} = R^s \times M_1 \times \cdots \times M_s.$$

Dada que $\widehat{g}$ é uma variedade complexa, $\mathbb{R}^s$ e cada M_i são variedades complexas, assim $\mathbb{R}^s \cong \mathbb{C}^k$, com $s = 2k$. Assim

$$\widehat{M} = \mathbb{C}^k \times M_1 \times \cdots \times M_s.$$

com cada M_i é uma variedade complexa irredutível, compacta, Ricci plana e simplesmente conexa. Isto implica que cada M_i não é localmente simétrica, pois se fossem, dado que M_i é simplesmente conexa, vai ser é simétrica; logo, pelo Teorema em [20] temos que uma variedade simétrica e compacta admite curvatura de Ricci positivo definida, é dizer $c_1(M) > 0$, mas isso é uma contradição pois o sinal definido para $c_1(M)$ é mutuamente excludente.

Notemos que para cada i, M_i é uma variedade Riemanniana irredutível, simplesmente conexa e não localmente simétrica, assim podemos aplicar o Teorema de Classificação de Berger para ver que grupos de holonomia são permitidos. Utilizando fatos de holonomia, grupos de Lie, álgebras de Lie e a formula de Bochner para formas, obtemos que os possíveis grupos de holonomia são $SU(n_j) \subset SO(2n_j)$ e $Sp(r_l) \subset SO(4r_l)$. Isto nos permite obter o primeiro item do Teorema 3.3.1.

Afirmação 2 Vale a segunda parte do Teorema 3.3.1

Pela parte acima, o recobrimento universal $\widehat{M}$ se decompõe como $\widehat{M} = \mathbb{C}^k \times \overline{M}$, onde $\overline{M}$ é uma variedade compacta que não contem linhas e se descompõe isometricamente como um produto de variedades Riemannianas de holonomia $SU(n_i)$ e $Sp(r_j)$. Dado que $\overline{M}$ não contem linhas, $\mathrm{Iso}(\widehat{M}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^k) \times \mathrm{Iso}(\overline{M})$, com $\mathrm{Iso}(\overline{M})$ um grupo de Lie compacto. Como $\widehat{M}$ é o recobrimento universal de M, para $x_0 \in M$ o grupo fundamental $\pi = \pi_1(M, x_0)$ é isomorfo ao grupo de automorfismos do recobrimento de $\widehat{M}$. Dado que $\pi \subset \mathrm{Iso}(\widehat{M})$, consideremos $p_{\overline{M}}$: $\mathrm{Iso}(\widehat{M}) \to \mathrm{Iso}(\overline{M})$ a projeção no primeiro primeiro fator e seja $\psi = \mathrm{Ker}(p_{\overline{M}}|_{\pi})$. Pelo teorema de homomorfismos $\pi/\psi \hookrightarrow \mathrm{Iso}(\overline{M})$. Pelo Lema 3.1.8, como $\overline{M}$ é compacta, simplesmente conexa e Ricci plana, temos que $\mathrm{Iso}(\overline{M})$ é um grupo finito, assim π/ψ é finito, e portanto $[\pi : \psi] < \infty$

Dado que ψ é um subgrupo normal de π, existe $\tilde{p} : \tilde{M} \to M$ o espaço de recobrimento de M que corresponde com o subgrupo ψ, por isso temos que $\tilde{M} = \widehat{M}/\psi$, $\pi_1(\tilde{M}) = \psi$ e π/ψ é isomorfo ao grupo de transformações de recobrimento de $\tilde{M}$, Notemos que $\tilde{M}$ é compacto, pois $[\pi : \psi] < \infty$. Por outro temos o recobrimento $\widehat{p} : \widehat{M} \to \tilde{M}$ e $\varphi^* : \pi \to \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^k)$, dado que π age discretamente por ser transformações de recobrimento e o fato de que $\mathrm{Iso}(\widehat{M}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^k) \times \mathrm{Iso}(\overline{M})$, temos que $\varphi^*\psi$ age discretamente em $\mathbb{C}^k$. Assim podemos considerar o diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} = \mathbb{C}^k \times \overline{M} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\widehat{p}"'] & \mathbb{C}^k \arrow[d, "\sim"] \\ \tilde{M} = \widehat{M}/\psi \arrow[r, "\rho'"] & \mathbb{C}^k/\varphi^*(\psi) \end{tikzcd}$$

onde ρ é a projeção de $\widehat{M}$ sobre $\mathbb{C}^k$, $\sim$ é aplicação quociente de $\mathbb{C}^k$ por $\varphi^*(\psi)$ e ρ' é a aplicação continua de $\tilde{M}$ para $\mathbb{C}^k/\varphi^*\psi$ tal que o diagrama acima comuta Como ρ' é continua e $\tilde{M}$ é compacta, $\mathbb{C}^k/\varphi^*\psi$ é compacto. Assim, aplicando o Teorema 3.3.6 obtemos que existe $\Gamma' \lhd \varphi^*\psi$ tal que $[\Gamma', \varphi^*\psi] < \infty$ e $\varphi^*\Gamma' \cong \mathbb{Z}^{2k}$. Notemos que $\varphi^*|_{\psi}$ é um isomorfismo com a sua imagem, assim podemos considerar $\Gamma = (\varphi^*)^{-1}(\Gamma')$, que é tal que $\Gamma \lhd \psi$, $[\Gamma, \psi] < \infty$ e $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2k}$. Dado que Γ é normal em ψ, existe M' recobrimento normal de $\tilde{M}$ com respeito ao subgrupo normal Γ, com aplicação de recobrimento $p' : M' \to \tilde{M}$, que é tal que $M' = \widehat{M}/\Gamma$ e $[\Gamma, \psi] < \infty$. Assim podemos considerar a aplicação de recobrimento $p : M' \to M$ dada por

$$p = \tilde{p} \circ \widehat{p}.$$

Notemos que por $[\psi, \Gamma]$ e $[\pi, \psi]$ ser finitos, temos que $[\pi, \Gamma]$ é finito. Assim M' é um recobrimento finito de M

Agora, como $\Gamma \subset \psi$ e ψ age trivialmente sobre $\overline{M}$, obtemos que Γ age trivialmente em $\overline{M}$. Assim

$$M' = \widehat{M}/\Gamma' = (\mathbb{C}^k \times \overline{M})/\Gamma' = (\mathbb{C}^k/\Gamma') \times \overline{M} \cong T^{2k} \times \overline{M}.$$

Dado que Γ age discretamente e por isometrias, essa decomposição é isométrica. Com isso terminamos a prova do teorema.

$\square$

Observação 3.3.12. Para M variedades de Kähler compactas e simplesmente conexas de dimensão m complexa com grupo de holonomia $SU(m) = SO(2m)$ são chamadas variedades de Calabi-Yau; e de dimensão complexa $2r$ com grupo de holonomia é $Sp(r) \subset SO(4r)$ são chamadas variedades HiperKählerianas.

Apêndice A

Equações em Derivadas Parciais

As principais referencias para este capítulo são [12] e [18], e para estender as ideias para variedades Riemannianas, [2] as notas de Aula do curso de Análise Geométrica ditado pelo Professor Graham Smith no ano 2021 na Universidade Federal de Rio de Janeiro.

Começaremos com um L um operador diferencial de ordem dois definido sobre um domínio(aberto e conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dado por:

$$Lu(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + b^i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

com a seguintes condições sobre os coeficientes

- Simetria: $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ para todo i, j e $x \in \Omega$.
- Elipticidade: Existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi^i\xi^j \quad , \quad \text{para todo } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

  Em particular, a matriz (a^{ij}) é definida positiva para todo x.

- Estimações dos Coeficientes: Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|a^{ij}|, |b^i|, |c| \leq K \quad , \quad \text{para todo } i, j, \text{ e } x \in \Omega.$$

{A1}

Teorema A.0.1 (Principio do Máximo de Hopf)**.** *Para L, suponha-se que $c \equiv 0$ e existe u tal que em Ω*

$$Lu \geq 0.$$

Se u atinge um máximo no interior de Ω, então u é constante em Ω

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

$$D_\alpha \varphi := (\partial_1)_1^\alpha \cdots (\partial_n)_n^\alpha \varphi \quad , \quad \text{para } \varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega).$$

Uma função integrável $v : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada α-ésima derivada fraca de u, isto é $D_\alpha u = v$, se

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D_\alpha \varphi \quad , \quad \text{para todo } \varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega).$$

Para $k \in \mathbb{N}$, $q \leq p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D_\alpha u \text{ existe e está contido em } L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\},$$

onde definimos uma norma dada por

$$||u||_{W^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D_\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podemos mostrar que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço completo respeito à norma $||u||_{W^{k,p}}$, é dizer, é um espaço de Banach.

{A2}

Teorema A.0.2 (Desigualdade Generalizada de Sobolev)**.** *Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se $k \leq \frac{n}{p}$, então para q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, temos que $u \in L^q$; e além disso existe $C_S > 0$ uma constante dependendo de k, p, n e Ω tal que*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C_S ||u||_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

{A3}

Teorema A.0.3 (Desigualdade de Poincaré-Wirtinger)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e mensurável tal $|\Omega| > 0$[1], e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega| \leq C \int_\Omega |Du|^p$$

onde C depende unicamente de n e Ω, e u_Ω é dado por

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx$$

Por outra parte, precisamos de resultados sobre espaços de Hölder.

[1] $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}^n$

Definição A.0.4 (Seminorma de Hölder)**.** Seja X, Y espaços métricos. Para $\alpha \in [0,1]$, definimos a seminorma de Hölder de uma função $f : X \to Y$ por

$$[f]_\alpha \sup_{x \neq y \in X} \frac{d^Y(f(x), f(y))}{d^X(X,Y)^\alpha}.$$

{A4}
Proposição A.0.5 (Log-concavidade)**.** *Para todo* $0 \leq \alpha < \gamma < \beta \leq 1$ *e para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $C > 0$ *tal que para toda função* $f : X \to Y$*:*

$$[f]_\gamma \leq C[f]_\alpha + \epsilon[f]_\beta.$$

Definição A.0.6 (Norma de Hölder)**.** Seja X um espaço métrica e E um espaço de Banach. Para $\alpha \in [0,1]$, definimos a norma de Hölder de ordem α de uma função $f : X \to E$ por

$$||f||_{C^{0,\alpha}} := ||f||_{C^0} + [f]_\alpha.$$

Para todo $\alpha \in [0,1]$, definimos o espaço de Hölder de ordem α por

$$C^{0,\alpha}(X,E) = \{f : X \to E : ||f||_{C^{0,\alpha}} < \infty\}.$$

Definição A.0.7 (Norma de Hölder de Ordem Maior)**.** Seja Ω um aberto, ou um fechado com bordo suave de $\mathbb{R}^n$ e E um espaço de Banach. Para todo $k \in N$, denotamos por $C^k(\Omega, E)$ o espaço de funções $f : \Omega \to E$ que são k-vezes continuamente deriváveis. Para $f \in C^k(\Omega, E)$ e para todo $\alpha \in [0,1]$, definimos a norma de Hölder de ordem (k, α) por

$$||f||_{C^{k,\alpha}} := \sum_{i=0}^{k} ||D^i f||_{C^0} + [D^k f]_\alpha,$$

e definimos o espaço de Hölder de ordem (k, α) por

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : ||f||_{C^{k,\alpha}} < \infty\}.$$

Pode-se mostrar que $C^{k,\alpha}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma $|| \cdot ||_{C^{k,\alpha}}$. Além disso, obtemos o seguinte teorema

{A10}
Teorema A.0.8 (Teorema de Rellich para espaços de Hölder)**.** *Se* Ω *é compacto, então para todo* (k, α) *e para todo* (l, β) *tal que* $l + \beta . k + \alpha$*; o mergulho canônico*

$$C^{l+\beta} \hookrightarrow C^{k+\alpha},$$

é compacto.

{A5}
Teorema A.0.9 (Estimativas de Schauder)**.** *Seja* $\alpha \in [0,1]$ *e* a^{ij}*,* b^j*,* $c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$*. Suponha-se que existe* $\epsilon > 0$ *tal que a matriz* $(a^{ij} - \epsilon\delta_{ij})$ *é positiva definida. Então existe* $B > 0$ *tal que para todo* $f \in C^{k,\alpha}$

$$||f||_{C^{k+2,\alpha}} \leq B(||Lf||_{C^{k,\alpha}} + ||f||_{L_1}).$$

onde B depende de n, k, α, a norma $C^{k,\alpha}$ dos coeficientes de L e as sua constante de elipticidade.

Isto implica a regularidade elíptica

{A6}

Teorema A.0.10 (Regularidade Elíptica para Espaços de Hölder)**.** *Seja $\alpha \in [0,1]$ e a^{ij}, b^j, $c \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Suponha-se que existe $\epsilon > 0$ tal que a matriz $(a^{ij} - \epsilon\delta_{ij})$ é positiva definida. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$Lf = g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Então $f \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Para levar estas ferramentas para variedades compactas precisamos definir normas $||.||_{W^{k,p}}$ e $||.||_{C^{n,\alpha}}$ via carta de coordenadas. Notamos que para cada cobertura de M temos uma norma diferente, mas que pela compacidade terminam sendo equivalentes. Podemos levar todos quase resultados antes mencionados para M trabalhando localmente. O único resultado que é falso é a desigualdade de Poincaré, mas por outros meios mais técnicos se obtém o seguinte teorema

{A7}

Teorema A.0.11 (Desigualdade de Poincaré para Variedades)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta. Se $\varphi \in W^{1,2}(M)$ é tal que $\int_M \varphi = 0$. Então*

$$||\varphi||_2 \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} ||\nabla\varphi||_2,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor diferente de zero de Δ.

Por último, se consideramos para uma variedade Riemanniana (M,g) com conexão de Levi-Civita ∇, o operador de Laplace-Beltrami é dado localmente em carta de coordenadas por:

$$\Delta\varphi = -\nabla_i(g^{ij}\nabla_j\varphi) = -\partial_i(g^{ij}\partial_j\varphi) - g^{jk}\partial_j\varphi\Gamma^i_{ik}.$$

Definição A.0.12. Seja M uma variedade compacta sem bordo. A função de Green $G(x,y)$ do laplaciano é uma função em $M \times M$ tal que:

$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y).$$

derivando desde um ponto de vista distribucional, e onde $\delta_x(y)$ é tal que $\delta_x(x) = 1$ e é zero se $y \neq x$.

Com isto, junto com algumas proposições, em [2] obtemos o seguinte teorema.

{A8}

Teorema A.0.13 (Propriedades da função de Green)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então existe $G(x,y)$ uma função de Green do Laplaciano que verifica as seguintes propriedades:*

1. *Para todo* $\varphi \in C^2(M)$*:*

$$\varphi(p) = \frac{1}{Vol(M)} \int_M \varphi(d)\ dvol(d) + \int_M G(x,y)\Delta\varphi(y)\ dvol(y).$$

2. $G(x,y)$ *é* C^∞ *em* $M \times M$ *menos a diagonal (para* $x \neq y$*).*

3. *Existe uma constante* k *tal que:*

   - $|G(x,y)| < k(1 + |\log r|)$ *para* $n = 2$ *e.*
   - $|G(x,y)| < kr^{2-n}$ *para* $n > 2$, $|\nabla_k G(x,y))| < kr^{1-n}$, [2].
   - $|\nabla_y^2 G(x,y)| < kr^{-n}$ *com* $r = d(x,y)$.

4. *Existe uma constante* A *tal que* $G(x,y) \geq A$*. Por isso a função de Green é definida ao menos uma constante, assim podemos escolher uma função de Green sempre positiva.*

5. $\int_M G(x,y)\ dvol(x) = Const.$ *Assim, podemos escolher a função de Green tal que a integral seja igual a zero.*

6. $G(x,y) = G(y,x)$.

[2] ∇_y aplicado a $G(x,y)$ é aplicar a conexão ∇ fixando x e derivando em y

Bibliografia

[1] Thierry Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102(1):63–95, 1978.

[2] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, volume 252 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] Arnaud Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4):755–782 (1984), 1983.

[4] Zbigniew Błocki. The Calabi-Yau theorem. In *Complex Monge-Ampère equations and geodesics in the space of Kähler metrics*, volume 2038 of *Lecture Notes in Math.*, pages 201–227. Springer, Heidelberg, 2012.

[5] Leonard S. Charlap. *Bieberbach groups and flat manifolds.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 6:119–128, 1971/72.

[7] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics and stability. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):2119–2125, 2014.

[8] Andrew Clarke and Bianca Santoro. *Holonomy groups in Riemannian geometry.* Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2012.

[9] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[10] Simon K. Donaldson. Conjectures in Kähler geometry. In *Strings and geometry*, volume 3 of *Clay Math. Proc.*, pages 71–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[11] Arthur E. Fischer and Joseph A. Wolf. The structure of compact Ricci-flat Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 10:277–288, 1975.

[12] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[13] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978.

[14] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[15] Lars Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[16] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.

[17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer, Heidelberg, sixth edition, 2011.

[18] Jürgen Jost. *Partial differential equations*, volume 214 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2013.

[19] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[20] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[21] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[22] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, third edition, 2016.

[23] Gábor Székelyhidi. *An introduction to extremal Kähler metrics*, volume 152 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[24] Gang Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent. Math.*, 130(1):1–37, 1997.

[25] Loring W. Tu. *Differential geometry*, volume 275 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. Connections, curvature, and characteristic classes.

[26] Raymond O. Wells, Jr. *Differential analysis on complex manifolds*, volume 65 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada.

[27] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, sixth edition, 2011.

[28] Shing Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(3):339–411, 1978.

[29] Fangyang Zheng. *Complex differential geometry*, volume 18 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2000.