Rafael Almeida Orlando

Os teoremas de Serre para feixes algébricos coerentes

Rio de Janeiro

2022

Rafael Almeida Orlando

Os teoremas de Serre para feixes algébricos coerentes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Orientador: Prof. Dr. Luca Scala

Rio de Janeiro
2022

Rafael Almeida Orlando

Os teoremas de Serre para feixes algébricos coerentes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado:

Luca Scala
Orientador, IM-UFRJ

Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejani
IM-UFRJ

Valeriano Lanza
UFF

Rio de Janeiro
2022

RESUMO

Nesta dissertação introduziremos o conceito de feixes coerentes a partir de suas definições e resultados básicos. Também trataremos da cohomologia, de funtores derivados e cohomologia de Čech. Ao final mostraremos os teoremas de Serre e algumas aplicações, como o teorema das sizígias de Hilbert para variedades quase projetivas, que nos dá uma resolução finita de um feixe coerente.

ABSTRACT

In this dissertation we will introduce the concept of coherent sheves from its definitions and basic results. We will also deal with cohomology, derived functors and Čech cohomology. In the final chapter we will show Serre's theorems and some applications, like Hilbert's syzygy theorem for quasiprojective varieties, which gives a finite resolution of a coherent sheaf.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Num espaço topológico qualquer, feixes são estruturas que carregam informações locais em cada aberto da topologia, como por exemplo funções contínuas definidas num aberto U. No caso das variedades algébricas afins, os feixes coerentes são feixes relacionados a módulos finitamente gerados sobre o anel das funções regulares da variedade, e pela natureza local dos feixes é possível estender este conceito às variedades quase projetivas.

A cohomologia estuda sequências de variados tipos de estruturas, como feixes ou grupos abelianos. Há múltiplas maneiras de se defini-la, como a cohomologia de Čech e a cohomologia de funtores derivados que serão introduzidas nesta dissertação, mas em certos casos as definições coincidem, como no teorema de Leray (Teorema 5.10).

Esta ideia que inicialmente foi desenvolvida no contexto de variedades complexas foi generalizada por Jean-Pierre Serre em seu artigo FAC [7] para variedades algébricas com a topologia de Zariski, bem mais grossa que a usual em $\mathbb{C}^n$. Em particular demonstrou o seguinte resultado:

(Teoremas A e B de Serre) Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre uma variedade projetiva X. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$:

(A) O feixe $\mathcal{F}(n)$ é gerado por suas seções globais;

(B) $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para $q > 0$.

O feixe $\mathcal{F}(n)$ é o produto tensorial de $\mathcal{F}$ com o feixe $\mathcal{O}_X(1)$, relacionado ao fibrado de Hopf, n vezes. O teorema A nos diz que para n suficientemente grande $\mathcal{F}(n)$ pode ser inteiramente caracterizado por suas seções globais, isto é, para alguma soma direta do feixe de funções regulares existe uma sobrejeção desta em $\mathcal{F}(n)$. Já o teorema B diz que a cohomologia de $\mathcal{F}(n)$ se anula.

Entre as aplicações deste teorema estão o teorema das sizígias de Hilbert, que dá uma resolução finita de fibrados vetoriais para feixes coerentes. Isto permite definir a dimensão da variedade usando cohomologia e estender conceitos definidos sobre fibrados aos feixes coerentes, como classes e caracteres de Chern.

Outra aplicação é a caracterização de fibrados amplos, que são fibrados de linha tal que para algum número natural n o produto tensorial dele mesmo n vezes é isomorfo a $\mathcal{O}_X(1)$. É possível determinar a amplitude de um fibrado de maneira alternativa através da cohomologia.

2 VARIEDADES QUASE PROJETIVAS

Neste capítulo introduziremos algumas definições básicas de variedades que serão utilizadas ao longo do texto. Consideraremos um corpo k algebricamente fechado.

2.1 Variedades afins

Definição 2.1. O conjunto $\mathbb{A}_k^n := k^n$ é dito *espaço afim* sobre k.

Seja $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um conjunto de polinômios. Vamos denotar por $V(S)$ o conjunto

$$V(S) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

Reciprocamente, dado $X \subset \mathbb{A}^n$, vamos denotar

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in X\}.$$

Proposição 2.2. As seguintes propriedades são verdadeiras:

1. Se $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \supset V(S_2)$;
2. $V(S) = V(< S >)$, onde $< S >$ é o ideal gerado por S;
3. Seja $\{S_\alpha\}$ uma família de conjuntos de polinômios, então $\bigcap V(S_\alpha) = V\left(\bigcup S_\alpha\right)$;
4. Se I, J são ideais de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$;
5. Se $X \subset \mathbb{A}^n$, então $X \subset V(I(X))$;
6. Se $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, então $S \subset I(V(S))$;
7. $V(S) = V(I(V(S)))$.

Demonstração:

1. Dado $(a_1, \ldots, a_n) \in V(S_2)$, por definição temos $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $f \in S_2$, e em particular para todo $f \in S_1 \subset S_2$.
2. $V(< S >) \subset V(S)$ segue pela propriedade 1, basta mostrar que $V(S) \subset V(< S >)$. Se $f \in < S >$, então por definição existem $g_1, \ldots, g_m \in S$ tais que $f = \sum_{i=1}^m c_i g_i$. Logo se $(a_1, \ldots, a_n) \in V(S)$, então $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^m c_i g_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$.
3. Pela propriedade 1 temos $V\left(\bigcup S_\alpha\right) \subset V(S_\alpha)$ para todo α, logo $V\left(\bigcup S_\alpha\right) \subset \bigcap V(S_\alpha)$. Dado $(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap V(S_\alpha)$, se $f \in \bigcup S_\alpha$, então $f \in S_{\alpha_0}$ para algum α_0. Como $(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap V(S_\alpha) \subset V(S_{\alpha_0})$, temos $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

4. Temos $V(I), V(J) \subset V(IJ)$ pela propriedade 1, logo $V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$. Seja $(a_1, \ldots, a_n) \in V(IJ)$. Suponha que existe $f \in I$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ (o caso de não existir tal f implica imediatamente em $(a_1, \ldots, a_n) \in V(I)$). Mas se $g \in J$, então $fg \in IJ$, logo $f(a_1, \ldots, a_n)g(a_1, \ldots, a_n) = 0$, que implica em $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Portanto $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$.

5. Se $(a_1, \ldots, a_n) \in X$, então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall f \in I(X)$ e portanto $(a_1, \ldots, a_n) \in V(I(X))$.

6. Se $f \in S$, então $f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V(S)$ e portanto $f \in I(V(S))$.

7. Por 5 temos $V(S) \subset V(I(V(S)))$. Por 6 temos $S \subset I(V(S))$, e aplicando a propriedade 1 obtemos $V(S) \supset V(I(V(S)))$. □

A partir das propriedades da proposição acima podemos definir uma topologia em $\mathbb{A}^n$ em que os fechados são os conjuntos da forma $V(S)$ (note que $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ e $V(\{1\}) = \emptyset$). Esta topologia é chamada de *topologia de Zariski*.

Teorema 2.3. (Nullstellensatz "fraco") Se J é um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $V(J) = \emptyset$, então $J =< 1 >$.

Teorema 2.4. (Nullstellensatz) Seja J um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Então $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

A demonstração destes teoremas pode ser encontrada na seção 1.7 do livro do Fulton [3].

Definição 2.5. Um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n$ é dito *variedade afim*. Mais geralmente, um espaço topológico X é uma variedade afim se é homeomorfa a um fechado de $\mathbb{A}^n$.

Definição 2.6. Seja X um espaço topológico. Um conjunto $Y \subset X$ é dito *localmente fechado* se para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança V tal que $V \cap Y$ é fechado.

Definição 2.7. Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto localmente fechado. Uma função $f : Y \to k$ é dita *função regular* se para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança U_y em Y tal que

$$f|_{U_y} = \frac{p}{q}|_{U_y},$$

onde $p, q \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in U_y$. Se U é um aberto em Y, então denotamos por $\mathcal{O}_Y(U)$ o anel de funções regulares em U.

Proposição 2.8. Seja $X = V(S) \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Se f é função regular definida globalmente em X, então $f = p|_X$ para algum $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Demonstração: Seja J o conjunto dos polinômios $q \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que existe $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ com

$$f \cdot q|_X = p|_X.$$

Temos $0 \in J$ pois $f \cdot 0 = 0$. Se $q_1, q_2 \in J$, então $f \cdot (q_1 - q_2)|_X = f \cdot q_1|_X - f \cdot q_2|_X = (p_1 - p_2)|_X$. E se $h \in k[x_1, \ldots, x_n], q \in J$, então $f \cdot (hq)|_X = h|_X \cdot f \cdot q|_X = (hp)|_X$. Logo J é um ideal. Como $p|_X = 0$ para $p \in S$, então $S \subset J$, e portanto $V(J) \subset X$. Mas pela definição de função regular, para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in X$ existe uma vizinhança U_a e polinômios p_a, q_a tal que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{p_a(x_1, \ldots, x_n)}{q_a(x_1, \ldots, x_n)}, \quad q_a(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in U_a$$

Podemos tomar $r_a \in I(X - U_a)$ tal que $r_a(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, pois $X - U_a$ é fechado e logo $V(I(X - U_a)) = X - U_a$. Então para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ temos

$$f(x_1, \ldots, x_n) q_a(x_1, \ldots, x_n) r_a(x_1, \ldots, x_n) = p_a(x_1, \ldots, x_n) r_a(x_1, \ldots, x_n).$$

Isto é, $q_a r_a \in J$ mas $(a_1, \ldots, a_n) \notin V(\{q_a r_a\}) \supset V(J)$. Daí concluímos que $V(J) = \emptyset$, que pelo Nullstellensatz fraco implica em $J = (1)$. Como $1 \in J$, existe $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f = f \cdot 1 = p|_X$. □

A partir dessa proposição podemos concluir que $\mathcal{O}_X(X) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$.

2.2 Variedades projetivas e quase projetivas

Definição 2.9. Seja $\sim$ a classe de equivalência em $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ definida por $x \sim y$ se $x = \lambda y$ para algum $\lambda \in k$. O *espaço projetivo* é dado pelo quociente $\mathbb{P}^n := (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\})/\sim$.

O espaço projetivo pode ser visto também como o conjunto de retas em $\mathbb{A}^n$ que passam pela origem. Vamos denotar a classe de um ponto $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ em $\mathbb{P}^n$ como $[x_0 : \ldots : x_n]$. Veja que existe uma inclusão natural $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$.

Definição 2.10. Um polinômio $p(x) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ é dito *homogêneo* se para algum $n \in \mathbb{N}$ temos $p(\lambda x) = \lambda^n p(x)$ para todo $x \in \mathbb{A}^{n+1}$. Um ideal $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ é dito *ideal homogêneo* se é gerado por polinômios homogêneos.

Geralmente os polinômios não tem zeros bem definidos em $\mathbb{P}^n$, mas no caso dos homogêneos se $p(x) = 0$ então $p(\lambda x) = 0$ para qualquer $\lambda \in k$. Portanto neste caso é possível definir o conjunto $V(p)$ dentro de $\mathbb{P}^n$, idem para $V(I)$ quando I é ideal homogêneo. Porém é importante notar que apesar dos zeros estarem bem definidos os polinômios não constantes não definem uma função como no caso afim.

Proposição 2.11. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$. O ideal $I(X) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ é homogêneo.

Demonstração: Dado $p \in I(X)$, podemos escrevê-lo como soma de polinômios homogêneos $p(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x)$ em que p_i tem grau i. Se $x \in X$, então $p(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda \in k$, ou seja, $\sum_{i=0}^{m} \lambda^i p_i(x) = 0$. Logo $p_i(x) = 0$ para todo i, pois caso contrário $\sum_{i=0}^{m} \lambda^i p_i(x)$ se anularia para apenas um número finito de $\lambda \in k$. Portanto $p_i \in I(X)$ para todo i. Tomando estes polinômios homogêneos respectivos de cada $p \in I(X)$ temos um conjunto gerador. □

Esta proposição nos permite deixar bem definidos conceitos análogos aos mostrados na seção anterior. Todas as afirmações da proposição 2.2 são válidas para espaços projetivos apenas com a ressalva de que os polinômios e ideais devem ser homogêneos, e portanto é possível definir a topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$.

Definição 2.12. Um espaço topológico X homeomorfo a um conjunto localmente fechado de $\mathbb{P}^n$ é chamado de *variedade quase projetiva*. Se este conjunto for fechado X é dito *variedade projetiva*.

Definição 2.13. Sejam X e Y variedades quase projetivas. Uma função contínua $f : X \to Y$ é dita *morfismo* se para todo aberto U de Y e toda função regular $\phi : U \to k$ a função $f^*\phi := \phi \circ f : f^{-1}(U) \to k$ for uma função regular.

Definição 2.14. Seja A um anel e B um subanel de A. Um elemento $x \in A$ é dito *integral* sobre B se é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em B. O anel A é dito integral sobre B se todo elemento de A é integral sobre B.

Definição 2.15. Um morfismo de variedades afins $f : X \to Y$ é *finito* se $\mathcal{O}_X(X)$ é integral sobre $f^*\mathcal{O}_Y(Y)$. Um morfismo de variedades quase projetivas $f : X \to Y$ é finito se existe uma cobertura afim (U_i) de Y tal que $f^{-1}(U_i)$ é afim e $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ é morfismo finito para todo i.

Proposição 2.16. Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de variedades quase projetivas. Se $U \subset Y$ é um aberto afim, então $f^{-1}(U)$ é afim.

A demonstração pode ser encontrada na proposição 6.5 do capítulo 2 do livro de Le Potier [5].

3 FEIXES

Neste capítulo trataremos de feixes. Primeiro de maneira mais geral com as definições e propriedades básicas e em seguida trataremos de feixes coerentes e feixes localmente livres, que serão os principais objetos de estudo deste texto.

3.1 Pré-feixes e feixes

Definição 3.1. Dado um espaço topológico X, suponha que para cada aberto $U \in X$ temos um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ e para qualquer par de abertos U, V com $U \subset V$ temos um homomorfismo $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ satisfazendo

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$;
2. $\rho_{U,U} = id_{\mathcal{F}(U)}$ para qualquer aberto $U \subset X$;
3. Se U, V, W são abertos com $U \subset V \subset W$, então $\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}$.

Esta coleção de grupos abelianos e homomorfismos $\mathcal{F}$ é denominado *pré-feixe* de grupos abelianos. Mais geralmente, podemos considerar pré-feixes com outros tipos de estruturas no lugar de grupos, como por exemplo anéis ou módulos.

Definição 3.2. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre X. Se para todo aberto $U \subset X$ e qualquer cobertura aberta $U = \bigcup U_\alpha$ se satisfazem

1. Se $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ com $\rho_{U,U_\alpha}(s_1) = \rho_{U,U_\alpha}(s_2)$ para todo U_α, então $s_1 = s_2$;
2. Se temos $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tais que $\rho_{U_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho_{U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$ para todo U_α e U_β, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U,U_\alpha}(s) = s_\alpha$ para todo U_α (usando a propriedade 1 podemos deduzir que tal s é único).

Então $\mathcal{F}$ é dito *feixe*.

Quando $s \in \mathcal{F}(V)$ e $U \subset V$ for aberto, vamos denotar $s|_U := \rho_{V,U}(s)$.

Observação: As condições 1 e 2 de feixes são equivalentes a dizer que a seguinte sequência é exata:

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod \mathcal{F}(U_\alpha) \to \prod \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta),$$

onde os mapas são dados respectivamente por $s \mapsto (s|_{U_\alpha})_\alpha$ e $(s_\alpha)_\alpha \mapsto (s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta})_{\alpha,\beta}$.

Exemplo: (Pré-feixe que não é feixe) Seja X um espaço topológico tal que existam dois abertos U_1, U_2 distintos de X, $\emptyset$ e entre si tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (como por exemplo um espaço constituído por dois pontos distintos e topologia discreta). Vamos definir $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ e $\rho_{V,U} = id_{\mathbb{Z}}$ para abertos não vazios U e V. Temos que $\mathcal{F}$ satisfaz as propriedades de pré-feixe, mas não é um feixe. Tome inteiros $m \neq n$, temos $\rho_{U_1,\emptyset}(m) = \rho_{U_2,\emptyset}(n) = 0$ mas não existe $s \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2) = \mathbb{Z}$ tal que $s = \rho_{U_1 \cup U_2, U_1}(s) = m$ e $s = \rho_{U_1 \cup U_2, U_2}(s) = n$.

Exemplo: (Feixe) Considere o feixe $\mathcal{O}_X$ das funções regulares em uma variedade quase projetiva X, onde o homomorfismo $\rho_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ para abertos $U \subset V$ não vazios é dado por $f \mapsto f|_U$. As três propriedades de pré-feixe são imediatas, então basta mostrar as duas de feixe. Para 1 suponha $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ e $U = \bigcup U_\alpha$ cobertura de abertos com $f|_{U_\alpha} = g|_{U_\alpha}$. Para todo $x \in U$ existe algum U_α contendo x, e portanto $f(x) = f|_{U_\alpha}(x) = g|_{U_\alpha}(x) = g(x)$. Para 2, suponha que temos uma família de funções (f_α) com $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ e $f_\alpha|_{U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha}$. Podemos definir $f : U \to k$ com $f(x) = f_\alpha(x)$ para $x \in U_\alpha$. Esta função está bem definida pois $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, isto é, não depende da escolha de α, e é regular pois a condição de regularidade é local.

Definição 3.3. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe de grupos abelianos sobre X. Se $\mathcal{G}$ é pré-feixe sobre X tal que $\mathcal{G}(U)$ é subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ e $\rho^{\mathcal{G}}_{V,U} = \rho^{\mathcal{F}}_{V,U}|_{\mathcal{G}(V)}$, então $\mathcal{G}$ é dito *subpré-feixe* de $\mathcal{F}$. Quando $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes, $\mathcal{G}$ é dito *subfeixe* de $\mathcal{F}$.

Definição 3.4. Seja X um espaço topológico e W um aberto de X. Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe sobre X, então podemos definir um pré-feixe $\mathcal{F}|_W$ sobre W dado por $\mathcal{F}|_W(U) := \mathcal{F}(U)$ para todo aberto U de W, e mantendo os mesmos homomorfismos $\rho_{V,W}$ de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é feixe, então $\mathcal{F}|_W$ também é feixe.

Definição 3.5. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dois pré-feixes sobre um espaço topológico X. Um *morfismo de pré-feixes* de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{G}$ é uma coleção de homomorfismos $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para todo aberto $U \subset X$ tais que se $U \subset V$ são abertos então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{V,U}"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Isto é, $\phi_U \circ \rho^{\mathcal{F}}_{V,U} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,U} \circ \phi_V$. No caso de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ serem feixes, pode ser chamado de *morfismo de feixes*.

Definição 3.6. Seja ϕ um morfismo de pré-feixes de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{G}$. Vamos definir $\ker(\phi)$ dado por

$$\ker(\phi)(U) := \ker(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)),$$

para todo aberto U. Analogamente vamos definir $\widehat{\text{coker}}(\phi)$ e $\widehat{\text{Im}}(\phi)$ por

$$\widehat{\text{coker}}(\phi)(U) := \text{coker}(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) \text{ e } \widehat{\text{Im}}(\phi)(U) := \text{Im}(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)).$$

Sejam U, V são abertos com $U \subset V$. Dado $s \in \ker(\phi)(V)$ temos $\phi_U(s|_U) = \phi_V(s)|_U = 0$, ou seja, $s|_U \in \ker(\phi)(U)$. Como os mapas de restrição levam $\ker(\phi)(V)$ em $\ker(\phi)(U)$, então $\ker(\phi)$ é um pré-feixe (as propriedades de $\ker(\phi)$ seguem imediatamente das propriedades de $\mathcal{F}$). De maneira análoga, como os mapas de restrição levam $\text{Im}(\phi_V)$ em $\text{Im}(\phi_U)$, então $\widehat{\text{coker}}(\phi)$ e $\widehat{\text{Im}}(\phi)$ são pré-feixes.

Quando $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes, a propriedade 1 de feixes para $\ker(\phi)$ segue da propriedade 1 de $\mathcal{F}$. Para a propriedade 2, se temos $U \subset X$ aberto, $\bigcup U_\alpha = U$ uma cobertura aberta de U e $s_\alpha \in \ker(\phi)(U_\alpha)$ para todo U_α tal que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ para quaisquer U_α e U_β, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$, pois $\mathcal{F}$ é feixe. Portanto para mostrar que $\ker(\phi)$ é feixe resta mostrar que $s \in \ker(\phi)(U)$. Pela propriedade de morfismo temos que $\phi_U(s)|_{U_\alpha} = \phi_{U_\alpha}(s_\alpha) = 0 = 0|_{U_\alpha}$ para todo U_α, logo pela propriedade 1 de feixes temos $\phi_U(s) = 0$. Já no caso de $\widehat{\text{coker}}(\phi)$ e $\widehat{\text{Im}}(\phi)$, o fato de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ serem feixes não garante que serão feixes.

Definição 3.7. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre X. O limite direto de $\mathcal{F}$ em um ponto $x \in X$ é dado por

$$\varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) := \bigsqcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \Big/ \sim,$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é definida por $s_1 \sim s_2$, com $s_1 \in \mathcal{F}(U)$ e $s_2 \in \mathcal{F}(V)$, se $s_1|_W = s_2|_W$ para algum aberto $W \subset U \cap V$ que contenha x. Este limite é denominado *talo* de $\mathcal{F}$ em x e será denotado $\mathcal{F}_x$.

Exemplo: Considere um feixe de funções regulares (o raciocínio será análogo para qualquer outra classe de funções que dê um feixe). A classe $[f] \in \mathcal{F}_x$ será formada por funções g tais que exista uma vizinhança W de x com $g(y) = f(y)$ para todo $y \in W$.

Definição 3.8. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre X. Para cada aberto U definiremos o conjunto $\mathcal{F}^+(U)$ das funções $f : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ satisfazendo $f(x) \in \mathcal{F}_x$ e para cada $x \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de x e um elemento $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $f(y) = [s]^y$ para todo $y \in V$, onde $[s]^y$ é a classe de s em $\mathcal{F}_y$. Com os homomorfismos dados pela restrição de função podemos definir o feixe $\mathcal{F}^+$ denominado de *feixe associado* a $\mathcal{F}$.

A prova de que $\mathcal{F}^+$ é feixe é análoga à prova do feixe de funções regulares. Além disso, se $\mathcal{F}$ é feixe, então $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+$. Veja que podemos definir naturalmente um morfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ que leva $s \in \mathcal{F}(U)$ numa função $f \in \mathcal{F}^+(U)$ dada por $f(x) = [s]^x \in \mathcal{F}_x$ para $x \in U$. Cada $\phi_U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ é injetivo. De fato, se para $s \in \mathcal{F}(U)$ temos $[s]^x = 0$ para todo $x \in U$, então $s = 0$. Dado $f \in \mathcal{F}^+(U)$, como temos para todo $x \in U$ uma vizinhança

V_x e um elemento $s^x \in \mathcal{F}(V_x)$ tal que $f(y) = [s^x]^y$ para todo $y \in V_x$. Dados $x_1, x_2 \in X$, temos $[s^{x_1}]^y = [s^{x_2}]^y$ para $y \in V_{x_1} \cap V_{x_2}$, e portanto $s^{x_1}|_W = s^{x_2}|_W$ para alguma vizinhança W de y. Pelas propriedades de feixe, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ com $s|_{V_x} = s^x$, pois $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, e logo $\phi_U(s) = f$.

Exemplo: Considere o exemplo de pré-feixe que não é feixe dado anteriormente. Como $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ para todo aberto não vazio e os homomorfismos são a identidade, então neste caso $\mathcal{F}_x \cong \mathbb{Z}$ para todo $x \in X$. Podemos ver o feixe $\mathcal{F}^+$ como o feixe de funções de X em $\mathbb{Z}$ que são localmente constantes.

Proposição 3.9. Seja $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes com $\mathcal{G}$ sendo feixe, e seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ o morfismo canônico. Existe um único morfismo de feixes $g : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $g \circ \phi = f$.

Demonstração: Seja $h \in \mathcal{F}^+(U)$ e sejam $s^x \in \mathcal{F}(V_x)$ tal que $h(x) = [s^x]^x$. Pelas propriedades de feixe de $\mathcal{G}$ podemos usar um raciocínio análogo à prova da sobrejetividade de ϕ_U para mostrar que existe um único $r \in \mathcal{G}(U)$ tal que $r|_{V_x} = f_{V_x}(s^x)$. Vamos definir o morfismo g de forma que temos $g_U(h) := r$. Agora tome $t \in \mathcal{F}(U)$. Para $\phi_U(t)$ podemos tomar para todo $x \in U$ a vizinhança V_x como o U todo e $s^x = t$. É imediato que $g_U(\phi_U(t)) = f_U(t)$. $\square$

Definição 3.10. Seja $\mathcal{F}$ um feixe e $\mathcal{G}$ um subfeixe de $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{Q}$ o pré-feixe que é dado por $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, definiremos o quociente $\mathcal{F}/\mathcal{G} := \mathcal{Q}^+$.

Definição 3.11. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Definiremos $\mathrm{Im}(\phi)(U)$ como os elementos $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que exista uma cobertura (U_α) e elementos $s_\alpha \in \widehat{\mathrm{Im}}(\phi)(U_\alpha)$ com $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ e $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Também definiremos $\mathrm{coker}(\phi) := \mathcal{G}/\mathrm{Im}(\phi)$.

O pré-feixe $\widehat{\mathrm{Im}}(\phi)$ por ser subpré-feixe de $\mathcal{G}$ satisfaz a propriedade 1 de feixes, então $\mathrm{Im}(\phi)$ toma $\widehat{\mathrm{Im}}(\phi)$ e compõe com os elementos que faltam para ser feixe. Fica claro que $\widehat{\mathrm{Im}}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi)$ se e somente se $\widehat{\mathrm{Im}}(\phi)$ é feixe. Além disso, temos $\mathrm{Im}(\phi) \cong \widehat{\mathrm{Im}}(\phi)^+$. Seja $f : \widehat{\mathrm{Im}}(\phi) \to \widehat{\mathrm{Im}}(\phi)^+$ o morfismo canônico. O morfismo dado pela inclusão $\widehat{\mathrm{Im}}(\phi) \to \mathrm{Im}(\phi)$ pode ser estendido com $g : \widehat{\mathrm{Im}}(\phi)^+ \to \mathrm{Im}(\phi)$ com $g_U \circ f_U(x) = x$ para todo aberto U. Se $g_U(h) = 0$, então $h(x) = [0]^x$ pela maneira que g foi construída. Se $s \in \mathrm{Im}(\phi)(U)$, considere $s' \in \widehat{\mathrm{Im}}(\phi)^+(U)$ o elemento tal que $s'|_{U_\alpha} = f_{U_\alpha}(s_\alpha)$, então $g_U(s')|_{U_\alpha} = s_\alpha$, e portanto $g_U(s') = s$. Logo g é um isomorfismo.

Definição 3.12. Uma sequência de feixes

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$$

é dita exata se $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

Observação: O fato da sequência de feixes ser exata não significa necessariamente que as sequências sobre as seções

$$\mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$$

serão exatas.

Proposição 3.13. Se a sequência de feixes

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$$

é exata, então a sequência

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$$

é exata para todo aberto U.

Demonstração: O fato de $\ker(f) = 0$ implica imediatamente $\ker f_U = 0$. Pela injetividade de f_U temos $\widehat{\mathrm{Im}}(f) \cong \mathcal{F}'$, logo $\widehat{\mathrm{Im}}(f)$ é feixe e portanto $\widehat{\mathrm{Im}}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Daí temos $\mathrm{Im}(f_U) = \ker(g_U)$. □

Proposição 3.14. Uma sequência de feixes

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$$

é exata se e somente se

$$0 \to \mathcal{F}'_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{F}''_x \to 0$$

é exata para todo $x \in X$.

Demonstração: Se a sequência de feixes é exata, então

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$$

é exata para todo aberto U. Se $f_x([s']^x) = [f_U(s')]^x = [0]^x$, então existe uma vizinhança W de x tal que $f_W(s'|_W) = f_U(s')|_W = 0$, logo $s'|_W = 0$. Mas isto significa que $[s]^x = [s|_W]^x = [0]$. Fica provado que f_x é injetiva. O fato de $\mathrm{Im}\, f_x \subset \ker g_x$ decorre do fato que $g_U \circ f_U = 0$ para todo aberto U. Agora tome $[s] \in \ker g_x$ com $s \in \mathcal{F}(U)$. Temos $[g_U(s)]^x = [0]^x$, logo $g_W(s|_W) = g_U(s)|_W = 0$. Portanto existe $s' \in \mathcal{F}'(W)$ tal que $f_W(s') = s|_W$, e por definição $f_x([s']^x) = [s]^x$. Dado $s'' \in \mathcal{F}''(U)$, pela sobrejetividade de g existe uma cobertura (U_α) e $s''_\alpha \in \mathrm{Im}\, g_{U_\alpha}$ com $s''|_{U_\alpha} = s''_\alpha$. Tome um aberto $U_{\alpha 0}$ que contenha x. Existe $s \in \mathcal{F}(U_{\alpha 0})$ tal que $f_{U_{\alpha 0}}(s) = s''_{\alpha 0}$, logo $g_x([s]^x) = [s''_{\alpha 0}]^x = [s'']^x$.

Reciprocamente, se a sequência nos talos é exata para todo $x \in X$, então dado $s' \in \mathcal{F}'(U)$, temos $g_x \circ f_x([s']^x) = [g_U \circ f_U(s')]^x = [0]^x$ para todo $x \in U$. Isto é, para todo $x \in U$ existe um aberto $W_x \subset U$ tal que $g_U \circ f_U(s')|_{W_x} = 0$, e pela propriedade 1 de feixe $g_U \circ f_U(s') = 0$, mostrando que $\operatorname{Im} f \subset \ker g$. Dado $s \in \mathcal{F}(U)$ com $g_U(s) = 0$, temos $[s]^x \in \ker f_x = \operatorname{Im} g_x$ para todo $x \in U$, de maneira análoga encontramos abertos $W_x \subset U$ e elementos $s'_x \in \mathcal{F}'(W_x)$ tal que $f([s'_x]^x) = [f_{W_x}(s'_x)]^x = [s]$, logo $s \in \operatorname{Im}(f)$ pela definição. Como precisamos usar apenas que $\mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x$ é exata nesta prova da recíproca, ela vale num contexto mais geral e prova todas as igualdades necessárias. □

Definição 3.15. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $\mathcal{F}$ é um feixe sobre X, podemos definir o feixe $f_*\mathcal{F}$ sobre Y dado por $(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Para mostrar que $f_*\mathcal{F}$ é feixe, basta observar que os fatos sobre abertos U, V, W, U_α decorrem imediatamente dos fatos sobre os abertos $f^{-1}(U), f^{-1}(V), f^{-1}(W), f^{-1}(U_\alpha)$.

3.2 Feixes coerentes

Definição 3.16. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{P}$ uma família de abertos de X com as seguintes propriedades

1. Todo aberto em X é igual a uma união de abertos em $\mathcal{P}$;
2. Se $U, V \in \mathcal{P}$, então $U \cap V \in \mathcal{P}$.

Um *$\mathcal{P}$-feixe* α atribui para cada aberto $U \in \mathcal{P}$ um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo $\alpha(U)$, e para cada $U, V \in \mathcal{P}$ com $U \subset V$ um mapa de $\alpha(V)$ em $\alpha(U)$, que satisfazem as mesmas propriedades de feixes e além disso

$$(a \cdot s)|_U = a|_U \cdot s|_U$$

para todo $a \in \mathcal{O}_X(V)$ e $s \in \alpha(V)$.

Proposição 3.17. Seja α um $\mathcal{P}$-feixe sobre X. Existe um feixe $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(U) \cong \alpha(U)$ para todo $U \in \mathcal{P}$. Além disso, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ satisfazem essa propriedade, então $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Demonstração: Para cada aberto $W \subset X$ definiremos o homomorfismo

$$\Phi_W : \prod_{U \in \mathcal{P}; U \subset W} \alpha(U) \to \prod_{U,V \in \mathcal{P}; U,V \subset W} \alpha(U \cap V)$$

$$(s_U)_U \mapsto (s_U|_{U\cap V} - s_V|_{U\cap V})_{U,V}.$$

Tome $\mathcal{F}(W) = \ker \Phi_W$, e para $W' \subset W$ o mapa de restrição

$$(s_U)_U \mapsto (s_V)_V.$$

Se $s_U|_{U\cap V} - s_V|_{U\cap V} = 0$ para quaisquer $U, V \in \mathcal{P}$ com $U, V \subset W$, então em particular também é válido para quaisquer $U, V \subset W' \subset W$, ou seja, o mapa está bem definido de $\mathcal{F}(W)$ em $\mathcal{F}(W')$. As propriedades de feixe de $\mathcal{F}$ seguem da definição. Agora considere o caso $W \in \mathcal{P}$. O conjunto de abertos com $U \in \mathcal{P}$ e $U \subset W$ é uma cobertura aberta de W, logo se $(s_U)_U \in \mathcal{F}(W) = \ker \Phi_W$, então pela propriedade de $\mathcal{P}$-feixe de α existe um único $s \in \alpha(W)$ tal que $s|_U = s_U$. Esta relação nos mostra que o mapa $s \mapsto (s|_U)_U$ é isomorfismo, isto é, $\mathcal{F}(W) \cong \alpha(W)$.

Suponha que $\mathcal{G}$ seja um feixe com $\mathcal{G}(U) \cong \alpha(U)$ para todo $U \in \mathcal{P}$. Para todo aberto W podemos tomar uma cobertura aberta contendo todo os aberto em $\mathcal{P}$ que são subconjuntos de W. Logo temos a sequência exata

$$0 \to \mathcal{G}(W) \to \prod_{U \in \mathcal{P}; U \subset W} \alpha(U) \to \prod_{U,V \in \mathcal{P}; U,V \subset W} \alpha(U \cap V).$$

Veja que o homomorfismo da direita é justamente Φ_W, ou seja, $\mathcal{G}(W) \cong \mathcal{F}(W)$. □

Esta proposição mostra que um feixe pode ser completamente descrito usando apenas os abertos em $\mathcal{P}$.

Proposição 3.18. Seja X uma variedade afim, $A = \mathcal{O}_X(X)$ e M um A-módulo. Tome $\mathcal{P}$ a família de abertos da forma $U_f := X - V(f)$ para algum $f \in A$, então α dado por $\alpha(U_f) = M_f$ (com os homomorfismo canônicos de M_f a M_g quando f divide g) é um $\mathcal{P}$-feixe sobre X.

Demonstração: Primeiramente veja que todo aberto U de X é igual a $X - V(I)$ para algum ideal I de A, e para cada ideal existe um conjunto finito de geradores $f_1, \dots, f_n$, logo $U = \bigcup_{i=1}^n U_{f_i}$. Além disso, temos $U_f \cap U_g = U_{fg}$, portanto $\mathcal{P}$ satisfaz as propriedades necessárias para definir $\mathcal{P}$-feixes.

Para mostrar que α é $\mathcal{P}$-feixe é suficiente mostrar que sequências do tipo

$$0 \to \alpha(U_f) \to \prod \alpha(U_{g_i}) \to \prod \alpha(U_{g_i g_j})$$

são exatas, onde $U_f = \bigcup U_{g_i}$. Mas se $U_{g_i} \subset U_f$, então $g_i = f h_i$ para algum $h_i \in A$. Denotando $N := M_f$, a sequência pode ser reescrita como

$$0 \to N \to \prod N_{h_i} \to \prod N_{h_i h_j}.$$

Isto é, podemos supor sem perda de generalidade $f = 1$. Dado $r \in N$ tal que $(r/1)_i = (0/1)_i \in \prod N_{h_i}$. Então para todo i existe $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $h_i^{k_i} r = 0$. Mas o fato de $X = \bigcup U_{h_i}$ implica pelo Nullstellensatz que existem $h_{i_1}, \dots, h_{i_p}$ e $a_1, \dots, a_p \in A$ tal que $1 = \sum_{n=1}^p a_n h_{i_n}^{k_{i_n}}$, e portanto $r = \sum_{n=1}^p a_n h_{i_n}^{k_{i_n}} r = 0$. Isto mostra a injetividade do primeiro homomorfismo.

Dado $s \in N$ qualquer, o segundo homomorfismo leva $s/1 \in N_{h_i}$ em $s/1 - s/1 = 0/1 \in N_{h_i h_j}$, ou seja, a imagem do primeiro está contida no núcleo do segundo. Agora para a recíproca tome $(s_i/h_i^{k_i})_i$ no núcleo do segundo homomorfismo. Substituir h_i por uma potência não altera o aberto podemos reescrever simplesmente com $(s_i/h_i)_i$, então

$$\begin{aligned}(0/1)_{i,j} &= (h_j s_i/h_i h_j - h_i s_j/h_i h_j)_{i,j}\\ &= ((h_j s_i - h_i s_j)/h_i h_j)_{i,j}.\end{aligned}$$

Logo para algum $q_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ temos

$$(h_i h_j)^{q_{i,j}}(h_j s_i - h_i s_j) = 0.$$

Daí temos $h_i^{q_{i,j}} h_j^{q_{i,j}+1} s_i = h_i^{q_{i,j}+1} h_j^{q_{i,j}} s_j$ para todo i, j. Seja $q_j := \max\{q_{i_1,j}, \ldots, q_{i_p,j}\}$ e $a_1, \ldots, a_p \in A$ tal que $\sum a_n h_{i_n}^{q_j+1} = 1$. Definindo $s := \sum_{n=1}^{p} a_n h_{i_n}^{q_j} s_{i_n}$, temos $a_n h_{i_n}^{q_j+1} h_j^{q_j} s_j = a_n h_{i_n}^{q_j} h_j^{q_j+1} s_{i_n}$, logo $h_j^{q_j} s_j = \sum a_n h_{i_n}^{q_j} h_j^{q_j+1} s_{i_n} = h_j^{q_j+1} s$, e portanto $s_j/h_j = s/1 \in N_{h_j}$. $\square$

Utilizando as duas proposições anteriores, podemos construir um feixe sobre uma variedade afim X a partir de um A-módulo M, vamos denotar este feixe por $\widetilde{M}$.

Definição 3.19. Um *feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos* é um feixe de grupos abelianos tal que para todo aberto U temos uma estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo sobre $\mathcal{F}(U)$, compatível com as restrições.

Definição 3.20. Um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ sobre uma variedade quase projetiva X é dito *quase coerente* se para todo $x \in X$ existir uma vizinhança afim U e um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Se além disso M for finitamente gerado, então $\mathcal{F}$ é dito *coerente*.

Exemplo: Os feixes $\mathcal{O}_X$ e $\widetilde{M}$ para M finitamente gerado são coerentes seguindo diretamente da definição.

Proposição 3.21. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre uma variedade quase projetiva X e $f \in \mathcal{O}_X(X)$ não nula. O homomorfismo $\mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(U_f)$ dado por $m/f^n \mapsto (1/f^n)\cdot m$ é isomorfismo.

Demonstração: Podemos cobrir X com abertos afins U_i tais que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. Pelo fato de $\mathcal{F}$ ser feixe temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X)_f \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(U_i)_f \arrow[r] \arrow[d] & \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)_f \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U_f) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}((U_i)_f) \arrow[r] & \prod \mathcal{F}((U_i \cap U_j)_f) \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$, então os homomorfismos $\mathcal{F}(U_i)_f \to \mathcal{F}((U_i)_f)$ são isomorfismos, e portanto os dois homomorfismos à direita na vertical do diagrama são isomorfismos. Usando a comutatividade do diagrama e o fato das sequências serem exatas na horizontal, podemos concluir que $\mathcal{F}(X)_f \to \mathcal{F}(U_f)$ é um isomorfismo. $\square$

Corolário 3.22. Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente sobre uma variedade afim X, então $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}(X)}$.

Demonstração: Por definição temos $\widetilde{\mathcal{F}(X)}(X_f) = \mathcal{F}(X)_f$. Como $\mathcal{F}(X_f) \cong \mathcal{F}(X)_f$ para qualquer $f \in \mathcal{O}_X(X)$, pela proposição 3.17 isto implica em $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}(X)}$. $\square$

Proposição 3.23. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes quase coerentes sobre uma variedade quase projetiva X. Então

1. $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ é quase coerente.

2. Se $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes, então $\ker f$ e $\operatorname{coker} f$ são feixes quase coerentes.

O mesmo é válido substituindo quase coerentes por coerentes nas afirmações.

Demonstração:

1. Como a definição de quase coerente é local, então é suficiente provar o caso quando X é variedade afim, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e $\mathcal{G} = \widetilde{N}$. Basta ver que existe um isomorfismo natural $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} \to \widetilde{M \oplus N}$ a partir dos isomorfismos $M_f \oplus N_f \to (M \oplus N)_f$, portanto $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$ é quase coerente. Se M e N são finitamente gerados, então $M \oplus N$ é finitamente gerado, isto é, $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$ é coerente.

2. Novamente consideramos o caso local. Um homomorfismo $\phi : M \to N$ induz um morfismo $\widetilde{\phi} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ de forma que $\phi_{U_f} : M_f \to N_f$ é a extensão de ϕ. Reciprocamente, um morfismo $\phi : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ nos dá um homomorfismo $\phi_X : M \to N$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi_X} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow{\phi_{U_f}} & N_f \end{array}$$

Pela comutatividade do diagrama acima, dado $m/f^n \in M_f$, temos $\phi_{U_f}(m/f^n) = \phi_X(m)/f^n$, isto é, ϕ_{U_f} é a extensão natural de ϕ_X sobre M_f. Portanto $\phi = \widetilde{\phi_X}$. Sabendo deste fato, fica claro que $\ker\phi = \widetilde{\ker\phi_X}$ e $\operatorname{coker}\phi = \widetilde{\operatorname{coker}\phi_X}$. Caso M e N sejam finitamente gerados, é imediato que $\operatorname{coker}\phi$ é finitamente gerado. Em geral um submódulo de um A-módulo finitamente gerado qualquer não necessariamente é finitamente gerado, mas como neste caso $A = \mathcal{O}_X(X)$ é Noetheriano, então $\ker\phi_X$ é finitamente gerado. $\square$

Esta proposição nos mostra que os feixes coerentes sobre uma variedade quase projetiva X formam uma categoria abeliana. Além disso, observe que o funtor dado por $M \mapsto \widetilde{M}$ é exato pois $\ker\phi = \widetilde{\ker\phi_X}$ e $\operatorname{coker}\phi = \widetilde{\operatorname{coker}\phi_X}$.

Proposição 3.24. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X e $f : X \to Y$ um morfismo finito. Então $f_*(\mathcal{F})$ é coerente sobre Y.

Demonstração: Primeiramente veja que dado U aberto de Y, $s \in f_*(\mathcal{F})(U)$ e $\phi : U \to k$ uma função regular, podemos definir uma operação $\phi \cdot s := (f^*\phi) \cdot s$, que dá uma estrutura de $\mathcal{O}_Y(U)$-módulo sobre $f_*(\mathcal{F})(U)$. Isto é, $f_*(\mathcal{F})$ é um $\mathcal{O}_Y$-módulo. Como a coerência é uma propriedade local vamos supor que Y é afim. Como f é finito, então X é afim e $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}(X)}$. Se $U_g = Y - V(g)$ com $g \in \mathcal{O}_Y(Y)$, então $f^{-1}(U_g) = X - V(f^*g)$, logo $f_*(\mathcal{F})(U_g) = \mathcal{F}(X - V(f^*g)) = \mathcal{F}(X)_{f^*g} = f_*(\mathcal{F})(Y)_g$. Ou seja, $f_*(\mathcal{F}) = \widetilde{f_*(\mathcal{F})(Y)}$. Por $\mathcal{F}$ ser coerente $\mathcal{F}(X) = f_*(\mathcal{F})(Y)$ é finitamente gerado como $\mathcal{O}_X(X)$-módulo, e $\mathcal{O}_X(X)$ é finitamente gerado como $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo pois f é finito. Portanto $f_*(\mathcal{F})(Y)$ é finitamente gerado como $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo. □

3.3 Feixe associado a um fibrado vetorial

Definição 3.25. Uma *família de espaços vetoriais* sobre X é um morfismo sobrejetivo de variedades $p : E \to X$ tal que cada $E_x := p^{-1}(x)$ é um espaço vetorial sobre k.

Exemplo: Considere $E = X \times k^n$ com p a projeção sobre x, isto nos dá uma família de espaços vetoriais.

Definição 3.26. Sejam $p : E \to X$ e $q : F \to X$ famílias de espaços vetoriais. Um morfismo de famílias de espaços vetoriais $f : E \to F$ é um morfismo de variedades tal que $q \circ f = p$ e $f|_{E_x} : E_x \to F_x$ é uma transformação linear.

Definição 3.27. Uma família de espaços vetoriais E sobre X é dita *trivial* se é isomorfa a uma família da forma $E \times k^n$.

Definição 3.28. Se $p : E \to X$ é uma família de espaços vetoriais e U um aberto de X, a restrição de E em U é dada por $p : p^{-1}(U) \to U$ e será denotada $E|_U$.

Definição 3.29. Uma família de espaços vetoriais é um *fibrado vetorial* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança V tal que $E|_V$ é trivial.

Exemplo: Considere a família de espaços vetoriais H sobre $\mathbb{P}^n$ dada por

$$H = \{(u, v) \in \mathbb{P}^n \times k^{n+1} : v \in u\}.$$

Podemos cobrir $\mathbb{P}^n$ com abertos $U_0, \ldots, U_n$ onde $U_i = \mathbb{P}^n - V(x_i)$. Podemos ver cada elemento de U_i como $[v]$ com $v = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, e cada elemento de $H|_{U_i}$ como $([v], \lambda v)$ para algum $\lambda \in k$. Temos naturalmente um isomorfismo $H|_{U_i} \to U_i \times k$ dado por $([v], \lambda v) \mapsto ([v], \lambda)$, logo H é fibrado vetorial. Este fibrado é denominado de *fibrado de Hopf*.

Definição 3.30. Uma *seção* de um fibrado vetorial E é um morfismo $s : X \to E$ tal que $p \circ s = id_X$, isto é, leva um ponto $x \in X$ em sua fibra E_x.

Definição 3.31. Seja E um fibrado vetorial sobre X. Vamos denotar por $\mathcal{L}(E)$ o conjunto das seções de E sobre X. O feixe associado $\mathcal{L}_E$ é dado por $\mathcal{L}_E(U) := \mathcal{L}(E|_U)$.

Definição 3.32. Um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ é dito *localmente livre* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U e um inteiro não negativo r tal que

$$\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U^r.$$

Proposição 3.33. Se X é uma variedade quase projetiva e E um fibrado vetorial sobre X, então $\mathcal{L}_E$ é feixe localmente livre.

Demonstração: Se U é um aberto de X, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ e $s \in \mathcal{L}_E(U)$, então podemos definir $(f \cdot s)(x) := f(x) \cdot s(x)$, o que dá uma estrutura de $\mathcal{O}_X$-módulo em $\mathcal{L}_E$. Para $x \in X$, temos uma vizinhança V tal que $E|_V$ é trivial, isto é, $E|_V \cong V \times k^n$. A projeção $\pi : V \times k^n \to k^n$ nos dá um isomorfismo entre seções e morfismos $U \to k^n$ com a composição com a projeção e a trivialização, portanto $\mathcal{L}_E|_V \cong \mathcal{O}_V^n$. $\square$

Proposição 3.34. Um feixe coerente $\mathcal{F}$ é localmente livre se e somente se $\mathcal{F}_x$ é livre e finitamente gerado para todo x.

Demonstração: Se $\mathcal{F}$ é localmente livre, então para todo x existe uma vizinhança U e um inteiro não negativo r tal que $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_U^r$. Deste isomorfismo segue que $\mathcal{F}_x \cong (\mathcal{F}|_U)_x \cong \mathcal{O}_{U,x}^r \cong \mathcal{O}_{X,x}^r$, isto é, $\mathcal{F}_x$ é módulo livre.

Para a recíproca podemos supor que X é afim e $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ pois localmente livre é uma questão local. Dada uma base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de $\widetilde{M}_x$, cada v_i é da forma $[m_i/f_i^{q_i}]$ para $m_i \in M$ e $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$ com $f(x) \neq 0$. Multiplicando v_i por $[f_i^{q_i}] \in \mathcal{O}_{X,x}$ obtemos uma base $\{[m_1/1], \ldots, [m_r/1]\}$. Seja $\phi : \mathcal{O}_X(X)^r \to M$ o homomorfismo de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos dado por $\phi(e_i) = m_i$. Como $\mathcal{O}_X(X)^r$ e M são finitamente gerados então $\ker \phi$ também é. Tome $\{v_1, \ldots, v_s\}$ um conjunto de geradores de $\ker \phi$ e $\mathfrak{m} := I(\{x\})$. Temos que $(\ker \phi)_{\mathfrak{m}} = 0$, logo $v_i/1 = 0 \in (\ker \phi)_{\mathfrak{m}}$ para $i = 1, \ldots, s$, ou seja, existe $f_i \in \mathcal{O}_X(X) - \mathfrak{m}$ tal que $f_i v_i = 0$. Seja $f = \prod_{i=1}^s f_i$. Veja que $f v_i = 0$ para todo v_i, e portanto $(\ker \phi)_f = 0$. De maneira análoga podemos tomar $g \in \mathcal{O}_X(X) - \mathfrak{m}$ tal que $(\operatorname{coker} \phi)_g = 0$. Então o homomorfismo $\phi_{fg} : \mathcal{O}_X(X)_{fg}^r \to M_{fg}$ é isomorfismo, que induz um isomorfismo $\widetilde{\phi_{fg}} : \mathcal{O}_X^r|_{X-V(fg)} \to \widetilde{M}|_{X-V(fg)}$. $\square$

Proposição 3.35. Se $\mathcal{F}$ é um feixe localmente livre, então existe um fibrado vetorial E tal que $\mathcal{L}_E \cong \mathcal{F}$.

Demonstração: Seja $\mathfrak{m}_x$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Vamos definir E com

$$E := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x,$$

e $p : E \to X$ tal que $p(\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x) = \{x\}$.

Podemos tomar uma cobertura (U_i) de X tal que $\mathcal{O}^r_{U_i} \cong \mathcal{F}|_{U_i}$, e denotaremos este isomorfismo como ϕ_i. Para $x \in U_i$ este isomorfismo induz um isomorfismo nos talos, que composto com o isomorfismo $\mathcal{O}^r_{U_i}/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}^r_{U_i} \cong k^r$ nos dá um isomorfismo $\phi_{i,x} : k^r \to \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$. Definiremos então o isomorfismo $\psi_i : U_i \times k^r \to E|_{U_i}$ com $\psi_i(x, v) := \phi_{i,x}(v)$, que mostra que E é fibrado vetorial. □

Definição 3.36. Vamos denotar o feixe associado a H como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva, então denotaremos $\mathcal{O}_X(-1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)|_X$. E para m um inteiro positivo,

$$\mathcal{O}_X(-m) := \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{O}_X(-1).$$

Definição 3.37. Seja E um fibrado vetorial sobre X. O *fibrado dual* é dado por

$$E^* := \bigsqcup_{x \in X} E^*_x,$$

onde E^*_x é o espaço dual de E_x, e a função $p : E^* \to X$ leva os elementos de E^*_x em x.

Definição 3.38. Denotaremos o feixe associado a H^* como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Analogamente temos $\mathcal{O}_X(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$ e

$$\mathcal{O}_X(m) := \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{O}_X(1).$$

Proposição 3.39. Seja X uma variedade projetiva e E um fibrado de linhas sobre X. Então $\mathcal{L}_E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_{E^*} \cong \mathcal{O}_X$.

Demonstração: Podemos cobrir X com abertos U_i tal que $E|_{U_i} \cong U_i \times k$. Vamos definir o morfismo $s \otimes r^* \mapsto s \times r^*$ por $(s \times r^*)(x) := r^*(x)s(x)$ para $s \in \mathcal{L}_E(U)$ e $r^* \in \mathcal{L}_{E^*}(U)$. Se U é irredutível este morfismo é injetivo. De fato se $r^*(x)s(x) = 0$ então $r^*(x) = 0_x$ ou $s(x) = 0_x$ pois cada espaço E_x tem dimensão 1, por continuidade o conjunto dos pontos em que r^* se anula é fechado, portanto existe um aberto tal que s se anula. Caso este aberto seja vazio, temos $r^* = 0$. Caso contrário o fecho deste aberto é U por sua irredutibilidade, logo $s = 0$. Em ambos os casos $r^* \otimes s = 0$. Se $U \subset U_i$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, podemos definir uma seção $s \in \mathcal{L}_E(U)$ compondo $x \mapsto (x, f(x))$ com a trivialização. Se r^* é definida pelo dual de $x \mapsto (x, 1)$ composta com a trivialização, então $s \times r^*(x) = f(x)$, portanto o morfismo é sobrejetivo nestes casos. Pela proposição 3.17 é suficiente mostrar o isomorfismos sobre abertos irredutíveis que estão contidos em algum U_i. □

Esta proposição nos mostra que $\mathcal{O}_X(p) \otimes \mathcal{O}_X(q) \cong \mathcal{O}_X(p+q)$ para quaisquer p e q inteiros.

Definição 3.40. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definiremos

$$\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n).$$

Proposição 3.41. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X, $f \in \mathcal{O}_X(1)(X)$ com $f \neq 0$ e W o aberto dado por $f(x) \neq 0$.

1. Se para $s \in \mathcal{F}(X)$ temos $s|_W = 0$, então existe um inteiro n tal que $f^{\otimes n} \otimes s = 0 \in \mathcal{F}(n)(X)$.

2. Para todo $v \in \mathcal{F}(W)$ existe um inteiro n e $u \in \mathcal{F}(n)(X)$ tal que $u|_W = f^{\otimes n} \otimes v$.

Demonstração:

1. Vamos cobrir X com finitos abertos U_i tal que $H|_{U_i}$ seja trivial. Como $H|_{U_i \cap W}$ é trivial, então uma projeção composta com $f|_{U_i}$ define uma função regular como mostrado anteriormente. Denotaremos tal função como f_i. Pela proposição 3.21 temos que $\mathcal{F}(U_i \cap W) \cong \mathcal{F}(U_i)_{f_i}$. Como $(s|_{U_i})|_{U_i \cap W}/1 = s|_{U_i \cap W} = 0$, então $s|_{U_i}/1 = 0$, isto é, existe um inteiro n_i tal que $f_i^{n_i} s|_{U_i} = 0$. Tome $n := \max\{n_i\}$, temos $f_i^n s|_{U_i} = 0$ para todo i. Veja que $f_i^{\otimes n} \otimes s|_{U_i} = 1^{\otimes n} \otimes f_i^n s|_{U_i} = 0$. Pelo isomorfismo $\mathcal{F}(n)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$, isto implica em $(f|_{U_i})^{\otimes n} \otimes s|_{U_i} = 0$. Pelas propriedades de feixes temos $f^{\otimes n} \otimes s = 0$.

2. Tomando U_i e f_i como anteriormente. Novamente temos $\mathcal{F}(U_i \cap W) \cong \mathcal{F}(U_i)_{f_i}$, logo $v|_{U_i \cap W} = u_i|_{U_i \cap W}/f_i^{n_i}|_{U_i \cap W}$ para algum $u_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e n_i inteiro, e portanto $f_i^{n_i + l_i} v|_{U_i \cap W} = u_i|_{U_i \cap W}$ para algum $l_i \in \mathbb{Z}$. Tome $n := \max\{n_i + l_i\}$ e $w_i = f_i^{n - n_i - l_i} u_i$, então $f_i^n v|_{U_i \cap W} = w_i|_{U_i \cap W}$ para todo i. Seja $w_{i,j} = w_i|_{U_{i,j}} - w_j|_{U_{i,j}}$. Como $w_{i,j}|_{U_{i,j} \cap W} = 0$, por 1 existe $m_{i,j}$ tal que $(f|_{U_{i,j}})^{\otimes m_{i,j}} \otimes w_{i,j} = 0$, tomando $m := \max\{m_{i,j}\}$, então $(f|_{U_{i,j}})^{\otimes m} \otimes w_{i,j} = 0$ para todo i, j. Considere os elementos $1^{\otimes n} \otimes f_i^{\otimes m} \otimes w_i \in (\mathcal{O}_{U_i}^{\otimes m+n} \otimes \mathcal{F})(U_i)$ e sejam $v_i \in \mathcal{F}(m+n)(U_i)$ os seus correspondentes por isomorfismo. Pela propriedade de feixes existe u tal que $u|_{U_i} = v_i$. Temos $(u|_W)|_{U_i \cap W}$ corresponde por isomorfismo a

$$1^{\otimes n} \otimes (f_i|_{U_i \cap W})^{\otimes m} \otimes w_i|_{U_i \cap W} = 1^{\otimes n} \otimes (f_i|_{U_i \cap W})^{\otimes m} \otimes f_i^n v|_{U_i \cap W} = (f_i|_{U_i \cap W})^{\otimes m+n} \otimes v|_{U_i \cap W},$$

para todo i, logo $u|_W = f^{\otimes n} \otimes v$. $\square$

Observe que $\mathcal{O}_X(1)(X)$ sempre possui elementos não nulos (caso contrário esta última proposição não teria utilidade). Por exemplo, uma transformação linear não nula $T : \mathbb{A}^{n+1} \to k$ induz uma transformação $T_x \in H_x^*$ com $(x, v) \mapsto Tv$ para cada $x \in \mathbb{P}^n$.

Logo podemos definir uma seção $f \in \mathcal{O}_X(1)(X)$ com $f(x) := T_x$. Mais fortemente, todo hiperplano em $\mathbb{P}^n$ pode ser representado por uma equação do tipo

$$a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

e a expressão do lado esquerdo da equação define um funcional linear em $\mathbb{A}^{n+1}$, isto é, todo hiperplano pode ser visto como os zeros de uma seção em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)(\mathbb{P}^n)$.

4 COHOMOLOGIA

Neste capítulo definiremos a cohomologia em categorias abelianas e aplicaremos este conceito sobre feixes coerentes.

4.1 Funtores derivados à direita

Nesta seção trataremos de resultados sobre categorias abelianas, que são categorias tal que $\mathrm{Hom}(A, B)$ tem estrutura de grupo abeliano para quaisquer objetos A, B, possuem núcleo e conúcleo e podem ser vistas como categorias de grupos abelianos.

Definição 4.1. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um *complexo de cocadeias* $A^\bullet$ é uma sequência de objetos $(A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em $\mathcal{A}$ com morfismos

$$\ldots \to A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \to \ldots$$

tal que $d^i \circ d^{i-1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Quando $A^i = 0$ para $i < 0$ diz-se que $A^\bullet$ é um *complexo positivo.*

Definição 4.2. Um *morfismo de complexos* $f : A^\bullet \to B^\bullet$ é uma coleção de morfismos $f^i : A^i \to B^i$ tal que o seguinte diagrama é comutativo para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
B^i \arrow[r, "d^i"] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Definição 4.3. Sejam $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ morfismos de complexos. Dizemos que f e g são *homotópicos* se existe uma família de morfismos $h^i : A^i \to B^{i-1}$ tal que $f^i - g^i = d^{i-1}h^i + h^{i+1}d^i$.

$$\begin{tikzcd}
 & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "f^i - g^i"] & A^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\
B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & B^i &
\end{tikzcd}$$

Definição 4.4. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias. Um *funtor covariante* associa cada objeto $A \in \mathcal{A}$ num objeto $F(A) \in \mathcal{B}$, cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ num morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ e satisfaz

1. $F(id_A) = id_{F(A)}$;

2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Definição 4.5. Seja $A^\bullet$ um complexo de cocadeias. O *funtor cohomológico* $\mathcal{H}^i$ é dado por

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) := \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1}).$$

Se $f : A^\bullet \to B^\bullet$ é um morfismo de complexos, então cada morfismo f^i leva $\operatorname{Im} d_A^{i-1}$ dentro de $\operatorname{Im} d_B^{i-1}$ e $\ker d_A^i$ dentro de $\ker d_B^i$, pois $f^i d^{i-1} = d^{i-1} f^{i-1}$. Então f^i induz um morfismo de $\mathcal{H}^i(f) : \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet)$ dado por

$$x \mod \operatorname{Im} d_A^{i-1} \mapsto f^i(x) \mod \operatorname{Im} d_B^{i-1}.$$

Se $g : A^\bullet \to B^\bullet$ é homotópica à f, então os morfismos induzidos são iguais.

Lema 4.6. (Lema da cobra) Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

Se as sequências nas linhas horizontais são exatas, então existe um morfismo $\delta : \ker c \to \operatorname{coker} a$ tal que a seguinte sequência é exata:

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} a \to \operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c$$

Demonstração: Dado $x \in \ker c$, pela sobrejetividade de g existe $y \in B$ tal que $g(y) = x$. Temos $g'(b(y)) = c(g(y)) = c(x) = 0$, logo $b(y) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$. Pela injetividade de f' existe um único $z \in A'$ tal que $f'(z) = b(y)$. Vamos definir

$$\delta(x) = z \mod \operatorname{Im} a.$$

Para ver que δ está bem definida, tome $y_1, y_2 \in B$ tal que $g(y_1) = g(y_2) = x$ e $z_1, z_2 \in A'$ os elementos obtidos a partir y_1, y_2, respectivamente. Veja que $y_1 - y_2 \in \ker g = \operatorname{Im} f$, então existe $w \in A$ tal que $f(w) = y_1 - y_2$. Pela comutatividade do diagrama temos $f'(a(w)) = b(f(w)) = b(y_1 - y_2) = f'(z_1 - z_2)$, e logo $a(w) = z_1 - z_2$ pela injetividade de f'. Isto é, $z_1 - z_2 \in \operatorname{Im} a$, e portanto $z_1 \equiv z_2 \mod \operatorname{Im} a$. Resta mostrar que a sequência é exata. Para a primeira igualdade, veja que

$$\ker(g|_{\ker b}) = \ker g \cap \ker b = \operatorname{Im} f \cap \ker b = f(\ker(b \circ f)) = f(\ker(f' \circ a)) = f(\ker a).$$

Se $x \in g(\ker b)$, então existe $y \in \ker b$ com $g(y) = x$, pela construção de δ a partir de y concluímos que $\delta(x) = 0$. Se $\delta(x) = 0$, tome y e z como na construção. Então

$z \in \operatorname{Im} a$, ou seja, existe $w \in A$ tal que $a(w) = z$. Pela comutatividade do diagrama temos $b(f(w)) = f'(z) = b(y)$, logo $y - f(w) \in \ker b$. Como $g(y - f(w)) = g(y) - g(f(w)) = x$, então $x \in g(\ker b)$.

Sejam $\widetilde{f'} : \operatorname{coker} a \to \operatorname{coker} b$ e $\widetilde{g'} : \operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c$ os morfismos induzidos por f' e g', respectivamente. Pela construção um elemento $\delta(x)$ é da forma $[z]$, onde $[z]$ é a classe de $z \in A'$ e $f'(z) = b(y)$ para algum $y \in g^{-1}(x)$, logo $\widetilde{f'}(\delta(x)) = 0$ para todo $x \in \ker c$. Por outro lado, se $[z] \in \ker \widetilde{f'}$, então $f'(z) \in \operatorname{Im} b$. Isto é, existe $y \in b$ tal que $f'(z) = b(y)$. Tomando $x = g(y)$ temos $\delta(x) = [z]$ por definição.

Como $g' \circ f' = 0$, segue que $\widetilde{g'} \circ \widetilde{f'} = 0$, e portanto $\operatorname{Im} \widetilde{f'} \subset \ker \widetilde{g'}$. Se $x \in B'$ com $\widetilde{g'}([x]) = 0$, então $g'(x) \in \operatorname{Im} c$. Pela sobrejetividade da g existe $y \in B$ tal que $c \circ g(y) = g' \circ b(y) = g'(x)$, logo $x - b(y) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$, e portanto existe $z \in A'$ tal que $f'(z) = x - b(y)$. Por definição temos $\widetilde{f'}([z]) = [x - b(y)] = [x]$. $\square$

Definição 4.7. Uma sequência de complexos

$$A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet$$

é dita exata se para todo $i \in \mathbb{Z}$ a sequência

$$A^i \to B^i \to C^i$$

é exata.

Proposição 4.8. Considere uma sequência exata de complexos

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0.$$

Temos uma sequência exata:

$$\ldots \to \mathcal{H}^{i-1}(C^\bullet) \to \mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet) \to \mathcal{H}^i(C^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Esta sequência é chamada *sequência exata longa de cohomologia.*

Demonstração: Aplicando o lema da cobra sobre o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^i \arrow[r] \arrow[d, "d_A^i"] & B^i \arrow[r] \arrow[d, "d_B^i"] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "d_C^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{i+1} \arrow[r] & B^{i+1} \arrow[r] & C^{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Podemos concluir que as seguintes sequências são exatas para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$0 \to \ker d_A^i \to \ker d_B^i \to \ker d_C^i$$

$$\operatorname{coker} d_A^i \to \operatorname{coker} d_B^i \to \operatorname{coker} d_C^i \to 0.$$

Agora considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \operatorname{coker} d_A^{i-1} & \longrightarrow & \operatorname{coker} d_B^{i-1} & \longrightarrow & \operatorname{coker} d_C^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d_A^{i+1} & \longrightarrow & \ker d_B^{i+1} & \longrightarrow & \ker d_C^{i+1} & & \end{array}$$

Onde os morfismos dos coker em ker são os induzidos por d^i. Pelo lema da cobra temos a sequência exata

$$\mathcal{H}^i(A^\bullet) \to \mathcal{H}^i(B^\bullet) \to \mathcal{H}^i(C^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(A^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(B^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(C^\bullet). \quad \square$$

Definição 4.9. Um objeto I é dito injetivo se para toda sequência exata

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B$$

e todo morfismo $f : A \to I$ existe um morfismo $g : B \to I$ tal que $f = g \circ \phi$.

Definição 4.10. Diz-se que uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos injetivos se para todo $A \in \mathcal{A}$ existe um objeto injetivo I e um morfismo injetivo $f : A \to I$.

Definição 4.11. Um complexo positivo $I^\bullet$ é dito *resolução* de A se temos uma sequência exata

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

Se I^i é injetivo para todo $i \in \mathbb{Z}$ $I^\bullet$ é uma *resolução injetiva.*

Proposição 4.12. Se uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos injetivos, então para todo objeto $A \in \mathcal{A}$ existe uma resolução injetiva $I^\bullet$.

Demonstração: Para A existe um objeto injetivo I^0 e um morfismo injetivo $f : A \to I^0$. Como $\operatorname{coker} f$ também é objeto de $\mathcal{A}$, então existe um objeto injetivo I^1 e um morfismo injetivo $g_0 : \operatorname{coker} f \to I^1$. Compondo com a projeção $I^0 \to \operatorname{coker} f$ obtemos um morfismo $d^0 : I^0 \to I^1$ tal que $\operatorname{Im} f = \ker d^0$. Repetindo sucessivamente este processo podemos construir uma resolução injetiva $I^\bullet$.

Proposição 4.13. Seja $f : K^\bullet \to I^\bullet$ um morfismo de complexos positivos com I^i injetivo para todo $i \in \mathbb{Z}$, e $K^\bullet$ exato. Então f é homotópica à 0.

Demonstração: Tome $h^i = 0$ para $i \leq 0$. Vamos construir os outros morfismos indutivamente. Suponha que temos os morfismos h^i para $i \leq n$ satisfazendo $f^{i-1} = d_I^{i-2}h^{i-1} + h^i d_K^{i-1}$, vamos definir o morfismo $g^n := f^n - d_I^{n-1}h^n$. Veja que $\operatorname{Im} d_K^n \cong K^n / \ker(d_K^n) = K^n / \operatorname{Im}(d_K^{n-1})$, e também

$$\begin{aligned} g^n d_K^{n-1} &= f^n d_K^{n-1} - d_I^{n-1} h^n d_K^{n-1} \\ &= d_I^{n-1} f^{n-1} - d_I^{n-1}(f^{n-1} - d_I^{n-2} h^{n-1}) \\ &= d_I^{n-1} f^{n-1} - d_I^{n-1} f^{n-1} + d_I^{n-1} d_I^{n-2} h^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Isto é, $\operatorname{Im} d_K^{n-1} \subset \ker g^n$. Isto nos dá um morfismo canônico de $\operatorname{Im} d_K^n$ em $I^n \supset \operatorname{Im} g^n \cong K^n/\ker g^n$. Mais explicitamente, este morfismo leva $y = d_K^n(x) \in \operatorname{Im} d_K^n$ em $g^n(x)$. Como $0 \to K^n/\ker(d_K^n) \to K^{n+1}$ é exata e I^n é injetivo, existe uma extensão $h^{n+1} : K^{n+1} \to I^n$ tal que $h^{n+1}d_K^n = g^n$. Logo $f^n = h^{n+1}d_K^n + d_I^{n-1}h^n$.

$$\begin{tikzcd}
K^{n-1} \arrow[r, "d_K^{n-1}"] & K^n \arrow[r, "d_K^n"] \arrow[dl, "h^n"'] \arrow[d, "g^n"] & K^{n+1} \arrow[dl, "h^{n+1}"] \\
I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposição 4.14. Seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva de A. Para toda resolução $K^\bullet$ de A existe um morfismo de complexos $f : K^\bullet \to I^\bullet$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & K^\bullet \arrow[d, "f"] \\
& I^\bullet
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Para o caso base, temos $0 \to A \to K^0$ exata e um morfismo $A \to I^0$ com I^0 injetivo, pela definição de objeto injetivo existe $f^0 : K^0 \to I^0$ com o diagrama acima comutando. Agora suponha que temos os morfismos f^i com $f^i d_K^{i-1} = d_I^{i-1} f^{i-1}$ para $i \leq n$. Veja que $\operatorname{Im} d_K^{n-1} \subset \ker d_I^n f^n$, pois $d_I^n f^n d_K^{n-1} = d_I^n d_I^{n-1} f^{n-1} = 0$, então de maneira análoga à proposição anterior temos um morfismo de $\operatorname{Im} d_K^n \cong K^n/\ker(d_K^n) = K^n/\operatorname{Im}(d_K^{n-1})$ em $I^{n+1} \supset \operatorname{Im} d_I^n f^n \cong K^n/\ker d_I^n f^n$. Como $0 \to \operatorname{Im} d_K^n \to K^{n+1}$ é exata e I^{n+1} é objeto injetivo, podemos estender este morfismo à K^{n+1} com $f^{n+1} : K^{n+1} \to I^{n+1}$ tal que $f^{n+1} d_K^n = d_I^n f^n$. $\square$

Definição 4.15. Seja F um funtor covariante aditivo e seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva de A. Vamos definir os *funtores derivados à direita*

$$(R^q F)(A) := \mathcal{H}^q(F(I^\bullet)).$$

Proposição 4.16. A definição de funtor derivado à direita não depende da escolha da resolução injetiva.

Demonstração: Suponha que $I^\bullet$ e $J^\bullet$ são resoluções injetivas de A. Pela proposição 4.14 existem morfismos $f : I^\bullet \to J^\bullet$ e $g : J^\bullet \to I^\bullet$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & J^0 \arrow[r] \arrow[d, "g^0"] & J^1 \arrow[r] \arrow[d, "g^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Seja $A^\bullet$ o complexo definido por $A^i = I^i$ para $i \geq 0$, $A^{-1} = A$ e $A^i = 0$ para $i < -1$. Vamos definir o morfismo $h : A^\bullet \to I^\bullet$ dado por $h^i = g^i \circ f^i - id_{I^i}$ para $i \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "h^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "h^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pela definição de resolução injetiva $A^\bullet$ é exato e $I^\bullet$ é composto por objetos injetivos, segue da proposição 4.13 que h é homotópica à 0, e portanto $F(h)$ é homotópica à 0. Podemos então concluir que $\mathcal{H}^i(F(g) \circ F(f)) = \mathcal{H}^i(F(g)) \circ \mathcal{H}^i(F(f)) = id_{\mathcal{H}^i(F(I^\bullet))}$. Analogamente temos $\mathcal{H}^i(F(f) \circ F(g)) = \mathcal{H}^i(F(f)) \circ \mathcal{H}^i(F(g)) = id_{\mathcal{H}^i(F(J^\bullet))}$, logo $\mathcal{H}^i(F(f))$ e $\mathcal{H}^i(F(g))$ são isomorfismos que nos dão $\mathcal{H}^i(F(I^\bullet)) \cong \mathcal{H}^i(F(J^\bullet))$. □

Proposição 4.17. Considere a sequência exata

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Temos uma sequência exata longa

$$\ldots \to R^{i-1}F(C) \to R^iF(A) \to R^iF(B) \to R^iF(C) \to R^{i+1}F(A) \to \ldots$$

Demonstração: Tome resoluções injetivas $I_A^\bullet$ de A e $I_C^\bullet$ de C. Vamos definir para todo $i \in Z$ o objeto $I_B^i := I_A^i \oplus I_C^i$, iremos mostrar que $I_B^\bullet$ é resolução injetiva de B.

Seja $0 \to G \to H$ uma sequência exata e $\phi : G \to I_B^i$ um morfismo. Considere os morfismos canônicos $\pi_A : I_B^i \to I_A^i$ e $\pi_C : I_B^i \to I_C^i$. Pela injetividade existem morfismos $\Phi_A : H \to I_A^i$ e $\Phi_C : H \to I_C^i$ tal que $\Phi_A|_G = \pi_A \circ \phi$ e $\Phi_C|_G = \pi_C \circ \phi$. Podemos então definir o morfismo $\Phi : H \to I_B^i$ com $\Phi(x) = \Phi_A(x) + \Phi_C(x)$. Logo $\Phi|_G = \phi$, isto mostra que I_B^i é objeto injetivo. Seja $\alpha : B \to I_A^0$ a extensão do morfismo $A \to I_A^0$ pela injeção f e $\beta : B \to I_C^0$ a composição do morfismo $C \to I_C^0$ com g. Veja que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "{(\alpha,\beta)}"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_A^0 \arrow[r] & I_B^0 \arrow[r] & I_C^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

O lema da cobra nos dá $\ker(\alpha, \beta) = 0$ e que a sequência

$$0 \to \operatorname{coker}(A \to I_A^0) \to \operatorname{coker}(B \to I_B^0) \to \operatorname{coker}(C \to I_C^0) \to 0$$

é exata. E temos injeções $\operatorname{coker}(A \to I_A^0) \to I_A^1$ e $\operatorname{coker}(C \to I_C^0) \to I_C^1$ induzidas por $d^0_{I_A^\bullet}$ e $d^0_{I_C^\bullet}$. Podemos então construir um morfismo $\operatorname{coker}(B \to I_B^0) \to I_B^1$ de maneira análoga ao morfismo (α, β), e pela composição temos um morfismo $I_B^0 \to I_B^1$ tal que a composição com (α, β) é igual a 0. Repetindo este processo sucessivamente obtemos morfismos $I_B^i \to I_B^{i+1}$ de forma que $I_B^\bullet$ é um complexo. Aplicando a sequência exata longa de cohomologia sobre

$$0 \to I_A^\bullet \to I_B^\bullet \to I_C^\bullet \to 0$$

podemos ver que $I_B^\bullet$ é resolução de B, e como $F(I_B^i) = F(I_A^i \oplus I_C^i) = F(I_A^i) \oplus F(I_C^i)$ a sequência exata longa de

$$0 \to F(I_A^\bullet) \to F(I_B^\bullet) \to F(I_C^\bullet) \to 0$$

é a sequência desejada. $\square$

Definição 4.18. Um objeto A é dito F-*acíclico* se $R^qF(A) = 0$ para todo $q > 0$.

Exemplo: Se I é um objeto injetivo, então $I^\bullet$ dado por $I^0 = I$ e $I^i = 0$ para $i \neq 0$ é resolução injetiva de I. Logo temos $R^qF(I) = \mathcal{H}^q(F(I^\bullet)) = 0$ para $q > 0$.

Proposição 4.19. Seja $K^\bullet$ um complexo positivo de objetos F-acíclicos. Se $K^\bullet$ é exato, então $F(K^\bullet)$ é exato.

Demonstração: Se $K^\bullet$ é exato, então a seguinte sequência é exata para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$0 \to \ker d^i \to K^i \to \ker d^{i+1} \to 0.$$

A sequência exata longa de funtores derivados nos dá (em $q > 0$):

$$\ldots \to R^qF(\ker d^i) \to 0 \to R^qF(\ker d^{i+1}) \to R^{q+1}F(\ker d^i) \to 0 \to R^{q+1}F(\ker d^{i+1}) \to \ldots$$

Isto é, $R^qF(\ker d^{i+1}) \cong R^{q+1}F(\ker d^i)$ para $q > 0$. Por recursão podemos ver que $R^qF(\ker d^i) \cong R^{q+i}F(\ker d^0) = 0$. Logo a sequência exata longa pode ser resumida em

$$0 \to F(\ker d^i) \to F(K^i) \to F(\ker d^{i+1}) \to 0.$$

Como $F(\ker d^i) = \ker F(d^i) = \ker d^i_{F(K^\bullet)}$, então $F(K^\bullet)$ é exato. $\square$

Definição 4.20. Um morfismo de complexos $f : K^\bullet \to L^\bullet$ é dito *quase isomorfismo* se o morfismo induzido sob a cohomologia é isomorfismo.

Proposição 4.21. Seja $f : K^\bullet \to L^\bullet$ um quase isomorfismo de complexos positivos de objetos F-acíclicos. O morfismo $F(f) : F(K^\bullet) \to F(L^\bullet)$ é quase isomorfismo.

Demonstração: Vamos definir o complexo $M^\bullet$ dado por $M^i = L^i \oplus K^{i+1}$ com $d^i : M^i \to M^{i+1}$ dado pela matriz

$$d^i = \begin{bmatrix} d^i & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1} \end{bmatrix}.$$

Como as sequências

$$0 \to L^i \to M^i \to K^{i+1} \to 0$$

são exatas, aplicando a sequência exata longa de funtores derivados podemos concluir que $R^qF(M^i) = 0$ para $q > 0$, isto é, M^i é F-acíclica. E aplicando a sequência exata longa sobre a sequência

$$0 \to L^\bullet \to M^\bullet \to K[1]^\bullet \to 0,$$

onde $K[1]^i = K^{i+1}$ e $d^i_{K[1]^\bullet} = d^{i+1}_{K^\bullet}$, obtemos

$$\ldots \to \mathcal{H}^i(L^\bullet) \to \mathcal{H}^i(M^\bullet) \to \mathcal{H}^i(K[1]^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(L^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(M^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(K[1]^\bullet) \to \ldots$$

Observe que o morfismo $\mathcal{H}^i(K[1]^\bullet) \to \mathcal{H}^{i+1}(L^\bullet)$ nesta sequência é exatamente o morfismo $\mathcal{H}^{i+1}(f)$. Como $\mathcal{H}^i(K[1]^\bullet) = \mathcal{H}^{i+1}(K^\bullet)$ e $\mathcal{H}^{i+1}(K^\bullet) \cong \mathcal{H}^{i+1}(L^\bullet)$ pois f é quase isomorfismo, então $\mathcal{H}^i(M^\bullet) = 0$, ou seja, $M^\bullet$ é exato. Pela proposição anterior isto implica que $F(M^\bullet)$ é exata. Pela sequência exata longa de

$$0 \to F(L^\bullet) \to F(M^\bullet) \to F(K[1]^\bullet) \to 0,$$

temos que $\mathcal{H}^i(F(K^\bullet)) \cong \mathcal{H}^i(F(L^\bullet))$ pois $\mathcal{H}^i(F(M^\bullet)) = 0$. □

Definição 4.22. Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito *exato à esquerda* se para toda sequência exata em $\mathcal{A}$

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

é levada por F numa sequência exata

$$0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'').$$

Teorema 4.23. (Teorema de De Rham formal) Seja F um funtor covariante exato à esquerda e $K^\bullet$ uma resolução de A com objetos F-acíclicos. Então

$$R^qF(A) \cong \mathcal{H}^q(F(K^\bullet)).$$

Demonstração: Seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva de A. Pela proposição 4.14 existe um morfismo $f : K^\bullet \to I^\bullet$ tal que o diagrama comuta. Note que $\mathcal{H}^0(K^\bullet) \cong A \cong \mathcal{H}^0(I^\bullet)$ com o isomorfismo dado por $\mathcal{H}^0(f)$. Além disso, $\mathcal{H}^i(K^\bullet) = \mathcal{H}^i(I^\bullet) = 0$ para $i \neq 0$, então $\mathcal{H}^i(f)$ é isomorfismo para $i \neq 0$, portanto f é quase isomorfismo. Pela proposição 4.21 $F(f)$ é quase isomorfismo, isto é, $\mathcal{H}^q(F(K^\bullet)) \cong \mathcal{H}^q(F(I^\bullet)) = R^qF(A)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. □

4.2 Grupos de cohomologia de um feixe

Proposição 4.24. Seja G um grupo abeliano aditivo. Se G é *divisível*, isto é, se o homomorfismo $g \mapsto ng$ é sobrejetivo para todo n inteiro não nulo, então G é objeto injetivo.

Demonstração: Sejam B um grupo abeliano, A um subgrupo de B e $\phi : A \to G$ um homomorfismo. Considere o conjunto de subgrupos A' de B parcialmente ordenado pela inclusão, e o subconjunto dos que contém A e tais que existam um homomorfismo $\phi' : A' \to G$ com $\phi'|_A = \phi$. Pelo lema de Zorn existe um elemento maximal B' com um homomorfismo $\phi' : B' \to G$. Suponha por absurdo que $B' \neq B$, então existe $g \in B - B'$. Caso $B' \cap \mathbb{Z}g = \{0\}$, podemos definir $\phi'' : B' \oplus \mathbb{Z}g \to G$ com $\phi''(x) = \phi'(x)$ para $x \in B$ e $\phi''(g) = 0$. Caso $B' \cap \mathbb{Z}g \neq \{0\}$, então $ng \in B'$ para algum n não nulo, e por hipótese existe $g' \in G$ tal que $ng' = \phi'(ng)$. Logo podemos definir $\phi'' : B' + \mathbb{Z}g \to G$ com $\phi''(g) = g'$ e $\phi''|_{B'} = \phi'$. Ambos os casos contradizem a maximalidade de B'. $\square$

Proposição 4.25. A categoria de grupos abelianos tem suficientes injetivos.

Demonstração: Se G é um grupo livre, então temos a aplicação injetiva canônica $G \to G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dada por $g \mapsto g \otimes 1$. E para n inteiro não nulo veja que $g \otimes q = n(g \otimes \frac{q}{n})$, então $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é injetivo pela proposição anterior. Para o caso geral com G um grupo abeliano, existe um grupo livre L e um subgrupo H de L tal que $L/H \cong G$. Vamos definir $I_{\mathbb{Z}}(G) := (L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})/H$ o objeto injetivo que queremos. Se o grupo $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é divisível, então $I_{\mathbb{Z}}(G)$ também é, logo $I_{\mathbb{Z}}$ é injetivo. $\square$

Proposição 4.26. Seja A um anel comutativo com unidade. A categoria de A-módulos tem suficientes injetivos.

Demonstração: Seja M um A-módulo. Podemos dar uma estrutura de A-módulo sobre $I_A(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I_{\mathbb{Z}}(M))$ com $(a\phi)(x) = \phi(ax)$. Pela injeção $\alpha : M \to I_{\mathbb{Z}}(M)$ podemos definir um homomorfismo injetivo $\beta : M \to I_A(M)$ dado por $(\beta(x))(a) := \alpha(ax)$ para $x \in M$ e $a \in A$, resta mostrar que $I_A(M)$ é injetivo. Se N é um A-módulo qualquer, existe um homomorfismo $\Phi : \mathrm{Hom}_A(N, I_A(M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I_{\mathbb{Z}}(M))$ que leva $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N, I_A(M))$ em $(\Phi(\psi))(x) = (\psi(x))(1)$. Se $(\Phi(\psi))(x) = 0 = (\psi(x))(1)$ para todo $x \in N$, então $(\psi(x))(a) = (a\psi(x))(1) = 0$ para todo $a \in A$, logo $\psi(x) = 0$, e portanto $\psi = 0$. Isto é, Φ é injetiva. Por outro lado, se $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I_{\mathbb{Z}}(M))$, então para o homomorfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N, I_A(M))$ dado por $(\psi(x))(a) = \phi(ax)$ temos $\Phi(\psi) = \phi$, ou seja, Φ é um isomorfismo. Se N' é um submódulo de N, e $\Phi' : \mathrm{Hom}_A(N', I_A(M)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', I_{\mathbb{Z}}(M))$ é definida de maneira análoga à Φ, pela definição vale a igualdade $\Phi(\psi)|_{N'} = \Phi'(\psi|_{N'})$, isto significa que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(N, I_A(M)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, I_{\mathbb{Z}}(M)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_A(N', I_A(M)) \arrow[r, "\Phi'"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', I_{\mathbb{Z}}(M))
\end{tikzcd}$$

Onde os mapas na vertical são dados pela restrição $\phi \mapsto \phi|_{N'}$. Pela injetividade de $I_{\mathbb{Z}}(M)$ nos grupos abelianos sabemos que o homomorfismo da direita é sobrejetivo. Como Φ e Φ' são isomorfismos isto implica na sobrejetividade do homomorfismo da esquerda. □

Proposição 4.27. A categoria de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre uma variedade X tem suficientes injetivos.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Vamos definir o feixe $I(\mathcal{F})$ com o feixe das seções de

$$I(\mathcal{F})(U) := \prod_{x \in U} I_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x),$$

e os mapas de restrição dados pela projeção. Compondo a função $s \mapsto ([s]^x)_{x \in U}$ com as funções injetivas $\mathcal{F}_x \to I_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x)$ temos um homomorfismo injetivo $\mathcal{F}(U) \to I(\mathcal{F})(U)$, e como $[s]^x = [s|_V]^x \in \mathcal{F}_x$ para todo aberto $V \subset U$ estes homomorfismos definem um morfismo. Se $\mathcal{G}$ é um feixe, $\mathcal{G}'$ um subfeixe de $\mathcal{G}$, e $f : \mathcal{G}' \to I(\mathcal{F})$ é um morfismo, então podemos estender f pelas extensões de cada homomorfismo $f_U : \mathcal{G}'(U) \to I(\mathcal{F})(U)$ a $\mathcal{G}(U)$ utilizando a injetividade de $I(\mathcal{F})(U)$ e obter o morfismo $g : \mathcal{G} \to I(\mathcal{F})$. □

Observação: Grupos abelianos podem ser vistos como $\mathbb{Z}$-módulos, as proposições e definições sobre A-módulos também são válidas sobre eles.

Definição 4.28. Seja X uma variedade quase projetiva, $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos e Γ o funtor das seções globais $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$. Vamos definir o *q-ésimo grupo de cohomologia* de $\mathcal{F}$ como

$$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) := R^q\Gamma(X, \mathcal{F}).$$

4.3 Cohomologia de Čech

Definição 4.29. Seja X um espaço topológico, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X, e $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos sobre X. Uma *p-cocadeia alternada* de $\mathcal{U}$ com valores em $\mathcal{F}$ é uma família $(f_{i_0,\ldots,i_p}) \in \prod_{i_0,\ldots,i_p} \mathcal{F}(U_{i_0\ldots,i_p})$, onde $U_{i_0\ldots,i_p} := \bigcap_{j=0}^p U_{i_j}$, tal que para toda permutação $\sigma \in S_{p+1}$ temos

$$f_{i_{\sigma(0)},\ldots,i_{\sigma(p)}} = sgn(\sigma) f_{i_0,\ldots,i_p},$$

onde $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação σ. As p-cocadeias formam um grupo abeliano que será denotado $\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definição 4.30. Vamos definir a diferencial $\partial : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ por

$$(\partial f)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{n=0}^{p+1} (-1)^n f_{i_0,\ldots,\widehat{i_n},\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}},$$

onde $i_0, \ldots, \widehat{i_n}, \ldots, i_{p+1}$ representa os elementos de i_0 à i_{p+1} excluindo-se i_n.

Proposição 4.31. $\partial^2 = 0$.

Segue pela definição:

$$\begin{aligned}
(\partial^2 f)_{i_0,\ldots,i_{p+2}} &= \sum_{n=0}^{p+2} (-1)^n (\partial f)_{i_0,\ldots,\widehat{i_n},\ldots,i_{p+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{p+2} (-1)^n \left(\sum_{0 \le m < n} (-1)^m f_{i_0,\ldots,\widehat{i_m},\ldots,\widehat{i_n},\ldots,i_{p+2}} + \sum_{n < m \le p+2} (-1)^{m-1} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_n},\ldots,\widehat{i_m},\ldots,i_{p+2}} \right) \\
&= \sum_{\substack{0 \le m,n \le p+2 \\ m<n}} (-1)^{m+n} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_m},\ldots,\widehat{i_n},\ldots,i_{p+2}} + \sum_{\substack{0 \le m,n \le p+2 \\ n<m}} (-1)^{m+n-1} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_n},\ldots,\widehat{i_m},\ldots,i_{p+2}} \\
&= \sum_{\substack{0 \le m,n \le p+2 \\ m<n}} (-1)^{m+n} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_m},\ldots,\widehat{i_n},\ldots,i_{p+2}} - \sum_{\substack{0 \le m,n \le p+2 \\ n<m}} (-1)^{m+n} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_n},\ldots,\widehat{i_m},\ldots,i_{p+2}} \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Esta diferencial torna os $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ em um complexo que denotaremos $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definição 4.32. Chamaremos de q-ésimo *grupo de cohomologia de Čech* da cobertura $\mathcal{U}$ com valores em $\mathcal{F}$ o grupo

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})).$$

Definição 4.33. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U} = (U_i)$ uma cobertura aberta de X. Se V é um aberto, vamos denotar $V \cap \mathcal{U}$ a cobertura de V dada por $(V \cap U_i)$. Se $\mathcal{F}$ é um feixe sobre X, podemos definir o feixe $\underline{\check{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ com

$$\underline{\check{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})(V) := \check{C}^p(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F}|_V),$$

Proposição 4.34. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos. Então $\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é uma resolução de $\mathcal{F}$.

Demonstração: Temos um mapa natural $\mathcal{F}(X) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ por $s \mapsto (s|_{U_i})_i$. Dado $f \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, veja que $\partial f = 0$ se e somente se $f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j} = 0$ para todo i e j, que pelas propriedades de feixe nos dá um único $s \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s|_{U_i} = f_i$. Isto mostra que $\mathcal{F}(X) \cong \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Aplicando a mesma demonstração para todo aberto V temos $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}^0(\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.

Para mostrar que o resto da sequência é exata vamos mostrar sobre a sequência dos talos $\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ para todo $x \in X$. Escolhemos um aberto U_j da cobertura $\mathcal{U}$ que contenha x. Vamos definir uma homotopia $h^{p+1} : \underline{\check{C}}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x \to \underline{\check{C}}^{p}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ com

$$h(f)_{i_0,\dots,i_p} := f_{j,i_0,\dots,i_p}$$

Esta função está bem definida, pois como estamos nos talos podemos tomar um aberto $V \subset U_j$ que contém x, e nele vale $V \cap U_{j,i_0,\dots,i_p} = V \cap U_{i_0,\dots,i_p}$. Veja que:

$$\begin{aligned}
\partial h(f)_{i_0,\dots,i_{p+1}} + h(\partial f)_{i_0,\dots,i_{p+1}} =& \sum_{n=0}^{p+1}(-1)^n h(f)_{i_0,\dots,\widehat{i_n},\dots,i_{p+1}} + (\partial f)_{j,i_0\dots,i_{p+1}} \\
=& \sum_{n=0}^{p+1}(-1)^n f_{j,i_0,\dots,\widehat{i_n},\dots,i_{p+1}} + \\
& f_{\widehat{j},i_0,\dots,i_{p+1}} + \sum_{n=0}^{p+1}(-1)^{n+1} f_{j,i_0,\dots,\widehat{i_n},\dots,i_{p+1}} \\
=& f_{i_0,\dots,i_{p+1}}.
\end{aligned}$$

Como a identidade é homotópica a 0, então $\mathcal{H}^q(\underline{\check{C}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x) = 0$ para $q > 0$, o que mostra que é exata no resto da sequência. □

Definição 4.35. Um feixe $\mathcal{F}$ sobre X é dito *flácido* se para todo aberto U o mapa de restrição $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ é sobrejetivo.

Proposição 4.36. Dada

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$$

uma sequência exata com $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}$ feixes flácidos, então

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{F}''(X) \to 0$$

é uma sequência exata e $\mathcal{F}''$ é flácido.

Demonstração: Temos pelo caso geral de feixes que

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$$

é uma sequência exata, então é preciso mostrar apenas que $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$ é sobrejetivo. Seja $s'' \in \mathcal{F}''(X)$. Considere os pares (s,U), com U aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$, tal que $s''|_U = g_U(s)$. Podemos ordenar estes pares com $(s_1,U_1) \leq (s_2,U_2)$ se $U_1 \subset U_2$ e $s_2|_{U_1} = s_1$. Pelo lema de Zorn podemos tomar (s,U) um elemento maximal. Suponha por absurdo que $U \neq X$ e tome $x \in X - U$. Pela sobrejetividade de g existe uma vizinhança V de x e $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que $g_V(t) = s''|_V$. Como $g_V(t)|_{U\cap V} = s''|_{U\cap V} = g_U(s)|_{U\cap V}$, então $s|_{U\cap V} - t|_{U\cap V} \in \ker g_{U\cap V} = \operatorname{Im} f_{U\cap V}$. Pelo fato de $\mathcal{F}'$ ser flácido, existe $s' \in \mathcal{F}'(X)$ tal que $f_X(s')|_{U\cap V} = f_{U\cap V}(s'|_{U\cap V}) = s|_{U\cap V} - t|_{U\cap V}$. Daí temos $(s - f_X(s')|_U)|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$, e portanto existe $\widehat{s} \in \mathcal{F}(U \cup V)$ com $\widehat{s}|_U = s - f_X(s')|_U$ e $\widehat{s}|_V = t$. O fato de $g_{U\cup V}(\widehat{s})|_U = g_U(\widehat{s}|_U) = s''|_U$ e $g_{U\cup V}(\widehat{s})|_V = g_V(\widehat{s}|_V) = s''|_V$ implica em $g_{U\cup V}(\widehat{s}) = s''|_{U\cup V}$, o que contradiz a maximalidade de (s, U).

Para provar que $\mathcal{F}''$ é flácido, observe o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}''(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}''(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sabemos que os morfismos $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$ são sobrejetivos, e portanto sua composição também. Pela comutatividade do diagrama o morfismo $\mathcal{F}''(X) \to \mathcal{F}''(U)$ deve ser comutativo também, ou seja, $\mathcal{F}''$ é flácido. □

Corolário 4.37. Seja $K^\bullet$ um complexo positivo e exato de feixes flácidos sobre um espaço X. A sequência

$$0 \to K^0(X) \to K^1(X) \to \dots$$

é exata.

Demonstração: Podemos dividir o complexo $K^\bullet$ exato em sequências exatas

$$0 \to \ker d^i \to K^i \to \ker d^{i+1} \to 0.$$

Provaremos por indução que $\ker d^i$ é flácido para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para o caso base veja que o núcleo $\ker d^i$ é igual a 0 quando $i \leq 0$, e portanto é flácido. Supondo que $\ker d^i$ é flácido, aplicamos a proposição anterior sobre a sequência exata acima e obtemos que $\ker d^{i+1}$ é flácido, e além disso a sequência

$$0 \to \ker(d^i)(X) \to K^i(X) \to \ker(d^{i+1})(X) \to 0$$

é exata. Portanto a sequência

$$0 \to K^0(X) \to K^1(X) \to \dots$$

é exata. □

Proposição 4.38. Seja $\mathcal{F}$ um feixe flácido sobre X. Então $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$.

Demonstração: Veja que o funtor é exato sobre os feixes flácidos e o feixe $I(\mathcal{F})$ como foi construído é flácido, logo podemos construir uma resolução injetiva $I^\bullet$ de feixes flácidos de $\mathcal{F}$. Como a sequência

$$0 \to \mathcal{F} \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

é exata e de feixes flácidos, então

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to I^0(X) \to I^1(X) \to \dots$$

também é exata, e pela definição de funtor derivado isto implica em $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$. $\square$

Proposição 4.39. Seja $\mathcal{F}$ um feixe flácido sobre X. Então $\check{\mathrm{H}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$.

Demonstração: O fato de $\mathcal{F}$ ser flácido implica que cada feixe $\underline{\check{\mathrm{C}}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é flácido, e pela proposição anterior são acíclicos. Pelo teorema de De Rham formal,

$$\check{\mathrm{H}}^q(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q(\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0. \quad \square$$

Proposição 4.40. Seja $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ uma sequência exata de feixes. Se $\mathcal{U} = (U_i)$ é uma cobertura aberta de X com $\mathrm{H}^1(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}') = 0$ para todo aberto $U_{i_0,\dots,i_p}$, então temos uma sequência exata longa

$$\dots \to \check{\mathrm{H}}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to \check{\mathrm{H}}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \dots$$

Demonstração: Pela sequência exata longa sobre os grupos de cohomologia:

$$0 \to \mathcal{F}'(U_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathcal{F}''(U_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathrm{H}^1(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}') = 0$$

Logo a sequência

$$0 \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{C}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to 0$$

é exata para todo $q \in \mathbb{Z}$, o que nos dá a sequência exata

$$0 \to \check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \to 0.$$

A sequência exata longa de cohomologia sobre esta sequência de complexos é a sequência desejada. $\square$

Definição 4.41. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos sobre X. Uma cobertura $\mathcal{U} = (U_i)$ é dita $\mathcal{F}$-acíclica se para todo $q > 0$ e aberto $U_{i_0,\dots,i_p}$ temos

$$\mathrm{H}^q(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}) = 0.$$

Teorema 4.42. (Teorema de Leray) Seja X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um feixe de grupos abelianos sobre X, e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Então existe um morfismo canônico

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}).$$

Se a cobertura é $\mathcal{F}$-acíclica, então este morfismo é isomorfismo.

Demonstração: Seja $I^\bullet$ resolução injetiva de $\mathcal{F}$. Pela proposição 4.14 podemos construir um morfismo $\underline{\check{\mathrm{C}}}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to I^\bullet$, que induz um morfismo $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^q(X,\mathcal{F})$.

Dada uma sequência de feixes

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

e uma cobertura $\mathcal{U}$ $\mathcal{F}'$-acíclica, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}'') \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^q(X,\mathcal{F}'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{F}$ um feixe qualquer, temos a sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} I(\mathcal{F}) \to \operatorname{coker}(f) \to 0.$$

Pela sequência exata longa de cohomologia e por $I(\mathcal{F})$ ser flácido, como $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, I(\mathcal{F})) = \mathrm{H}^q(X, I(\mathcal{F})) = 0$ para $q > 0$ podemos concluir que $\mathrm{H}^q(X, \operatorname{coker}(f)) \cong \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathcal{F})$ e $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \operatorname{coker}(f)) \cong \check{\mathrm{H}}^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ para $q > 0$. Para provar a afirmação por indução, precisamos primeiramente checar o caso $q = 1$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, I(\mathcal{F})) \arrow[r, "\widehat{u}"] \arrow[d, "h_1"] & \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \operatorname{coker}(f)) \arrow[r, "\widehat{v}"] \arrow[d, "h_2"] & \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
\mathrm{H}^0(X, I(\mathcal{F})) \arrow[r, "u"] & \mathrm{H}^0(X, \operatorname{coker}(f)) \arrow[r, "v"] & \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Este diagrama é exato nas sequências horizontais e é isomorfismo nos dois primeiros morfismos na vertical. Como $\widehat{v}$ e $v \circ h_2$ são sobrejetivas, e $h_3 \circ \widehat{v} = v \circ h_2$, então h_3 deve ser sobrejetiva. Se $h_3(x) = 0$, então existe $y \in \check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \operatorname{coker}(f))$ tal que $\widehat{v}(y) = x$. Note que $v \circ h_2(y) = 0$, isto é, $h_2(y) \in \ker v = \operatorname{Im} u$. Logo existe $z \in \mathrm{H}^0(X, I(\mathcal{F}))$ tal que $u(z) = h_2(y)$. Pela comutatividade do diagrama temos $h_2 \circ \widehat{u} \circ h_1^{-1}(z) = h_2(y)$, e logo $y = \widehat{u} \circ h_1^{-1}(z) \in \operatorname{Im}(\widehat{u}) = \ker(\widehat{v})$ pois h_2 é injetiva. Concluímos que $x = \widehat{v}(y) = 0$, portanto $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F})$.

Suponha que a afirmação é válida para n. Como $\mathrm{H}^q(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) = \mathrm{H}^q(U_{i_0,\ldots,i_p}, I(\mathcal{F})) = 0$, pela sequência exata longa de cohomologia podemos concluir que $\mathrm{H}^q(U_{i_0,\ldots,i_p}, \operatorname{coker}(f)) = 0$, isto é, $\mathcal{U}$ é $\operatorname{coker}(f)$-acíclica. Logo $\check{\mathrm{H}}^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^n(\mathcal{U}, \operatorname{coker}(f)) \cong \mathrm{H}^n(X, \operatorname{coker}(f)) \cong \mathrm{H}^{n+1}(X,\mathcal{F})$. $\square$

4.4 O funtor Tor

Definição 4.43. Um *complexo de cadeias* $A_\bullet$ é uma sequência de objetos $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ com morfismos

$$\ldots \to A_{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A_i \xrightarrow{d^i} A_{i-1} \to \ldots$$

tal que $d^i \circ d^{i+1} = 0$. A homologia de $A_\bullet$ no grau i é dada por $\mathcal{H}_i(A_\bullet) := \ker d^i / \operatorname{Im} d^{i+1}$.

Definição 4.44. Um objeto P é dito projetivo se para toda sequência exata

$$B \xrightarrow{\phi} A \to 0$$

e para todo o morfismo $f : P \to A$ existe $g : P \to B$ tal que $\phi \circ g = f$. Uma categoria $\mathcal{A}$ tem *suficientes projetivos* se para todo objeto A existe um objeto projetivo P e um morfismo sobrejetivo $f : P \to A$.

Proposição 4.45. Seja R um anel comutativo. Todo R-módulo livre e finitamente gerado é objeto projetivo na categoria de R-módulos finitamente gerados e esta categoria possui suficiente projetivos.

Demonstração: Seja P um R-módulo livre, $f : P \to A$ e $\phi : P \to A$ R-homomorfismos de módulos com ϕ sobrejetivo, e $\{p_1, \ldots, p_n\}$ uma base de P. Podemos construir um homomorfismo $g : P \to B$ escolhendo elementos $g(p_i) \in \phi^{-1}(f(p_i))$. Esta escolha é possível pois $\phi^{-1}(f(p_i)) \neq \emptyset$ pela sobrejetividade de ϕ. Dado um R-módulo finitamente gerado M com um conjunto gerador $\{m_1, \ldots, m_s\}$, temos uma sobrejeção $A^s \to M$ pela definição de gerador, logo a categoria de R-módulos possui suficientes projetivos. □

Definição 4.46. Uma *resolução projetiva* de A é um complexo positivo de projetivos $P_\bullet$ tal que a sequência

$$\ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

é exata.

De maneira análoga aos injetivos, uma categoria com suficientes projetivos possui resoluções projetivas para todos os seus objetos.

Definição 4.47. Seja F um funtor covariante aditivo e seja $P_\bullet$ uma resolução projetiva de A. Os *funtores derivados à esquerda* são dados por

$$L_qF(A) := \mathcal{H}_q(F(P_\bullet)).$$

Definição 4.48. Seja M um A-módulo. Podemos definir um funtor covariante aditivo F exato à direita dado por $N \mapsto M \otimes_A N$. Vamos denotar

$$\operatorname{Tor}_q^A(M, N) := L_qF(N).$$

Lema 4.49. (Lema de Nakayama) Seja A um anel local, $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de A e M um A-módulo finitamente gerado. Se $\mathfrak{m}M = M$, então $M = 0$.

Demonstração: Tome $\{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de geradores de M sobre A com um número mínimo de elementos. Como $v_n \in \mathfrak{m}M$, então existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{m}$ tal que $v_n = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Logo $(1 - a_n)v_n = a_1v_1 + \ldots + a_{n-1}v_{n-1}$. Observe que $1 - a_n$ é unitário, pois caso contrário estaria contido num ideal maximal, que no caso seria $\mathfrak{m}$ pois A é local, e portanto teríamos $1 \in \mathfrak{m}$, que é uma contradição. Como $v_n = (1 - a_n)^{-1}a_1v_1 + \ldots + (1 - a_n)^{-1}a_{n-1}v_{n-1}$, então $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ gera M, o que é uma contradição. □

Corolário 4.50. Se $\{[v_1], \ldots, [v_r]\}$ é uma base de $M/\mathfrak{m}M$ com $v_i \in M$, então $\{v_1, \ldots, v_r\}$ gera M.

Demonstração: Seja N o submódulo gerado por $\{v_1, \ldots, v_r\}$. Dado $m \in M$, existem $a_1, \ldots, a_r \in A$ tal que $[m] = [a_1v_1 + \ldots + a_rv_r]$, isto é, $m = a_1v_1 + \ldots + a_rv_r + m'$ para algum $m' \in \mathfrak{m}M$. Logo $M = N + \mathfrak{m}M$. Como $\mathfrak{m}(M/N) = (N + \mathfrak{m}M)/N = M/N$, pelo lema de Nakayama temos $M/N = 0$, ou seja, $M = N$. □

Proposição 4.51. Seja A um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e $k := A/\mathfrak{m}$. Um A-módulo M finitamente gerado é livre se e somente se $\mathrm{Tor}_1(M, k) = 0$.

Demonstração: Se M é livre, então M é projetivo e $P_\bullet$ dado por $P_0 = M$ e $P_i = 0$ para $i > 0$ é resolução projetiva de M. Logo $\mathrm{Tor}_1(M, k) = 0$.

Se M é finitamente gerado, então $M/\mathfrak{m}M$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre k. Como $\{[v_1], \ldots, [v_r]\}$ é uma base de $M/\mathfrak{m}M$ com $v_i \in M$, sabemos que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ gera M. Temos uma sequência exata

$$0 \to K \to A^r \to M \to 0,$$

com $K = \ker((a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum_{i=1}^r a_iv_i)$. E pela sequência exata longa de homologia

$$0 \to K \otimes_A k \to A^r \otimes_A k \to M \otimes_A k \to 0.$$

Veja que $A^r \otimes_A k \cong k^r$ e $M \otimes_A k \cong M/\mathfrak{m}M$, logo o morfismo $A^r \otimes_A k \to M \otimes_A k$ é isomorfismo. Daí $K \otimes_A k = 0$, e portanto $K = 0$, isto é, M é livre. □

5 TEOREMAS A E B DE SERRE E ALGUMAS APLICAÇÕES

Neste último capítulo enunciaremos e demonstraremos os teoremas A e B de Serre e os aplicaremos em alguns resultados.

5.1 Cohomologia de feixes coerentes

Lema 5.1. Sejam X uma variedade afim, I um $\mathcal{O}_X(X)$-módulo injetivo e $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Então o homomorfismo canônico $I \to I_f$ é sobrejetivo.

Demonstração: A afirmação é equivalente a mostrar que para toda fração $\dfrac{m}{f^n} \in I_f$ existe $m' \in I$ tal que $\dfrac{m'}{1} = \dfrac{m}{f^n}$, isto é, $f^{n+p}m' = f^p m$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Seja $\mathfrak{a}_p$ o ideal de $\mathcal{O}_X(X)$ dos anuladores de f^p. Como $\mathcal{O}_X(X)$ é noetheriano e $\mathfrak{a}_p \subset \mathfrak{a}_{p+1}$, então existe p_0 tal que $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{p_0}$ para $p \geq p_0$. Seja $\phi : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)$ com $\phi(x) = f^{p_0+n}x$ e seja $\sigma : \mathcal{O}_X(X) \to I$ com $\sigma(x) = f^{p_0}xm$. Veja que $\ker\phi = \ker\sigma = \mathfrak{a}_{p_0}$, então temos morfismos injetivos $\phi' : \mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{a}_{p_0} \to \mathcal{O}_X(X)$ e $\sigma' : \mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{a}_{p_0} \to I$. Pela injetividade de I existe $\rho : \mathcal{O}_X(X) \to I$ tal que $\rho \circ \phi' = \sigma'$, portanto

$$f^{p_0}m = \sigma'(1) = \rho \circ \phi'(1) = \rho(f^{p_0+n}) = f^{p_0+n}\rho(1). \quad \square$$

Proposição 5.2. Sejam X uma variedade afim, I um $\mathcal{O}_X(X)$-módulo injetivo e $f \in \mathcal{O}_X(X)$. O submódulo $J := \{m \in I \mid f^n m = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ é injetivo.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada no lema III.3.2 do livro do Hartshorne [4].

Proposição 5.3. Seja X uma variedade afim e I um $\mathcal{O}_X(X)$-módulo injetivo. Então $\widetilde{I}$ é flácido.

Demonstração: Pelo lema 5.1 temos que o morfismo $\widetilde{I}(X) \to \widetilde{I}(U)$ é sobrejetivo para abertos da forma $U = X - V(f)$ com $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Seja $W = U_1 \cup U_2$ com $U_i = X - V(f_i)$ e $w \in \widetilde{I}(W)$. Existe $s \in I$ tal que $s|_{U_1} = w|_{U_1}$. Como $s|_{U_1} - w|_{U_1} = 0$, então $f_1^n(s|_W - w) = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e portanto $s|_W - w \in \widetilde{J}(W)$. Pelo fato de J também ser injetivo o morfismo $J \to J_{f_2}$ é sobrejetivo, logo existe $r \in J$ tal que $r|_{U_2} = s|_{U_2} - w|_{U_2}$. Veja que $(s-r)|_{U_1} = w|_{U_1}$ e $(s-r)|_{U_2} = w|_{U_2}$, então $(s-r)|_W = w$. Para o caso geral um aberto qualquer pode ser descrito como uma união finita de abertos da forma $X - V(f)$, aplicando o mesmo processo sucessivamente podemos mostrar a sobrejeção. $\square$

Definição 5.4. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Cada $s \in \mathcal{F}(X)$ define um morfismo $\Phi_s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ dado por $f \mapsto fs|_U$ para $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é gerado por seções globais se existem $s_i \in \mathcal{F}(X)$ tal que o morfismo $\bigoplus_i \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ dado por $\bigoplus_i \Phi_{s_i}$ é sobrejetivo.

Teorema 5.5. (Teoremas A e B de Serre para variedades afins) Seja $\mathcal{F}$ um feixe quase coerente sobre uma variedade afim X.

(A) O feixe $\mathcal{F}$ é gerado por suas seções globais;

(B) $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$.

Demonstração:

(A) Como X é afim, então $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}(X)}$. Tome elementos $s_i \in \mathcal{F}(X)$ que formam um conjunto gerador de $\mathcal{F}(X)$, a imagem de $\bigoplus_i \Phi_{s_i}$ é exatamente $\widetilde{\mathcal{F}(X)}$ pelas definições.

(B) Seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva de $\mathcal{F}(X)$. Cada homomorfismo da sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

induz morfismos que dão a sequência exata

$$0 \to \mathcal{F} \to \widetilde{I^0} \to \widetilde{I^1} \to \dots$$

Logo $\widetilde{I^\bullet}$ é uma resolução acíclica de $\mathcal{F}$, pois cada $\widetilde{I^q}$ é flácido. Pelo teorema de De Rham formal temos para $q > 0$ que

$$\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^q(I^\bullet) = 0. \quad \square$$

Teorema 5.6. (Teorema da Anulação de Grothendieck) Seja X uma variedade projetiva de dimensão n e $\mathcal{F}$ um feixe quase coerente sobre X. Então $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q > n$.

Demonstração: Podemos supor que $X \subset \mathbb{P}^m$ com $m > n$. Tome um subespaço projetivo L de dimensão $m - n - 1$ tal que $L \cap X = \emptyset$. Este espaço pode ser descrito por $n + 1$ equações lineares f_i com $L = V(f_0, \dots, f_n)$. Seja $U_i := X - V(f_i)$. A cobertura $\mathcal{U} = (U_i \cap X)$ é $\mathcal{F}$-acíclica pois $U_i \cap X$ é uma variedade afim. Pelo teorema de Leray temos

$$\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F})$$

para todo q. Se $f \in \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ com $q > n$, então para qualquer $f_{i_0,\dots,i_q}$ teremos r, s tais que $i_r = i_s$, logo

$$f_{i_0,\dots,i_r,\dots,i_s,\dots,i_q} = -f_{i_0,\dots,i_s,\dots,i_r,\dots,i_q} = -f_{i_0,\dots,i_r,\dots,i_s,\dots,i_q}.$$

Isto é, $f_{i_0,\dots,i_r,\dots,i_s,\dots,i_q} = 0$, portanto $\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Definição 5.7. Sejam $K^\bullet$ e $L^\bullet$ complexos de espaços vetoriais. Definiremos o complexo $K^\bullet \otimes L^\bullet$ com

$$(K^\bullet \otimes L^\bullet)^n := \bigoplus_{p+q=n} K^p \otimes L^q,$$

e diferencial dada por

$$d(x \otimes y) := dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy.$$

O produto é de fato um complexo, veja que

$$\begin{aligned} d^2(x \otimes y) =& d(dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy) \\ =& d^2 x \otimes y + (-1)^{p+1} dx \otimes dy + (-1)^p dx \otimes dy + (-1)^{2p} x \otimes d^2 y \\ =& 0. \end{aligned}$$

Teorema 5.8. (Fórmula de Künneth) O morfismo

$$\mu : \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}^p(K^\bullet) \otimes \mathcal{H}^q(L^\bullet) \to \mathcal{H}^n(K^\bullet \otimes L^\bullet)$$

dado por $\mu([x] \otimes [y]) = [x \otimes y]$ é um isomorfismo.

Demonstração: Seja $B^i = \operatorname{Im} d^{i-1} \subset K^i$. Tome um subespaço H^i de $\ker d^i$ tal que $B^i \oplus H^i = \ker d^i$, e um subespaço S^i de K^i tal que $B^i \oplus H^i \oplus S^i = K^i$. Seja $D^i = B^i \oplus S^i$. Como $d^i(D^i) = B^{i+1}$ e $\ker d^i|_{D^i} = B^i$, temos $\mathcal{H}^i(D^\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Ainda mais, $d^i|_{S^i}$ é um isomorfismo, o que nos permite definir a homotopia $h^i : D^i \to D^{i-1}$ com $h^i|_{B^i} = (d^{i-1})^{-1}$ e $h^i|_{S^i} = 0$. Veja que $dh^i + h^{i+1}d = id_{D^i}$, isto é, $id_{D^\bullet}$ é homotópica à 0. Então podemos definir uma homotopia em $D^\bullet \otimes L^\bullet$ com $x \otimes y \mapsto h^i x \otimes y$, mostrando que $id_{D^\bullet \otimes L^\bullet}$ também é homotópica à 0, logo $\mathcal{H}^n(D^\bullet \otimes L^\bullet) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Resta mostrar o resultado para $H^\bullet \otimes L^\bullet$. Usando um raciocínio análogo sobre $L^\bullet$, o problema se resume a mostrar sobre $H^\bullet \otimes H'^\bullet$. Como a diferencial sobre estes complexos é sempre nula, então $\mathcal{H}^n(H^\bullet) \cong H^n$ e $\mathcal{H}^n(H^\bullet \otimes H'^\bullet) \cong (H^\bullet \otimes H'^\bullet)^n$, portanto o resultado é válido por definição. □

Proposição 5.9. Os grupos de cohomologia de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ para $n > 0$ são dados por

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O}) \cong \begin{cases} k[x_1, \dots, x_{n+1}], & \text{se } q = 0 \\ \left\langle \left\{ \dfrac{1}{x_1^{\nu_1} \dots x_{n+1}^{\nu_{n+1}}} : \nu_1, \dots, \nu_{n+1} \geq 1 \right\} \right\rangle, & \text{se } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq n \text{ e } q \neq 0 \end{cases}$$

onde $\left\langle \left\{ \dfrac{1}{x_1^{\nu_1} \dots x_{n+1}^{\nu_{n+1}}} : \nu_1, \dots, \nu_{n+1} \geq 1 \right\} \right\rangle$ é o espaço vetorial gerado em $k\left[\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_{n+1}}\right]$.

Demonstração: Seja $K^\bullet$ o complexo dado por

$$0 \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^1 - \{0\}) \to 0$$

em grau 0 e grau 1, onde a diferencial é dada pela restrição. Temos $\mathcal{H}^1(K^\bullet) \cong \left\langle \left\{ \frac{1}{x^i} : i \geq 1 \right\} \right\rangle$ e $\mathcal{H}^q(K^\bullet) = 0$ para $q \neq 1$. Seja $\mathcal{U} = (U_i)$ com $U_i = \mathbb{A}^{n+1} - V(x_i)$. Veja que

$$\mathcal{O}(U_i) \cong k\left[x_1, \ldots, x_{n+1}, \frac{1}{x_i}\right] \cong k[x_1]\otimes\ldots\otimes k\left[x_i, \frac{1}{x_i}\right]\otimes\ldots\otimes k[x_{n+1}] \cong K^0\otimes\ldots\otimes K^1\otimes\ldots\otimes K^0,$$

da mesma forma

$$\check{\mathrm{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}) \cong \bigoplus_{l_1+\ldots+l_n=p+1} \bigotimes_{j=1}^{n+1} K^{l_j} = \left(\bigotimes_{j=1}^{n+1} K^\bullet\right)^p.$$

Lembre que $\mathcal{U}$ é uma cobertura $\mathcal{O}$-acíclica, então pelos teoremas de Leray e Künneth

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O}) \cong \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cong \mathcal{H}^{q+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1} K^\bullet\right) \cong \bigoplus_{l_1+\ldots+l_{n+1}=q+1} \bigotimes_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}^{l_j}(K^\bullet),$$

para $q > 0$. Mas $\mathcal{H}^{l_j}(K^\bullet) \neq 0$ se e só se $l_j = 1$, então $\mathrm{H}^q(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O}) \neq 0$ apenas quando $q \neq n, 0$. E para $q = n$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^q(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O}) &\cong \bigotimes_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}^1(K^\bullet) \\
&\cong \bigotimes_{j=1}^{n+1} \left\langle \left\{ \frac{1}{x^i} : i \geq 1 \right\} \right\rangle \\
&\cong \left\langle \left\{ \frac{1}{x_1^{\nu_1} \ldots x_{n+1}^{\nu_{n+1}}} : \nu_1, \ldots, \nu_{n+1} \geq 1 \right\} \right\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 5.10. Seja $f : X \to Y$ um morfismo de variedades e seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre X tal que $R^q f_*(\mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$. Então

$$\mathrm{H}^q(Y, f_*(\mathcal{F})) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Seja $I^\bullet$ uma resolução injetiva de $\mathcal{F}$. Se $R^q f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^q(f_*(I^\bullet)) = 0$ para $q > 0$, então $f_*(I^\bullet)$ é uma resolução de $f_*(\mathcal{F})$. Pelo teorema de De Rham formal temos

$$\mathrm{H}^q(Y, f_*(\mathcal{F})) \cong \mathcal{H}^q(f_* I^\bullet(Y)) = \mathcal{H}^q(I^\bullet(X)) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}). \quad \square$$

Proposição 5.11. Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito e seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Então

$$\mathrm{H}^q(Y, f_*(\mathcal{F})) \cong \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Tome $I^\bullet$ uma resolução injetiva de $\mathcal{F}$ com feixes flácidos. Sabemos que se U é afim, então $f^{-1}(U)$ é afim, e portanto $\mathrm{H}^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$. Isto é válido para todo U afim, logo $R^q f_*(\mathcal{F}) = 0$. O resultado segue pelo teorema anterior. $\square$

Proposição 5.12. Seja $\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ a projeção canônica e U aberto de $\mathbb{P}^n$. Então

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)(U) \cong \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_m,$$

onde $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_m$ é o conjunto das $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ tal que $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$.

Demonstração: É suficiente provar este fato para abertos U que estejam contidos em $\mathbb{P}^n - V(x_i)$ para algum i. Dada uma seção $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)(U)$, sabemos que existe uma função regular $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ tal que $s([v]) = ([v], g([v])v)$ para $v = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Seja $f(x_0, \ldots, x_n) = x_i^{-1} g([x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n]) \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$. Para $x \in \pi^{-1}(U)$ qualquer, temos $s([x]) = s([x_i^{-1}x]) = ([x_i^{-1}x], g([x_i^{-1}x])x_i^{-1}x) = ([x], f(x)x)$, e f é a função que associaremos à s. Como $s([\lambda x]) = s([x])$ para $\lambda \in k^*$, então $f(\lambda x)\lambda x = f(x)x$, logo $\lambda f(\lambda x) = f(x)$. Reciprocamente, dada $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_{-1}$ a seção $[x] \mapsto ([x], f(x)x)$ está bem definida, o que mostra o caso $m = -1$.

No caso $m = -p$ para p inteiro positivo, dado $s_1 \otimes \ldots \otimes s_p \in \mathcal{O}(m)(U)$ temos para cada s_j uma respectiva função regular f_j, podemos definir o morfismo como $s_1 \otimes \ldots \otimes s_p \mapsto f_1 \ldots f_j$. Se $f_1 \ldots f_j = 0$, então $s_1 \otimes \ldots \otimes s_p = 0$, logo o morfismo é injetivo. E para $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_m$, podemos definir uma seção s com $[x] \mapsto ([x], x_i^{p-1} f(x)x)$. Seja u a seção dada por $[x] \mapsto ([x], x_i^{-1}x)$. Então o morfismo leva $s \otimes u^{\otimes p-1}$ em f, logo é isomorfismo.

No caso $m = 1$ para $s^* \in \mathcal{O}(1)(U)$ podemos definir uma função regular $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_1$ com $f(x) := s^*([x]) \cdot ([x], x)$. O morfismo é injetivo pois $f = 0$ se e somente se $s^* = 0$, e é sobrejetiva pois se $f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_1$, então $s^*([x]) := f(x)([x], x)^*$ está bem definida, onde $([x], x)^*$ é a transformação tal que $([x], x)^* \cdot ([x], x) = 1$. A generalização para $m = p$ é análoga à de $m = -p$. □

Proposição 5.13.

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}} \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$$

Demonstração: Pela proposição anterior basta mostrar que

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}}(U) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_m$$

para todo aberto $U \subset \mathbb{P}^n$. Tome $U = \mathbb{P}^n - V(f)$ com $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneo de grau l. Veja que $\pi^{-1}(U) = \mathbb{A}^{n+1} - V(f)$, logo $\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \cong k[x_0, \ldots, x_n]_f$. Seja $g \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Podemos decompor g em uma soma $g_0 + \ldots + g_p$ com cada g_i homogêneo de grau i. Então um elemento $g/f^q \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ pode ser escrito como $g_0/f^q + \ldots + g_p/f^q$ com g_i/f^q homogenêno de grau $i - ql$, isto é $g_i/f^q \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))_{i-ql}$. □

Proposição 5.14. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m > N$, então $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0$ para $q > 0$.

Demonstração: Temos

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) \cong \mathrm{H}^q\left(\mathbb{P}^n, \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(m)\right) \cong \mathrm{H}^q(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O}) = 0$$

para $q \neq n$, segue que $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, resta então o caso $q = n$. Observe que o isomorfismo deve preservar a propriedade $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ para as funções que a satisfazem, logo ele leva cada $\dfrac{1}{x_0^{\nu_0} \dots x_n^{\nu_n}} \in \mathrm{H}^n(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}, \mathcal{O})$ em $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$ com $-m = \nu_0 + \ldots + \nu_n$. Como $\nu_i \geq 1$ para todo i, então $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = 0$ para $m \geq -n - 1$. □

5.1.1 Teoremas A e B de Serre

Teorema 5.15. (Teoremas A e B de Serre) Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre uma variedade projetiva X. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$:

(A) O feixe $\mathcal{F}(n)$ é gerado por suas seções globais;

(B) $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para $q > 0$.

Demonstração:

(A) Tome uma cobertura finita de abertos afins (U_i) tal que U_i é dada por $f_i \neq 0$ para algum $f_i \in \mathcal{O}_X(1)(X)$. Podemos tomar para cada i seções $s_{i,1}, \ldots, s_{i,l_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ que geram $\mathcal{F}|_{U_i}$, e pela proposição 3.41 existem $t_{i,j} \in \mathcal{F}(n_i)(X)$ tal que $t_{i,j}|_{U_i} = f_i^{\otimes n_i} \otimes s_{i,j}$. Seja $n \geq N_1 := \max\{n_i\}$ e $w_{i,j} = f_i^{\otimes n - n_i} \otimes t_{i,j}$, ainda temos $w_{i,j}|_{U_i} = f_i^{\otimes n} \otimes s_{i,j}$. Como U_i é afim, então $\mathcal{F}(n)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}|_{U_i}$, logo os elementos $f_i^{\otimes m} \otimes s_{i,j}$ continuam sendo geradores. Seja $m := \#\{w_{i,j}\}$. O morfismo $\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(n)$ dado pelos $w_{i,j}$ é sobrejetivo em cada restrição $\mathcal{O}_X^m|_{U_i} \to \mathcal{F}(n)|_{U_i}$. Mas como os U_i cobrem X, então o morfismo é sobrejetivo.

(B) A inclusão de X no espaço projetivo é um morfismo finito, então é suficiente mostrar a afirmação no caso em que X é o espaço projetivo. Como existe uma sobrejeção $\Phi : \mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(n)$, portanto temos uma sequência exata

$$0 \to \ker \Phi \to \mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(n) \to 0.$$

Aplicando o produto tensorial $\otimes \mathcal{O}_X(l)$

$$0 \to \ker \Phi(l) \to \mathcal{O}_X(l)^m \to \mathcal{F}(n + l) \to 0.$$

e daí a sequência exata longa de cohomologia

$$\ldots \to \mathrm{H}^q(X, \ker \Phi(l)) \to \mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_X(l)^m) \to \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}(n+l)) \to \mathrm{H}^{q+1}(X, \ker \Phi(l)) \to \ldots$$

Pelo teorema da anulação a afirmação é verdade para $q > \dim X$. Fazendo por recorrência, suponha que a afirmação é válida para $q+1 > 1$. Logo $\mathrm{H}^{q+1}(X, \ker \Phi(l)) = 0$. Sabemos também que existe $N_2 \in \mathbb{Z}$ tal que para $l > N_2$ temos $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{O}_X(l)^m) = 0$, então da sequência exata longa temos $\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}(n+l)) = 0$ para $n + l \geq N := N_1 + N_2$. □

Proposição 5.16. Seja U um aberto de uma variedade projetiva X, $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X, e $\mathcal{G}$ um subfeixe coerente de $\mathcal{F}|_U$. Existe um subfeixe coerente $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}'|_U = \mathcal{G}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{G}'$ o feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{F}'(W) := \{s \in \mathcal{F}(W) : s|_{U \cap W} \in \mathcal{G}(U \cap W)\}$. Como $\mathcal{G}'|_U = \mathcal{G}$ por definição, resta mostrar que $\mathcal{G}'$ é coerente. Como coerência é questão local é suficiente mostrar para X afim, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ e $\mathcal{G} = \widetilde{N}$. Primeiro vamos considerar o caso $U = X_f := X - V(f)$. Então N é submódulo de M_f e $N' := \mathcal{G}'(X)$ é a imagem inversa de N da aplicação $M \to M_f$. Vamos provar que $N = N'_f$. Dado $m/f^n \in N \subset M_f$, então $m/1 = f^n(m/f^n) \in N$, e logo $m \in N'$. Portanto $m/f^n \in N'_f$. Por outro lado se $m/f^n \in N'_f$ com $m \in N'$, então $m/1 \in N$, e portanto $m/f^n = (1/f^n)(m/1) \in N$. Logo $\mathcal{G}' = \widetilde{N'}$.

No caso geral existem $f_1, \ldots, f_m$ tais que $U = \bigcup_{i=1}^m X_{f_i}$. Para cada $N_i := \mathcal{G}(X_{f_i})$ temos $N'_i \subset \mathcal{F}(X)$ tal que $\widetilde{N'_i}|_{X_{f_i}} = \widetilde{N_i}$. Seja $N' := \bigcap_{i=1}^m N'_i$, vamos provar que $\widetilde{N'}(U) = N$. Se $s \in \widetilde{N'}(U)$, então $s|_{X_{f_i}} \in N_i$ para todo i. Além disso $(s|_{X_{f_i}})|_{X_{f_i} \cap X_{f_j}} = s|_{X_{f_i} \cap X_{f_j}}$ para quaisquer i e j, logo pela propriedade de feixes o s que satisfaz estas propriedades é único, e pela maneira que cada N'_i foi construído ele deve pertencer a $N = \mathcal{G}(U)$. O raciocínio é idêntico tomando $s \in N$. □

Proposição 5.17. Seja $\mathcal{G}$ um feixe coerente sobre um aberto U de uma variedade projetiva X. Então $\mathcal{G}$ se estende a X, isto é, existe um feixe coerente $\mathcal{G}'$ sobre X tal que $\mathcal{G}'|_U \cong \mathcal{G}$.

Demonstração: Seja $x \in X - U$ e W uma vizinhança afim de x. Vamos mostrar que podemos estender $\mathcal{G}|_{U \cap W}$ em W. Como $U \cap W$ é afim e $\mathcal{G}|_{U \cap W}$ é coerente, então $\mathcal{G}|_{U \cap W}$ é gerado por seções globais, isto é, existe um morfismo sobrejetivo $f : \mathcal{O}^m_{U \cap W} \to \mathcal{G}|_{U \cap W}$ para algum inteiro positivo m. Como $\ker f$ é subfeixe de $\mathcal{O}^m_{U \cap W} = \mathcal{O}^m_W|_{U \cap W}$, pela proposição anterior existe um feixe $\mathcal{F}$ sobre W tal que $\mathcal{F}|_{U \cap W} = \ker f$. Veja que $(\mathcal{O}^m_W/\mathcal{F})|_{U \cap W} = \mathcal{O}_{U \cap W}/\ker f \cong \mathcal{G}$. Daí podemos construir um feixe $\mathcal{G}'$ sobre $U \cup W$ usando os talos dos dois feixes da mesma maneira que foi construído o feixe associado, e portanto $\mathcal{G}'|_U = \mathcal{G}$. Este processo pode ser repetido sucessivamente até cobrir todo o X, que por ser noetheriano requer apenas um número finito de passos. □

5.2 Teorema das sizígias de Hilbert

Definição 5.18. Seja A um anel comutativo, $E \cong A^n$ um A-módulo livre e $s : E \to A$ uma função A-linear. Vamos definir o *complexo de Koszul* $K_\bullet(s)$ com

$$K_p(s) := \bigwedge^p E,$$

e

$$d_p(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} s(v_i) v_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{v_i} \wedge \ldots \wedge v_p.$$

Seja M um A-módulo finitamente gerado, definiremos $K_\bullet(s, M)$ com $K_p(s, M) := K_p(s) \otimes_A M$, e $d_p^M := d_p \otimes_A id_M$.

Definição 5.19. Seja A uma anel comutativo e M um A-módulo. Uma M-sequência regular é uma sequência $r_1, \ldots, r_p \in A$ tal que a função

$$\frac{M}{< r_1, \ldots, r_{i-1} > M} \to \frac{M}{< r_1, \ldots, r_{i-1} > M}$$

dada por $m \mapsto r_i m$ é injetiva para $i = 1, \ldots, p$.

Proposição 5.20. Seja A um anel comutativo e M um A-módulo finitamente gerado. Se $x_1, \ldots, x_p \in A$ é uma sequência M-regular, então para $i > 0$ temos

$$\mathcal{H}_i(K_\bullet((x_1, \ldots, x_p), M)) = 0.$$

Demonstração: Vamos mostrar por indução. No caso $p = 1$, x_1 ser M regular significa que $m \mapsto x_1 m$ é injetivo. Como o complexo é dado por

$$0 \to A \otimes M \xrightarrow{x_1 \otimes id} A \otimes M \to 0,$$

a injetividade do mapa nos dá que $\mathcal{H}_1(K_\bullet(x_1, M)) = 0$. Suponha que a afirmação é válida para $p = n$. Seja $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ uma sequência M regular. Veja que

$$\begin{aligned}
K_p((x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) &\cong \bigwedge^p (A^n \oplus A) \\
&\cong \bigoplus_{i=0}^{p} \left(\bigwedge^{p-i} A^n \otimes_A \bigwedge^{i} A \right) \\
&\cong \left(\bigwedge^{p} A^n \otimes_A \bigwedge^{0} A \right) \oplus \left(\bigwedge^{p-1} A^n \otimes_A \bigwedge^{1} A \right) \\
&\cong \bigwedge^{p} A^n \oplus \bigwedge^{p-1} A^n \\
&\cong K_p((x_1, \ldots, x_n)) \oplus K_{p-1}((x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}$$

Portanto temos uma sequência exata

$$0 \to K_\bullet((x_1, \ldots, x_n)) \to K_\bullet((x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) \to K_\bullet((x_1, \ldots, x_n))[-1] \to 0.$$

Aplicando a sequência exata longa e a hipótese de indução obtemos $\mathcal{H}_i(K_\bullet((x_1,\dots,x_{n+1}),M)) = 0$ para $i > 0$. □

Teorema 5.21. (Teorema das sizígias de Hilbert) Seja A anel local regular noetheriano de dimensão n,

$$0 \to F \to E_{n-1} \to \dots \to E_0 \to M \to 0$$

uma sequência exata de A-módulos tal que os E_i são livres, M é finitamente gerado. Então F é livre.

Demonstração: Seja $R_i := \ker(E_{i+1} \to E_i)$. Podemos decompor a sequência em sequências exatas menores

$$0 \to R_i \to E_i \to R_{i-1} \to 0.$$

Pela sequência exata longa de homologia temos

$$\dots \to \mathrm{Tor}_{q+1}(E_i,k) \to \mathrm{Tor}_{q+1}(R_{i-1},k) \to \mathrm{Tor}_q(R_i,k) \to \mathrm{Tor}_q(E_i,k) \to \dots$$

Como E_i é livre, então $\mathrm{Tor}_q(E_i,k) = 0$ para todo $q > 0$, logo $\mathrm{Tor}_{q+1}(R_{i-1},k) \cong \mathrm{Tor}_q(R_i,k)$. Aplicando essa propriedade sucessivamente obtemos $\mathrm{Tor}_1(F,k) = \mathrm{Tor}_1(R_n,k) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}(R_0,k) = \mathrm{Tor}_{n+1}(M,k)$. É suficiente mostrar que $\mathrm{Tor}_{n+1}(M,k) = 0$. Tome uma base $[x_1],\dots,[x_n]$ de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Então $x_1,\dots,x_n$ é uma sequência A-regular por ser sistema regular de parâmetros. Portanto o complexo $K_\bullet((x_1,\dots,x_n))$ é uma resolução de $A/\mathfrak{m} = k$. Como $K_i((x_1,\dots,x_n)) = 0$ para $i > n$, temos $\mathrm{Tor}_i(M,k) = 0$. □

Teorema 5.22. (Teorema das sizígias para variedades projetivas) Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre uma variedade projetiva lisa X de dimensão n. Existe uma resolução localmente livre $E_\bullet$ de $\mathcal{F}$ de comprimento menor ou igual a n, isto é, $E_i = 0$ para $i > n$.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que existe uma resolução localmente livre $E'_\bullet$ de $\mathcal{F}$. Pelo teorema de Serre A temos uma sobrejeção de $E'_0 := \mathcal{O}_X(-n_0)^{N_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ em $\mathcal{F}$. Aplicando o mesmo teorema obtemos uma sobrejeção de $E_1 := \mathcal{O}_X(-n_1)^{N_1}$ em $\ker(E'_0 \to \mathcal{F})$, cuja composição com a inclusão nos dá um morfismo tal que $\mathrm{Im}(E'_1 \to E'_0) = \ker(E'_0 \to \mathcal{F})$. Repetindo o processo sucessivamente obtemos a resolução localmente livre $E'_\bullet$.

Podemos definir $E_i = E'_i$ para $i < n$, $E_n = \ker(E'_n \to E'_{n-1})$ e $E_i = 0$ para $i > n$. A sequência

$$0 \to E_n \to E_{n-1} \to \dots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

é exata, logo $E_\bullet$ nos dá uma resolução de $\mathcal{F}$. Aplicando o teorema das sizigías sobre os talos, podemos concluir que E_n é localmente livre, portanto a resolução é localmente livre. □

Teorema 5.23. (Teorema das sizígias para variedades quase projetivas) Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre uma variedade quase projetiva lisa X de dimensão n. Existe uma resolução localmente livre $E_\bullet$ de $\mathcal{F}$ de comprimento menor ou igual a n.

Demonstração: Pela proposição 5.17 existe um feixe coerente $\mathcal{F}'$ sobre a variedade projetiva $\overline{X}$ tal que $\mathcal{F}'|_X = \mathcal{F}$, e sabemos que existe uma resolução localmente livre $E'_\bullet$ de $\mathcal{F}'$ com comprimento menor ou igual a n. Restringindo cada E'_i a X nos dá a resolução desejada. □

5.3 O grupo K(X)

Definição 5.24. Seja X uma variedade quase projetiva e G o grupo das somas formais $\sum a_i[\mathcal{F}_i]$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $[\mathcal{F}_i]$ são classes de isomorfismos de feixes coerentes sobre X. Seja H o subgrupo de G gerado por elementos da forma $[\mathcal{F}] - [\mathcal{F}'] - [\mathcal{F}'']$ tal que exista uma sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

Vamos denotar por $K(X)$ o quociente G/H.

Lema 5.25. Seja

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

uma sequência exata de feixes tal que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}''$ são localmente livres. Então $\mathcal{F}'$ é localmente livre.

Demonstração: É suficiente mostrar que os talos são módulos livres. Veja que a sequência

$$0 \to \mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x \to 0$$

para todo $x \in X$. Seja $k_x := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Pela sequência exata longa,

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_2(\mathcal{F}''_x, k_x) \to \mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}'_x, k_x) \to \mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}_x, k_x) \to \ldots$$

Como $\mathcal{F}''_x$ e $\mathcal{F}_x$ são livres, então $\mathrm{Tor}_2(\mathcal{F}''_x, k_x) = \mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}_x, k_x) = 0$, logo $\mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}'_x, k_x) = 0$. Pela proposição 4.51 isto mostra que $\mathcal{F}'_x$ é livre. □

Lema 5.26. Dados $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ feixes coerentes sobre X com morfismos sobrejetivos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Existe um feixe localmente livre $\mathcal{L}$ e morfismos sobrejetivos $\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ e $\mathcal{L} \to \mathcal{B}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "f"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Demonstração: Considere primeiramente o caso em que X é projetivo. Podemos definir um morfismo $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ com $f \oplus (-g)$. Seja $\mathcal{F}$ o núcleo deste morfismo. Sabemos que $\mathcal{F}$ é feixe coerente e que para algum n e N inteiros existe um morfismo sobrejetivo $\mathcal{O}(n)^N \to \mathcal{F}$ pelo teorema de Serre A. Tomando $\mathcal{L} := \mathcal{O}(n)^N$ e os morfismos como a composta do morfismo sobre $\mathcal{F}$ com as projeções sobre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

No caso em que X é quase projetivo podemos através proposição 5.17 tomar feixes $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ em $\overline{X}$ que estendem $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ e aplicar o resultado do caso projetivo para obter $\mathcal{L}'$. A restrição $\mathcal{L} := \mathcal{L}'|_X$ satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Lema 5.27. Sejam

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{L} \to \mathcal{B} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{L}' \to \mathcal{B}' \to 0$$

sequências exatas de feixes coerentes sobre X, com $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ localmente livres, e sejam $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'$ morfismos sobrejetivos. Existem $\mathcal{A}''$ e $\mathcal{L}''$, com $\mathcal{L}''$ localmente livre tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{L}'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{B}'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{L}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

E além disso todos os morfismo na vertical são sobrejetivos e as sequências na horizontal são exatas.

Demonstração: Podemos aplicar o lema anterior sobre as bijeções $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'$ e $\mathcal{L}' \to \mathcal{B}'$ para obter um feixe $\widehat{\mathcal{L}}$, e como a composta de $\widehat{\mathcal{L}} \to \mathcal{B}''$ com $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$ é sobrejetiva, podemos aplicar novamente sobre $\widehat{\mathcal{L}} \to \mathcal{B}$ e $\mathcal{L} \to \mathcal{B}$ para obter $\widetilde{\mathcal{L}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{B} \\
\widetilde{\mathcal{L}} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \widehat{\mathcal{L}} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d] & \mathcal{B}'' \arrow[u] \arrow[d] \\
 & \mathcal{L}' \arrow[r] & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

Tome $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ feixes localmente livres tais que existam morfismos sobrejetivos $\mathcal{F} \to \mathcal{A}$ e $\mathcal{F}' \to \mathcal{A}'$. Vamos definir $\mathcal{L}'' := \widetilde{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ e $\mathcal{A}'' := \ker(\widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{B}'') \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$. Temos naturalmente um morfismo sobrejetivo $\mathcal{L}'' \to \mathcal{B}''$ através da projeção $\mathcal{L}'' \to \widetilde{\mathcal{L}}$, com o núcleo sendo $\mathcal{A}''$, portanto a sequência será exata. Analogamente temos morfismos sobrejetivos $\mathcal{A}'' \to \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'' \to \mathcal{A}'$ através de suas respectivas projeções sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$. $\square$

Proposição 5.28. Seja $K^\bullet$ um complexo finito de feixes coerentes. Então

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[K^i] = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathcal{H}^i(K^\bullet)].$$

Demonstração: Para cada i temos as seguintes sequências exatas:

$$0 \to \ker d^i \to K^i \to \operatorname{Im} d^i \to 0;$$

$$0 \to \operatorname{Im} d^{i-1} \to \ker d^i \to \mathcal{H}^i(K^\bullet) \to 0.$$

Logo $[K^i] = [\ker d^i] + [\operatorname{Im} d^i] = [\mathcal{H}^i(K^\bullet)] + [\operatorname{Im} d^{i-1}] + [\operatorname{Im} d^i]$. Portanto

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[K^i] &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i([\mathcal{H}^i(K^\bullet)] + [\operatorname{Im} d^{i-1}] + [\operatorname{Im} d^i])\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathcal{H}^i(K^\bullet)] - \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^{i-1}[\operatorname{Im} d^{i-1}] + \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\operatorname{Im} d^i])\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i[\mathcal{H}^i(K^\bullet)]. \quad \square\end{aligned}$$

Definição 5.29. Definiremos o grupo $K_1(X)$ de maneira análoga à definição 5.24, utilizando fibrados vetoriais sobre uma variedade quase projetiva X no lugar de feixes coerentes. Isto é, $K_1(X)$ é o grupo quociente do grupo das somas formais $\sum a_i[E_i]$, onde $[E_i]$ são classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X, sobre o subgrupo gerado por elementos da forma $[E] - [E'] - [E'']$ tal que exista uma sequência exata

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0.$$

Teorema 5.30. Seja X uma variedade quase projetiva irredutível e não singular. O homomorfismo $K_1(X) \to K(X)$ dado por $E \mapsto \mathcal{L}_E$ é isomorfismo.

Demonstração: Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente, então existe uma resolução localmente livre

$$0 \to E_n \to \dots E_0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

com $n \leq \dim X$. Portanto $[\mathcal{F}] = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1}[E_i]$, o que nos mostra que o morfismo é sobrejetivo. Para mostrar que é um isomorfismo vamos definir um morfismo inverso $\gamma : K(X) \to K_1(X)$ que leva $[\mathcal{F}]$ em $\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1}[E_i]$ (classe em $K_1(X)$). Para ver que ela está bem definida tome duas resoluções localmente livres $E_\bullet$ e $E'_\bullet$ de $\mathcal{F}$. Pelo lema 5.27, tome $\mathcal{L} = E_0$, $\mathcal{L}' = E'_0$, $\mathcal{A} = \ker(E_0 \to \mathcal{F})$, $\mathcal{A}' = \ker(E'_0 \to \mathcal{F})$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}' =$

$\mathcal{B}'' = \mathcal{F}$, com os morfismos sobrejetivos sendo a identidade. Existe então E_0'' e $\mathcal{A}_0''$ com os morfismos sobrejetivos como no lema. Podemos repetir este processo para construir E_i'' indutivamente usando $\mathcal{L} = E_i$, $\mathcal{L}' = E_i'$, $\mathcal{A} = \ker(E_i \to E_{i-1})$, $\mathcal{A}' = \ker(E_i' \to E_{i-1}')$, $\mathcal{B} = \ker(E_{i-1} \to E_{i-2})$, $\mathcal{B}' = \ker(E_{i-1}' \to E_{i-2}')$, e $\mathcal{B}'' = \mathcal{A}_{i-1}''$. Logo temos uma resolução localmente livre $E_\bullet''$ de $\mathcal{F}$ com morfismos sobrejetivos $E_\bullet'' \to E_\bullet$ e $E_\bullet'' \to E_\bullet'$. Seja $F_\bullet := \ker(E_\bullet'' \to E_\bullet)$. Temos uma sequência exata

$$0 \to F_\bullet \to E_\bullet'' \to E_\bullet \to 0.$$

Ou seja, $\sum_{i=0}^n [E_i''] = \sum_{i=0}^n [E_i] + \sum_{i=0}^n [F_i]$. Aplicando a sequência exata longa de homologia, para $i > 0$ temos $\mathcal{H}_i(F_\bullet) = 0$ pois $\mathcal{H}_i(E_\bullet'') = \mathcal{H}_{i+1}(E_\bullet) = 0$, e como $\mathcal{H}_0(E_\bullet'') \cong \mathcal{H}_0(E_\bullet) \cong \mathcal{F}$, então $\mathcal{H}_0(F_\bullet) = 0$. Isto é, $F_\bullet$ é exato, logo $\sum_{i=0}^n [F_i] = 0$ e $\sum_{i=0}^n [E_i''] = \sum_{i=0}^n [E_i]$. Podemos fazer o mesmo para $E_\bullet'$, o que nos dá $\sum_{i=0}^n [E_i] = \sum_{i=0}^n [E_i']$. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ATIYAH M. F.; MACDONALD I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969

[2] BOREL A.; SERRE J. Le théorème de Riemann-Roch. *Bulletin de la S. M. F.*, tome 86, p. 97-136, 1958.

[3] FULTON W. *Algebraic Curves:* An Introduction to Algebraic Geometry. 2008.

[4] HARTSHORNE R. *Algebraic Geometry*. 1st ed. Springer, 1977 (Graduate Texts in Mathemathics, v. 52).

[5] LE POTIER J. *Géométrie Algébrique*. 2002.
https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2_le_potier.pdf

[6] MUSTAŢĂ M. *Lecture notes for Math 631 & 632:* Introduction to algebraic geometry.
http://www-personal.umich.edu/~mmustata/ag0523.pdf

[7] SERRE J. Faisceaux Algébriques Cohérents. *Annals of Mathematics*, Vol. 61, No. 2, March, 1955.

[8] SHAFAREVICH I. R. *Basic Algebraic Geometry 1:* Varieties in Projective Space. 3rd ed. Springer, 2007.

[9] SHAFAREVICH I. R. *Basic Algebraic Geometry 2:* Schemes and Complex Manifolds. 3rd ed. Springer, 2007.