



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Alexander Vidal Cantoral Vilchez

Dissertação de Mestrado

Orientador: Sergio A. Romaña Ibarra

Teoremas de Rigidez para Fluxos Geodésicos Anosov
em Variedades de Volume Finito

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2020

Teoremas de Rigidez para Fluxos Geodésicos Anosov em Variedades de Volume Finito

Alexander Vidal Cantoral Vilchez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sergio A. Romaña Ibarra

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2020

Teoremas de Rigidez para Fluxos Geodésicos Anosov em Variedades de Volume Finito

Alexander Vidal Cantoral Vilchez

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Dr. SERGIO A. ROMAÑA IBARRA - UFRJ

Dr. ÍTALO DOWELL LIRA MELO - UFPI

Dr. ALEXANDER EDUARDO ARBIETO MENDOZA - UFRJ

Dr. KATRIN GRIT GELFERT - UFRJ

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2020

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à meus pais e irmãos, pelo apoio incondicional em cada uma das minhas decisões. Obrigado por acreditar em mim e nas minhas capacidades.

Quero agradecer também à meu orientador Sergio Romãna, pela paciência e dedicação, por todos os detalhes e momentos dedicados a esclarecer as dúvidas que surgiram ao longo deste trabalho contribuindo significativamente em minha formação acadêmica.

A meus amigos da pós-graduação, pelos momentos passados fora da sala de aula e principalmente à galera peruana pela ajuda oferecida nos momentos difíceis.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro nestes dois anos de estudo.

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	viii
1 Variedades Riemannianas	1
1.1 Métricas Riemannianas e conexões afins	1
1.2 Geodésicas e a aplicação exponencial	5
1.3 Curvatura	9
1.4 Campos de Jacobi	11
2 Caracterização dos Fluxos Geodésicos	14
2.1 A métrica de Sasaki	14
2.2 O fluxo geodésico	17
2.3 A diferencial do fluxo geodésico	20
3 Rigidez em variedades de volume finito	22
3.1 Fluxos geodésicos Anosov	22
3.2 Variedades Riemannianas sem pontos conjugados	24
3.3 Equação de Riccati	27
3.4 Teorema de rigidez	30
4 Rigidez por conjugações entre fluxos geodésicos Anosov	44
4.1 Fluxos conjugados	44
4.2 Teoremas de rigidez para fluxos conjugados	48
4.3 Fluxos conjugados em órbitas	54
5 Apêndice 1: Variedades Diferenciáveis	56
5.1 Variedades Diferenciáveis	56
5.2 O Espaço Tangente	58

5.3 Campos Vetoriales	59
6 Apêndice 2: Alguns Conceitos da Teoria Ergódica	61
6.1 Medidas invariantes	61
6.2 Ergodicidade	61
6.3 Teorema Ergódico de Birkhoff	62
Bibliografia	64

Resumo

Nesta dissertação vamos dar alguns teoremas de rigidez que mostrarão a relação que existe entre a dinâmica e a geometria dos fluxos geodésicos.

Na primeira parte, estudaremos as variedades Riemannianas sem pontos conjugados e daremos a demonstração do teorema principal do texto, que relaciona a rigidez no sentido dinâmico e no sentido geométrico em variedades Riemannianas completas, de volume finito e curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$ para alguma constante $c > 0$, supondo que o fluxo geodésico é Anosov. Destacamos o fato de que nosso resultado não precisa da compacidade da variedade. Na segunda parte, estudaremos as conjugações e as conjugações em órbitas de fluxos geodésicos com certas condições nas suas curvaturas, obtendo importantes resultados de rigidez como consequência do teorema principal da primeira parte.

Palavras chave: Fluxo geodésico, métrica de Sasaki, fluxo geodésico Anosov, pontos conjugados, equação de Riccati, conjugação de fluxos geodésicos.

Abstract

In this dissertation, we will give some rigidity theorems that will show the relationship between the dynamics and geometry of geodesic flows.

In the first part, we will study the Riemannian manifolds without conjugated points and give the proof of the text's main theorem, which relates the rigidity in the dynamic sense and in the geometric sense in complete Riemannian manifolds of finite volume and sectional curvature bounded below by $-c^2$ for some constant $c > 0$, assuming that the geodesic flow is Anosov. We emphasize that our result does not require the compactness of the manifold.

In the second part, we will study the conjugations and orbit conjugations of geodesic flows with certain conditions in their curvatures, obtaining important results of rigidity as a consequence of the main theorem of the first part.

Key words: Geodesic flow, Sasaki metric, Anosov geodesic flow, conjugate points, Riccati equation, conjugation of geodesic flow.

Introdução

Os fluxos geodésicos aparecem naturalmente quando temos uma métrica Riemanniana em uma variedade completa. Suas propriedades estão intimamente ligadas à geometria da variedade. Estes fluxos carregam uma dinâmica natural, dadas pelas geodésicas da variedade, o qual merece e desperta o interesse dos pesquisadores em dinâmica. Por exemplo, o primeiro em perceber que os fluxos geodésicos ligados a métricas de curvatura negativa são caóticos, foi Anosov no seu artigo [1]. Esses fluxos geodésicos são chamados sistemas uniformemente hiperbólicos ou simplesmente "*sistemas Anosov*". Quando a variedade é compacta e de curvatura negativa, estes fluxos geodésicos são estavelmente ergódico, misturador e tem decaimento exponencial de correlações. Quando a variedade não é compacta, mas a curvatura é negativamente "*pinched*" (limitada entre duas constantes negativas), o mesmo argumento de Anosov implica que o fluxo geodésico também é Anosov (ver [19]). No entanto, no caso não compacto, o sinal negativo da curvatura não implica que tenhamos um fluxo geodésico do tipo Anosov (ver [11]).

Por vários anos pensou-se que a curvatura negativa era necessária para ter dinâmicas do tipo Anosov para o fluxo geodésico, mas em [12], Eberlein mostrou que existem variedades com abertos de curvatura zero e com fluxo geodésico Anosov. No entanto, Eberlein no mesmo artigo, provou que a curvatura negativa esta sempre presente em métricas Anosov, pois toda geodésica deve ter pontos de curvatura negativa. Recentemente, em [11], provaram que na verdade, quando o fluxo geodésico é Anosov, então a curvatura negativa é, em média, uniformemente distribuída. Um tipo de pergunta natural que pode ser feita na direção contrária é a seguinte:

Pergunta: Que tipo de propriedades geométricas impõe a propriedade Anosov?

Esta pergunta é bastante geral, pois vai depender do tipo de invariante e/ou propriedade geométrica que procuramos, no entanto existem alguns resultados que visam dar uma resposta concreta para esta pergunta. Por exemplo, Klingenberg em [18], mostra que uma variedade compacta com fluxo geodésico Anosov não tem pontos conjugados, e Mañé em [22] mostra o mesmo resultado para variedades de volume finito. Vale a pena ressaltar que este resultado continua em abertos para variedades de volume infinito. Também podemos ressaltar um artigo de R. Ruggiero (ver [26]), onde ele prova que a propriedade de uma variedade de não ter pontos conjugados persis-

tentemente é uma propriedade das métricas Anosov.

Nesta dissertação vamos dar vida também a uma possível resposta para a pergunta anterior, de fato, mostraremos alguns resultados que nos dão uma importante relação entre a geometria e a dinâmica do fluxo geodésico, os quais estão baseados no artigo [10].

No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos importantes da geometria Riemanniana, como conexões, geodésicas, curvatura e os campos de Jacobi, ferramenta importante que relaciona as geodésicas com a curvatura. Podem se encontrar as demonstrações dos teoremas e proposições mencionadas neste capítulo nos livros [8] e [21].

No capítulo dois, apresentamos a forma de como construir uma métrica no fibrado tangente de uma variedade. Estudamos também os fluxos geodésicos e suas propriedades. Restringindo a métrica ao fibrado tangente unitário de uma variedade de volume finito, podemos construir uma medida de probabilidade nesse espaço chamada a *medida de Liouville*. Finalizamos mostrando que o comportamento da diferencial do fluxo geodésico está determinado pelos campos de Jacobi.

No capítulo três, estudamos os fluxos geodésicos Anosov e as variedades sem pontos conjugados, mostramos que os subfibrados estável e instável podem se ver como gráficos de aplicações simétricas que satisfazem a equação de Riccati. Damos nosso primeiro resultado importante que diz que rigidez no sentido dinâmico fornece rigidez no sentido geométrico:

Teorema 1. Seja M uma variedade Riemanniana completa, de volume finito e curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$. Suponha que o fluxo geodésico é Anosov com constante de contração λ , então $\lambda \geq e^{-c}$. Além disso, a igualdade se cumpre se e somente se a curvatura seccional de M é constante igual a $-c^2$.

A prova deste teorema será realizada em duas etapas. Na primeira etapa, comprovamos a desigualdade entre contração e a exponencial, supondo apenas que não há pontos conjugados. Na segunda etapa, mostramos que os expoentes de Lyapunov são constantes para todos os pontos e, finalmente, usando argumentos geométricos associados aos fluxos geodésicos em variedades sem pontos conjugados, concluímos que a curvatura é constante. Enfatizamos o fato de que não precisamos da compacidade da variedade.

O capítulo quatro tem como objetivo obter rigidez geométrica a partir das conjugações entre fluxos geodésicos Anosov de variedades que satisfazem alguma relação entre as curvaturas seccionais. De fato o segundo resultado desta dissertação é:

Teorema 2. Sejam M, N duas variedades Riemannianas completas tais que as curvaturas seccionais satisfazem $\alpha^2 \cdot \inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N \geq -b^2$. Denotemos por ϕ_M^t e ϕ_N^t os fluxos geodésicos de M e N respectivamente. Suponha que M tem volume finito e o fluxo ϕ_M^t é Anosov. Se ϕ_M^t e ϕ_N^t são α -equivalentes então $K_M \equiv \frac{\sup K_N}{\alpha^2} < 0$.

A ideia da demonstração do teorema 2 é conseguir $\lambda = e^{-\frac{\alpha}{a}}$ como uma constante de contração para ϕ_M^t e obter a rigidez como consequência do teorema 1. Além disso, mostraremos a regularidade das conjugações de dois fluxos geodésicos Anosov sob certas condições métricas. De fato:

Teorema 3. Sejam M, N duas variedades Riemannianas compactas com igual dimensão. Suponha que as curvaturas seccionais satisfazem $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N$ e M não tem pontos conjugados. Se f é uma 1-conjugação entre os fluxos ϕ_M^t e ϕ_N^t , então $K_M \equiv K_N \equiv \sup K_N < 0$ e f é \mathcal{C}^1 .

Note que há uma diferença relevante entre o teorema 2 e teorema 3, visto que no segundo o fluxo geodésico da variedade M não tem por que ser Anosov, precisa simplesmente a variedade M não tenha pontos conjugados, condição a qual se obtêm de graça quando o fluxo geodésico é Anosov. Para a prova do teorema 3, usamos as conjugações para transferir toda a informação da hiperbolicidade de ϕ_N^t para ϕ_M^t e seguimos as técnicas usadas no teorema 1 para chegar ao resultado. Feldman e Ornstein (ver [13]) mostraram que as conjugações entre fluxos geodésicos de variedades compactas com curvatura negativa são de classe \mathcal{C}^1 . Usaremos este resultado depois de mostrar que M tem curvatura negativa. Poucos anos depois, Pollicott (ver [25]) mostrou que para o caso de superfícies compactas com curvatura negativa, a conjugação era de fato de classe \mathcal{C}^∞ . Finalmente, estendemos alguns resultados obtidos para o caso de conjugações em órbitas, isto é, conjugações que não necessariamente preservam o tempo.

Finalizamos o trabalho com dois apêndices. No primeiro, apresentamos alguns conceitos e propriedades básicas de variedades diferenciáveis. No segundo apêndice, damos alguns conceitos de teoria ergódica usados nos capítulos anteriores e damos a demonstração do teorema de Birkhoff para fluxos.

Capítulo 1

Variedades Riemannianas

Neste primeiro capítulo, introduziremos alguns conceitos fundamentais da geometria Riemanniana que serão usados ao longo do texto. A geometria Riemanniana surgiu para poder definir alguns conceitos geométricos como comprimento, ângulo e distância em variedades. As referências são [8] e [21].

1.1 Métricas Riemannianas e conexões afins

Definição 1.1.1 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto interno $g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente, isto é, para todo par de campos de vetores diferenciáveis X, Y em uma vizinhança V de M , a função*

$$(X, Y) : p \in V \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

é diferenciável. A variedade M munida de uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana e denotada por (M, g) .

Observação 1.1.2 *Uma mesma variedade pode ter várias métricas Riemannianas, no caso de não houver confusão, o denotamos simplesmente por M .*

Seja $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de M em p e $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ o sistema de coordenadas locais, então uma base do espaço tangente T_pM é $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$. Sejam X e Y dois campos de vetores diferenciáveis em M , localmente podemos escrever

$$X_q = \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad Y_q = \sum_{j=1}^n b_j(q) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

Então,

$$\langle X_q, Y_q \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n a_i(q) b_j(q) \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p$$

Portanto, a métrica Riemanniana em p pode ser escrito em termos das funções

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p$$

Podemos ver que $g_{ij} = g_{ji}$. Se consideramos a matriz $G = (g_{ij})$, segue que G é uma matriz simétrica e definida positiva.

Exemplo 1.1.3 *Seja (N, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow N$ uma imersão, isto é, f é diferenciável em M e para todo $p \in M$ a diferencial $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva. Então f induz uma métrica em M dada por*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d_p f(u), d_p f(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall u, v \in T_p M$$

A métrica de M é chamada a métrica induzida por f .

Exemplo 1.1.4 *Sejam (M, g) e (\tilde{M}, \tilde{g}) duas variedades Riemannianas, podemos definir uma métrica Riemanniana $\hat{g} = g \oplus \tilde{g}$ para a variedade produto $M \times \tilde{M}$, chamada a métrica produto, da seguinte forma*

$$\hat{g}_{(p,q)}((v, \tilde{v}), (w, \tilde{w})) = g_p(v, w) + \tilde{g}_q(\tilde{v}, \tilde{w})$$

para todo $(v, \tilde{v}), (w, \tilde{w}) \in T_p M \oplus T_q \tilde{M} \cong T_{(p,q)}(M \times \tilde{M})$.

Uma métrica Riemanniana também permite definir uma noção de volume em variedades orientadas.

Definição 1.1.5 *Seja M uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um conjunto aberto, conexo e com fecho compacto, tal que Ω está contida numa vizinhança coordenada U de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a fronteira de $\varphi(\Omega)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n . O volume de Ω é definido pela integral em \mathbb{R}^n*

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\varphi(\Omega)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n$$

Esta expressão está bem definida, isto é, não depende da escolha da parametrização.

Usando partições da unidade da variedade se consegue mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1.1.6 *Toda variedade diferenciável tem pelo menos uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.7 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos:*

i. A norma de um vetor tangente $v \in T_p M$ como

$$\|v\| = \langle v, v \rangle_p^{1/2}$$

ii. O ângulo entre dois vetores tangentes $v, w \in T_p M$ é o único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\|v\| \|w\|}$$

iii. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável por partes, definimos o comprimento de γ como

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Definição 1.1.8 Dois campos vetoriais X, Y de M são chamados perpendiculares se $\langle X_p, Y_p \rangle = 0$ para todo $p \in M$.

De agora em diante, consideraremos variedades Riemannianas e denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis de M .

Definição 1.1.9 Uma conexão afim em uma variedade M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \nabla_{fX+gZ} Y = f \nabla_X Y + g \nabla_Z Y,$$

$$(ii) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(iii) \quad \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e todas as funções diferenciáveis f, g definidas em M e com valores em \mathbb{R} . Dizemos que $\nabla_X Y$ é a derivada covariante do campo Y na direção de X .

A definição do conexão atende a necessidade de definir uma noção de derivação intrínseca para campos vetoriais. O nome conexão se refere exatamente à ideia de conectar localmente os espaços tangentes de uma variedade.

Proposição 1.1.10 Seja ∇ uma conexão afim em uma variedade M . Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ são campos vetoriais que se expressam em coordenadas locais como

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \partial_j$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, então:

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \sum_{j=1}^n X(b_j) \partial_j \quad (1.1)$$

Em particular, $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas de X_p e do valor de Y ao longo de uma curva passando por p e com vetor tangente X_p em p .

Se consideramos os símbolos de Christoffel $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$, substituindo na equação (1.1) obtemos

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \Gamma_{ij}^k + X(b_k) \right) \partial_k$$

Definição 1.1.11 *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é uma aplicação que associa a cada $t \in I$ um vetor tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$.*

A seguinte proposição mostra que a existência de uma conexão em uma variedade permite derivar campos vetoriais ao longo de curvas na variedade. Em particular, é possível falar em aceleração de uma curva e portanto de geodésicas.

Proposição 1.1.12 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α , chamado a derivada covariante de V ao longo de α , tal que:*

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(ii) \quad \frac{D}{dt}(fV) = f \frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}V \text{ onde } f \text{ é uma função diferenciável em } I.$$

$$(iii) \quad \text{Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathcal{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(\alpha(t)), \text{ então}$$

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$$

Definição 1.1.13 *Seja M uma variedade com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é chamado paralelo se*

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0.$$

Um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$ é chamado um campo paralelo se ele é paralelo ao longo de qualquer curva em M .

Proposição 1.1.14 *Seja M uma variedade com uma conexão afim ∇ . Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva em M e V_0 um vetor tangente a M em $\alpha(t_0), t_0 \in I$. Então existe um único campo paralelo V ao longo de α tal que $V(t_0) = V_0$. Este campo é chamado o transporte paralelo de V_0 ao longo de α .*

Definição 1.1.15 *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . Dizemos a conexão é compatível com a métrica quando para toda curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ e para todo par de campos de vetores paralelos V, W ao longo de α tivermos $\langle V, W \rangle \equiv \text{constante}$.*

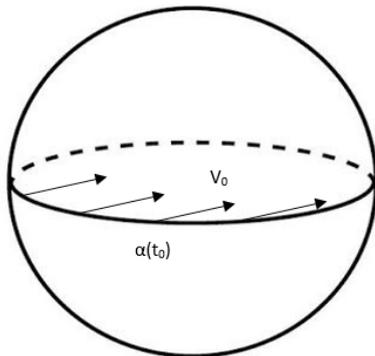


Figura 1.1: Transporte paralelo de V_0

Proposição 1.1.16 *Uma conexão afim é compatível com a métrica se e somente se para todo par de campos de vetores V, W ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad \forall t \in I.$$

Sempre é possível encontrar uma única conexão que seja compatível com a métrica da variedade e que também seja simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX$. Esta conexão é chamada a *conexão de Levi-Civita*, uma ferramenta que abrirá uma porta para o estudo das geodésicas, curvatura e outros conceitos da geometria Riemanniana. Concluímos que se $V(t)$ e $W(t)$ são campos paralelos ao longo de α , pela proposição anterior tanto as normas como o ângulo entre esses campos são constantes para cada t .

1.2 Geodésicas e a aplicação exponencial

De agora em diante, cada vez que falemos de variedades Riemannianas, vamos supor que elas estão munidas com suas conexões de Levi-Civita.

Definição 1.2.1 *Uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ em uma variedade Riemanniana M é chamada uma geodésica de M se*

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$$

Geometricamente, uma geodésica é uma curva com campo de velocidade paralelo ao longo da curva e portanto não muda de direção. Segue da proposição 1.1.16 que $\|\gamma'(t)\|$ é constante.

Definição 1.2.2 *Uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ é normalizada se $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$.*

Observação 1.2.3 *Toda geodésica, que não é um ponto, pode ser normalizada através de uma reparametrização pelo comprimento de arco*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(s)\| ds$$

onde $t_0 \in I$.

Se escrevemos a curva $\gamma(t)$ em coordenadas locais $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, então pela equação (1.1) temos que γ é uma geodésica se e somente se

$$0 = \frac{D\gamma'}{dt} = \sum_k \left(\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \partial_k \quad (1.2)$$

A partir da equação (1.2) e a teoria das equações diferenciáveis ordinárias mostra-se o seguinte resultado:

Teorema 1.2.4 (Existência e unicidade) *Seja M uma variedade Riemanniana. Para cada $p \in M$, $v \in T_p M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma única geodésica $\gamma_{(p,v)} : I \rightarrow M$ tal que $\gamma_{(p,v)}(t_0) = p$ e $\gamma'_{(p,v)}(t_0) = v$. A unicidade significa que se existe outra geodésica $\beta : J \rightarrow M$ tal que $\beta_{(p,v)}(t_0) = p$ e $\beta'_{(p,v)}(t_0) = v$ então $\gamma(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

Exemplo 1.2.5 *As geodésicas de \mathbb{R}^n são retas, pois elas devem satisfazer a equação $\frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0$. Na esfera \mathbb{S}^2 , os grandes círculos, isto é, círculos cujo centro é o centro da esfera, são geodésicas.*

O seguinte lema mostra que se queremos aumentar a velocidade da geodésica, precisamos diminuir o seu intervalo de definição e vice-versa.

Lema 1.2.6 (Homogeneidade de uma geodésica) *Se a geodésica $\gamma(t, p, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$ então a geodésica $\gamma(t, p, av)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e*

$$\gamma(at, p, v) = \gamma(t, p, av)$$

Demonstração. Seja $\beta : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$ a curva definida por $\beta(t) = \gamma(at, p, v)$. Podemos ver que β é uma curva que no tempo $t = 0$ passa pelo ponto p e com velocidade av . Além disso, temos

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\beta}{dt} \right) = \nabla_{\beta'(t)} \beta'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at,p,v)} \gamma'(at,p,v) = 0$$

i.e. β é uma geodésica. Por unicidade temos que $\beta(t) = \gamma(at, p, v) = \gamma(t, p, av)$. □

Proposição 1.2.7 *Seja M uma variedade Riemanniana. Então para cada $p \in M$ existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{V} \rightarrow M$ onde*

$$\mathcal{V} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon\}$$

tais que $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que satisfaz as condições iniciais $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$ para todo $(q, v) \in \mathcal{V}$.

A proposição anterior nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da seguinte maneira.

Definição 1.2.8 Para cada $p \in M$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{E}_p = \{v \in T_p M : \gamma_{(p,v)} \text{ está definida em um intervalo que contém } [0, 1] \text{ com } \gamma_{(p,v)}(0) = p\}$$

Definimos a aplicação exponencial $exp_p : \mathcal{E}_p \rightarrow M$ por

$$exp_p(v) = \gamma_{(p,v)}(1) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(\|v\|, p, \frac{v}{\|v\|}\right)$$

Geometricamente, $exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo a geodésica, a partir de p e com velocidade inicial $\frac{v}{\|v\|}$, um comprimento igual a $\|v\|$. Pelo lema de homogeneidade temos que $exp_p(tv) = \gamma(1, p, tv) = \gamma(t, p, v)$ para todo t onde γ estiver definida, então a aplicação exponencial transforma linhas retas que passam pela origem em geodésicas que começam em p .

Proposição 1.2.9 Dado $p \in M$, existe um $R > 0$ tal que $exp_p : B_R(0) \subset T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_R(0)$ sobre um aberto de M .

Demonstração. Pelo lema 1.2.6 temos que

$$\begin{aligned} d_0(exp_p)(v) &= \left. \frac{d}{dt} exp_p(tv) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, p, tv) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(t, p, v) \right|_{t=0} \\ &= v \end{aligned}$$

Portanto $d_0(exp_p) = I$. Pelo teorema da função inversa, exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança de 0. \square

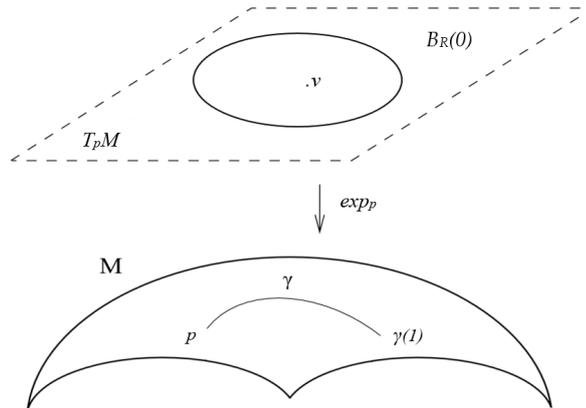


Figura 1.2: A aplicação exponencial

Definição 1.2.10 Se \exp_p é um difeomorfismo de uma vizinhança U da origem de T_pM sobre uma vizinhança V de p em M , dizemos que V é uma vizinhança normal de p . No caso que $\overline{B_R(0)} \subset U$, chamamos $\exp_p(B_R(0)) = B_R(p)$ a bola normal de centro p e raio R .

É possível definir uma distância em uma variedade Riemanniana conexa M da seguinte maneira. Para $p, q \in M$ definimos

$$d(p, q) = \inf \{l(\alpha) : \alpha \text{ é uma curva diferenciável por partes que liga } p \text{ a } q\}$$

A seguinte proposição mostra que as geodésicas minimizam distâncias localmente.

Proposição 1.2.11 Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $B(p)$ uma bola normal centrada em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(p)$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow B(p)$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando p a q , então $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. No caso que $l(\gamma) = l(\alpha)$, então necessariamente $\gamma([0, 1]) = \alpha([0, 1])$.

Enfatizamos o fato de que este resultado vale apenas localmente, isto é, um segmento de geodésica suficientemente grande pode não ser minimizante. Um claro exemplo disso acontece nas geodésicas da esfera que partem de um ponto p , elas deixam de ser minimizantes depois de passar pelo antípoda de p .

A proposição 1.2.11 permite mostrar que (M, d) é um espaço métrico e que a topologia induzida pela métrica d em M coincide com a topologia inicial de M .

Definição 1.2.12 Uma variedade M é geodésicamente completa, ou simplesmente completa, se para todo $p \in M$ as geodésicas $\gamma(t)$ partindo de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

O seguinte teorema fornece um critério simples para determinar quando uma variedade Riemanniana é geodésicamente completa.

Teorema 1.2.13 (Hopf-Rinow) Seja M uma variedade Riemanniana conexa e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) \exp_p está definida em todo T_pM .
- (ii) M é completa como espaço métrico.
- (iii) M é geodésicamente completa.
- (iv) Os limitados e fechados de M são compactos.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que para todo $p, q \in M$ existe uma geodésica minimizante que liga p a q .

1.3 Curvatura

Nesta seção, apresentamos a noção de curvatura, curvatura seccional e curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana. Essas noções generalizam a curvatura Gaussiana, conceito que desempenha um papel fundamental na geometria diferencial de superfícies.

Definição 1.3.1 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ tal que*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde $[X, Y] = XY - YX$.

Se consideramos \mathbb{R}^n com a métrica usual obtemos $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, então podemos pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclídeana. As variedades com $R = 0$ são aquelas variedades que são localmente isométricas a \mathbb{R}^n .

Denotemos por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis definidas em M e com valores em \mathbb{R} .

Proposição 1.3.2 *R tem as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z)$$

$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z)$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(fZ + W) = fR(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

para todo $f \in \mathcal{D}(M)$.

(iii) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, R é antissimétrico, isto é,*

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

(iv) *Para todo $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ tem-se*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$$

Definição 1.3.3 *Seja M uma variedade riemanniana e σ um subespaço bidimensional de T_pM . A curvatura seccional de M associado a σ é definida por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

onde $X, Y \in T_pM$ são quaisquer vetores que formam uma base para σ .

Claramente, a curvatura determina a curvatura seccional. Reciprocamente, o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ , determina completamente a curvatura R .

Proposição 1.3.4 *Se R_1 e R_2 são duas aplicações tri-lineares em um espaço vetorial V que satisfazem as propriedades listadas na proposição 1.3.2 e também*

$$K_1(X, Y) = K_2(X, Y)$$

para todos os vetores linearmente independentes $X, Y \in V$, então $R_1 = R_2$.

Dizemos que uma variedade M tem curvatura seccional constante se a curvatura seccional de todos os planos seccionais em todos os pontos são iguais. O seguinte lema mostra que no caso de curvatura seccional constante, a curvatura está determinado pela curvatura seccional.

Lema 1.3.5 *Se M tem curvatura seccional constante igual a K , então*

$$R(X, Y)Z = K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$$

Exemplo 1.3.6 *O espaço \mathbb{R}^n tem curvatura seccional constante $K = 0$. A esfera \mathbb{S}^n tem curvatura seccional constante $K = 1$. O espaço hiperbólico \mathbb{H}^n tem curvatura seccional constante $K = -1$.*

Observação 1.3.7 *No caso que $S \subset \mathbb{R}^3$ seja uma superfície regular, então a curvatura seccional de S coincide com a curvatura Gaussiana.*

Definição 1.3.8 *Seja $x \in T_pM$ um vetor unitário e consideremos $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a x . A curvatura de Ricci na direção x é definida por*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle$$

Em outras palavras, para cada vetor unitário $x \in T_pM$, a curvatura de Ricci é a média da soma das curvaturas seccionais de planos gerados por x e os outros vetores da base ortonormal. Esta definição não depende da escolha da base ortonormal.

1.4 Campos de Jacobi

A equação de Jacobi é uma EDO de segunda ordem cujas soluções são campos vetoriais ao longo de uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$. Esses campos contêm informação sobre a geometria da variedade M como veremos mais diante. Desde agora denotaremos a derivada covariante de um campo J como J' .

Definição 1.4.1 *Um campo vetorial J ao longo de uma geodésica γ é chamado campo de Jacobi se satisfaz a equação diferencial*

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0$$

Os campos de Jacobi estão determinados por suas condições iniciais:

Proposição 1.4.2 *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica, Dado $t_0 \in I$ e $V, W \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(t_0) = V$ e $J'(t_0) = W$.*

Demonstração. Sejam $\{E_1, \dots, E_n\}$ campos de vetores paralelos ao longo de γ tal que, para cada $t \in I$, $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$. Fazendo $J(t) = \sum f_i(t)E_i(t)$, podemos expressar a equação de Jacobi da seguinte forma

$$\sum_j \left(f_j'' + \sum_i a_{ij} f_i \right) E_j = 0 \quad (1.3)$$

onde $a_{ij} = \langle R(\gamma', E_i)\gamma', E_j \rangle$.

Temos que (1.3) é um sistema linear de segunda ordem, dando as condições iniciais da equação se consegue mostrar a existência e unicidade. \square

Assim, o conjunto dos campos de Jacobi $\mathcal{J}(\gamma)$ ao longo da geodésica γ tem uma estrutura de espaço vetorial de dimensão $2n$. O próximo resultado mostra que as componentes tangencial e perpendicular de um campo Jacobi são também campos Jacobi.

Proposição 1.4.3 *Seja $f \in C^\infty([a, b])$. O campo $f\gamma' \in \mathcal{J}(\gamma)$ se e somente se $f(t) = At + B$, onde $A, B \in \mathbb{R}$. Assim, todo campo de Jacobi $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ se decompõe de forma única como $J = J^\top + J^\perp$ onde $J^\top = f\gamma'$ e $J^\perp \in \mathcal{J}(\gamma)$ satisfazendo $\langle J^\perp(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.*

Devido a este fato, ao estimar o crescimento da norma de um campo de Jacobi, o único caso interessante só acontece quando J é perpendicular a $\gamma'(t)$.

Proposição 1.4.4 *Seja $J \in \mathcal{J}(\gamma)$. Se $\langle J(t_1), \gamma'(t_1) \rangle = \langle J(t_2), \gamma'(t_2) \rangle = 0$ para $t_1, t_2 \in I$ com $t_1 \neq t_2$, então $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.*

Assim, qualquer campo de Jacobi perpendicular a γ' em dois pontos é um campo perpendicular. Apresentamos como exemplos de campos de Jacobi aos campos variacionais de variações por geodésicas.

Definição 1.4.5 Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica. Uma variação de γ por geodésicas é uma aplicação diferenciável

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tal que

(i) $F(0, t) = \gamma(t)$;

(ii) A curva $t \rightarrow F(s, t)$ é uma geodésica para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esta curva é chamada curva principal da variação.

Para cada t fixo, a curva $s \rightarrow F(s, t)$ é chamada curva transversal da variação.

Definição 1.4.6 Um campo vetorial ao longo de F é uma aplicação diferenciável

$$V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$$

tal que $V(s, t) \in T_{F(s, t)}M$.

Fixando s_0 , a aplicação $t \rightarrow F(s_0, t)$ define uma curva em M , e $\frac{\partial F}{\partial t}$ é um campo de vetores ao longo desta curva. Isto define $\frac{\partial F}{\partial t}$ para todo (s, t) . Analogamente se define $\frac{\partial F}{\partial s}$.

Seja V um campo vetorial ao longo de F , podemos calcular a derivada covariante de V ao longo das curvas principais ou ao longo das curvas transversais, estes campos serão denotados como $\frac{DV}{dt}$ e $\frac{DV}{ds}$ respectivamente.

Definição 1.4.7 Seja F uma variação de γ por geodésicas, o campo variacional de F é o campo vetorial ao longo de γ dado por

$$V(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(0, t)$$

Exemplo 1.4.8 Consideremos a geodésica dada pela função exponencial $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, para $t \in [0, 1]$. Seja $w \in T_v(T_pM)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p(u)$ está definida para todo $u = tv(s)$ com $0 \leq t \leq 1$ e $-\varepsilon < s < \varepsilon$, onde $v(s)$ é uma curva em T_pM com $v(0) = v$ e $v'(0) = w$. Então

$$\begin{aligned} F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] &\rightarrow M \\ (s, t) &\rightarrow \exp_p(tv(s)) \end{aligned}$$

é uma variação de γ por geodésicas e o campo variacional é

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, t) = d_{tv}(\exp_p)(tv)$$

Com ajuda dos seguintes lemas vamos mostrar que o campo variacional de uma variação por geodésicas satisfaz a equação de Jacobi.

Lema 1.4.9 (Lema de simetria) *Seja $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma variação por geodésicas. Então*

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial s}$$

Lema 1.4.10 *Seja $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma variação por geodésicas e V um campo vetorial ao longo de F . Então*

$$\frac{D}{dt} \frac{DV}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{DV}{dt} = R \left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) V$$

Seja F uma variação de γ por geodésicas. Como as curvas $t \rightarrow F(s, t)$ são geodésicas, então

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Pelo lema de simetria e o lema 1.4.10 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial F}{\partial t} - R \left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial s} + R \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right) \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

Portanto, se $V(t)$ é o campo variacional de uma variação de γ por geodésicas, então ele é um campo de Jacobi. Reciprocamente:

Teorema 1.4.11 *Os campos de Jacobi ao longo da geodésica γ podem ser obtidos através de variações de γ por geodésicas.*

Finalmente, a seguinte proposição é uma propriedade dos campos de Jacobi que será usada nos próximos capítulos.

Proposição 1.4.12 *Seja J um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$. Então,*

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle \quad \forall t \in [0, a]$$

Demonstração. Definimos a função $f(t) = \langle J(t), \gamma'(t) \rangle$ onde $t \in [0, a]$. Das proposições 1.1.16 e 1.3.2 temos que

$$\langle J', \gamma' \rangle' = \langle J'', \gamma' \rangle + \langle J', \gamma'' \rangle = \langle J'', \gamma' \rangle = \langle -R(\gamma', J)\gamma', \gamma' \rangle = 0$$

Então $\langle J', \gamma' \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle$. Além disto, derivando f tem-se

$$f' = \langle J, \gamma' \rangle' = \langle J', \gamma' \rangle + \langle J, \gamma'' \rangle = \langle J', \gamma' \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle$$

Integrando esta última igualdade de 0 até t , obtemos

$$f(t) - f(0) = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t$$

Portanto, $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle$ para todo $t \in [0, a]$. □

Capítulo 2

Caracterização dos Fluxos Geodésicos

Neste capítulo, vamos dar uma métrica Riemanniana ao fibrado tangente TM , chamada a *métrica de Sasaki*, a partir da métrica Riemanniana de M . Introduzimos o conceito fundamental de fluxo geodésico e suas propriedades e mostramos a relação que existe entre a diferencial do fluxo geodésico com os campos de Jacobi. Desde agora, consideramos variedades Riemannianas completas orientáveis sem bordo e dimensão $n \geq 2$. As referências para este capítulo são [24], [5] e [7].

2.1 A métrica de Sasaki

Esta métrica foi originalmente descoberta por Sasaki em 1958 e desenvolvido por Dombrowski em 1963. Para definir a métrica de Sasaki no fibrado tangente, vamos decompor TTM como a soma de dois subfibrados de dimensão n .

Definimos o fibrado tangente de M como $TM = \{(x, v) : x \in M \text{ e } v \in T_x M\}$. Este conjunto tem uma estrutura de variedade $2n$ -dimensional e consideremos $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canónica, isto é, a aplicação diferenciável que transforma $\theta = (x, v) \in TM$ no ponto $\pi(\theta) = x \in M$.

Definição 2.1.1 *Seja $\theta = (x, v) \in TM$. O subespaço vertical $V(\theta)$ é o subespaço de $T_\theta TM$ cujos elementos são vetores tangentes às curvas*

$$\begin{aligned} \sigma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow TM \\ t &\rightarrow (x, v + tw) \end{aligned}$$

em $t = 0$, onde $w \in T_x M$. Em outras palavras,

$$V(\theta) := \ker(d_\theta \pi) = \{\xi \in T_\theta TM : d_\theta \pi(\xi) = 0\}$$

Para definir o subespaço horizontal $H(\theta)$, precisamos introduzir a aplicação conexão K_θ induzida pela conexão de Levi-Civita em M .

Definição 2.1.2 Seja $\theta \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$. Dizemos que uma curva $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ é adaptada a ξ se ela satisfaz as condições iniciais:

$$\begin{cases} z(0) = \theta \\ z'(0) = \xi \end{cases}$$

Definição 2.1.3 Definimos a aplicação

$$K_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_x M$$

da seguinte forma. Seja $\xi \in T_\theta TM$ e $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ uma curva adaptada a ξ . Desde que $\pi \circ z := \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma curva em M , podemos escrever $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, onde Z é um campo vetorial ao longo de α . Definimos:

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{\alpha'} Z(0)$$

O subespaço horizontal em θ se define como

$$H(\theta) := \ker(K_\theta) = \{\xi \in T_\theta TM : K_\theta(\xi) = 0\}$$

Lema 2.1.4 K_θ tem as seguintes propriedades:

1. K_θ é bem definida, isto é, não depende da curva adaptada.
2. K_θ é linear.

Demonstração. Ver [7]. □

Podemos definir o subfibrado horizontal e vertical de TTM como

$$H = \bigcup_{\theta \in TM} \{\theta\} \times H(\theta) \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{\theta \in TM} \{\theta\} \times V(\theta)$$

Outra maneira equivalente de construir o subespaço horizontal é através de levantamentos horizontais.

Definição 2.1.5 Seja $\theta = (x, v) \in TM$. O levantamento horizontal

$$L_\theta : T_x M \rightarrow T_\theta TM$$

se define da seguinte forma. Seja $v' \in T_x M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva adaptada a v' , isto é, $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v'$. Seja $Z(t)$ o transporte paralelo de v ao longo de α e $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ a curva dada por $\sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Então definimos

$$L_\theta(v') := \sigma'(0) \in T_\theta TM.$$

Lema 2.1.6 L_θ tem as seguintes propriedades:

1. L_θ é bem definida, isto é, não depende da curva adaptada.
2. L_θ é linear.
3. $\ker(K_\theta) = \text{im}(L_\theta)$ e $d_\theta\pi \circ L_\theta = \text{Id}_{T_xM}$.
4. As aplicações $d_\theta\pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \rightarrow T_xM$ e $K_\theta|_{V(\theta)} : V(\theta) \rightarrow T_xM$ são isomorfismos lineares.

Demonstração. Ver [7]. □

Como o único vetor $\xi \in H(\theta) \cap V(\theta)$ é o vetor zero e $\dim H(\theta) + \dim V(\theta) = \dim T_\theta TM$, então do lema 2.1.6 concluímos que

$$T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$$

e que a aplicação

$$\begin{aligned} j_\theta : T_\theta TM &\rightarrow T_xM \times T_xM \\ \xi &\rightarrow (d_\theta\pi(\xi), K_\theta(\xi)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. De fato, cada componente é linear então j_θ é linear. Se $j_\theta(\xi) = 0$ então $\xi \in H(\theta) \cap V(\theta) = \{0\}$ mostrando que j_θ é injetiva. Desde que $\dim T_\theta TM = \dim(T_xM \times T_xM)$ concluímos que j_θ é um isomorfismo. Portanto, toda vez que escrevemos $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ significará que identificamos ξ com $j_\theta(\xi)$.

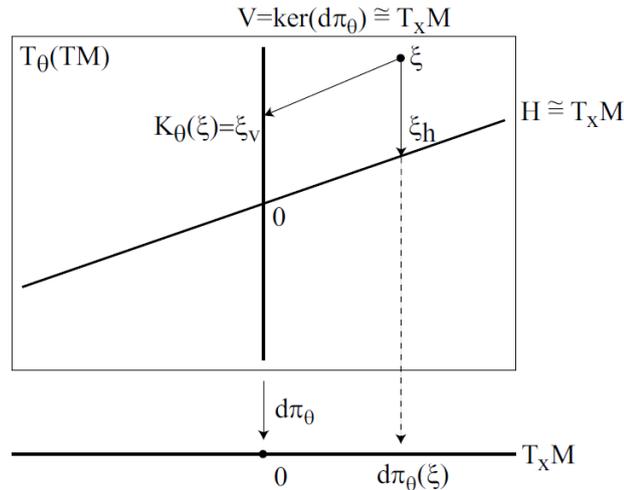


Figura 2.1: Subespaços vertical e horizontal de $T_\theta TM$

Definição 2.1.7 Usando a decomposição $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$, definimos uma métrica Riemanniana em TM que faz $H(\theta)$ e $V(\theta)$ ortogonais. Esta métrica é chamada a métrica de Sasaki e é dada por

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta := \langle d_\theta \pi(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}$$

Finalizamos esta seção falando um pouco de variedades simpléticas.

Definição 2.1.8 Seja M uma variedade. Uma 2-forma ω é chamada simplética se:

- i. ω é fechado, isto é, $d\omega = 0$.
- ii. ω é não degenerado, isto é, se $\omega_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_p M$ então $X = 0$.

O par (M, ω) é chamado uma variedade simplética.

Observação 2.1.9 A existência de uma forma simplética em uma variedade M implica que M tem dimensão par.

Podemos dar a TM uma estrutura de variedade simplética com a 2-forma simplética

$$\begin{aligned} \Omega_\theta(\xi, \eta) &:= \langle d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} - \langle K_\theta(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} \\ &= \langle \xi_h, \eta_v \rangle_{\pi(\theta)} - \langle \xi_v, \eta_h \rangle_{\pi(\theta)} \end{aligned}$$

usando a identificação j_θ .

Definição 2.1.10 Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético com $\dim V = 2n$. Um subespaço $E \subset V$ é chamado Lagrangiano se $\dim E = n$ e a forma simplética satisfaz $\Omega|_{E \times E} = 0$. Uma subvariedade P de uma variedade simplética é chamada Lagrangiana se o espaço tangente $T_x P$ é um subespaço Lagrangiano para todo $x \in P$.

Considerando a variedade simplética (TM, Ω) , concluímos que $H(\theta)$ e $V(\theta)$ são subespaços Lagrangianos.

2.2 O fluxo geodésico

Um fluxo geodésico é, em poucas palavras, um fluxo no fibrado tangente da variedade M gerado por um campo vetorial chamado o *campo geodésico*. As órbitas fechadas do fluxo geodésico são projetadas em geodésicas fechadas através da projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$.

Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja $\gamma_{(x,v)}(t)$ a única geodésica com as condições iniciais:

$$\begin{cases} \gamma_{(x,v)}(0) = x \\ \gamma'_{(x,v)}(0) = v \end{cases}$$

Definição 2.2.1 O fluxo geodésico de M é uma família de difeomorfismos

$$\begin{aligned}\phi^t : TM &\rightarrow TM \\ (x, v) &\rightarrow (\gamma_{(x,v)}(t), \gamma'_{(x,v)}(t))\end{aligned}$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, o fluxo geodésico pega um vetor tangente de uma geodésica e o transporta uma distância t ao longo dessa geodésica.

Observação 2.2.2 A família de difeomorfismos ϕ^t é um fluxo, pois satisfaz as condições $\phi^0 \equiv Id$ e $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$. De fato, claramente $\phi^0 \equiv Id$. Seja $\theta = (x, v) \in TM$, então

$$\phi^t \circ \phi^s(\theta) = \phi^t((\gamma_{(x,v)}(s), \gamma'_{(x,v)}(s)))$$

À imagem de $(\gamma_{(x,v)}(s), \gamma'_{(x,v)}(s))$ pela aplicação ϕ^t , lhe associamos a única geodésica que, no tempo $t = 0$, passa pelo ponto $\gamma_{(x,v)}(s)$ e com velocidade $\gamma'_{(x,v)}(s)$. Pela unicidade, esta geodésica coincide com $\gamma_{(x,v)}(t+s)$, isto é, $\phi^t \circ \phi^s(\theta) = \phi^{t+s}(\theta)$.

Definição 2.2.3 O campo vetorial geodésico $G : TM \rightarrow TTM$ se define como

$$G(\theta) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi^t(\theta) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t))$$

Em outras palavras, G é o campo vetorial com trajetórias da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ onde γ é uma geodésica em M .

Observação 2.2.4 O campo vetorial geodésico tem uma expressão simples em termos da identificação j_θ . De fato, como $\gamma'_\theta(t)$ é o transporte paralelo de v , então $G(\theta) = L_\theta(v)$. Portanto, pelo lema 2.1.6 e a identificação j_θ temos

$$G(\theta) = L_\theta(v) = (d_\theta\pi(L_\theta(v)), K_\theta(L_\theta(v))) = (v, 0)$$

Denotemos por SM o fibrado tangente unitário, isto é,

$$SM = \{(x, v) \in TM : \|v\| = 1\}$$

Como as geodésicas viajam a velocidade constante, para $(x, v) \in SM$ temos que

$$\|\gamma'_{(x,v)}(t)\| = \|\gamma'_{(x,v)}(0)\| = \|v\| = 1$$

então $\phi^t(x, v) \in SM$. Portanto SM é invariante por ϕ^t .

Definição 2.2.5 Seja $\theta = (x, v) \in TM$. Uma 1-forma β em TM se define como

$$\beta_\theta(\xi) := \langle \xi, G(\theta) \rangle_\theta = \langle d_\theta\pi(\xi), v \rangle_x$$

Podemos ver que $V(\theta) \cap T_\theta SM \subset \ker(\beta_\theta)$. Para $\theta \in SM$, denotemos por $S(\theta) = \ker(\beta_\theta)$, então $S(\theta)$ é o complemento ortogonal do subespaço de dimensão um gerado por $G(\theta)$ em relação à métrica de Sasaki. A seguinte proposição caracteriza os elementos de $T_\theta SM$.

Proposição 2.2.6 *Seja $\theta = (x, v) \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$. São equivalentes*

(i) $\xi \in T_\theta SM$.

(ii) $\langle K_\theta(\xi), v \rangle_x = 0$.

Consideremos o fluxo geodésico restrito a SM e a projeção canónica $\pi : SM \rightarrow M$. A fibra $\pi^{-1}(p)$, para cada ponto $p \in M$, é uma esfera S^{n-1} de dimensão $n - 1$ onde n é a dimensão da variedade, isto é, vetores unitários no ponto fixo $p \in M$. No capítulo anterior, vimos que uma métrica Riemanniana induz uma forma de volume na variedade M . Então, pode-se definir uma forma de volume em SM induzida pela métrica de Sasaki e portanto dar origem a uma medida definida em SM chamada a *medida de Liouville* e denotada por μ . Em outras palavras, seja $A = (U, A_x) \subset SM$ mensurável, onde $U \subset M$ e A_x é um subconjunto da esfera unitária do espaço tangente $T_x M$, μ se define localmente como

$$\mu(A) = \int_U \int_{A_x} dS^{n-1} dvol(x)$$

onde dS^{n-1} é medida usual de Lebesgue na esfera unitária.

Quando a variedade M tem volume finito a medida de Liouville é finita e portanto, pode ser normalizada.

Teorema 2.2.7 *A medida de Liouville é invariante pelo fluxo geodésico em SM .*

Demonstração. Ver [24]. □

Com este resultado, podemos fazer uso de um dos teoremas importantes na teoria Ergódica.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Birkhoff) *Seja $f \in L^1(\mu)$, onde μ é a medida de probabilidade de Liouville invariante pelo fluxo ϕ^t . Então o limite*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\phi^s(\theta)) d\mu = g(\theta)$$

existe μ -quase sempre, $g \circ \phi^t = g$ μ -quase sempre, g é integrável e

$$\int_{SM} f d\mu = \int_{SM} g d\mu$$

Anosov em [1] mostrou que o fluxo geodésico no fibrado tangente unitário de uma variedade compacta com curvatura seccional negativa é ergódico com a medida de Liouville e que as órbitas periódicas são densas.

2.3 A diferencial do fluxo geodésico

Uma formulação conveniente do diferencial do fluxo $d_\theta\phi^t$ é obtida considerando a geometria de TTM e os campos de Jacobi ao longo da geodésica γ_θ .

Seja $\xi \in T_\theta TM$ e $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ uma curva adaptada a ξ , com $z(s) = (\alpha(s), Z(s))$. Então a função

$$F(s, t) = \pi \circ \phi^t(z(s))$$

é uma variação da geodésica $\pi \circ \phi^t(\theta) = \gamma_\theta$ e pelo mostrado no capítulo anterior o seu campo variacional

$$J_\xi(t) := \frac{\partial F}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) = d_{\phi^t(\theta)}\pi \circ d_\theta\phi^t(\xi)$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ_θ que satisfaz

$$\begin{aligned} J_\xi(0) &= d_\theta\pi(\xi) \\ J'_\xi(0) &= \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} Z(s) \\ &= \nabla_{\alpha'} Z(0) = K_\theta(\xi) \end{aligned}$$

Seja $J(\gamma_\theta)$ o espaço vetorial dos campos de Jacobi ao longo de γ_θ . Como os campos de Jacobi são soluções de equações diferenciais de segunda ordem, tem dimensão $2n$, isto é, coincide com a dimensão de $T_\theta TM$. Pela existência e unicidade dos campos de Jacobi, a aplicação

$$\begin{aligned} i_\theta : T_\theta TM &\rightarrow J(\gamma_\theta) \\ \xi &\rightarrow J_\xi \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Se restringimos i_θ ao subespaço $S(\theta)$ para $\theta \in SM$, obtemos um isomorfismo entre $S(\theta)$ e todos os campos de Jacobi perpendiculares a $\gamma'(\theta)$.

O seguinte lema descreve a diferencial do fluxo geodésico

$$d_\theta\phi^t : T_\theta TM \rightarrow T_{\phi^t(\theta)} TM$$

em termos dos campos de Jacobi e a decomposição de TTM em fibrados horizontal e vertical. Mais precisamente, mostra que o comportamento da diferencial do fluxo geodésico está determinado pelo comportamento dos campos de Jacobi.

Teorema 2.3.1 Para $\theta \in TM$, $\xi \in T_\theta TM$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$d_\theta \phi^t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t))$$

Demonstração. Já mostramos que $J_\xi(t) = d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta \phi^t(\xi))$. Logo:

$$\begin{aligned} J'_\xi(t) &= \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \pi \circ \phi^t(z(s)) \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \phi^t(z(s)) \\ &= K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta \phi^t(\xi)) \end{aligned}$$

Pela identificação $j_\theta(\xi) = (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi))$ temos que

$$\begin{aligned} d_\theta \phi^t(\xi) &= (d_{\phi^t(\theta)}\pi(d_\theta \phi^t(\xi)), K_{\phi^t(\theta)}(d_\theta \phi^t(\xi))) \\ &= (J_\xi(t), J'_\xi(t)) \end{aligned}$$

conseguindo o que queríamos. □

Como aplicação deste teorema, podemos mostrar o seguinte resultado:

Corolário 2.3.2 A forma simplética Ω_θ é invariante pelo fluxo geodésico para todo $\theta \in TM$.

Demonstração. Sejam $\xi, \eta \in T_\theta TM$. Pelo teorema 2.3.1 temos que

$$\Omega_\theta(d_\theta \phi^t(\xi), d_\theta \phi^t(\eta)) = \langle J_\xi(t), J'_\eta(t) \rangle - \langle J'_\xi(t), J_\eta(t) \rangle$$

Consideremos a função $f(t) = \langle J_\xi(t), J'_\eta(t) \rangle - \langle J'_\xi(t), J_\eta(t) \rangle$. Derivando em relação a t e pelas propriedades da curvatura obtemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle J'_\xi(t), J'_\eta(t) \rangle + \langle J_\xi(t), J''_\eta(t) \rangle - \langle J'_\xi(t), J_\eta(t) \rangle - \langle J'_\xi(t), J'_\eta(t) \rangle \\ &= \langle J_\xi(t), J''_\eta(t) \rangle - \langle J'_\xi(t), J_\eta(t) \rangle \\ &= -\langle J_\xi(t), R(\gamma'_\theta, J_\eta(t))\gamma'_\theta(t) \rangle + \langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t) \rangle \\ &= -\langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t) \rangle + \langle R(\gamma'_\theta, J_\xi(t))\gamma'_\theta(t), J_\eta(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, f é uma função constante, em particular $f(t) = f(0) = \langle \xi_h, \eta_v \rangle - \langle \xi_v, \eta_h \rangle = \Omega_\theta(\xi, \eta)$. □

Capítulo 3

Rigidez em variedades de volume finito

Neste capítulo definimos os fluxos geodésicos Anosov e as variedades Riemannianas sem pontos conjugados, conceitos importantes que relacionam de uma certa maneira a dinâmica com a geometria do fluxo geodésico. A última seção terá como objetivo demonstrar nosso primeiro resultado importante de rigidez.

3.1 Fluxos geodésicos Anosov

Anosov em [1] foi o primeiro em estudar o comportamento hiperbólico dos fluxos geodésicos. As referências para esta seção são [24] e [19].

Definição 3.1.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e SM o fibrado tangente unitário. O fluxo geodésico $\phi^t : SM \rightarrow SM$ é chamado de tipo Anosov se $T(SM)$ pode-se decompor como $T(SM) = E^s \oplus \langle G \rangle \oplus E^u$ tal que*

$$\begin{aligned}d_\theta \phi^t(E^s(\theta)) &= E^s(\phi^t(\theta)) \\d_\theta \phi^t(E^u(\theta)) &= E^u(\phi^t(\theta)) \\ \| d_\theta \phi^t|_{E^s} \| &\leq C\lambda^t \\ \| d_\theta \phi^{-t}|_{E^u} \| &\leq C\lambda^t\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $\theta \in SM$, com $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$. A constante λ é chamada uma constante de contração do fluxo e G é o campo vetorial geodésico. Os espaços E^s e E^u são chamados o fibrado estável e instável de SM respectivamente.

Observação 3.1.2 *A definição não depende da escolha da norma quando a variedade M é compacta. Além disso, a compacidade implica que o fluxo geodésico Anosov possui órbitas periódicas. No caso geral, quando supomos simplesmente que a variedade Riemanniana é completa e de volume finito, existe pelo menos uma geodésica fechada? Esta pergunta teve uma resposta afirmativa*

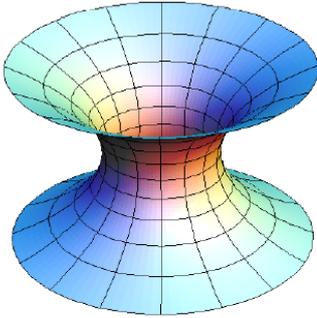
dada por Bangert no ano 1980 para o caso de dimensão 2 (ver [3]). Para dimensão maior ainda é um problema aberto.

Exemplo 3.1.3 Anosov (ver [1]) mostrou que toda variedade Riemanniana compacta com curvatura seccional negativa tem fluxo geodésico Anosov.

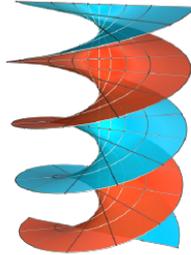
Exemplo 3.1.4 Knieper (ver [19]) mostrou que se a variedade Riemanniana é completa e a curvatura seccional satisfaz $-a^2 \geq K_M \geq -b^2$ para constantes $b \geq a > 0$, então o fluxo geodésico é Anosov.

Dos exemplos anteriores, será que a curvatura negativa é uma condição necessária para que um fluxo geodésico seja Anosov? Por vários anos se pensou que sim, até que em 1973, Eberlein (ver [12]) construiu exemplos de variedades compactas com curvatura não positiva cujo fluxo geodésico é Anosov e que possuem um subconjunto aberto onde a curvatura seccional é zero em todos os planos tangentes. Em 2003, Donnay e Pugh (ver [9]) construíram um exemplo de uma superfície compacta isometricamente mergulhada em \mathbb{R}^3 tal que contém pontos com curvatura positiva e cujo fluxo geodésico é Anosov. Isto mostra que, todos os sinais da curvatura podem aparecer e o fluxo geodésico ser Anosov.

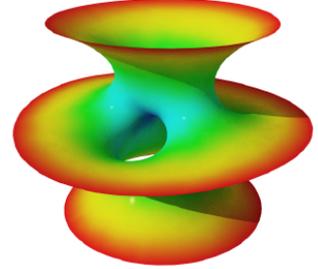
Exemplo 3.1.5 Os fluxos geodésicos de superfícies mínimas como o catenoide, helicóide e a superfície de Costa não são Anosov.



a. Catenóide



b. Helicóide



c. Superfície de Costa

Para $\theta = (x, v) \in SM$, denotamos por $N(\theta) = \{w \in T_x M : \langle w, v \rangle_x = 0\}$. Pela identificação $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ e a proposição 2.2.6 temos

$$\begin{aligned} \xi \in S(\theta) &\Leftrightarrow \xi \in T_\theta SM \text{ e } \langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle K_\theta(\xi), v \rangle_x = 0 \text{ e } \langle d_\theta \pi(\xi), v \rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in N(\theta) \times N(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi \in V(\theta) \cap S(\theta) &\Leftrightarrow \xi = (0, K_\theta(\xi)) \text{ e } \langle K_\theta(\xi), v \rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in \{0\} \times N(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi \in H(\theta) \cap S(\theta) &\Leftrightarrow \xi = (d_\theta\pi(\xi), 0) \text{ e } \langle d_\theta\pi(\xi), v \rangle_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi \in N(\theta) \times \{0\}\end{aligned}$$

Assim, $S(\theta) = N(\theta) \times N(\theta)$, $V(\theta) \cap S(\theta) = \{0\} \times N(\theta)$ e $H(\theta) \cap S(\theta) = N(\theta) \times \{0\}$. Se $E \subset S(\theta)$ é um subespaço com $\dim E = n - 1$ e $E \cap (V(\theta) \cap S(\theta)) = \{0\}$ então existe uma aplicação linear

$$T : H(\theta) \cap S(\theta) \rightarrow V(\theta) \cap S(\theta)$$

tal que E é o gráfico de T . Em outras palavras, existe uma aplicação linear $T : N(\theta) \rightarrow N(\theta)$ tal que $E = \{(v, Tv) : v \in N(\theta)\}$.

AFIRMAÇÃO: A aplicação linear T é simétrica se e somente se E é Lagrangiano. De fato, seja $\xi = (v, Tv), \eta = (w, Tw) \in E$, temos

$$E \text{ é Lagrangiano} \Leftrightarrow \Omega|_{E \times E} = 0$$

Desde que $\Omega(\xi, \eta) = \langle v, Tw \rangle - \langle Tv, w \rangle$, obtemos a equivalência.

Se o fluxo geodésico é Anosov, então para cada $\theta \in SM$, os subfibrados $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$ são Lagrangianos (ver [24]) e $E^s(\theta) \oplus E^u(\theta) = S(\theta)$.

3.2 Variedades Riemannianas sem pontos conjugados

Nesta seção estudaremos o comportamento dos campos de Jacobi ao longo de geodésicas em variedades sem pontos conjugados. As referências são [4] e [8].

Definição 3.2.1 *Seja γ uma geodésica em M . Os pontos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ são chamados pontos conjugados se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, tal que $J(t_1) = J(t_2) = 0$.*

Exemplo 3.2.2 *Os pontos antipodais na esfera \mathbb{S}^n são pontos conjugados.*

Geometricamente, podemos ver os pontos conjugados da variedade como pontos onde nascem e morrem as geodésicas dadas por uma variação.

Definição 3.2.3 *Uma variedade Riemanniana M é uma variedade sem pontos conjugados se toda geodésica de M não tem pontos conjugados.*

A seguinte proposição nos permite encontrar campos de Jacobi que começam em um determinado lugar e se tornam 0 no tempo T em geodésicas sem pontos conjugados.

Proposição 3.2.4 *Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica, $V \in T_{\gamma(0)}M$ e $W \in T_{\gamma(a)}M$. Se os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(0)$ não são conjugados então existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = V$ e $J(a) = W$.*

Demonstração. Consideremos \mathcal{J}_1 o espaço dos campos de Jacobi J tal que $J(0) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade, a dimensão de \mathcal{J}_1 é $n = \dim M$. Definimos a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{J}_1 &\rightarrow T_{\gamma(a)}M \\ J &\rightarrow J(a) \end{aligned}$$

Supor que existem dois campos $J_1 \neq J_2$ em \mathcal{J}_1 tal que $\Theta(J_1) = \Theta(J_2)$, isto é, $J_1(a) = J_2(a)$. Teríamos um campo de Jacobi $J_1 - J_2$, não nulo, tal que $(J_1 - J_2)(0) = 0 = (J_1 - J_2)(a)$, o que contradiz o fato de que $\gamma(0)$ não é conjugado a $\gamma(a)$. Portanto, a aplicação Θ é injetiva e como $\dim \mathcal{J}_1 = \dim T_{\gamma(a)}M$, então é um isomorfismo. Logo, existe um único campo de Jacobi $J_1 \in \mathcal{J}_1$ tal que $J_1(0) = 0$, $J_1(a) = W$.

Analogamente, considerando \mathcal{J}_2 o espaço dos campos de Jacobi J tal que $J(a) = 0$ e a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{J}_2 &\rightarrow T_{\gamma(0)}M \\ J &\rightarrow J(0) \end{aligned}$$

tem-se um único campo de Jacobi $J_2 \in \mathcal{J}_2$ tal que $J_2(a) = 0$, $J_2(0) = V$. Logo, o campo procurado é dado por $J = J_1 + J_2$ e é único. \square

A ausência de pontos conjugados em uma geodésica permite construir campos de Jacobi assintóticos. Mais precisamente, seja γ uma geodésica sem pontos conjugados e $V \in T_{\gamma(0)}M$ perpendicular a $\gamma'(0)$. Pela proposição 3.2.4 existe um único campo de Jacobi J_T tal que $J_T(0) = V$ e $J_T(T) = 0$. Desde que

$$\langle J_T(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J_T'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J_T(0), \gamma'(0) \rangle$$

a função linear $f(t) = \langle J_T(t), \gamma'(t) \rangle$ tem dois zeros: $t = 0$ e $t = T$. Portanto, f é a função constante zero e $J_T(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

O seguinte resultado fornece uma ferramenta importante para dar exemplos de variedades Riemannianas sem pontos conjugados.

Proposição 3.2.5 *Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva, então M não tem pontos conjugados.*

Demonstração. Suponha que M tem pontos conjugados, isto é, existe uma geodésica γ , existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, tal que $t_1 \neq t_2$ e $J(t_1) = J(t_2) = 0$. Definimos a função $f(t) = \|J(t)\|^2 \geq 0$ para $t \in [t_1, t_2]$, então

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle J(t), J(t) \rangle \\ &= \langle J'(t), J(t) \rangle + \langle J(t), J'(t) \rangle \\ &= 2 \langle J'(t), J(t) \rangle \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \langle J'(t), J(t) \rangle \\ &= 2 \langle J''(t), J(t) \rangle + 2 \langle J'(t), J'(t) \rangle \\ &= -2 \langle R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), J(t) \rangle + 2\|J'(t)\|^2 \\ &= -2K(\gamma'(t), J(t)) \left(\|\gamma'(t)\|^2 \|J(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), J(t) \rangle^2 \right) + 2\|J'(t)\|^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que $f''(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, isto é, f é uma função convexa. Desde que $f(t_1) = f(t_2) = 0$ tem-se $f(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, isto é, $J(t) = 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$ o que é uma contradição. Portanto, M não tem pontos conjugados. \square

Observação 3.2.6 *O recíproco não é verdadeiro, nem para superfícies compactas (ver [2]).*

Nos exemplos da seção 3.1 vimos algumas condições geométricas que precisava uma variedade para ter fluxo geodésico Anosov. Na direção oposta, nos fazemos a seguinte pergunta: O que condições geométricas um fluxo geodésico Anosov pode nos oferecer? Uma resposta satisfatória foi dada por Klingenberg (ver [18]), quem mostrou que uma variedade Riemanniana compacta com fluxo geodésico Anosov não tem pontos conjugados. Anos depois, Mañé (ver [22]) generalizou esse resultado, mostrando que se M é uma variedade Riemanniana completa de volume finito e com fluxo geodésico Anosov então M não tem pontos conjugados. O caso de volume infinito ainda é um problema aberto. Esses resultados mostram a relação que existe entre a geometria e a dinâmica dos fluxos geodésicos Anosov.

Seja M uma variedade Riemanniana completa, sem pontos conjugados e com curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$, para algum $c > 0$. Bolton (ver [4]) mostrou o seguinte resultado:

Teorema 3.2.7 *As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) *O fluxo geodésico é Anosov.*

(ii) Existe uma constante positiva δ tal que para todo $\theta \in SM$, o ângulo entre os subespaços $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$ é maior do que δ .

(iii) Existem constantes positivas A e s_0 tal que para qualquer campo de Jacobi J perpendicular ao longo da geodésica normalizada γ_θ com $J(0) = 0$ tem-se $\|J(t)\| \geq A\|J(s)\|$ para $t \geq s \geq s_0$.

Observação 3.2.8 A condição de que a curvatura seccional esteja limitada inferiormente por $-c^2$ é muito importante na demonstração do teorema anterior, pois permite dar explicitamente os valores das constantes δ , A e s_0 em função de c .

Nas mesmas condições do teorema 3.2.7, suponha que o fluxo geodésico é Anosov e sejam $\xi \in E^s(\theta)$ e $\eta \in E^u(\theta)$. Pelo teorema 2.3.1 temos que $\|J_\xi(t)\| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ e $\|J_\eta(t)\| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow -\infty$. Se $J_\xi(0) = 0$, então pelo teorema anterior existem constantes positivas A e s_0 tal que

$$\|J_\xi(t)\| \geq A\|J_\xi(s)\| \text{ para } t \geq s \geq s_0$$

Tomando limite para $t \rightarrow +\infty$ temos que $\|J_\xi(s_0)\| = 0$ e portanto teríamos pontos conjugados o que é uma contradição. Assim, $J_\xi(0) \neq 0$ e da mesma forma, mostra-se que $J_\eta(0) \neq 0$. Em particular, como $J_\xi(0) = d_\theta\pi(\xi)$ e $J_\eta(0) = d_\theta\pi(\eta)$, temos que

$$E^s(\theta) \cap V(\theta) = \{0\} \text{ e } E^u(\theta) \cap V(\theta) = \{0\}$$

Desde que $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$ são subespaços Lagrangianos, para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever $d_\theta\phi^t(E^s(\theta)) = E^s(\phi^t(\theta)) = \text{graf } U_s(t)$ e $d_\theta\phi^t(E^u(\theta)) = E^u(\phi^t(\theta)) = \text{graf } U_u(t)$, onde $U_s(t) : N(\phi^t(\theta)) \rightarrow N(\phi^t(\theta))$ e $U_u(t) : N(\phi^t(\theta)) \rightarrow N(\phi^t(\theta))$ são aplicações simétricas pela afirmação dada na seção anterior.

Fazendo o mesmo análise para qualquer tempo t_0 , concluímos que $J_s(t) \neq 0$ e $J_u(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Equação de Riccati

Nesta seção, vamos descrever o método de Green para ver que propriedades satisfazem $U_s(t)$ e $U_u(t)$. Desde agora, consideramos variedades Riemannianas sem pontos conjugados. As referências são [15] e [12].

Teorema 3.3.1 As aplicações $U_s(t)$ e $U_u(t)$ satisfazem a equação de Riccati

$$U' + U^2 + R(\phi^t(\theta)) = 0 \tag{3.1}$$

onde $R(\phi^t(\theta))$ é o operador curvatura definido por

$$\begin{aligned} R(\phi^t(\theta)) : N(\phi^t(\theta)) &\rightarrow N(\phi^t(\theta)) \\ w &\rightarrow R(\gamma'_\theta(t), w)\gamma'_\theta(t) \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\xi \in E^s(\theta)$, então pelo teorema 2.3.1 temos que $d_\theta\phi^t(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t))$. Desde que $d_\theta\phi^t(E^s(\theta)) = E^s(\phi^t(\theta)) = \text{graf } U_s(t)$ então podemos escrever

$$d_\theta\phi^t(\xi) = (J_\xi(t), U_s(t)J_\xi(t))$$

onde $J'_\xi(t) = U_s(t)J_\xi(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} J''_\xi &= U'_s J_\xi + U_s J'_\xi \\ &= U'_s J_\xi + U_s^2 J_\xi \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= J''_\xi(t) + R(\phi^t(\theta))J_\xi(t) \\ &= (U'_s + U_s^2 + R(\phi^t(\theta)))J_\xi(t) \end{aligned}$$

Desde que $\xi \in E^s(\theta)$ foi arbitrário, então a família de aplicações $U_s(t)$ satisfazem a equação (3.1). Analogamente mostra-se para $U_u(t)$. \square

Fixemos $\theta \in SM$ e seja γ_θ uma geodésica normalizada e consideremos $\{V_1, V_2, \dots, V_n = \gamma'_\theta\}$ campos de vetores paralelos ao longo de γ_θ tal que $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma_\theta(t)}M$. Se $Z(t)$ é um campo vetorial perpendicular ao longo de $\gamma_\theta(t)$, então podemos escrever $Z(t)$ da forma:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)V_i(t)$$

Então,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{D}{dt}(a_i(t)V_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a'_i(t)V_i(t) \end{aligned}$$

Podemos ver que $Z(t)$ pode-se identificar com a curva $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n-1}(t))$ e a derivada covariante $Z'(t)$ se identifica com uma curva $\alpha'(t) = (a'_1(t), a'_2(t), \dots, a'_{n-1}(t))$. Reciprocamente, qualquer curva em \mathbb{R}^{n-1} pode ser identificado com um campo vetorial perpendicular ao longo de γ_θ . Pela notação feita na seção 3.1, podemos identificar $N(\phi^t(\theta))$ com \mathbb{R}^{n-1} e considerar as aplicações $U_s(t)$ e $U_u(t)$ definidas em \mathbb{R}^{n-1} .

Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos a matriz simétrica $R(t) = (R_{ij}(t))$, onde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$, $R_{ij}(t) = \langle R(\gamma'_\theta(t), V_i(t))\gamma'_\theta(t), V_j(t) \rangle$ e R é a curvatura de M . Consideremos a $(n-1) \times (n-1)$ equação matricial de Jacobi

$$Y''(t) + R(t)Y(t) = 0 \quad (3.2)$$

Se $Y(t)$ é solução de (3.2) então para cada $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ a curva $\beta(t) = Y(t)x$ corresponde a um campo de Jacobi perpendicular ao longo de γ_θ pela identificação.

Para $\theta \in SM$, $r \in \mathbb{R}$, seja $Y_{\theta,r}(t)$ a única solução de (3.2) satisfazendo $Y_{\theta,r}(0) = I$ e $Y_{\theta,r}(r) = 0$. Green (ver [15]) mostrou que $\lim_{r \rightarrow -\infty} Y_{\theta,r}(t)$ existe para todo $\theta \in SM$ e $t \in \mathbb{R}$. Além disso, mostrou que se definimos:

$$Y_\theta^u(t) := \lim_{r \rightarrow -\infty} Y_{\theta,r}(t)$$

obtemos uma solução da equação de Jacobi (3.2) tal que $\det Y_\theta^u(t) \neq 0$. Também é provado em [12] e [15] que $\frac{DY_\theta^u}{dt}(t) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{DY_{\theta,r}}{dt}(t)$. Se para $t = 0$ definimos

$$U_r(\theta) = \frac{DY_{\theta,r}}{dt}(0) \quad ; \quad U^u(\theta) = \frac{DY_\theta^u}{dt}(0)$$

então

$$U^u(\theta) = \lim_{r \rightarrow -\infty} U_r(\theta)$$

Agora consideremos $\phi^h(\theta) \in SM$ e $Y_{\phi^h(\theta),r-h}(t)$ a única solução de (3.2). Mostraremos que $Y_{\theta,r}(t+h)Y_{\theta,r}^{-1}(h)$ também satisfaz essa condição. De fato, desde que $\gamma_{\phi^h(\theta)}(t) = \gamma_\theta(t+h)$ temos que

$$\begin{aligned} Y_{\theta,r}''(t+h)Y_{\theta,r}^{-1}(h) + R(t+h)Y_{\theta,r}(t+h)Y_{\theta,r}^{-1}(h) &= (Y_{\theta,r}''(t+h) + R(t+h)Y_{\theta,r}(t+h))Y_{\theta,r}^{-1}(h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Também, para $t = 0$ e $t = r-h$ temos

$$Y_{\theta,r}(h)Y_{\theta,r}^{-1}(h) = I \quad \text{e} \quad Y_{\theta,r}(r)Y_{\theta,r}^{-1}(h) = 0$$

Portanto,

$$Y_{\phi^h(\theta),r-h}(t) = Y_{\theta,r}(t+h)Y_{\theta,r}^{-1}(h)$$

Então, tomando limite quando $r \rightarrow -\infty$

$$Y_{\phi^h(\theta)}^u(t) = Y_\theta^u(t+h)(Y_\theta^u)^{-1}(h)$$

Derivando em relação a t e tomando $t = 0$ concluímos que

$$U^u(\phi^h(\theta)) = \frac{DY_\theta^u}{dt}(h)(Y_\theta^u)^{-1}(h) \quad (3.3)$$

para todo $h \in \mathbb{R}$. Segue que U^u é uma solução simétrica da equação de Riccati

$$U'(t) + (U(t))^2 + R(t) = 0 \quad (3.4)$$

De fato, se denotamos como $J = Y_\theta^u$ temos que

$$\begin{aligned} U' + U^2 + R &= J'' \cdot J^{-1} - J' \cdot J^{-1} \cdot J' \cdot J^{-1} + J' \cdot J^{-1} \cdot J' \cdot J^{-1} + R \\ &= J'' \cdot J^{-1} + R \cdot J \cdot J^{-1} \\ &= (J'' + R \cdot J) \cdot J^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma, tomando o limite $r \rightarrow +\infty$ obtemos $U^s(\theta)$ com as mesmas propriedades. Além disso, Green mostrou que, no caso que a curvatura seccional esteja limitada inferiormente por $-c^2$ para algum $c > 0$, as soluções simétricas da equação de Riccati definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ estão limitadas por c , isto é,

$$\sup_t \|U^u(t)\| \leq c \quad \text{e} \quad \sup_t \|U^s(t)\| \leq c$$

Quando o fluxo geodésico é Anosov, temos que $U_u = U^u$ e $U_s = U^s$.

3.4 Teorema de rigidez

O fato principal desta seção será demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, de volume finito e curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$ para algum $c > 0$. Suponha que o fluxo geodésico é Anosov com constante de contração λ , então $\lambda \geq e^{-c}$. Além disso, a igualdade se cumpre se e somente se a curvatura seccional de M é constante igual a $-c^2$.*

A primeira parte do teorema implica que a dinâmica dos fluxos geodésicos Anosov é controlada, até certo ponto, pela curvatura. A segunda parte é mais geral: a rigidez, no sentido dinâmico, fornece rigidez no sentido geométrico. Podemos ver no enunciado que não precisamos que a variedade seja compacta.

Vamos mostrar alguns lemas que serão usados para provar este teorema. Lembremos que toda variedade de volume finito com fluxo geodésico Anosov não tem pontos conjugados. Portanto, podemos colocar esta condição na hipótese do seguinte lema, que prova a primeira parte do teorema 3.4.1. No caso que a variedade tenha volume infinito e sem pontos conjugados, a primeira parte desse teorema ainda é válida.

Lema 3.4.2 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, sem pontos conjugados, com curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$, para algum $c > 0$, e com fluxo geodésico Anosov. Se a constante de contração do fluxo geodésico é λ , então $\lambda \geq e^{-c}$.*

Demonstração. Fixamos uma geodésica γ_θ e sejam $\xi \in E^s(\theta) \setminus \{0\}$ e $\eta \in E^u(\theta) \setminus \{0\}$. Pelo teorema 2.3.1 temos que $d_\theta \phi^t(\xi) = (J_s(t), J'_s(t))$ e $d_\theta \phi^t(\eta) = (J_u(t), J'_u(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde J_s e J_u são campos de Jacobi ao longo de γ_θ . Pelo visto na seção 3.2, $J_s(t) \neq 0$ e $J_u(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos a função

$$\begin{aligned} r : [0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\ t &\rightarrow \frac{\lambda^{-t} \|J_s(t)\|}{\lambda^t \|J_u(t)\|} \end{aligned}$$

Desde que $\eta \in E^u(\theta)$, então $d_\theta \phi^t(\eta) \in E^u(\phi^t(\theta))$. Pela definição de fluxo geodésico Anosov, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t \geq 0$:

$$\|\eta\| = \|d_{\phi^t(\theta)} \phi^{-t} \circ d_\theta \phi^t(\eta)\| \leq C \lambda^t \|d_\theta \phi^t(\eta)\|$$

Então,

$$\begin{aligned} C^{-1} \lambda^{-t} \|\eta\| &\leq \|d_\theta \phi^t(\eta)\| \\ &= \sqrt{\|J_u(t)\|^2 + \|J'_u(t)\|^2} \\ &= \|J_u(t)\| \sqrt{1 + \frac{\|J'_u(t)\|^2}{\|J_u(t)\|^2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{C^{-1} \lambda^{-t} \|\eta\|}{\sqrt{1 + \frac{\|J'_u(t)\|^2}{\|J_u(t)\|^2}}} \leq \|J_u(t)\| \quad (3.5)$$

Também

$$\|J_s(t)\| \leq \sqrt{\|J_s(t)\|^2 + \|J'_s(t)\|^2} = \|d_\theta \phi^t(\xi)\| \leq C \lambda^t \|\xi\| \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6) tem-se

$$\frac{\lambda^{-t} \|J_s(t)\|}{\lambda^t \|J_u(t)\|} \leq C^2 \frac{\|\xi\|}{\|\eta\|} \sqrt{1 + \frac{\|J'_u(t)\|^2}{\|J_u(t)\|^2}} \quad (3.7)$$

Para cada $t \in [0, +\infty)$, pelo mostrado na seção anterior, existem aplicações simétricas $U_s(t) : N(\phi^t(\theta)) \rightarrow N(\phi^t(\theta))$ e $U_u(t) : N(\phi^t(\theta)) \rightarrow N(\phi^t(\theta))$ tais que:

- i.* $E^s(\phi^t(\theta)) = \text{graf } U_s(t)$ e $E_u(\phi^t(\theta)) = \text{graf } U_u(t)$
- ii.* $\|U_s(t)\| \leq c$ e $\|U_u(t)\| \leq c$
- iii.* $J'_s(t) = U_s(t)J_s(t)$ e $J'_u(t) = U_u(t)J_u(t)$.

Portanto, em (3.7) temos que:

$$r(t) \leq C^2 \sqrt{1 + c^2} \frac{\|\xi\|}{\|\eta\|} \quad (3.8)$$

Isto é, r é uma função limitada. Por outro lado, derivando a função r em relação a t :

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{\langle J_s(t), J'_s(t) \rangle}{\lambda^{2t} \|J_s(t)\| \cdot \|J_u(t)\|} - \frac{2 \log \lambda \|J_s(t)\|}{\lambda^{2t} \|J_u(t)\|} - \frac{\|J_s(t)\| \langle J_u(t), J'_u(t) \rangle}{\lambda^{2t} \|J_u(t)\|^3} \\ &= r(t) \left(\frac{\langle J_s(t), J'_s(t) \rangle}{\langle J_s(t), J_s(t) \rangle} - 2 \log \lambda - \frac{\langle J_u(t), J'_u(t) \rangle}{\langle J_u(t), J_u(t) \rangle} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\langle J_s(t), J'_s(t) \rangle}{\langle J_s(t), J_s(t) \rangle} - \frac{\langle J_u(t), J'_u(t) \rangle}{\langle J_u(t), J_u(t) \rangle} \right| &\leq \frac{\|J_s(t)\| \cdot \|J'_s(t)\|}{\|J_s(t)\|^2} + \frac{\|J_u(t)\| \cdot \|J'_u(t)\|}{\|J_u(t)\|^2} \\ &\leq \|U_s(t)\| + \|U_u(t)\| \\ &\leq 2c \end{aligned} \quad (3.10)$$

Suponha que $\lambda < e^{-c}$, então $-2 \log \lambda > 2c$. Existe um $\delta > 0$ tal que $-2(\log \lambda + c) > \delta$. De (3.9) e (3.10) obtemos que $r'(t) \geq r(t)(-2 \log \lambda - 2c) \geq \delta r(t)$, o que implica que $\log r(t) - \log r(0) \geq \delta t$ para todo $t \geq 0$. Em particular, a função r não é limitada mas é uma contradição com (3.8). Portanto $\lambda \geq e^{-c}$. \square

Para provar a parte de rigidez do teorema 3.4.1, introduzimos uma nova ferramenta que é o estudo dos expoentes de Lyapunov associados aos fluxos geodésicos.

Definição 3.4.3 *Seja $\theta \in SM$ e $\xi \in T_\theta SM \setminus \{0\}$. Definimos o expoente de Lyapunov do par (θ, ξ) como*

$$\chi(\theta, \xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\|$$

enquanto o limite existir.

Os expoentes de Lyapunov são um conjunto de números que geralmente são usados para detectar a presença de caos em sistemas dinâmicos. Eles possuem as seguintes propriedades:

- (i) $\chi(\theta, r\xi) = \chi(\theta, \xi)$ para todo número real $r \neq 0$.

De fato, para $r \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \chi(\theta, r\xi) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(r\xi)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |r| \\ &= \chi(\theta, \xi) \end{aligned}$$

- (ii) $\chi(\theta, \xi + \eta) \leq \max \{\chi(\theta, \xi), \chi(\theta, \eta)\}$.

De fato, pela desigualdade triangular temos que

$$\frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi + \eta)\| \leq \frac{1}{t} \log 2 + \max \left\{ \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\|, \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\eta)\| \right\}$$

tomando limite quando $t \rightarrow +\infty$ segue o resultado.

(iii) $\chi(\phi^t(\theta), d_\theta \phi^t(\xi)) = \chi(\theta, \xi)$.

De fato, desde que $\phi^t \circ \phi^t = \phi^{2t}$ segue o resultado da definição.

No caso que o fluxo geodésico seja Anosov, para $\xi \in E^s(\theta)$, pela definição temos que

$$\chi(\theta, \xi) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(C\lambda^t \|\xi\|) = \log \lambda < 0$$

Da mesma forma, para $\eta \in E^u(\theta)$ tem-se

$$\chi(\theta, \eta) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log(C^{-1}\lambda^{-t} \|\eta\|) = -\log \lambda > 0$$

No caso de fluxos geodésicos, não podemos fazer uso do teorema de Oseledets (ver [23]) para garantir a existência dos expoentes de Lyapunov para μ -quase todo ponto $\theta \in SM$ pois nada garante que $\log^+ \|d\phi^t\| \in L^1(\mu)$, portanto vamos dar uma abordagem com argumentos geométricos.

O seguinte lema mostra que a aplicação $U^u(\theta)$ da seção 3.3 tem toda a informação sobre os expoentes de Lyapunov. De fato, este resultado foi provado por Freire e Mañé (ver [14]) para variedades compactas sem pontos conjugados. A demonstração será dada no caso não compacto para fluxos geodésicos Anosov.

Lema 3.4.4 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, sem pontos conjugados, com curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$, para algum $c > 0$, e com fluxo geodésico Anosov. Então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds$$

para todo $\theta \in SM$.

Demonstração. Para cada $\theta = (x, v) \in SM$, denotamos por $N(\theta) = \{w \in T_x M : w \perp v\}$ o subespaço de $T_x M$ ortogonal a v . Pela construção feita na seção 3.3, para todo $w \in N(\theta)$ o campo de Jacobi $Y_\theta^u(t)w$ é um campo de Jacobi instável. Além disso, $U^u(\theta)$ satisfaz

$$E^u(\theta) = \text{graf } U^u(\theta) = \{(w, U^u(\theta)w) : w \in N(\theta)\}$$

Seja $\pi_\theta : E^u(\theta) \rightarrow N(\theta)$ a projeção à primeira coordenada. Então:

$$\pi_\theta^{-1}(w) = (w, U^u(\theta)w)$$

Para $w \in N(\theta)$ com $\|w\| = 1$ temos

$$\begin{aligned} \|\pi_\theta^{-1}(w)\| &= \|(w, U^u(\theta)w)\| \\ &= \sqrt{\|w\|^2 + \|U^u(\theta)w\|^2} \\ &\leq \sqrt{1 + c^2} \end{aligned}$$

Então,

$$\sup_{\theta \in SM} \|\pi_\theta^{-1}\| \leq \sqrt{1 + c^2}$$

Também, para $(w, z) \in E^u(\theta)$ temos que:

$$\begin{aligned} \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1} \circ Y_\theta^u(t) \circ \pi_\theta(w, z) &= \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}(Y_\theta^u(t)w) \\ &= (Y_\theta^u(t)w, U^u(\phi^t(\theta))Y_\theta^u(t)w) \\ &= (Y_\theta^u(t)w, \frac{DY_\theta^u}{dt}(t)w) \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem de (3.3). Pelo teorema 2.3.1

$$\pi_{\phi^t(\theta)}^{-1} \circ Y_\theta^u(t) \circ \pi_\theta(w, z) = d_\theta \phi^t(w, z)$$

Isto é,

$$d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)} = \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1} \circ Y_\theta^u(t) \circ \pi_\theta \quad (3.11)$$

Aplicando a função determinante na equação (3.11) temos que

$$|\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| \cdot |\det Y_\theta^u(t)| \cdot |\det \pi_\theta|$$

Então, para $t \neq 0$:

$$\frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = \frac{1}{t} \log |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| + \frac{1}{t} \log |\det Y_\theta^u(t)| + \frac{1}{t} \log |\det \pi_\theta| \quad (3.12)$$

AFIRMAÇÃO: Se A é uma matriz invertível de dimensão $m \times m$, então

$$\frac{1}{(|\det A^{-1}|)^{\frac{1}{m}}} \leq \|A\| \leq \frac{m \|A^{-1}\|^{m-1}}{|\det A^{-1}|} \quad (3.13)$$

De fato, sabemos que $|\det A| \leq \|A\|^m$, então

$$\frac{1}{(|\det A^{-1}|)^{\frac{1}{m}}} \leq \|A\|$$

Por outro lado, seja $\text{adj}A$ a adjunta da matriz A , isto é, a matriz transposta da matriz de cofatores (c_{ij}) definido por

$$c_{ij} = (\text{adj}A)_{ji} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$$

onde A^{ij} é a submatriz de A eliminando a linha i e a coluna j . Então

$$\begin{aligned} \|\text{adj}A^{-1}\|^2 &= \sum_{i,j=1}^m (\det(A^{-1})^{ij})^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^m \|(A^{-1})^{ij}\|^{2(m-1)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^m \|A^{-1}\|^{2(m-1)} \\ &= m^2 \|A^{-1}\|^{2(m-1)} \end{aligned}$$

Assim temos que $\|\text{adj}A^{-1}\| \leq m\|A^{-1}\|^{m-1}$. Desde que

$$\|A\| = \frac{1}{|\det A^{-1}|} \|\text{adj}A^{-1}\|$$

então

$$\|A\| \leq \frac{m\|A^{-1}\|^{m-1}}{|\det A^{-1}|}$$

Como $\dim E^u(\theta) = n - 1$ e desde que $\|\pi_\theta\| \leq 1$, $1 \leq \|\pi_\theta^{-1}\| \leq \sqrt{1 + c^2}$ para todo θ , da equação (3.13) segue que:

(i) Considerando $A = \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}$ tem-se

$$\frac{1}{|\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}|^{\frac{1}{n-1}}} \leq \|\pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}\| \leq \frac{(n-1)\|\pi_{\phi^t(\theta)}\|^{n-2}}{|\det \pi_{\phi^t(\theta)}|}$$

Então,

$$1 \leq \|\pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}\| \leq (n-1)\|\pi_{\phi^t(\theta)}\|^{n-2} |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| \leq (n-1) |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| \quad (3.14)$$

(ii) Considerando $A = \pi_{\phi^t(\theta)}$ tem-se

$$\frac{1}{|\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}|^{\frac{1}{n-1}}} \leq \|\pi_{\phi^t(\theta)}\| \leq \frac{(n-1)\|\pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}\|^{n-2}}{|\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}|}$$

Então,

$$|\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}|^{1-\frac{1}{n-1}} \leq (n-1)\|\pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}\|^{n-2} \leq (n-1)(1+c^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

Isto é,

$$|\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| \leq (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} (1+c^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.15)$$

De (3.14) e (3.15) tem-se

$$\frac{1}{n-1} \leq |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| \leq (n-1)^{\frac{n-1}{n-2}} (1+c^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det \pi_{\phi^t(\theta)}^{-1}| = 0$$

Logo, tomando limite em (3.12) temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det Y_\theta^u(t)| \quad (3.16)$$

Desde que $\det Y_\theta^u(t) \neq 0$, pela fórmula de Liouville (ver [27])

$$\frac{d}{dt} \det Y_\theta^u(t) = \det Y_\theta^u(t) \text{tr} \left(\frac{DY_\theta^u(t)}{dt} (Y_\theta^u)^{-1}(t) \right) \quad (3.17)$$

Portanto, pelas equações (3.16) e (3.17)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr} \left(\frac{DY_\theta^u(s)}{ds} (Y_\theta^u)^{-1}(s) \right) ds \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. \square

O seguinte lema mostra que os expoentes de Lyapunov existem para todo $\theta \in SM$ e são todos iguais em cada um dos subfibrados.

Lema 3.4.5 (Rigidez dos expoentes de Lyapunov) *Seja M uma variedade Riemanniana completa, de volume finito e curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$ para algum $c > 0$ e suponha que o fluxo geodésico é Anosov com constante de contração λ . Se $\lambda = e^{-c}$ então*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| &= -c & e & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\eta)\| = c \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^{-t}(\xi)\| &= c & e & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^{-t}(\eta)\| = -c \end{aligned}$$

para todo $\theta \in SM$, $\xi \in E^s(\theta)$ e $\eta \in E^u(\theta)$.

Demonstração. Da equação (3.9) temos que

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t) \left(\frac{\langle J_s(t), J'_s(t) \rangle}{\langle J_s(t), J_s(t) \rangle} - 2 \log \lambda - \frac{\langle J_u(t), J'_u(t) \rangle}{\langle J_u(t), J_u(t) \rangle} \right) \\ &= r(t) \left(\frac{\langle J_s(t), J'_s(t) \rangle}{\langle J_s(t), J_s(t) \rangle} + 2c - \frac{\langle J_u(t), J'_u(t) \rangle}{\langle J_u(t), J_u(t) \rangle} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Então, da desigualdade (3.10) tem-se que $r'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Além disso, desde que $r(t)$ é uma função limitada então o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ existe. Integrando a equação (3.18)

$$\log r(t) - \log r(0) = 2ct + \log \|J_s(t)\| - \log \|J_s(0)\| - \log \|J_u(t)\| + \log \|J_u(0)\|$$

Multiplicando em ambos os lados por $\frac{1}{t}$ e tomando limite quando $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (\log \|J_u(t)\| - \log \|J_s(t)\|) = 2c \quad (3.19)$$

Logo, da desigualdade (3.6) tem-se

$$\log \|J_s(t)\| \leq \log C + t \log \lambda + \log \|\xi\| \quad (3.20)$$

Também, de (3.5)

$$\log \|J_u(t)\| \geq -\log \sqrt{1+c^2} - \log C - t \log \lambda + \log \|\eta\| \quad (3.21)$$

para todo $t \geq 0$.

AFIRMAÇÃO: Não existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_s(t_n)\| = -\infty$$

De fato, dividindo entre $\frac{1}{t}$ a equação (3.21) temos

$$\frac{1}{t} \log \|J_u(t)\| \geq \frac{1}{t} \left(-\log C + \log \|\eta\| - \log \sqrt{1+c^2} \right) - \log \lambda$$

isto é, está limitada inferiormente. Suponha que existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_s(t_n)\| = -\infty$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (\log \|J_u(t)\| - \log \|J_s(t)\|) = +\infty$$

o que é uma contradição com (3.19) demonstrando a afirmação.

Portanto, da afirmação e de (3.20) podemos concluir que a função $t \rightarrow \frac{1}{t} \log \|J_s(t)\|$ é limitada e, pela equação (3.19), a função $t \rightarrow \frac{1}{t} \log \|J_u(t)\|$ também é limitada.

Seja t_n uma sequência de termos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_s(t_n)\| = a_s$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_u(t_n)\| = a_u$. Portanto, da equação (3.19) tem-se

$$a_u - a_s = 2c$$

As equações (3.20) e (3.21) implicam que

$$a_u \geq -\log \lambda = c \quad \text{e} \quad a_s \leq \log \lambda = -c$$

Assim

$$a_u = c \quad \text{e} \quad a_s = -c$$

Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_s(t)\| = a_s = -c$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_u(t)\| = a_u = c$$

AFIRMAÇÃO: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_s(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\|$

De fato, sabemos que

$$\|d_\theta \phi^t(\xi)\| = \sqrt{\|J_s(t)\|^2 + \|J'_s(t)\|^2}$$

Então

$$\begin{aligned}
\log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| &= \frac{1}{2} \log(\|J_s(t)\|^2 + \|J'_s(t)\|^2) \\
&\geq \frac{1}{2} \log(\|J_s(t)\|^2) \\
&= \log \|J_s(t)\|
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por outro lado, desde que $\|J'_s(t)\| \leq c\|J_s(t)\|$ tem-se

$$\begin{aligned}
\log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| &\leq \frac{1}{2} \log((c^2 + 1)\|J_s(t)\|^2) \\
&= \log \|J_s(t)\| + \frac{1}{2} \log(c^2 + 1)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Assim, juntando (3.22) e (3.23)

$$\log \|J_s(t)\| \leq \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| \leq \log \|J_s(t)\| + \frac{1}{2} \log(c^2 + 1)$$

Dividindo entre $\frac{1}{t}$ e tomando limite quando $t \rightarrow +\infty$ obtemos a afirmação. Analogamente, mostra-se para o caso instável. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\xi)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_s(t)\| = -c$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\eta)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_u(t)\| = c$$

para todo $\theta \in SM$, $\xi \in E^s(\theta)$ e $\eta \in E^u(\theta)$. Consideremos agora a função

$$\begin{aligned}
r : [0, +\infty) &\rightarrow (0, +\infty) \\
t &\rightarrow \frac{\lambda^{-t} \|J_u(-t)\|}{\lambda^t \|J_s(-t)\|}
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo processo feito na demonstração do lema 3.4.2 mostra-se que

$$\|J_u(-t)\| \leq C\lambda^t \|\eta\| \quad \text{e} \quad \frac{C^{-1}\lambda^{-t} \|\xi\|}{\sqrt{1+c^2}} \leq \|J_s(-t)\|$$

Além disso, r é uma função limitada e tem como derivada

$$r'(t) = r(t) \left(-\frac{\langle J_u(-t), J'_u(-t) \rangle}{\langle J_u(-t), J_u(-t) \rangle} + 2c + \frac{\langle J_s(-t), J'_s(-t) \rangle}{\langle J_s(-t), J_s(-t) \rangle} \right) \tag{3.24}$$

Assim, $r'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e desde que r é limitada então existe o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$.

Integrando (3.24) de 0 até t obtemos

$$\log r(t) - \log r(0) = \log \|J_u(-t)\| - \log \|J_u(0)\| + 2ct - \log \|J_s(-t)\| + \log \|J_s(0)\|$$

Multiplicando por $\frac{1}{t}$ e tomando limite quando $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (\log \|J_s(-t)\| - \log \|J_u(-t)\|) = 2c \quad (3.25)$$

AFIRMAÇÃO: Não existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_u(-t_n)\| = -\infty$$

De fato, temos que

$$\frac{1}{t} \log \|J_s(-t)\| \geq \frac{1}{t} \left(-\log C + \log \|\xi\| - \log \sqrt{1+c^2} \right) - \log \lambda$$

e

$$\frac{1}{t} \log \|J_u(-t)\| \leq \frac{1}{t} (\log C + \log \|\eta\|) + \log \lambda$$

Suponha que existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_u(-t_n)\| = -\infty$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} (\log \|J_s(-t)\| - \log \|J_u(-t)\|) = +\infty$$

o que é uma contradição com (3.25) concluindo a demonstração da afirmação.

Portanto, da afirmação anterior podemos concluir que a função $t \rightarrow \frac{1}{t} \log \|J_u(-t)\|$ é limitada e, pela equação (3.25), a função $t \rightarrow \frac{1}{t} \log \|J_s(-t)\|$ também é limitada.

Seja t_n uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_s(-t_n)\| = b_s$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \log \|J_u(-t_n)\| = b_u$. Portanto, da equação (3.25) tem-se

$$b_s - b_u = 2c$$

Também,

$$b_u \leq \log \lambda = -c \quad \text{e} \quad b_s \geq -\log \lambda = c$$

Assim,

$$b_u = -c \quad \text{e} \quad b_s = c$$

Concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^{-t}(\xi)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_s(-t)\| = c$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^{-t}(\eta)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|J_u(-t)\| = -c$$

para todo $\theta \in SM$, $\xi \in E^s(\theta)$ e $\eta \in E^u(\theta)$. □

Corolário 3.4.6 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, de volume finito e curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$ para algum $c > 0$ e suponha que o fluxo geodésico é Anosov com constante de contração λ . Se $\lambda = e^{-c}$ então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^s(\theta)}| = -c \cdot \dim E^s(\theta) = -c(n-1)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = c \cdot \dim E^u(\theta) = c(n-1)$$

Demonstração. Pelo lema 3.4.5, temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t(\eta)\| = c \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^{-t}(\eta)\| = -c$$

para todo $\theta \in SM$ e $\eta \in E^u(\theta)$. Desde que toda matriz invertível de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ satisfaz

$$\|A^{-1}\|^{-(n-1)} \leq |\det A| \leq \|A\|^{n-1}$$

então

$$\log \|d_\theta \phi^{-t}|_{E^u(\theta)}\|^{-(n-1)} \leq \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| \leq \log \|d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}\|^{n-1}$$

Dividindo entre $\frac{1}{t}$ e tomando limite temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = c \cdot \dim E^u(\theta) = c(n-1).$$

Para $E^s(\theta)$ é análogo. □

Enunciamos os seguintes resultados de Guimarães (ver [16]) e de Knieper (ver [19]) respectivamente que serão usados para a demonstração do teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.7 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $Z \subset SM$ um subconjunto invariante pelo fluxo geodésico tal que toda geodésica γ_θ , com $\theta \in Z$, não contem pontos conjugados. Suponha que a curvatura de Ricci em Z tem parte positiva ou negativa integrável. Então*

$$\int_Z Ric(\theta) d\mu \leq 0$$

Lema 3.4.8 *Suponha que $R(t) \leq -\alpha^2 I$ para algum $\alpha > 0$. Então*

$$\|S(t)x\| \leq e^{-\alpha t} \|x\| \quad \text{e} \quad \|U(-t)x\| \leq e^{-\alpha t} \|x\|$$

para todo $t \geq 0$, onde $S(t)$ e $U(t)$ são tensores de Jacobi estável e instável respectivamente.

Finalmente, provaremos a segunda parte do teorema 3.4.1.

Teorema 3.4.9 *Nas mesmas condições do teorema 3.4.1, $\lambda = e^{-c}$ se e somente se a curvatura seccional de M é constante igual a $-c^2$.*

Demonstração. Denotemos por K a curvatura seccional de M . Suponha que $\lambda = e^{-c}$, então do lema 3.4.4 e o corolário 3.4.6 temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_\theta \phi^t|_{E^u(\theta)}| = c(n-1)$$

para todo $\theta \in SM$. Desde que a matriz $U^u(\phi^s(\theta))$ é simétrica, seus autovalores são números reais. Logo,

$$(\text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))))^2 \leq (n-1) \text{tr}((U^u(\phi^s(\theta))))^2 \quad (3.26)$$

Também, sabemos que $U^u(\phi^t(\theta))$ satisfaz a equação de Riccati (3.4), então

$$\text{tr}((U^u)^2(\phi^t(\theta))) = -\text{tr}((U^u)'(\phi^t(\theta))) - \text{tr}(R(t)) \quad (3.27)$$

onde $R(t)$ é o tensor de curvatura. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$\int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds \leq \sqrt{t \int_0^t (\text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))))^2 ds}$$

Portanto,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds \leq \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t (\text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))))^2 ds} \quad (3.28)$$

Integrando a equação (3.27) de 0 até t e substituindo o obtido em (3.26), temos em (3.28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds &\leq \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t (\text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))))^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\frac{n-1}{t} \int_0^t \text{tr}((U^u(\phi^s(\theta))))^2 ds} \\ &= \sqrt{-\frac{n-1}{t} \left(\int_0^t \text{tr}((U^u)'(\phi^s(\theta))) ds + \int_0^t \text{tr}(R(s)) ds \right)} \\ &= \sqrt{-\frac{n-1}{t} (\text{tr}(U^u(\phi^t(\theta))) - \text{tr}(U^u(\theta))) - \frac{(n-1)^2}{t} \int_0^t \text{Ric}(\phi^s(\theta)) ds} \end{aligned}$$

Da hipótese temos que $K \geq -c^2$, então $\text{Ric}(\phi^s(\theta)) \geq -c^2$ para todo $s \in [0, t]$. Portanto,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \text{tr}(U^u(\phi^s(\theta))) ds \leq \sqrt{-\frac{n-1}{t} (\text{tr}(U^u(\phi^t(\theta))) - \text{tr}(U^u(\theta))) + (n-1)^2 c^2}. \quad (3.29)$$

Desde que $\|U^u(\phi^t(\theta))\| \leq c$, tem-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{n-1}{t} (\text{tr}(U^u(\phi^t(\theta))) - \text{tr}(U^u(\theta))) = 0$. Tomando limite quando $t \rightarrow +\infty$ a (3.29), concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Ric}(\phi^s(\theta)) ds = -c^2 \quad (3.30)$$

Para concluir a demonstração, vamos usar o teorema de Birkhoff para fluxos. Primeiro, note que como $K \geq -c^2$, então a parte negativa da curvatura de Ricci é integrável em SM . Pelo teorema 3.4.7 temos que a curvatura de Ricci é integrável em SM . Além disso, como M tem volume finito, pelo teorema 2.2.8 e a equação (3.30) temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Ric(\phi^s(\theta)) ds = \int_{SM} Ric(\theta) d\mu = -c^2$$

Como a curvatura seccional satisfaz $K \geq -c^2$, então $Ric(\theta) \geq -c^2$ e portanto $Ric(\theta) = -c^2$. Assim, concluímos que $K \equiv -c^2$.

Para o recíproco, suponha que $K \equiv -c^2$ e seja $\xi \in E^s(\theta)$. Pela identificação j_θ temos que $d_\theta \phi^t(\xi) = (J_s(t), J'_s(t)) = (J_s(t), U^s(t)J_s(t))$ onde $U^s(t) : N(\phi^t(\theta)) \rightarrow N(\phi^t(\theta))$ é a aplicação simétrica dada pela equação de Riccati. Desde que $\sup_t \|U^s(t)\| \leq c$, temos

$$\begin{aligned} \|d_\theta \phi^t(\xi)\| &= \|(J_s(t), J'_s(t))\| \\ &= \sqrt{\|J_s(t)\|^2 + \|J'_s(t)\|^2} \\ &= \|J_s(t)\| \sqrt{1 + \frac{\|J'_s(t)\|^2}{\|J_s(t)\|^2}} \\ &\leq \|J_s(t)\| \sqrt{1 + c^2} \end{aligned}$$

Pelo lema 3.4.8 temos que $\|J_s(t)\| \leq e^{-ct} \|\xi\|$ para todo $t \geq 0$. Portanto,

$$\|d_\theta \phi^t(\xi)\| \leq C e^{-ct} \|\xi\|$$

onde $C = \sqrt{1 + c^2}$. Analogamente, mostra-se que $\|d_\theta \phi^{-t}(\eta)\| \leq C e^{-ct} \|\eta\|$ para todo $t \geq 0$ e para todo $\eta \in E^u(\theta)$. Assim, $\lambda = e^{-c}$ é uma constante de contração. \square

Concluimos este capítulo mostrando algumas consequências que poderiam ser obtidas a partir do teorema 3.4.1 no cenário dos expoentes de Lyapunov. Em [6], Butler estudou resultados de rigidez sobre expoentes de Lyapunov para fluxos geodésicos em uma variedade compacta com curvatura negativa. Ele provou que, se cada órbita periódica do fluxo geodésico tem exatamente o mesmo expoente Lyapunov sobre o fibrado instável, então a variedade tem curvatura seccional negativa constante. Desde que o fluxo geodésico de uma variedade compacta com curvatura negativa é de tipo Anosov, então, pelo resultado de Butler, podemos pensar no seguinte:

Conjectura 3.4.10 *Seja M uma variedade Riemanniana completa com volume finito, fluxo geodésico Anosov e órbitas periódicas densas. Se os expoentes instáveis de Lyapunov são constantes sobre todas as órbitas periódicas, então M tem curvatura seccional negativa constante.*

Conjectura 3.4.11 *Seja M uma variedade Riemanniana completa com volume finito, curvatura seccional limitada inferiormente por $-c^2$ (o ínfimo), fluxo geodésico Anosov e órbitas periódicas*

densas. Se os expoentes instáveis de Lyapunov são constantes no conjunto das órbitas periódicas e igual a a , então $a = c$.

Pelo demonstrado no teorema 3.4.1, obtemos de modo direto o seguinte resultado.

Corolário 3.4.12 *Conjectura 3.4.10 implica conjectura 3.4.11.*

A prova apresentada por Butler para o caso de curvatura negativa usa fortemente a regularidade dos fibrados E^s e E^u para poder usar técnicas clássicas dos expoentes de Lyapunov. Diferentemente do caso de fluxos geodésicos em curvatura negativa, os fluxos geodésicos Anosov em geral não possuem os fibrados E^s e E^u regulares. Por esse motivo, acreditamos que as técnicas desenvolvidas por Butler podem não ser as mais apropriadas para lidar com a conjectura 3.4.10.

Capítulo 4

Rigidez por conjugações entre fluxos geodésicos Anosov

Neste capítulo, estudaremos as conjugações entre fluxos geodésicos de variedades Riemannianas com curvaturas seccionais que satisfazem certas condições, obtendo importantes resultados de rigidez como consequência do teorema 3.4.1. Alguns resultados serão estendidos para conjugações em órbitas entre fluxos geodésicos.

4.1 Fluxos conjugados

As conjugações entre sistemas são muito importantes nos sistemas dinâmicos já que toda a informação de um sistema é transferido a outro através delas.

Definição 4.1.1 *Sejam M e N duas variedades Riemannianas. Dois fluxos $\varphi^t : M \rightarrow M$ e $\eta^t : N \rightarrow N$ são equivalentes se existe uma função $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ \varphi^t = \eta^t \circ h$. A função h é chamada uma equivalência. Quando uma equivalência é um homeomorfismo o chamamos conjugação.*

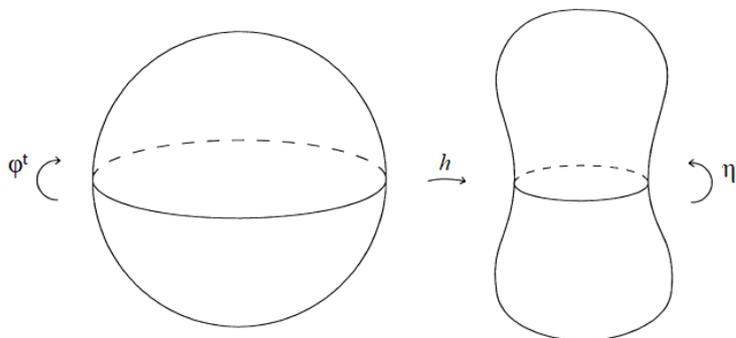


Figura 4.1: Conjugação entre fluxos

Exemplo 4.1.2 Consideremos os campos $X_1, X_2 \in C^\infty$ definidos por

$$\begin{aligned} X_1: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & X_2: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x, -y) & (x, y) &\rightarrow (x - 4y^3, -y) \end{aligned}$$

Os fluxos associados a estes campos pelas equações diferenciais $x' = X_1(x)$ e $x' = X_2(x)$ são:

$$\begin{aligned} \varphi_1^t: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \varphi_1^t(x, y) = (xe^t, ye^{-t}) \\ \varphi_2^t: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \varphi_2^t(x, y) = ((x - y^3)e^t + y^3e^{-3t}, ye^{-t}) \end{aligned}$$

Existe um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$h(x, y) = (x + y^3, y)$$

tal que

$$h \circ \varphi_1^t = \varphi_2^t \circ h$$

Portanto, os fluxos φ_1^t e φ_2^t são conjugados sendo h a conjugação.

Definição 4.1.3 Uma equivalência (conjugação) h é chamada α -equivalência (α -conjugação) se existem duas constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \cdot d(x, y)^\alpha \leq D(h(x), h(y)) \leq C_2 \cdot d(x, y)^\alpha \quad (4.1)$$

para todo $x, y \in M$, onde d e D são as distâncias em M e N respectivamente.

No caso que $\alpha = 1$, temos que h é uma equivalência (conjugação) bi-Lipschitz. Para demonstrar os teoremas importantes de rigidez e seus corolários da seguinte seção, precisaremos provar alguns lemas antes.

Lema 4.1.4 Seja (S, g) uma variedade Riemanniana e denotemos por d sua distância Riemanniana. Se $\alpha(t)$ é uma C^1 -curva em S , então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\alpha(t), \alpha(0))}{t} = \|\alpha'(0)\|_g$$

Demonstração. Pela proposição 1.2.9 sabemos que a aplicação exponencial $\exp_{\alpha(0)}$ define um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in T_{\alpha(0)}S$ sobre uma vizinhança de $\alpha(0) \in S$ tal que $\exp_{\alpha(0)}(0) = \alpha(0)$ e $d_0(\exp_{\alpha(0)}) = \text{Id}$. Para um $t > 0$ o suficientemente pequeno tal que $\alpha(t)$ pertença à vizinhança de $\alpha(0)$, existe um $v \in T_{\alpha(0)}S$ tal que

$$\begin{aligned} \exp_{\alpha(0)}(v) &= \alpha(t) \\ &= \gamma(1, \alpha(0), v) \\ &= \gamma(\|v\|, \alpha(0), \frac{v}{\|v\|}) \end{aligned}$$

Então

$$d(\alpha(t), \alpha(0)) = \int_0^t \|\gamma'(t)\| dt = \|v\| = \left\| \exp_{\alpha(0)}^{-1}(\alpha(t)) \right\|_g$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\alpha(t), \alpha(0))}{t} &= \left\| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp_{\alpha(0)}^{-1} \alpha(t) - \exp_{\alpha(0)}^{-1} \alpha(0)}{t} \right\|_g \\ &= \left\| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_{\alpha(0)}^{-1} \alpha(t) \right\|_g \\ &= \left\| d_{\alpha(0)}(\exp_{\alpha(0)}^{-1})(\alpha'(0)) \right\|_g \\ &= \left\| \alpha'(0) \right\|_g \end{aligned}$$

pois $d_{\alpha(0)}(\exp_{\alpha(0)}^{-1}) = (d_0(\exp_{\alpha(0)}))^{-1} = Id$. □

Seja N uma variedade Riemanniana, para cada $\theta \in SN$ definimos

$$\begin{aligned} W_\eta^s(\theta) &= \{\omega \in SN \mid d(\phi^t(\theta), \phi^t(\omega)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty \text{ e } d(\phi^t(\theta), \phi^t(\omega)) \leq \eta, \forall t \geq 0\} \\ W_\eta^u(\theta) &= \{\omega \in SN \mid d(\phi^t(\theta), \phi^t(\omega)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty \text{ e } d(\phi^t(\theta), \phi^t(\omega)) \leq \eta, \forall t \leq 0\} \end{aligned}$$

Teorema 4.1.5 (Teorema da variedade estável) *Seja N uma variedade compacta com fluxo geodésico ϕ^t de tipo Anosov. Então existe um $\eta > 0$ tal que para todo $\theta \in SN$, $W_\eta^s(\theta)$ é um disco mergulhado de dimensão igual ao de $E^s(\theta)$. Além disso, $T_\theta W_\eta^s(\theta) = E^s(\theta)$ e e da mesma forma para o caso instável. Os discos estável e instável satisfazem o seguinte:*

$$\begin{aligned} d^s(\phi^t(\theta), \phi^t(\omega)) &\leq C\lambda^t d^s(\theta, \omega), \forall \omega \in W_\eta^s(\theta), \forall t \geq 0 \\ d^s(\phi^{-t}(\theta), \phi^{-t}(\omega)) &\leq C\lambda^t d^s(\theta, \omega), \forall \omega \in W_\eta^u(\theta), \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema podem encontrá-lo em ([17]). Algumas vezes denotaremos por $W_{loc}^{s(u)}(\theta)$ a variedade estável (instável) local. Pelo teorema da variedade estável e instável, para η pequeno temos que estas variedades são mergulhadas em SN , então são variedades Riemannianas com a métrica restrita.

Consideremos N uma variedade Riemanniana completa com fluxo geodésico Anosov. O seguinte lema oferece uma forma de relacionar a distância de $W_\eta^{s(u)}(\theta)$ com a distância de SN .

Lema 4.1.6 *Para cada $\theta \in SN$ existe $\delta(\theta)$ tal que*

$$d^s(\theta, \tilde{\theta}) \leq \frac{3}{2} d(\theta, \tilde{\theta}) \text{ para todo } \tilde{\theta} \in B_{\delta(\theta)}^s(\theta) \tag{4.2}$$

onde d^s é a distância em $W_\eta^s(\theta)$ e $B_{\delta(\theta)}^s(\theta)$ a bola de centro θ e raio $\delta(\theta)$ em $W_\eta^s(\theta)$. Um resultado análogo tem-se para a variedade instável $W_\eta^u(\theta)$.

Demonstração. Vamos mostrar para o caso estável. O caso instável segue da mesma forma. Para cada $\theta \in SN$ consideremos a função exponencial \exp_θ^s para $W_\eta^s(\theta)$ e fixamos $r > 0$ tal que \exp_θ^s em $B_r = \{v \in E^s(\theta) : \|v\| \leq 2r\}$ seja um difeomorfismo sobre a sua imagem. Definimos a função $H_\theta : [0, r] \times E_1^s(\theta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\theta(t, v) := \frac{d^s(\exp_\theta^s(tv), \theta)}{d(\exp_\theta^s(tv), \theta)}$$

para $t \neq 0$ e $H_\theta(0, v) = 1$, onde $E_1^s(\theta) = \{v \in E^s(\theta) : \|v\| = 1\}$. A função $H_\theta(t, v)$ é contínua para todo (t, v) com $t \neq 0$.

AFIRMAÇÃO: H_θ é contínua em $(0, v)$.

De fato, seja $v \in E_1^s(\theta)$ e consideremos a C^1 -curva $\alpha(t) = \exp_\theta^s(tv) \subset W_\eta^s(\theta) \subset SN$. Pelo lema 4.1.4 temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} H_\theta(t, v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d^s(\exp_\theta^s(tv), \theta)}{t}}{\frac{d(\exp_\theta^s(tv), \theta)}{t}} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d^s(\alpha(t), \alpha(0))}{t}}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\alpha(t), \alpha(0))}{t}} = \frac{\|\alpha'(0)\|_s}{\|\alpha'(0)\|} = 1$$

pois $\|\alpha'(0)\|_s$ é a norma da métrica restrita de $W_\eta^s(\theta) \subset SN$ que é igual a $\|\alpha'(0)\|$. Para provar a continuidade no ponto $(0, v)$, suponha que a sequência (t_n, v_n) converge para $(0, v)$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $H_\theta(0, v_n) = 1$, então podemos assumir sem perda de generalidade que $t_n > 0$.

Seja $M = \sup_{v \in B_r} \|d_v(\exp_\theta^s)\|$ e consideremos a família de C^1 -curvas para n suficientemente grande $\gamma_n(t) = \exp_\theta^s(t_nv + t_n(v_n - v))$. Da desigualdade triangular temos

$$d(\exp_\theta^s(t_nv), \theta) \leq d(\exp_\theta^s(t_nv), \exp_\theta^s(t_nv_n)) + d(\exp_\theta^s(t_nv_n), \theta) \quad (4.3)$$

Observe que

$$d(\exp_\theta^s(t_nv), \exp_\theta^s(t_nv_n)) \leq d^s(\exp_\theta^s(t_nv), \exp_\theta^s(t_nv_n)) \leq \int_0^1 \|\gamma_n'(s)\| ds \leq Mt_n \|v_n - v\|$$

Seguindo o mesmo processo do lema 4.1.4 temos que $d^s(\exp_\theta^s(t_nv), \theta) = t_n \|v\| = t_n$. Portanto, desde que $t_n > 0$, para n suficientemente grande, substituindo o obtido em (4.3) temos que

$$d(\exp_\theta^s(t_nv_n), \theta) \geq d(\exp_\theta^s(t_nv), \theta) - Mt_n \|v_n - v\| = t_n((H_\theta(t_n, v))^{-1} - M \|v_n - v\|) > 0$$

Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} H_\theta(t_n, v) = 1$, temos em particular que

$$1 \leq H_\theta(t_n, v_n) = \frac{t_n}{d(\exp_\theta^s(t_nv_n), \theta)} \leq \frac{1}{(H_\theta(t_n, v))^{-1} - M \|v_n - v\|}$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} H_\theta(t_n, v_n) = 1$ como se queria. Assim, temos que H_θ é contínua no compacto $[0, r] \times E_1^s(\theta)$ então é uniformemente contínua. Dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $\delta(\theta) > 0$ tal que

$$\|t\| = \|(t, v) - (0, v)\| < \delta(\theta) \Rightarrow |H_\theta(t, v) - 1| < \frac{1}{2}$$

Da última equação temos que

$$|t| < \delta(\theta) \Rightarrow d^s(\exp_\theta^s(tv), \theta) \leq \frac{3}{2}d(\exp_\theta^s(tv), \theta) \quad (4.4)$$

Assim, se $\tilde{\theta} \in B_{\delta(\theta)}^s(\theta)$, então existe um \tilde{t} com $|\tilde{t}| < \delta(\theta)$, $v \in E_1^s(\theta)$ tal que $\exp_\theta^s(\tilde{t}v) = \tilde{\theta}$. O resultado segue da equação (4.4). \square

4.2 Teoremas de rigidez para fluxos conjugados

Nesta seção, apresentamos alguns resultados de rigidez e regularidade obtidos a partir de conjugações entre fluxos geodésicos Anosov e o teorema 3.4.1.

Teorema 4.2.1 *Sejam M, N duas variedades Riemannianas completas tais que as curvaturas seccionais satisfazem $\alpha^2 \cdot \inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N \geq -b^2$. Denotemos por ϕ_M^t e ϕ_N^t os fluxos geodésicos de M e N respectivamente. Suponha que M tem volume finito e o fluxo ϕ_M^t é Anosov. Se ϕ_M^t e ϕ_N^t são α -equivalentes, então $K_M \equiv \frac{\sup K_N}{\alpha^2} < 0$.*

Demonstração. Seja $f : SM \rightarrow SN$ a α -equivalência entre os fluxos ϕ_M^t e ϕ_N^t com constantes C_1 e C_2 , isto é, f satisfaz a desigualdade (4.1).

Desde que M tem volume finito e ϕ_M^t é Anosov, então M não tem pontos conjugados. Como a integral da curvatura seccional ao longo de qualquer geodésica sem pontos conjugados e qualquer campo vetorial paralelo perpendicular ao longo da geodésica é negativa então temos que $\sup K_N < 0$ (ver [11]). Seja $-a^2 = \sup K_N$. Desde que a curvatura de N é negativamente pinched temos que ϕ_N^t é Anosov. Sem perda de generalidade vamos denotar por d a métrica de SM e SN . Podemos deduzir da definição de α -equivalência que $f(W_{loc}^{s(u)}(\theta)) \subset W_{loc}^{s(u)}(f(\theta))$. Pela condição da curvatura de N podemos considerar e^{-a} como uma constante de contração de ϕ_N^t (ver [19]).

AFIRMAÇÃO 1: Seja $\theta \in SM$ fixo e $\tilde{\theta} \in W_{loc}^s(\theta)$ tal que $f(\tilde{\theta}) \in W_{\delta(f(\theta))}^s(f(\theta))$, onde $\delta(f(\theta))$ é dado pelo lema 4.1.6. Então existe uma constante C_M tal que

$$d(\phi_M^t(\theta), \phi_M^t(\tilde{\theta})) \leq C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} d(\theta, \tilde{\theta}) \quad (4.5)$$

De fato, usando a desigualdade (4.1) e a definição de equivalência temos que:

$$C_1 d(\phi_M^t(\theta), \phi_M^t(\tilde{\theta}))^\alpha \leq d(f(\phi_M^t(\theta)), f(\phi_M^t(\tilde{\theta}))) = d(\phi_N^t(f(\theta)), \phi_N^t(f(\tilde{\theta}))) \quad (4.6)$$

Pelo teorema da variedade estável e o lema 4.1.6 temos que:

$$\begin{aligned} d(\phi_N^t(f(\theta)), \phi_N^t(f(\tilde{\theta}))) &\leq C_N \lambda_N^t d^s(f(\theta), f(\tilde{\theta})) \\ &\leq \frac{3}{2} C_N \lambda_N^t d(f(\theta), f(\tilde{\theta})) \\ &\leq \frac{3}{2} C_N \lambda_N^t C_2 d(\theta, \tilde{\theta})^\alpha \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim, de (4.6) e (4.7) temos que:

$$d(\phi_M^t(\theta), \phi_M^t(\tilde{\theta}))^\alpha \leq \frac{3C_N C_2}{2C_1} \lambda_N^t d(\theta, \tilde{\theta})^\alpha$$

Como $\lambda_N = e^{-a}$, consideramos $C_M = \left(\frac{3C_N C_2}{2C_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ e obtemos a desigualdade (4.5).

Analogamente, para $\tilde{\theta} \in W_{loc}^u(\theta)$ temos que:

$$d(\phi_M^{-t}(\theta), \phi_M^{-t}(\tilde{\theta})) \leq C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} d(\theta, \tilde{\theta}) \quad (4.8)$$

As desigualdades (4.5) e (4.8) implicam que:

AFIRMAÇÃO 2: Para cada $\xi \in E^s(\theta)$ e $\eta \in E^u(\theta)$, temos que

$$\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \leq C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} \|\xi\| \quad \text{e} \quad \|d_\theta \phi_M^{-t}(\eta)\| \leq C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} \|\eta\|$$

De fato, vamos mostrar para o caso estável, o caso instável é análogo. Consideremos $\xi \in E^s(\theta)$.

Seja $\beta(r) \subset W_{loc}^s(\theta)$ uma C^1 -curva com $\beta(0) = \theta$ e $\beta'(0) = \xi$ tal que $f(\beta(r)) \subset W_{\delta(f(\theta))}^s(f(\theta))$ onde $\delta(f(\theta))$ é dado pelo lema 4.1.6. Do lema 4.1.4 temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d(\phi_M^t(\beta(r)), \phi_M^t(\beta(0)))}{r} = \|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \quad (4.9)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d(\beta(r), \beta(0))}{r} = \|\beta'(0)\| = \|\xi\| \quad (4.10)$$

Então, de (4.5), (4.9) e (4.10) temos que

$$\begin{aligned} \|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d(\phi_M^t(\beta(r)), \phi_M^t(\beta(0)))}{r} \\ &\leq C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{d(\beta(r), \beta(0))}{r} \\ &= C_M e^{-\frac{a}{\alpha}t} \|\xi\| \end{aligned}$$

Segue da afirmação 2 que podemos considerar $\lambda = e^{-\frac{a}{\alpha}}$ como uma constante de contração do fluxo geodésico Anosov ϕ_M^t . Por hipótese $K_M \geq -\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2$, então pelo teorema 3.4.1 concluímos que $K_M \equiv -\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2$. \square

Podemos ver que, na prova do teorema 4.2.1, não precisamos da compacidade das variedades. No caso que M seja compacta obtemos o seguinte resultado importante que impõe uma certa rigidez para equivalências regulares de dois fluxos geodésicos Anosov.

Corolário 4.2.2 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e N uma variedade Riemanniana completa. Suponha que $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N \geq -b^2$ e o fluxo geodésico ϕ_M^t é Anosov. Então, se ϕ_M^t e ϕ_N^t são C^1 -equivalentes por uma C^1 -imersão f de SM em SN , então $K_M \equiv \sup K_N$.*

Demonstração. Seja $f : SM \rightarrow SN$ a C^1 -equivalência. Definimos:

$$|d_\theta f|^* = \inf_{v \in T_\theta SM \setminus \{0\}} \frac{|d_\theta f(v)|}{|v|}$$

Então, temos que

$$\inf_{\theta \in SM} |d_\theta f|^* d(\theta, \tilde{\theta}) \leq d(f(\theta), f(\tilde{\theta})) \leq \sup_{\theta \in SM} |d_\theta f| d(\theta, \tilde{\theta}) \quad (4.11)$$

Desde que M é compacto, temos que SM é compacto, então $\sup_{\theta \in SM} |d_\theta f| < \infty$. Por outro lado, desde que f é uma imersão temos que $\inf_{\theta \in SM} |d_\theta f|^* > 0$. Concluimos de (4.11) que f é uma 1-equivalência e pelo teorema 4.2.1 segue que $K_M = \sup K_N$. \square

Observação 4.2.3 *Note que, se M não é compacto e f tem distorção limitada, isto é,*

$$0 < \frac{\sup_{\theta \in SM} |d_\theta f|}{\inf_{\theta \in SM} |d_\theta f|^*} < \infty$$

então o corolário 4.2.2 ainda é válido.

É importante observar que a única condição sobre a dimensão das variedades é $\dim M \leq \dim N$, pois f é uma imersão. Portanto, se $\dim M = \dim N$, então f seria um \mathcal{C}^1 -difeomorfismo e N deveria ser compacto. Entretanto, se N é uma variedade compacta e $\dim M = \dim N$, obtemos um resultado mais geral misturando as demonstrações do Teorema 3.4.1 e o Teorema 4.2.1. Para isso, denotamos o expoente instável e estável de Lyapunov como

$$\chi^u(\theta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t|_{E_\theta^u}\| \quad \text{e} \quad \chi^s(\theta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi^t|_{E_\theta^s}\|$$

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m . Para um ponto periódico θ do fluxo ϕ^t , denotemos por $l(\theta)$ o período de θ . Sejam $\chi_1^{(\theta)}, \chi_2^{(\theta)}, \dots, \chi_{m-1}^{(\theta)}$ os autovalores complexos de $d_\theta \phi^{l(\theta)} : E^u(\theta) \rightarrow E^u(\theta)$ contando multiplicidades. Enunciamos o teorema de Butler (ver [6]) que será usado na demonstração do teorema 4.2.5.

Teorema 4.2.4 *Seja M uma variedade Riemanniana m -dimensional compacta com curvatura seccional negativa. Suponha que*

$$|\chi_i^{(\theta)}| = |\chi_j^{(\theta)}|, 1 \leq i, j \leq m-1$$

para todo ponto periódico θ do fluxo ϕ^t , então M tem curvatura seccional constante negativa.

O seguinte teorema mostra a regularidade entre fluxos geodésicos Anosov de variedades compactas com certa relação entre suas curvaturas seccionais:

Teorema 4.2.5 *Sejam M, N duas variedades Riemannianas compactas com igual dimensão n . Suponha que as curvaturas seccionais satisfazem $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N$ e M não tem pontos conjugados. Se f é uma 1-conjugação entre os fluxos ϕ_M^t e ϕ_N^t , então $K_M \equiv K_N \equiv \sup K_N < 0$ e f é \mathcal{C}^1 .*

Demonstração. Como M não tem pontos conjugados, então $-a^2 := \sup K_N < 0$. Desde que N é compacta, segue que ϕ_N^t é Anosov e podemos considerar $\lambda_N = e^{-a}$ como uma constante de contração de ϕ_N^t (ver [19]). Denotemos por E^s e E^u os subespaços estável e instável respectivamente de $T(SN)$. Sem perda de generalidade, denotamos por d as distâncias de SM e SN . Pela definição de 1-conjugação, existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que

$$C_1.d(\phi_M^t(x), \phi_M^t(y)) \leq d(f(\phi_M^t(x)), f(\phi_M^t(y))) \leq C_2.d(\phi_M^t(x), \phi_M^t(y))$$

para todo $x, y \in SM$. Além disso, como $f \circ \phi_M^t = \phi_N^t \circ f$, temos

$$C_1.d(\phi_M^t(x), \phi_M^t(y)) \leq d(\phi_N^t(f(x)), \phi_N^t(f(y))) \leq C_2.d(\phi_M^t(x), \phi_M^t(y)) \quad (4.12)$$

Como f é Lipschitz, então f é diferenciável em quase todo ponto $\theta \in SM$ com a medida de Liouville. Consideremos $\theta \in SM$ tal que f é diferenciável em θ . Segue que $d_\theta f$ é um isomorfismo e definimos os subespaços $E_\theta^{s(u)}$ como os subespaços que satisfazem

$$d_\theta f(E_\theta^{s(u)}) = E_{f(\theta)}^{s(u)}$$

Como f é diferenciável em θ , então f é diferenciável em $\phi_M^t(\theta)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e pela regra da cadeia

$$d_\theta \phi_M^t = \left(d_{\phi_M^t(\theta)} f \right)^{-1} \circ d_{f(\theta)} \phi_N^t \circ d_\theta f$$

Pela definição de E_θ^s temos que

$$\begin{aligned} d_\theta \phi_M^t(E_\theta^s) &= \left(d_{\phi_M^t(\theta)} f \right)^{-1} \circ d_{f(\theta)} \phi_N^t \circ d_\theta f(E_\theta^s) \\ &= \left(d_{\phi_M^t(\theta)} f \right)^{-1} \circ d_{f(\theta)} \phi_N^t(E_{f(\theta)}^s) \\ &= \left(d_{\phi_M^t(\theta)} f \right)^{-1} (E_{\phi_N^t(f(\theta))}^s) \\ &= \left(d_{\phi_M^t(\theta)} f \right)^{-1} (E_{f(\phi_M^t(\theta))}^s) \\ &= E_{\phi_M^t(\theta)}^s \end{aligned}$$

Analogamente para o subespaço E_θ^u , concluímos que eles são invariantes por $d_\theta \phi_M^t$. Então para todo $t \in \mathbb{R}$

$$T_\theta(SM) = E_\theta^s \oplus \langle \phi_M^t \rangle \oplus E_\theta^u \quad (4.13)$$

Seja $\xi \in E_\theta^u$ e seja $\beta(r) \subset SM$ uma \mathcal{C}^1 -curva tal que $\beta(0) = \theta$ e $\beta'(0) = \xi$. Pelo lema 4.1.5 temos que para $t \geq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\phi_M^t(\beta(h)), \phi_M^t(\beta(0)))}{h} = \|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \quad (4.14)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\phi_N^t(f(\beta(h))), \phi_N^t(f(\beta(0))))}{h} = \|d_{f(\theta)} \phi_N^t(d_\theta f(\xi))\| \quad (4.15)$$

De (4.12) para $h > 0$

$$C_1 \frac{d(\phi_M^t(\beta(h)), \phi_M^t(\beta(0)))}{h} \leq \frac{d(\phi_N^t(f(\beta(h))), \phi_N^t(f(\beta(0))))}{h} \leq C_2 \frac{d(\phi_M^t(\beta(h)), \phi_M^t(\beta(0)))}{h}$$

Tomando limite quando $h \rightarrow 0^+$ e usando as equações (4.14) e (4.15) temos

$$C_1 \cdot \|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \leq \|d_{f(\theta)} \phi_N^t(d_\theta f(\xi))\| \leq C_2 \cdot \|d_\theta \phi_M^t(\xi)\|$$

ou, equivalentemente,

$$C_1 \cdot \frac{\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \frac{\|d_{f(\theta)} \phi_N^t(d_\theta f(\xi))\|}{\|d_\theta f(\xi)\|} \cdot \frac{\|d_\theta f(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq C_2 \cdot \frac{\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\|}{\|\xi\|} \quad (4.16)$$

Considerando $t = 0$ obtemos que $C_1 \leq \|d_\theta f\| \leq C_2$. Portanto,

$$\frac{C_1}{C_2} \|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^u}\| \leq \|d_{f(\theta)} \phi_N^t|_{E_{f(\theta)}^u}\| \leq \frac{C_2}{C_1} \|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^u}\| \quad (4.17)$$

De forma similar obtêm-se para E_θ^s as desigualdades

$$\frac{C_1}{C_2} \|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^s}\| \leq \|d_{f(\theta)} \phi_N^t|_{E_{f(\theta)}^s}\| \leq \frac{C_2}{C_1} \|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^s}\| \quad (4.18)$$

Portanto, de (4.17) e (4.18) temos que para todo $t \geq 0$

$$\|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^s}\| \leq C e^{-at} \text{ e } \|d_\theta \phi_M^{-t}|_{E_\theta^u}\| \leq C e^{-at}$$

Este último resultado, junto com (4.13), mostra o comportamento hiperbólico de ϕ_M^t . Desde que M não tem pontos conjugados e $K_M \geq \sup K_N = -a^2$, seguindo o mesmo argumento na demonstração do teorema 3.4.1 temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Ric(\phi^s(\theta)) ds = -a^2 \quad (4.19)$$

para todo $\theta \in SM$ onde f é diferenciável, que é um conjunto com medida de Liouville total. Pelo teorema de Birkhoff e (4.19) temos que

$$\int_{SM} Ric(\theta) d\mu = -a^2$$

Desde que a curvatura seccional de M satisfaz $K_M \geq -a^2$, então da equação anterior temos que $Ric(\theta) = -a^2$ para μ -quase todo ponto $\theta \in SM$. Assim, concluímos que

$$K_M \equiv -a^2$$

Só falta mostrar que $K_N \equiv -a^2$. Para isso, desde que $K_M \equiv -a^2$, obtemos de (4.17) que

$$a = \chi^u(\theta) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_\theta \phi_M^t|_{E_\theta^u}\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_{f(\theta)} \phi_N^t|_{E_{f(\theta)}^u}\| = \chi^u(f(\theta))$$

sempre que f é diferenciável em θ . Do mesmo modo, usando a equação (4.16) e o fato de que $K_M = -a^2$ podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_{f(\theta)} \phi_N^t(\eta)\| = a$$

para todo $\eta \in E_{f(\theta)}^u$ sempre que f é diferenciável em θ . Por outro lado, desde que M e N têm curvatura negativa e f é um homeomorfismo, então pelo resultado de Ornstein e Feldman (ver [13] e [25]) temos que f é uma \mathcal{C}^1 -conjugação, portanto f é diferenciável em todo ponto θ . Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d_w \phi_N^t(\eta)\| = a$$

para todo $w \in SN$ e $\eta \in E_w^u$. Segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det d_w \phi_N^t|_{E_w^u}| = a(n-1)$$

Seja $w \in SN$ um ponto periódico de ϕ_N^τ com período τ e r_1, \dots, r_{n-1} os autovalores complexos de $d_w \phi_N^\tau : E_w^u \rightarrow E_w^u$ contando multiplicidades. Denotemos por

$$\rho(w) = \max_i \{|r_i|\}$$

o raio espectral. Pela fórmula de Gelfand (ver [20]) temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|d_w \phi_N^{\tau k}|_{E_w^u}\|^{1/k} = \rho(w)$$

Então,

$$\tau a = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{\tau k} \log \|d_w \phi_N^{\tau k}|_{E_w^u}\| = \log \rho(w) \quad (4.20)$$

Por outro lado, desde que

$$\frac{1}{k} \log |\det d_w \phi_N^{\tau k}|_{E_w^u}| = \sum_{i=1}^{n-1} \log |r_i|$$

Então,

$$\tau a(n-1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{\tau k} \log |\det d_w \phi_N^{\tau k}|_{E_w^u}| = \sum_{i=1}^{n-1} \log |r_i| \quad (4.21)$$

De (4.20) e (4.21) concluímos que $\log |r_i| = \tau a$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Assim $|r_i| = |r_j|$ para todo $1 \leq i, j \leq n-1$. Pelo teorema 4.2.4 concluímos que N tem curvatura constante negativa e $K_N \equiv -a^2$. \square

Observação 4.2.6 *Em particular, com as hipóteses do teorema 4.2.5, concluímos que não existe uma \mathcal{C}^1 -conjugação entre os fluxos geodésicos, a menos que as curvaturas de ambas as variedades sejam constantes negativas e iguais.*

Desde que uma variedade compacta com fluxo geodésico Anosov não tem pontos conjugados (ver [18]), temos imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 4.2.7 *Sejam M, N duas variedades Riemannianas compactas com igual dimensão. Suponha que as curvaturas seccionais satisfazem $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N$ e o fluxo geodésico ϕ_M^t é Anosov. Se f é uma 1-conjugação entre os fluxos ϕ_M^t e ϕ_N^t , então $K_M \equiv K_N \equiv \sup K_N < 0$ e f é C^1 .*

Esse corolário implica, em particular, que duas variedades compactas com a mesma dimensão e com fluxos geodésicos Anosov, no caso de não ter curvatura constante negativa, nunca seus respectivos fluxos geodésicos são C^1 -conjugados por um difeomorfismo, nem mesmo por aplicações bi-Lipschitz.

4.3 Fluxos conjugados em órbitas

Para concluir este capítulo, vamos mostrar uma versão mais geral do corolário 4.2.2 e o corolário 4.2.7, quando as equivalências não necessariamente preservam o tempo e tem distorção limitada.

Definição 4.3.1 *Dois fluxos $\varphi^t : M \rightarrow M$ e $\eta^t : N \rightarrow N$ são equivalentes em órbitas se existem funções $f : M \rightarrow N$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \varphi^t = \eta^{h(t)} \circ f$. A função f é chamada equivalência em órbitas e $h(t)$ a reparametrização. Quando uma equivalência em órbitas é um homeomorfismo o chamamos conjugação em órbitas. Uma equivalência em órbitas (conjugação em órbitas) é chamada α -equivalência em órbitas (α -conjugação em órbitas) se satisfaz a equação (4.1).*

Corolário 4.3.2 *Seja M uma variedade Riemanniana de volume finito e N uma variedade Riemanniana completa. Suponha que $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N$ e os fluxos geodésicos ϕ_M^t e ϕ_N^t são Anosov. Se ϕ_M^t e ϕ_N^t são equivalentes em órbitas por uma C^1 -imersão $f : SM \rightarrow SN$ com distorção limitada e $h(t)$ é a reparametrização ímpar satisfazendo $h(t) \geq t$ para $t \geq 0$, então $K_M \equiv \sup K_N < 0$.*

Demonstração. Desde que ϕ_M^t é Anosov e M tem volume finito, então M não tem pontos conjugados. Segue que $-a^2 := \sup K_N < 0$ e podemos considerar $\lambda_N = e^{-a}$ como uma constante de contração de ϕ_N^t . Como f é uma equivalência, então $f \circ \phi_M^t = \phi_N^{h(t)} \circ f$. Fixamos $\theta \in SM$ e seja $\xi \in E^s(\theta)$, então

$$\begin{aligned} \|d_{\phi_M^t(\theta)} f \circ d_\theta \phi_M^t(\xi)\| &= \|d_\theta (f \circ \phi_M^t)(\xi)\| \\ &= \|d_\theta (\phi_N^{h(t)} \circ f)(\xi)\| \\ &= \|d_{f(\theta)} \phi_N^{h(t)} \circ d_\theta f(\xi)\| \end{aligned} \tag{4.22}$$

Desde que ϕ_N^t é Anosov e $f(W^s(\theta)) \subset W^s(f(\theta))$, concluímos que $d_\theta f(\xi) \in E^s(f(\theta))$. Para $t \geq 0$ temos em (4.22)

$$\|d_{\phi_M^t(\theta)} f \circ d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \leq C_N e^{-ah(t)} \|d_\theta f(\xi)\| \tag{4.23}$$

Como f tem distorção limitada, isto é,

$$0 < \frac{\sup_{\theta \in SM} |d_\theta f|}{\inf_{\theta \in SM} |d_\theta f|^*} < \infty$$

dividimos (4.23) entre $\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\|$, obtendo

$$\inf_{\theta \in SM} |d_\theta f|^* \leq C_N e^{-ah(t)} \sup_{\theta \in SM} |d_\theta f| \frac{\|\xi\|}{\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\|}$$

Então, existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\|d_\theta \phi_M^t(\xi)\| \leq C_1 e^{-ah(t)} \|\xi\| \leq C_1 e^{-at} \|\xi\|$$

Analogamente, seja $\eta \in E^u(\theta)$. Desde que h é ímpar temos que

$$\begin{aligned} \|d_{\phi_M^{-t}(\theta)} f \circ d_\theta \phi_M^{-t}(\eta)\| &= \|d_\theta (f \circ \phi_M^{-t})(\eta)\| \\ &= \|d_\theta (\phi_N^{h(-t)} \circ f)(\eta)\| \\ &= \|d_{f(\theta)} \phi_N^{-h(t)} \circ d_\theta f(\eta)\| \end{aligned} \quad (4.24)$$

Desde que ϕ_N^t é Anosov e $f(W^u(\theta)) \subset W^u(f(\theta))$, concluímos que $d_\theta f(\eta) \in E^u(f(\theta))$. Para $t \geq 0$ temos em (4.24)

$$\|d_{\phi_M^{-t}(\theta)} f \circ d_\theta \phi_M^{-t}(\eta)\| \leq C_N e^{-ah(t)} \|d_\theta f(\eta)\|$$

Seguindo o mesmo análise feito no caso estável, temos que

$$\|d_\theta \phi_M^{-t}(\eta)\| \leq C_1 e^{-ah(t)} \|\eta\| \leq C_1 e^{-at} \|\eta\|$$

Portanto, podemos considerar $\lambda_M = e^{-a}$ como uma constante de contração de ϕ_M^t . Pelo teorema 3.4.1 concluímos que $K_M \equiv -a^2$. \square

Usando as mesmas técnicas das demonstrações do corolário 4.3.2 e o teorema 4.2.5, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.3.3 *Sejam M, N duas variedades Riemannianas compactas com igual dimensão. Suponha que as curvaturas seccionais satisfazem $\inf K_M \geq \sup K_N \geq K_N$ e M não tem pontos conjugados. Se f é uma 1-conjugação em órbitas entre os fluxos ϕ_M^t e ϕ_N^t com $h(t)$ reparametrização ímpar satisfazendo $h(t) \geq t$ para $t \geq 0$, então $K_M \equiv K_N \equiv \sup K_N < 0$ e f é \mathcal{C}^1 .*

Capítulo 5

Apêndice 1: Variedades Diferenciáveis

5.1 Variedades Diferenciáveis

Vamos considerar M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável de abertos.

Definição 5.1.1 *Uma variedade diferenciável n -dimensional de classe \mathcal{C}^k é um conjunto M junto com uma família de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$, chamadas cartas, onde $\alpha \in I$ é um conjunto de índices, U_α é um subconjunto aberto de M e \tilde{U}_α é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , com as seguintes propriedades:*

i. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

ii. Para qualquer par $\alpha, \beta \in I$, o domínio da aplicação $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, isto é, $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um aberto de \mathbb{R}^n e a aplicação

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é de classe \mathcal{C}^k .

A família de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in M}$ é chamada atlas de classe \mathcal{C}^k .

Exemplo 5.1.2 *Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ são atlas de classe \mathcal{C}^k para as variedades M e N de dimensões m e n respectivamente, então a coleção de cartas*

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)\}$$

é um atlas de classe \mathcal{C}^k para $M \times N$. Portanto, $M \times N$ é uma variedade de classe \mathcal{C}^k e dimensão $m + n$.

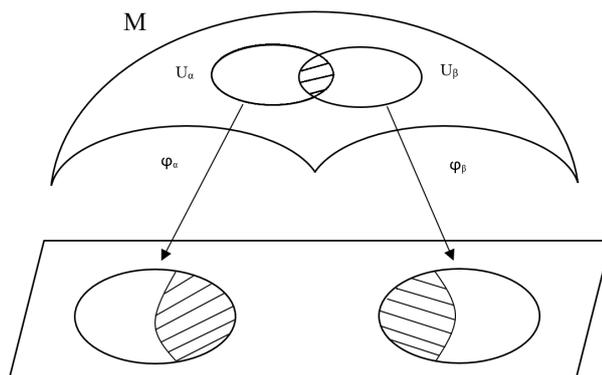


Figura 5.1: Variedade diferenciável

Definição 5.1.3 *Sejam N e M duas variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Uma aplicação contínua $F : N \rightarrow M$ é diferenciável no ponto $p \in N$ se existem cartas (V, ψ) em M , com $F(p) \in V$, e (U, φ) em N , com $p \in U$, tal que a composição $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ que é uma aplicação do conjunto aberto $\varphi(F^{-1}(V) \cap U)$ de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m é diferenciável em $\varphi(p)$. Dizemos que F é diferenciável em N se F é diferenciável em p , para todo $p \in N$. Analogamente definimos aplicações de classe C^k .*

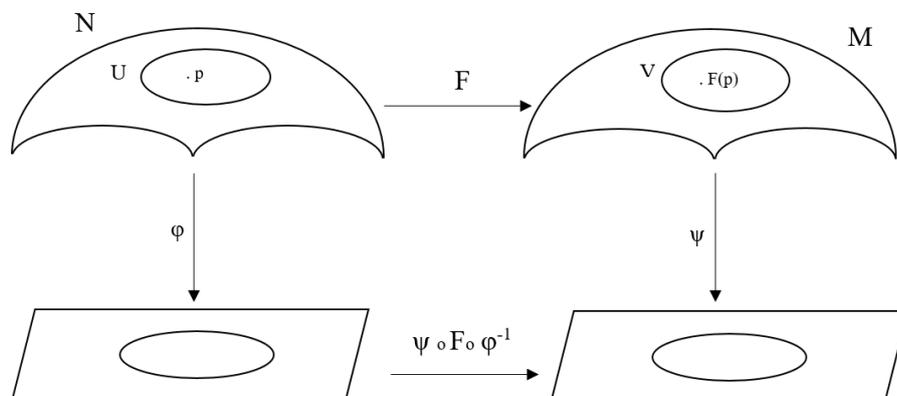


Figura 5.2: Aplicação diferenciável entre variedades

Definição 5.1.4 *Um difeomorfismo de variedades é uma aplicação diferenciável bijetiva $F : N \rightarrow M$ cuja inversa F^{-1} é diferenciável.*

Proposição 5.1.5 *Se (U, φ) é uma carta da variedade M de dimensão n , então $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo.*

Seja M uma variedade de dimensão n e denotemos por r^1, \dots, r^n as coordenadas de \mathbb{R}^n . Se $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ é uma carta de M com $p \in U$, então $x^i = r^i \circ \varphi$. Para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a derivada parcial de f em relação a x^i em p como

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p))$$

5.2 O Espaço Tangente

Para cada $p \in M$, o par (f, U) denotará a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ , onde U é um subconjunto aberto de M com $p \in U$.

Definição 5.2.1 Dizemos que (f, U) é equivalente a (g, V) se existe um subconjunto aberto $W \subset U \cap V$, com $p \in W$, tal que $f = g$ em W . Isto define uma relação de equivalência. A classe de equivalência de (f, U) é chamada germe de f em p e denotaremos por $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ o conjunto de todos os germes de funções \mathcal{C}^∞ em p .

Definição 5.2.2 Uma derivação em $p \in M$ é uma aplicação linear $D : \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$$

Definição 5.2.3 Um vetor tangente em $p \in M$ é uma derivação em p . O conjunto dos vetores tangentes em p formam um espaço vetorial e denotamos por $T_p M$.

Se consideramos $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ a carta de M com $p \in U$, então para cada $1 \leq i \leq n$, $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ satisfaz a propriedade de derivação e portanto é um vetor tangente em p .

Definição 5.2.4 Seja $F : N \rightarrow M$ uma aplicação \mathcal{C}^∞ entre variedades. Definimos a diferencial de F em p como a aplicação linear

$$\begin{aligned} d_p F : T_p N &\rightarrow T_{F(p)} M \\ X_p &\rightarrow d_p F(X_p) \end{aligned}$$

onde $d_p F(X_p)f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{C}_{F(p)}^\infty(M)$.

Teorema 5.2.5 (Regra da Cadeia) Seja $F : N \rightarrow M$ e $G : M \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis entre variedades e $p \in N$, então

$$d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_p F$$

Corolário 5.2.6 Se $F : N \rightarrow M$ é um difeomorfismo entre variedades e $p \in N$, então $d_p F : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ é um isomorfismo.

Consideremos uma carta local $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ de M no ponto p . Desde que φ é um difeomorfismo, então

$$d_p\varphi : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo. Portanto, o espaço tangente tem a mesma dimensão que M . A seguinte proposição permite definir uma base para o espaço tangente.

Proposição 5.2.7 *Se $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ é uma carta local de M no ponto p , então o espaço tangente T_pM tem como base*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

Definição 5.2.8 *Uma curva em M é uma aplicação diferenciável $c : (a, b) \rightarrow M$. O vetor velocidade $c'(t_0)$ da curva no tempo $t_0 \in (a, b)$ se define como*

$$c'(t_0) := d_{t_0}c \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)}M$$

Podemos ver na definição que toda curva c em M nos dá, para cada t_0 , um vetor tangente em $T_{c(t_0)}M$. A seguinte proposição mostra o recíproco.

Proposição 5.2.9 *Para cada ponto $p \in M$ e cada vetor tangente $V \in T_pM$, existe um $\varepsilon > 0$ e uma curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = V$.*

A seguinte proposição dá outra maneira de calcular a diferencial de uma aplicação usando curvas.

Proposição 5.2.10 *Seja $F : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável de variedades, $p \in N$ e $X_p \in T_pN$. Se c é uma curva com $c(0) = p$ e $c'(0) = X_p$, então*

$$d_pF(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ c)(t)$$

5.3 Campos Vetoriais

Denotemos por $C^k(M)$ o conjunto das funções C^k definidas em M e com valores em \mathbb{R} .

Definição 5.3.1 *Um campo vetorial X em uma variedade M é uma aplicação definida como*

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\rightarrow X_p \in T_pM \end{aligned}$$

Dizemos que X é um campo vetorial diferenciável se a aplicação é diferenciável.

Se consideramos a carta local $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ de M , o valor do campo vetorial X no ponto $p \in U$ é

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Variando p em todo U temos que os coeficientes a^i são funções em U . Mostra-se que X é diferenciável em U se e somente se os coeficientes a^i são diferenciáveis em U .

Um campo vetorial X em M induz uma aplicação linear na álgebra das funções \mathcal{C}^k em M : para $f \in \mathcal{C}^k(M)$, definimos Xf como a função

$$(Xf)(p) = X_p f$$

Se consideramos a carta local $(U, \varphi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ de M , temos que

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^n a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$$

Assim, podemos dar outra caracterização para os campos vetoriais diferenciáveis.

Proposição 5.3.2 *Um campo vetorial X em M é diferenciável se e somente se para toda função diferenciável f em M , a aplicação Xf é diferenciável em M .*

Definição 5.3.3 *Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Um campo vetorial X ao longo de α é uma aplicação que associa a cada $t \in I$ o vetor tangente $X_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M$.*

Capítulo 6

Apêndice 2: Alguns Conceitos da Teoria Ergódica

6.1 Medidas invariantes

Definição 6.1.1 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante por f se*

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

para todo conjunto $E \subset M$ mensurável.

Do mesmo modo podemos definir medida invariante para fluxos mensuráveis.

Definição 6.1.2 *Dizemos que uma medida μ é invariante pelo fluxo $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ se ela é invariante para cada uma das transformações ϕ^t , isto é,*

$$\mu(E) = \mu(\phi^{-t}(E))$$

para todo $E \in \mathcal{B}$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 6.1.3 *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma medida em M . Então f preserva μ se e somente se*

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$$

para toda função μ -integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

6.2 Ergodicidade

Definição 6.2.1 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva μ . Dizemos que f é ergódico se para todo conjunto mensurável $B \in \mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(B) = B$ temos $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.*

Teorema 6.2.2 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva μ . São equivalentes:*

- i. f é ergódico.
- ii. Os únicos elementos $B \in \mathcal{B}$ com $\mu(f^{-1}(B) \Delta B) = 0$ são aqueles com $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.
- iii. Para todo $B \in \mathcal{B}$ com $\mu(B) > 0$ temos $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B)\right) = 1$.
- iv. Para todo $A, B \in \mathcal{B}$ com $\mu(A)\mu(B) > 0$, existe $n > 0$ tal que $\mu(f^{-n}(A) \cap B) > 0$.

6.3 Teorema Ergódico de Birkhoff

Teorema 6.3.1 (Birkhoff) *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f . Dado qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \varphi d\mu = \int \tilde{\varphi} d\mu$$

No caso que f seja ergódica temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

Corolário 6.3.2 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva μ . Se f é ergódico, então para quase todo $x \in M$ temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : f^k(x) \in B\} = \mu(B)$$

para todo $B \in \mathcal{B}$.

Usando o teorema ergódico de Birkhoff podemos dar uma caracterização das transformações ergódicas.

Corolário 6.3.3 *Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva μ . Então f é ergódico se e somente se para todo $A, B \in \mathcal{B}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(f^{-i}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Teorema 6.3.4 (Birkhoff para Fluxos) *Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade, com μ invariante para um fluxo ϕ^t e $f \in L^1(\mu)$, então a função*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t(x)) dt$$

está definida μ -quase todo ponto e $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $f \geq 0$. Para o caso geral só separar a função em parte positiva e negativa. Definimos a seguinte função

$$\psi(x) = \int_0^1 f(\phi^t(x)) dt$$

Por hipótese $f \in L^1(\mu)$, então pelo teorema de Tonelli

$$\int_X \int_0^1 f(\phi^t(x)) dt d\mu = \int_0^1 \int_X f(\phi^t(x)) d\mu dt = \int_X f d\mu < \infty$$

Assim $\psi(x) < \infty$ está bem definida μ -quase sempre, $\psi \in L^1(\mu)$ e $\int \psi d\mu = \int f d\mu$. Para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ temos que

$$\psi \circ \phi^j(x) = \int_0^1 f(\phi^t(\phi^j(x))) dt = \int_0^1 f(\phi^{t+j}(x)) dt = \int_j^{j+1} f(\phi^t(x)) dt$$

Então,

$$\sum_{j=0}^{[T]-1} \psi \circ \phi^j(x) = \sum_{j=0}^{[T]-1} \int_j^{j+1} f(\phi^t(x)) dt = \int_0^{[T]} f(\phi^t(x)) dt$$

Logo, temos que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t(x)) dt = \frac{[T]}{T} \frac{1}{[T]} \sum_{j=0}^{[T]-1} \psi \circ \phi^j(x) + \frac{1}{T} \int_{[T]}^T f(\phi^t(x)) dt \quad (6.1)$$

Tentaremos limitar o segundo termo da soma, para isso

$$\left| \frac{1}{T} \int_{[T]}^T f(\phi^t(x)) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_{[T]}^{[T]+1} f(\phi^t(x)) dt \leq \frac{1}{[T]} \psi(\phi^{[T]}(x)) \rightarrow 0$$

μ -quase sempre quando $T \rightarrow +\infty$.

Aplicando o teorema de Birkhoff para ϕ^1 e ψ temos que o primeiro termo na direita da equação (6.1) converge μ -quase sempre. Então o limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t(x)) dt = \tilde{f}(x)$$

existe μ -quase sempre e $\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$. □

Corolário 6.3.5 *Nas mesmas condições do teorema 6.3.4, se μ é ergódica então*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi^t(x)) dt = \int_X \varphi d\mu$$

Bibliografia

- [1] Anosov, Dmitry Victorovich. "Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature." *Trudy Mat. Inst. Steklov* 90.5 (1967).
- [2] Ballmann, Werner, Michael Brin, and Keith Burns. "On surfaces with no conjugate points." *Journal of Differential Geometry* 25.2 (1987): 249-273.
- [3] Bangert, Victor. "Closed geodesics on complete surfaces." *Mathematische Annalen* 251.1 (1980): 83-96.
- [4] Bolton, J. "Conditions under which a geodesic flow is Anosov." *Mathematische Annalen* 240.2 (1979): 103-113.
- [5] Burns, Keith, and Marian Gidea. *Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical systems*. Chapman and Hall/CRC, 2005.
- [6] Butler, Clark. "Rigidity of equality of Lyapunov exponents for geodesic flows." *Journal of Differential Geometry* 109 (2018): 39-79.
- [7] Da Silva Filho, Paulo Cesar. *"Aplicações de Campos de Jacobi aos sistemas dinâmicos."* Tese de mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora (2012).
- [8] Do Carmo, Manfredo Perdigão. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [9] Donnay, Victor J., and Charles C. Pugh. "Anosov geodesic flows for embedded surfaces." *Astérisque* 287 (2003): 61-69.
- [10] Dowell, Ítalo, and Sergio Romãna. *Rigidity theorems for Anosov geodesic flows in manifolds of finite volume*, arXiv: 1709.09524 (2017).
- [11] Dowell, Ítalo, and Sergio Romãna. *Contributions to the study of Anosov Geodesic Flows in Non-Compact Manifolds*, arXiv: 1810.09998 (2018).
- [12] Eberlein, Patrick. "When is a geodesic flow of Anosov type? I." *Journal of Differential Geometry* 8.3 (1973): 437-463.

- [13] Feldman, Jack, and Donald Ornstein. "Semi-rigidity of horocycle flows over compact surfaces of variable negative curvature." *Ergodic theory and dynamical systems* 7.1 (1987): 49-72.
- [14] Freire, A., and Ricardo Mañé. "On the entropy of the geodesic flow in manifolds without conjugate points." *Invent. Math.* 69 (1982): 375-392.
- [15] Green, Leon W. "A theorem of E. Hopf." *The Michigan Mathematical Journal* 5.1 (1958): 31-34.
- [16] Guimarães, Florêncio F. "The integral of the scalar curvature of complete manifolds without conjugate points." *Journal of Differential Geometry* 36.3 (1992): 651-662.
- [17] Katok, Anatole, and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Vol. 54. Cambridge university press, 1997.
- [18] Klingenberg, Wilhelm. "Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type." *Annals of Mathematics* (1974): 1-13.
- [19] Knieper, Gerhard. "Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry." *Handbook of Dynamical systems*. Vol. 1. Elsevier Science, 2002. 453-545.
- [20] Kozyakin, Victor. "On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula." *Linear Algebra and its Applications* 431.11 (2009): 2134-2141.
- [21] Lee, John M. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Vol. 176. Springer Science and Business Media, 2006.
- [22] Mané, Ricardo. "On a theorem of Klingenberg." *Dynamical systems and bifurcation theory (Rio de Janeiro, 1985)* 160 (1987): 319-345.
- [23] Oseledets, Valery Iustinovich. "A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov, exponents of dynamical systems." *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* 19 (1968): 179-210.
- [24] Paternain, Gabriel. *Geodesic flows*. Vol. 180. Springer Science and Business Media, 2012.
- [25] Pollicott, Mark. " C^k -rigidity for hyperbolic flows II." *Israel Journal of Mathematics* 69.3 (1990): 351-360.
- [26] Ruggiero, Rafael Oswaldo. "On the creation of conjugate points." *Mathematische Zeitschrift* 208.1 (1991): 41-55.
- [27] Sotomayor, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.