UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO-UFRJ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA-IM

UFRJ

DESIGUALDADES DE IMERSÃO ÓTIMAS E APLICAÇÕES À DINÂMICA GLOBAL DE ALGUNS MODELOS DISPERSIVOS

Abdon Moutinho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em matemática Pós-Graduação em Matemática (Mestrado), PGMAT UFRJ, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em matemática Pós-Graduação em Matemática (Mestrado).

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Rio de Janeiro
Maio de 2020

DESIGUALDADES DE IMERSÃO ÓTIMAS E APLICAÇÕES À DINÂMICA GLOBAL DE ALGUNS MODELOS DISPERSIVOS

Abdon Moutinho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA (IM-UFRJ) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MATEMÁTICA PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA (MESTRADO).

Examinada por:

Prof. Dr. Adán J. Corcho Fernández, UFRJ, (Presidente)

Prof. Dr. Felipe Linares, IMPA

Prof. Dr. Xavier Carvajal Paredes, UFRJ

Prof. Dr. Miguel Ángel Alejo Plana, UCO-Espanha

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MAIO DE 2020

Moutinho, Abdon

Desigualdades de Imersão Ótimas e Aplicações à Dinâmica Global de Alguns Modelos Dispersivos/ Abdon Moutinho. – Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2020.

XI, 53 p. $29,7$cm.

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Dissertação (mestrado) – IM-UFRJ /Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado), 2020.

Referências Bibliográficas: p. 51 – 53.

1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave. 3. Terceira palavra-chave. I. , . II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM-UFRJ, Programa de Pós-graduacão em Matemática. Pós-Graduação em Matemática (Mestrado)III. Título.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, minha família, aos professores do Instituto de Matemática, aos meus amigos pelo apoio e motivação nesse caminho que escolhi seguir e no apoio durante o período de mestrado. Agradeço também ao CNPq e à CAPES pelo financiamento das bolsas de estudo recebidas durante minha participação como estudante de mestrado na UFRJ.

Resumo da Dissertação apresentada à IM-UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DESIGUALDADES DE IMERSÃO ÓTIMAS E APLICAÇÕES À DINÂMICA GLOBAL DE ALGUNS MODELOS DISPERSIVOS

Abdon Moutinho

Maio/2020

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Programa: Pós-Graduação em Matemática (Mestrado)

Resumo. Nesse trabalho nós utilizaremos as técnicas introduzidas em [27] para encontrar restrições na massa do dado inicial do Problema de Cauchy (Problema de Valor Inicial) associado à equação Não-Linear de Schrödinger com Derivada e à equação de Korteweg-de Vries Quíntica (modelo de massa crítica por invariância de escala do modelo) de modo que seja possível provar boa colocação global em ambos modelos quando são considerados dados iniciais no espaço de Sobolev H^1, definidos no toro $\mathbb{T}$ (ou seja, quando são consideradas soluções periódicas). Para obtermos os resultados principais, usaremos técnicas da Teoria do Transporte de Massa provenientes em [1] e [5], as quais serão úteis para obter desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg. Outro elemento crucial na obtenção dos resultados será o entendimendo de transformações de tipo calibre, definidas e estudadas em [14].

Palavras Chave: Problema de Valor Inicial, Boa Colocação Global, Equação Não-Linear de Schrödinger com derivada, Equações de Korteweg-de Vries com massa crítica, Teoria do Transporte de Massa, Transformações de Calibre, Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg.

Abstract. In this work we will use the techniques introduced in [27] to search restrictions in the mass of initial data of Cauchy Initial Value Problem(IVP) associated to the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation and to Fifth Order Korteweg-de Vries Equation (critical mass model and scale invariance model of the model) such that is possible to have Global Well-posedness of both models when initial data are considered in Sobolev space H^1, defined in Torus $\mathbb{T}$ (that is, when periodic solutions are considered). To obtain these main results, we will use techniques of Mass Transportation Theory from [1] and [5], which are useful to obtain inequalities of type Gagliardo-Nirenberg. Another crucial element in the achievement of the results will be the understanding of the Gauge Transformations, defined and worked in [14].

Key words: Initial Value Problem, Global Well-posedness, Derivative Nonlinear Schrödinger equation, Critical Mass Korteweg-de Vries equations, Mass Transportation Theory, Gauge Transformations, Gagliardo-Nirenberg Inequalities.

Introdução

Neste trabalho será estudado a existência de soluções globais para dois modelos dispersivos não lineares unidimensionais, onde o operador de propagação livre é do tipo Schrödinger. Em ambos modelos as soluções globais serão obtidas sob algumas restrições da massa inicial, a qual é conservada por ambos modelos ao longo do tempo. Consideremos inicialmente o Problema de Valor Inicial (PVI) associado à equação de Schrödinger Não-Linear com Derivada posta na reta, e cujo modelo matemático é definido por:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = i\partial_x(|u|^2 u)(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{I.1}$$

O dado inicial u_0 será considerado no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$, cuja definição precisa pode ser vista em [9]. A solução u da equação (I.1) satisfaz as seguintes leis de conservação que serão retomadas no Capítulo 3: A conservação da *massa* dada por

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\,, \tag{1}$$

a conservação da *energia* dada por

$$E_D(u(t)) = \int_{\mathbb{R}} (|u_x(t)|^2 + \frac{3}{2}\operatorname{Im}|u(t)|^2 u(t)\overline{u_x}(t) + \frac{1}{2}|u(t)|^6)\,dx = E_D(u_0), \tag{2}$$

e, por último o *momento* dado por

$$P_D(u(t)) = \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}} \overline{u_x}(t)u(t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^4\,dx = P_D(u_0). \tag{3}$$

Para entender a dinâmica das soluções do modelo (I.1) com dados iniciais em espaços de Sobolev $H^s(M)$, onde $M = \mathbb{R}$ ou $M = \mathbb{T}$ é crucial entender as propriedades, nesses espaços funcionais, do fluxo gerado pela equação linear, dada por:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{I.2}$$

nos espaços $H^s(\mathbb{R})$, que serão bem explicados no Capítulo 1. Seja $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz, cujas propriedades serão apresentadas no Capítulo 1, existe uma única solução suave da equação (I.2) que será denotada por $S(t)(u_0)(x)$ para todo t real. Não é difícil verificar que o operador $S(t)$ é linear em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e que para qualquer real s $\|S(t)(u_0)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$. Por argumento de densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $H^s(\mathbb{R})$, verifica-se que $S(t)$ tem única extensão linear, contínua e isométrica em $H^s(\mathbb{R})$ para todo s real, portanto, usaremos a partir de agora a extensão de $S(t)$ no lugar de $S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Primeiramente, a solução integral de (I.1) definida $u \in C((-T,T),H^1)$ para dado inicial u_0 deve ser solução em todo $t \in (-T,T)$ de

$$u(t,x) = S(t)(u_0)(x) + \int_0^t S(t-s)(i\partial_x(|u|^2u)(s))(x)\,ds. \tag{4}$$

Diremos que a equação (4) é *localmente bem posta* em $H^1(\mathbb{R})$ se verifica as seguintes propriedades:

- Para qualquer dado inicial u_0 em $H^1(\mathbb{R})$, existe uma única solução $u(t,x) \in C((-T,T),H^1(\mathbb{R}))$ da equação integral (4) para um determinado valor $T > 0$.

- Existe dependência contínua das soluções, que significa que se v_0 está muito próximo de u_0 em $H^1(\mathbb{R})$, então a solução v da equação (I.1) com dado inicial v_0 se mantém próxima de u em $C((-T,T),H^1(\mathbb{R}))$.

Além disso, dizemos que o modelo de equação dispersiva (I.1) é globalmente bem posto para dados iniciais $u_0 \in X \subset H^1(\mathbb{R})$, se valem as mesmas propriedades das soluções de uma equação localmente bem posta para qualquer intervalo de tempo $[0,T]$. A prova da equação (4) ser localmente bem posta em $H^1(\mathbb{R})$ é encontrado no artigo [25].

Nota-se também que a transformação escalar de $u(t,x)$ definida como

$$u_\beta(t,x) = \beta^{\frac{1}{2}} u(\beta^2 t, \beta x) \tag{5}$$

também resolve a equação (I.1) para qualquer solução $u(t,x)$. Utilizando a identidade

$$\|D_x^s u_\beta(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \beta^s \|D_x^s u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{6}$$

verificada no artigo [25] com D_x^s o operador diferencial que satisfaz para qualquer $f \in H^s(\mathbb{R})$ a identidade $\widehat{D_x^s f}(x) = C\hat{f}(x)|x|^s$ para certa constante $C > 0$, mais detalhes podem ser vistos no Capítulo 1 de [16]. A identidade (6) implica que a única norma $H^s(\mathbb{R})$ conservada pela transformação escalar é a norma em $L^2(\mathbb{R})$. Essa invariância da norma $L^2(\mathbb{R})$ implica que o tempo de existência não depende da massa da solução, caso contrário todas as soluções seriam globais. Essa observação nos motiva a estudar o conceito de massa crítica que corresponde ao máximo valor que $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pode tomar para que $u(t,x)$ seja solução global na variável $t \in \mathbb{R}$. De maneira análoga, para o seguinte Problema de Valor Inicial no domínio periódico $\mathbb{T}$ dado por

$$\begin{cases} v_t(t,x) + v_{xxx}(t,x) + 5v^4 v_x(t,x) = 0, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ v(0,x) = v_0(x). \end{cases} \tag{II.1}$$

O dado inicial v_0 será considerado em $H^1(\mathbb{T})$. A solução desse problema satisfaz as seguintes leis de conservação: A lei da *massa* dada por

$$\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = M_0, \tag{7}$$

e a lei da *energia* dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |v_x(t,y)|^2 \, dy - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{T}} |v(t,y)|^6 \, dy = E_0. \tag{8}$$

Essas duas leis de conservação serão retomadas no Capítulo 5. Essa equação é denotada por Equação Generalizada de Korteweg-de Vries com $k = 5$. A definição de solução da equação (II.1) é análoga à da equação (I.1) e é bem explicada no Capítulo 7 do livro [16]. As definições da solução do problema (II.1) ser localmente ou globalmente bem posta é análoga às definições para o problema (I.1) por isso serão omitidas. Também verifica-se que se $v(t,x)$ é solução de (II.1), a transformação escalar de v dada por

$$v_\alpha(t,x) = \alpha^{\frac{1}{2}} v(\alpha^3 t, \alpha x) \tag{9}$$

também é solução de (II.1). Por observações feitas no Capítulo 7 do livro [16], também verifica-se que a única norma em $H^s(\mathbb{T})$ preservada por essa transformação é a norma em $L^2(\mathbb{R})$. De maneira análoga ao problema (I.1) e uma vez que a equação (II.1) é focalizante, a invariância da norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$ pela transformação escalar motiva o estudo de massa crítica para dados iniciais $v_0 \in H^1(\mathbb{T})$, enquanto que para modelos de equação de Korteweg-de Vries Quíntica desfocalizante a lei da Energia implica que todas soluções desse modelos para qualquer dado inicial em H^1 são globais. O modelo (I.1) aparece no estudo da propagação de ondas circularmente polarizadas de Alfvén em plasma magnetizado com campo magnético constante na área de Física de Plasma. Essas e mais informações sobre aplicações físicas podem ser encontrados em [20] e [21]. O modelo (II.1) é derivado do estudo de ondas longas não lineares dispersivas em superfícies rasas, mais detalhes podem ser encontrados em [15].

O primeiro objetivo deste trabalho é encontrar restrições de massa para dados em H^1 que garantam que as respectivas soluções locais possam ser estendidas globalmente nos problemas (I.1) e (II.1). A ideia da prova do resultado relacionado ao problema (I.1) consiste em utilizar as leis de conservação da solução $u(t,x)$ dessa equação e a desigualdade ótima de Gagliardo-Nirenberg provada em [1] para estimar a expressão

$$f(t) = \frac{\|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4}{\|u(t)\|_{L^6(\mathbb{R})}^3}. \tag{10}$$

Caso u não fosse solução globalmente bem posta teríamos que ocorreria a alternativa de blow-up, que consiste em existir $T > 0$, tal que $\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ tende a $+\infty$ quando t tende a T. E isso implicaria que $f(t)$ seria uniformemente limitada em cima e embaixo para todo t suficientemente próximo de T por constantes positivas. Combinando essa estimativa com a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos que $f(t)$ deveria satisfazer uma desigualdade polinomial o que concluiria que seria impossível existir blow-up e logo para certos valores de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ teríamos que a equação seria globalmente bom posta. Esse raciocínio é bem explicado em [27].

Usando mesmo argumento na equação (II.1) podemos obter outras estimativas de massa crítica e empregando a técnica das Transformações de Calibre trabalhadas em [14], encontradas no Capítulo 2, melhoramos a primeira restrição de massa para essa equação e usando as leis de conservação de (II.1) obtemos mais uma restrição melhorada de massa crítica.

O trabalho será estruturado da seguinte forma: Os capítulos 1 e 2 são dedicados a estabelecer resultados básicos de Análise que servirão de base para obter os resultados principais. O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da existência de soluções globais para a equação (I.1) na reta, já o Capítulo 4 é dedicado ao mesmo problema, só que no contexto de um domínio periódico. Finalmente, no Capítulo 5, serão apresentados os resultados correspondentes à equação (II.1).

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados de Teoria de Medida e Análise Funcional

Nessa seção, introduziremos alguns resultados de Teoria da Medida e Análise Funcional que servirão de base teórica para demonstrar os resultados principais e suas aplicações.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{V} \subset \mathfrak{P}(X)$, então $(X, \mathcal{V})$ é uma sigma-álgebra se e só se satisfaz as condições abaixo:*

1. $\emptyset \in \mathcal{V}$,
2. *Se* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, *então* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{V}$,
3. *Se* $A \in \mathcal{V}$, *então* $X \setminus A \in \mathcal{V}$.

Agora, daremos a noção de medida definidas em sigma-álgebras.

Definição 1.1.2. *Se $(X, \mathcal{V})$ é uma sigma-álgebra, então uma função $\mu : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+ \cup +\infty \cup 0$ é uma medida se satisfaz as seguintes condições:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *Se* $A\,, B \in \mathcal{V}$ *são disjuntos, então* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
3. *Se* $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, $B_{i+1} \subset B_i$ *para qualquer* i, $B_i \downarrow \emptyset$ *e* $\mu(B_j) < +\infty$ *para algum índice* j, *então* $\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = 0$.

Agora consideraremos $(X, \mathcal{V}, \mu)$, um conjunto X com sigma-álgebra $\mathcal{V}$ e medida μ. Como exemplos de conjuntos com medida, considere os seguintes espaços:

- $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B})$, onde a sigma-álgebra em $\mathbb{R}^n$ é gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Chamaremos essa *s*igma-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$.

- Se M^d é uma variedade contida em $\mathbb{R}^n$, então temos a sigma-álgebra induzida $(M, \mathbb{B})$ gerada por abertos em $\mathbb{R}^n$. Um exemplo desse caso é o círculo $\mathbb{T}^1$ que é equivalente a $[0,1]/\{1\ 0\}$ contida em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.3. *Seja $\mathcal{V}$ sigma-álgebra de X. Uma função $f : (X, \mathcal{V}) \to \mathbb{R}^n$ é mensurável se para qualquer aberto $K \subset \mathbb{R}^n$, então $f^{-1}\{K\}$ pertence a $\mathcal{V}$.*

Se $\mathcal{V}$ é uma sigma-álgebra de um conjunto X, para cada $S \in \mathcal{V}$, um exemplo trivial de função mensurável é a função simples dada por:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Agora, tomando com base a definição de integral de funções mensuráveis, usaremos a medida de Lebesgue λ para $\mathbb{R}$ e a sigma-álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}$ e introduziremos outros conceitos importantes. Para uma introdução à integral de Lebesgue recomendamos [10].

Definição 1.1.4. *Seja $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda) \to \mathbb{C}$, f é absolutamente contínua se para cada $\epsilon > 0$ e cada intervalo compacto $[A, B]$, existe $\sigma > 0$ tal que se união disjunta de intervalos $\bigoplus_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset [A, B]$ com $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \sigma$, então*

$$\textstyle\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Teorema 1.1.1. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é absolutamente contínua, então existe única função mensurável $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que para qualquer $x, z \in \mathbb{R}$*

$$\int_x^z g(y)\, d\lambda = f(z) - f(x). \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [10]. □

Um resultado importante relacionado a isso é o teorema da Diferenciação de Riemann-Lebesgue, o qual enunciamos a seguir:

Teorema 1.1.2. *Se f é absolutamente contínua com $\int_x^z g(y)\, d\lambda = f(z) - f(x)$ para todo x, z, então vale:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) \ \ q.t.p. \tag{1.3}$$

Demonstração. Ver [10]. □

É fácil verificar que se f, g são funções absolutamente contínuas, então $f(x)g(x)$ também é e

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ q.t.p. em } x \in \mathbb{R}.$$

Também provaremos o seguinte resultado necessário na demonstração de um resultado no capítulo de transformações calibradas.

Teorema 1.1.3. *Se $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, f tem derivada limitada e g é absolutamente contínua, então $f \circ g(x)$ também é absolutamente contínua e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

se x pertence a um conjunto mensurável H com $\lambda(\mathbb{R} \setminus H) = 0$.

Demonstração. Como $|f \circ g(x) - f \circ g(y)| \leq \left\| f' \right\|_{L^{\infty}} |g(x) - g(y)|$ para qualquer x, y em $\mathbb{R}$, segue diretamente da definição que g absolutamente contínua implica em $f \circ g$ absolutamente contínua.

Como g é contínua e f é suave tem-se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x)}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)), \tag{1.4}$$

logo podemos concluir que $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$, de onde decorre a demonstração do teorema. □

Além desse resultado será útil a Desigualdade de Hölder, que diz o seguinte:

Teorema 1.1.4. *Se $(X, \mathcal{V}, \mu)$ é um espaço com medida μ na sigma-álgebra $\mathcal{V}$, então se f, g são funções mensuráveis em X tais que $1/p + 1/q = 1$, $p, q \geq 1$, vale:*

$$\int_X f(x)g(x)\, d\mu \leq \Big(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |f(x)|^q \, d\mu \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

Demonstração. Ver Capítulo 4, Seção 4.2 do livro [10]. □

Continuamos a seguir com alguns resultados básicos de Análise Funcional.

Teorema 1.1.5. *Se $T : U \to V$ é um operador linear limitado entre dois espaços de Banach, então o operador dual $T^* : V' \to U'$ é limitado e, além disso, $\|T\| = \|T^*\|$.*

Demonstração. Ver Capítulo 2, Seção 2.1 do livro [3]. □

Definição 1.1.5. *Sejam X um espaço de Banach e X' seu dual, dado pelo conjunto aplicações lineares contínuas em X. A menor topologia em X' no qual para cada $x \in X$ o funcional linear $x : X' \to \mathbb{C}$ é contínuo é a topologia fraca estrela de X'.*

Teorema 1.1.6 (Banach-Alaoglu)**.** *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual, então o fecho da bola unitário em X' é compacto na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Ver Capítulo 6 do livro [3]. □

1.2 Teoria das distribuições

Antes de apresentar a teoria dos espaços de Sobolev, necessitaremos primeiros apresentar o conceitos de distribuição, pois em grande parte do estudo de problemas de equações diferenciais parciais são estudados soluções fracas das equação, as quais resolvem o modelo de equação no sentido distribucional.

Primeiro, definiremos o que é o espaço de funções teste que suportam o conceito de distribuição.

Definição 1.2.1. *Seja Ω um aberto contido em $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $D(\Omega)$ o espaço topológico gerado por $C_0^\infty(\Omega)$ com a topologia definida da seguinte forma: dada $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi_n \xrightarrow{D(\Omega)} \phi$ tais que existe compacto $K_1 \subsetneq \Omega$ com $\cup_{i=1}^\infty \operatorname{supp} \phi_i = K_1$ e para quaisquer compacto $K \subsetneq \Omega$ e derivada ∂^α com $|\alpha| \geq 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} \|\partial^\alpha(\phi - \phi_n)\|_{L^\infty(K)} = 0$.*

Denotaremos por $D(\Omega)$ o espaço das funções testes. Agora, com essa definição, poderemos definir o espaço das distribuições.

Definição 1.2.2. *Sejam Ω algum aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ operador linear em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $T \in D^{'}(\Omega)$ se e só se T é contínuo em $D(\Omega)$, isto é: se $\phi_n \xrightarrow{D(\Omega)} \phi$, então $\lim_{n\to\infty} T(\phi_n) = T(\phi)$. Além disso, para uma sequência $(T_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset D^{'}(\Omega)$ e $T \in D^{'}(\Omega)$ diremos que $T_i \xrightarrow{D^{'}(\Omega)} T$ se, e somente se, para qualquer $\phi \in D(\Omega)$ vale $\lim_{i\to\infty} T_i(\phi) = T(\phi)$.*

Para cada função mensurável f, definimos T_f como operador linear em $C_0^\infty(\Omega)$ igual a $T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$ apenas quando $\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$ for bem definido para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. A partir de agora, afirmaremos que um conjunto de funções qualquer S de Ω tomando valores em $\mathbb{C}$ está contido em $D^{'}(\Omega)$, se para qualquer $f \in S$, então $T(f) \in D^{'}(\Omega)$. Em particular, é fácil verificar que os espaços $L^p(\Omega) \subset D^{'}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ usando desigualdade de Hölder e para $p = \infty$ segue diretamente da definição do espaço $D(\Omega)$. Em particular, usando a desigualdade de Hölder, também verifica-se que se $g_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} g$, então para qualquer $\phi \in D(\Omega)$, vale que $\lim_{n\to\infty} T_{g_n}(\phi) = T_g(\phi)$, ou seja a inclusão é contínua em $D^{'}(\Omega)$.

Além disso, em $D^{'}(\Omega)$, pode-se definir a noção de derivadas nesse espaço usando ideias oriundas da integração por partes, como vemos a seguir.

Definição 1.2.3. *Se $T \in D^{'}(\Omega)$, então $\partial^\alpha T$ é definido como a aplicação linear pertencente a $D^{'}(\Omega)$, definida por*

$$\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi), \tag{1.6}$$

para cada $\phi \in D(\Omega)$. Chamaremos esse tipo de derivação de derivada distribucional.

O termo $(-1)^{|\alpha|}$ vem do fato de que $\int_\Omega f(x)\partial^\alpha g(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\partial^\alpha f(x)\,dx$ quando f e g estão em $D(\Omega)$, logo por isso fica claro que a definição acima estende o conceito de derivada num espaço maior que o das funções suaves e de suporte compacto.

Note que se $T \in D^{'}(\Omega)$, nem sempre existe função mensurável em algum $L^p(\omega)$ com $f : \Omega \to \mathbb{C}$ com $T = T_f$. Por exemplo, utilizando a distribuição delta de Dirac δ definido por $\delta(\phi) = \phi(0)$, não existiria f satisfazendo:

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx = \phi(0) \text{ para qualquer } \phi \in D(\Omega). \tag{1.7}$$

O que implica que o espaço das distribuições é maior que qualquer espaço $L^p(\Omega)$ para qualquer $p \geq 1$.

Além disso, também existe o espaço de distribuições temperadas definidas em espaços de Schwartz, os quais serão definidos agora.

Definição 1.2.4. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ corresponde ao conjunto de funções $f \in C^\infty\Big(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}\Big)$ tais que*

$$\Big\| |x|^k \partial_{x_i}^{k_i} \dots \partial_{x_n}^{k_n}(f) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty \tag{1.8}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e para todo $i \in [n]$ $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dizemos que $g_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} g$ quando:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| |x|^k \partial_{x_i}^{k_i} \dots \partial_{x_n}^{k_n}(g - g_n) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{1.9}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e para todo $1 \leq i \leq n$ natural e $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Agora, definiremos o espaço das distribuições temperadas.

Definição 1.2.5. *Um operador linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição temperada se para toda $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} f$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f)$. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d)$.*

1.3 Espaços de Sobolev

Nessa seção, apresentaremos as propriedades dos espaços de Sobolev.

Definição 1.3.1. *Dados $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ o subconjunto de $L^p(\Omega)$ tal que para qualquer multi-índice $m = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ com $\sum_{i=1}^n k_i \leq k$, se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, então a derivada distribucional $D^m f \in D^{'}(\Omega)$ possui um representante $h \in L^p(\Omega)$. Isto é, $T_h = D^m f \in D^{'}(\Omega)$.*

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é de Banach para $1 < p < \infty$ com a norma $\|f\|_{k,p} = \sum_{\{|m|=k\}} \|D^m f\|_{L^p(\Omega)}$ (ver Teorema 2 em [9]) e Hilbert para $p = 2$. Em particular, para $p = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.2. *Dado $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev de ordem s é definido por*

$$H^s = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}(\Lambda^s f)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, para cada $f \in H^s$ tem-se que $\|f\|_{s,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 (1 + |x|^2)^s \, dx$.

Usando a norma $\|\cdot\|_{s,2}$, não é difícil ver que H^s é um espaço de Hilbert.

Não é difícil verificar que quando s é inteiro maior ou igual a zero, temos que $H^s = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. Agora, enunciaremos desigualdades e resultados importantes em espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3.1. *Se $s > \frac{n}{2}$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ o qual é o espaço das funções contínuas $g(x)$ que vão para zero quando $|x| \to \infty$. Em particular vale a seguinte desigualdade:*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_{n,s} \|f\|_{s,2} . \tag{1.10}$$

Demonstração. Ver Teorema 3.2 em [16]. □

Teorema 1.3.2. *Se $s > \frac{n}{2}$, então H^s é uma álgebra e se $f, g \in H^s$, então*

$$\|fg\|_{s,2} \leq c_{s,2} \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2} .$$

Demonstração. Ver Teorema 3.4 em [16]. □

Teorema 1.3.3. *Se $s \in (0, \frac{n}{2})$, então H^s está continuamente mergulhada em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n-2s}$ ou $s = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. Em particular para qualquer $f \in H^s$ com $s \in (0, \frac{n}{2})$, vale:*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{s,2} . \tag{1.11}$$

Demonstração. Ver Teorema 3.3 em [16]. □

Combinando os Teoremas 1.1.5 e 1.3.3, verifica-se por dualidade que:

Teorema 1.3.4. *Se $s \in (0, \frac{n}{2})$ e existe $c_{n,s}$ constante para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $p = \frac{2n}{n-2s}$, tal que:*

$$c_{n,s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \|f\|_{-s,2} . \tag{1.12}$$

Em particular $L^p(\mathbb{R}^n)$ está mergulhado continuamente em H^{-s}.

Introduziremos por último a Desigualdade de Interpolação de Young que será utilizada como ferramenta nesse texto.

Teorema 1.3.5. *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, tais que $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Para*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy \tag{1.13}$$

temos que para $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, vale

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \tag{1.14}$$

1.4 Breve introdução à Teoria de Transporte de Massa

Nessa seção, apresentaremos uma introdução básica à teoria de Transporte de Massa e suas aplicações. O foco dessa seção é apresentar resultados necessários para verificar uma desigualdade do tipo Gagliardo-Niremberg que será de bastante utilidade para deduzir os resultados principais.

1.4.1 Motivação

A ideia dessa teoria foi criada para estudar o seguinte problema: Há uma quantidade de "sacos de areia" ou "partículas" $X \subset (\mathbb{R}^d, \rho_0)$ que precisa ser transportada para $(\mathbb{R}^d, \rho_1)$, com ρ_1 e ρ_0 duas medidas probabilísticas em $\mathbb{R}^d$ e bem definidas em conjuntos borelianos. Se deseja minimizar o "custo" de transporte de partículas de uma região à outra.

Definição 1.4.1. *A função $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ será chamada de função custo.*

Intuitivamente, o valor $c(x, y)$ representa o custo pontual de levar uma partícula da coordenada inicial x em $(\mathbb{R}^d, \rho_0)$ para uma coordenada y em $(\mathbb{R}^d, \rho_1)$. Agora enunciaremos a definição formal do que seria o "transporte de partículas" conforme a intuição descrita acima.

Definição 1.4.2. *Seja $\mathcal{T}(\rho_0, \rho_1)$ o conjunto de funções mensuráveis $T : (\mathbb{R}^d, \rho_0) \to (\mathbb{R}^d, \rho_1)$, com $\rho_0\{T^{-1}(B)\} = \rho_1\{B\}$ para qualquer B boreliano. Denotaremos isso por $T_\# \rho_0 = \rho_1$.*

Assim, a motivação da Teoria de Transporte de Massa corresponde a achar o transporte com o menor custo que leva "partículas" de uma região à outra. Esse problema tem aplicações importante nas áreas de Economia, Óptica, Metereologia, Kinetic Theory e no estudo de Equações Parciais Diferenciais. Informações mais detalhadas sobre o assunto podem ser encontradas em [26].

De uma forma geral, isso corresponde a achar um T o que resolve o seguinte problema de Monge:

$$\inf_{T \in \mathcal{T}(\rho_0, \rho_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x, Tx) d\rho_0(x). \tag{1.15}$$

Não é difícil verificar que existem casos em que $\mathcal{T}(\rho_0, \rho_1)$ é vazio e o problema não faz sentido.

O problema de Monge para $c(x, y) = |x - y|$ e qualquer dimensão d do espaço euclideano foi resolvido por Evans e Gangbo em 1999 em [8] supondo que $d\rho_0(x) =$

$p_0(x)dx$, $d\rho_1(x) = p_1(x)dx$ e que as funções p_0, p_1 são lipschitzianas e de suporte compacto.

Os resultados de [8], resultados obtidos por Caffarelli-Feldman-McCann [7] e Trudinger-Wang[22].Também Caffarelli[6], McCann[12] e Gangbo [13] resolveram o problema de Monge para $c(x, y) = h(x - y)$ com h função convexa. O caso em que $c(x, y) = l(|x - y|)$ com l estritamente côncava também foi provado em [12] e [13].

Com todas as informações reunidas, não é difícil verificar o resultado a seguir.

Teorema 1.4.1. *Seja $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma aplicação boreliana. $T \in \mathcal{T}(\rho_0, \rho_1)$ se, e somente se, para qualquer $G \in L^1(\mathbb{R}^d, \rho_1)$, vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(Tx)\, d\rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(y) d\rho_1(y). \tag{1.16}$$

O problema de Monge pode ser modificado em outro problema de minimização que sobe certas condições é equivalente a ele. Essa nova questão corresponde ao problema de Kantorivich.

Definição 1.4.3. *Denotamos por $\Gamma(\rho_0, \rho_1)$ o conjunto de medidas μ em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, tais que*

- $\mu\{B \times \mathbb{R}\} = \rho_0\{B\}$,
- $\mu\{\mathbb{R}^d \times A\} = \rho_1\{A\}$.

Assim, o problema de Kantorovich corresponde a analisar

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x, y)\, d\gamma(x). \tag{1.17}$$

Teorema 1.4.2. *Se a função de custo $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ for não-negativa contínua e ρ_0, ρ_1 forem medidas não-atômicas, então*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(\rho_0, \rho_1)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x, y)\, d\gamma(x) = \inf_{T \in \mathcal{T}(\rho_0, \rho_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x, Tx) d\rho_0(x). \tag{1.18}$$

Ou seja, os problemas de minimização de Monge e Kantorivich são equivalentes.

Demonstração. Ver demonstração em [26] e [11]. $\square$

1.4.2 Resultados da Teoria de Transporte de Massa

A partir dessa subseção a função custo $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dependerá de uma função $h : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$, a qual satisfará as três seguintes hipóteses:

(H1) $c(x, y) = h(x - y)$,

(H2) $\lim_{|z|\to\infty} \frac{h(z)}{|z|} = +\infty$,

(H3) $h \in C^1(\mathbb{R}^d)$ é convexa.

Definição 1.4.4. *se $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, nós definimos:*

- $v^c(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^d} c(x,y) - v(y)$,
- $u_c(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} c(x,y) - u(x)$.

Definição 1.4.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto convexo. Para cada função $f : X \to \mathbb{R}$, a função*

$$f^*(x) = \sup_{y\in X} x \cdot y - f(y) \tag{1.19}$$

é a Transformada de Legendre de f.

Definição 1.4.6. *Se μ e σ são medidas sobre mesma sigma-álgebra $\mathcal{V}$ de X, se $B \in \mathcal{V}$ e $\sigma\{B\} = 0$ implicar que $\mu\{B\} = 0$, denotaremos $\mu << \sigma$.*

Nessas novas condições podemos enunciar dois importantes resultados.

Lema 1.4.3. *Assuma que valem as hipóteses (H1),(H2) e (H3) e considere uma medida $\mu_0 << dx$, $(T_0)_\#\mu_0 = \mu_1$. Então existe uma função semicontínua superiormente $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $T_0(x) = x - \nabla h^*(\nabla u_0(x))$, onde h^* é a transformada de Legrende de h e $u_0 = v_0^c$. Assumindo $v_0 = -\infty$ fora do suporte de μ_1, então T_0 minimiza*

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x,Tx)d\rho_0(x). \tag{1.20}$$

Além disso, vale a igualdade:

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} c(x,y)\, d\gamma(x) = \inf_{T\in\mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x,Tx)d\mu_0(x). \tag{1.21}$$

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema 1.4.4. *Assuma que valem (H1),(H2) e (H3) e que h é uma função radial. Assuma também que $\mu_0 << dx$. Se*

$$\inf_{T\in\mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x,Tx)d\rho_0(x) < +\infty, \tag{1.22}$$

então existe minimizador T_0 do problema de Monge e ele é único. Além disso, vale

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} c(x,y)\, d\gamma(x) = \inf_{T\in\mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d} c(x,Tx)d\mu_0(x). \tag{1.23}$$

Mais ainda, se também tivermos $\mu_1 << dx$, então T_0 também é função invertível em $\mathbb{R}^d$ exceto num conjunto de medida nula.

Demonstração. Ver [11]. □

Agora, apresentaremos uma distância que definirá uma topologia sobre o espaço de medidas probabilísticas em $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.4.7. *Sejam μ_0 e μ_1 duas medidas probabilísticas em $\mathbb{R}^d$,*

$$W_p(\mu_0, \mu_1) = (\tfrac{1}{p} \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu_0,\mu_1)} \{\textstyle\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^p d\gamma(x,y)\})^{\frac{1}{p}}.$$

Observação. No caso em que μ_0 e μ_1 são medidas não-atômicas, então $W_p(\mu_0, \mu_1) = (\frac{1}{p} \inf_{T \in \mathcal{T}(\mu_0,\mu_1)} \int_{\mathbb{R}^d} |x - Tx| d\mu_0(x))^{\frac{1}{p}}$.

Agora, introduzimos a noção de métrica no espaço de medidas probabilísticas que será útil para definição de topologia e geodésicas nesse espaço.

Teorema 1.4.5. *Seja $1 \leq p < +\infty$, $W_p(,)$ é uma métrica em*

$$P^p = P(\mathbb{R}^d) \cap \{\mu \mid \textstyle\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \, d\mu(x) < +\infty\}.$$

$P(\mathbb{R}^d)$ é definido como o espaço das medidas probabilísticas em $\mathbb{R}^d$.

Demonstração. Ver [19], [26] e [11]. □

Agora apresentaremos a definição de curva e geodésica no espaço (P^2, W_2), W_2 é chamado de *Distância de Wasserstein.*

Definição 1.4.8. *Uma curva $\gamma : [0,1] \to (P^2, W_2)$ é dita geodésica se para qualquer $t \in (0,1)$, vale*

$$W_2(\gamma_0, \gamma_t) + W_2(\gamma_t, \gamma_1) = W_2(\gamma_0, \gamma_1). \tag{1.24}$$

Enunciaremos agora o resultado principal que caracteriza todas as geodésicas em P^2.

Teorema 1.4.6. *Qualquer geodésica $\gamma : [0,1] \to P^2$ em (P^2, W_2) é da forma*

$$((1-t)\mathbb{I} + t\nabla\phi)_{\#}\mu_0$$

para única $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexa, a menos de constante, e uma única $\mu_0 \in P^2$. $\mathbb{I}$ é o operador identidade.

Demonstração. Ver [26] e [19]. □

Seja a $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Definimos $U(p) := \int_{\mathbb{R}^d} A(p(x)) \, dx$, com $\int_B p(x) \, dx = \mu_p\{B\}$ para qualquer B boreliano em $\mathbb{R}^d$ uma μ_p medida absolutamente contínua e probabilística em $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.4.9. *Dizemos que $U(p)$ é um deslocamento convexo se $g(t) = U(p_t)$ é convexa em t com $p_t = ((1-t)\mathbb{I} + t\nabla\phi)_{\#}p_0$ para certa função convexa ϕ, ou melhor, se $U(p_t)$ é função convexa na variável t para qualquer geodésica p_t em P^2.*

Usando essa última definição, chegamos ao último resultado.

Teorema 1.4.7. *Sejam p, $p^{'}$ densidades de probabilidade em $\mathbb{R}^d$ e para p_t a geodésica que liga p a $p^{'}$, isto é $p_t = (\mathbb{I}(1-t) + \nabla\phi t)_{\#}p$ com ϕ função convexa existente pelo Teorema de Brenier. Se:*

- $\lambda^{+d}A(\lambda^{-d})$ *é função convexa em λ, não-decrescente em $\lambda \in (0, +\infty)$,*
- $A(0) = 0$.

Então, $U(p_t) = \int_{\mathbb{R}^d} A(p_t(x))\, dx$ é uma função convexa para $t \in [0, 1]$.

Demonstração. Ver [26], [19] e [11]. □

1.5 Algumas Desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg

1.5.1 Aspecto Variacional

Nessa subseção será analisado um problema de cálculo variacional cuja solução está diretamente ligada a uma constante ótima da seguinte desigualdade de Gagliardo-Nirenberg na reta:

$$\|v\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq K \|v\|^{\frac{8}{9}}_{L^4(\mathbb{R})} \|v_x\|^{\frac{1}{9}}_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.25}$$

Definição 1.5.1. *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R})$, $E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x|^2\, dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |u|^q\, dx$.*

O problema consiste resolver o seguinte problema de minimização

$$\inf\Big\{E(u) :\ \|u\|_p = 1\Big\}. \tag{1.26}$$

Supondo a existência de um minimizante u_∞ de E, teríamos o fato de que u_∞ seria ponto crítico de E no espaço das funções em $H^1(\mathbb{R})$ com norma $\|\cdot\|_p$ unitária. Notamos que, u_∞ deve resolver a equação de Euler-Lagrange associada:

$$-u^{''} + |u|^{q-2}u - \lambda|u|^{p-2}u = 0, \tag{1.27}$$

com λ associado à relação de $\|u\|_p = 1$.

A partir de agora usaremos o minimizante u_∞ e o funcional E para construir a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg abordada nessa seção. Note que

$$E(u_\infty) \leq \frac{\|u_x\|_2^2}{2\|u\|_p^2} + \frac{\|u\|_q^q}{q\|u\|_p^q}, \tag{1.28}$$

para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R})$ não nulo. Reescalando a desigualdade em (1.28), trocando $u(x)$ por $u(\lambda x)$, obtemos

$$E(u_\infty) \leq \lambda^{-1-\frac{2}{p}} \frac{\|u_x\|_2^2}{2\,\|u\|_p^2} + \lambda^{1-\frac{q}{p}} \frac{\|u\|_q^q}{q\,\|u\|_p^q}, \tag{1.29}$$

para qualquer $\lambda > 0$ e u não nulo. Fazendo o teste da derivada em (1.29), não é difícil verificar que o mínimo do lado direito dessa desigualdade ocorre quando:

$$\lambda = \left[\frac{1+\frac{2}{p}A}{(1-\frac{q}{p})B}\right]^{\frac{p}{2+2p-q}} \text{ onde,} \tag{1.30}$$

$$A := \frac{\|u_x\|_2^2}{2\,\|u\|_p^2},\ B := \frac{\|u\|_q^q}{q\,\|u\|_p^q}. \tag{1.31}$$

Substituindo esse novo valor de λ em (1.29), pode-se verificar a seguinte desigualdade de Gagliardo-Nirenberg:

$$\|u\|_p \leq [\frac{K(p,q)}{E(u_\infty)}]^{\frac{2+2p-q}{p(2+q)}} \|u_x\|_2^{\frac{2(p-q)}{p(2+q)}} \|u\|_q^{\frac{q(2+p)}{p(2+q)}}. \tag{1.32}$$

1.5.2 Relação entre Teoria do Transporte de Massa e Desigualdades

Aplicaremos os resultados e propriedades da Teoria de Transporte de Massa para estimar as constantes ótimas de certas desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [1].

Teorema 1.5.1. *Uma p densidade de probabilidade com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ e $H^F(p) = \int_{\mathbb{R}^n} F(p(x))\,dx$ um deslocamento convexo, com F diferenciável. Se $p : [0,1] \to P^2$ é uma geodésica, então vale:*

$$H^F(p_1) - H^F(p_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} p_0(x)\nabla(F^{'}(p_0)(x))(T-\mathbb{I})(x)\,dx. \tag{1.33}$$

Demonstração. A demonstração está formalmente feita em [2]. Em [1] há um esboço da ideia da demonstração usando integração por partes. □

Usando a notação $P_F(x) = xF^{'}(x) - F(x)$, o resultado 1.33 acima implica a seguinte desigualdade

$$-H^F(p_1) \leq -H^{F+nP_F}(p_0) - \int_{\mathbb{R}^n} p_0\nabla(F^{'}(p_0))T(x)\,dx. \tag{1.34}$$

Considerando $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa que satisfaz $c(0) = 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} \frac{c(x)}{|x|} = \infty$. E, assim, pela simples definição de transformada de Legendre de c, temos outra nova informação

$$-\nabla(F^{'}(p_0))T(x) \leq c(T(x)) + c^*(-\nabla F^{'}(p_0)). \tag{1.35}$$

Unindo as duas últimas desigualdades verifica-se que

$$-H^F(p_1) \leq -H^{F+nP_F}(p_0) + \int_{\mathbb{R}^n} p_0 c^*(-\nabla F^{'}(p_0))\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} p_0(x)c(Tx)\,dx. \tag{1.36}$$

Para simplificar a notação, denotaremos

$$H_c^F(p) := H^F(p) + \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} c(y)p(y)\,dy$$

para qualquer densidade de probabilidade p em $\mathbb{R}^n$. Assim, utilizando o Teorema 1.4.1, a última desigualdade é equivalente a

$$-H_c^F(p_1) \leq -H^{F+nP_F}(p_0) + \int_{\mathbb{R}^n} p_0 c^*(-\nabla F^{'}(p_0))\,dx. \tag{1.37}$$

Nota-se que é um fato conhecido que se μ_0, μ_1 são duas medidas borelianas absolutamente contínuas e probabilísticas em $\mathbb{R}^n$, então existe transformação mensurável T tal que $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$. Portanto, esse fato implica que a desigualdade (1.36) pode valer para quaisquer p_0, p_1 densidades de probabilidade, logo vale que

$$\sup_p -H_c^F(p) \leq \inf_p -H^{F+nP_F}(p) + \int_{\mathbb{R}^n} pc^*(-\nabla F^{'}(p))\,dx. \tag{1.38}$$

Além disso, para $T = \mathbb{I}$ e $p_0 = p_1$ ocorre igualdade em (1.33), ver [1], e a igualdade em (1.35) ocorre se, e somente se, $\nabla(F^{'}(p_0) + c(x)) = 0$, por definição de transformada de Legendre de c dado por c^*. Logo, existe a possibilidade de obtermos a seguinte identidade

$$\sup_p -H_c^F(p) = \inf_p -H^{F+nP_F}(p) + \int_{\mathbb{R}^n} pc^*(-\nabla F^{'}(p))\,dx. \tag{1.39}$$

Para finalizar esse tópico precisamos do seguinte resultado.

Teorema 1.5.2. *Sejam $n \geq 1$ e $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ com $F \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ tal que $(0,\infty) \ni x \to x^n F(x^{-n})$ é uma função convexa e decrescente. Sendo*

$$P_F(x) = xF^{'}(x) - F(x)$$

e $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ função estritamente convexa com $c(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{c(x)}{|x|} = 0$, então valem (1.37) e (1.38), de modo que a densidade de probablidade que satisfaz a igualdade em (1.38) deve satisfazer $\nabla(F^{'}(p_0) + c) = 0$.

Combinando o teorema com a densidade de funções suaves e regulares em densidade de probabilidades de $\mathbb{R}^n$ em espaços L^q com $q \geq 1$ é obtido o seguinte resultado.

Teorema 1.5.3. *Se $c_1(x) = \frac{|x|^2}{2}$ e $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função suave injetiva e com $\phi^{'}(x) \neq 0$ se $x \neq 0$, então vale a seguinte igualdade:*

$$\sup_{\{p(x)\geq 0:\, \|p\|_{L^1}=1\}} -H^F_{c_1}(p) = \inf_{\{u(x):\, \|\phi(u)\|_{L^1}=1\}} -H^{F+nP_F}(\phi(u(x))) + \int_{\mathbb{R}^n} \phi(u(x))c^*(-\nabla(F^{'}(\phi(u(x))))) \, dx. \quad (1.40)$$

Além disso, o p que resolve essa igualdade acima satisfaz $p(x) = \phi(u)(x)$ e

$$\nabla((F(\phi(u)))(x) + \frac{|x|^2}{2}) = 0. \quad (1.41)$$

Demonstração. Veja [1] e [2]. □

Antes de enunciar o resultado final dessa subseção, precisamos de duas afirmações provadas em [1]

Teorema 1.5.4. *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$, tais que $1 < p < q$. Seja $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $(0,\infty)$ satisfazendo $H(u^p) = \frac{|x|^2}{2}$, onde u é uma função radial e não-negativa solução de $-u^{''} + u^{q-1} - \lambda u^{p-1} = 0$ para um $\lambda > 0$. Então, H resolve a seguinte equação diferencial ordinária*

$$(\frac{2p}{q}w^{\frac{2p-2+q}{p}} - 2\lambda w^{\frac{3p-2}{p}})H^{''}(w) + [(1 + \frac{2(p-1)}{q})w^{\frac{p+q-2}{p}} - \lambda(3 - \frac{2}{p})w^{\frac{2p-2}{p}}]H^{'}(w) = \frac{1}{p}. \quad (1.42)$$

Corolário 1.5.5. *Se $q = 1 + \frac{p}{2}$, então a função*

$$H(w) = \frac{2(p+2)}{(p-2)^2}w^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \alpha \quad (1.43)$$

resolve a equação diferencial ordinária (1.42) *e a respectiva função u radial e positiva do Teorema 1.5.4 satisfaz*

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}(|x|^2 + \beta)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}. \quad (1.44)$$

Com β escolhido de modo que u é solução de $-u^{''} + u^{q-1} - \lambda u^{p-1} = 0$.

Uma consequência desse último teorema é o seguinte resultado

Teorema 1.5.6. *Se $n = 1$ e $1 < q = 1 + \frac{p}{2} < p$, então para*

$$\phi(x) = x^p,\ F(x) = \frac{-4px^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}{(p-2)^2} \quad (1.45)$$

a expressão (1.39) *fica para essas escolhas de* F *e* ϕ *igual a*

$$\sup_{\{p(x)\geq 0:\, \|p\|_{L^1}=1\}} -H^F_{\frac{|x|^2}{2}}(p) = \inf_{\{u(x):\, \||u|^p\|_{L^1}=1\}} \frac{2(p+2)}{(p-2)^2}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q\, dx + \frac{(p+2)^2}{2(p-2)^2}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x)|^2\, dx. \quad (1.46)$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.5.5 presente também no artigo [1], temos que $H(u^p) = (2(1+\frac{p}{2}))\frac{u^{1-\frac{p}{2}}}{(p-2)^2}+\alpha = \frac{|x|^2}{2}$ para o $u(x)$ da forma (1.44) com norma $\|u\|_{L^p} = 1$ e para α constante associada a (1.44) a ser escolhida depois. Para $p(x) = |u(x)|^p$, verifica-se que $p(x)$ é densidade de probabilidade em $\mathbb{R}$. Além disso, como explicado pouco antes a igualdade em (1.38) ocorre se $p(x) = |u(x)|^p$ e se

$$F'(\phi(u)(x)) = \gamma - \frac{|x|^2}{2} \quad (1.47)$$

para alguma constante γ. Assim, substituindo $\frac{|x|^2}{2}$ por $H(u^p)$ na igualdade (1.47), obtemos uma nova expressão para o valor de $F'(|u(x)|^p)$. Combinando essa última informação com ϕ em (1.39), obtemos (1.46).

Além disso, pode-se calcular explicitamente o termo $u(x)$, usando que $F(x)$, para $v = u^p$, deve satisfazer

$$F(v) = -\frac{4p}{(p-2)^2}v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} + (\gamma-\alpha)v + \delta. \quad (1.48)$$

Esse termo foi encontrado integrando em x o novo valor achado de $F'(|u|^p)(x)$. Como α,γ foram escolhidos como quaisquer constantes para achar antiderivadas, assim como δ ver ([1]), temos podemos escolher $\alpha = \gamma$, $\delta = 0$ e $v = u^p$ em (1.46), segue que

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} (|x|^2 + K)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}. \quad (1.49)$$

Com K em função de α e p. E por observações anteriores, como o ínfimo do lado direito de (1.46) está associado ao inverso da menor constante C da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg $\|h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,\|h\|^{1-\theta}_{L^q}\,\|\nabla h\|^{\theta}_{L^2}$ descrito numa seção anterior, basta substituir o valor 1.49 de $u(x)$ achado no lado direito de (1.46) para achar a constante ótima desse tipo de Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. $\square$

Em particular achamos a melhor constante K_{GN} de (1.25).

1.5.3 Outra Desigualdade Ótima do tipo Gagliardo-Nirenberg

Nessa subseção, estudaremos a seguinte desigualdade na reta, provada no artigo [5],

$$\|y\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq C_1 \|y\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\nabla y\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \tag{1.50}$$

com o objetivo de achar a menor constante C_1 para a qual a desigualdade acima vale. Por densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $H^1(\mathbb{R})$, podemos apenas analisar a desigualdade no espaco de Schwartz. Nesses casos, por $y(x)$ ser contínua, existe x_0 tal que $|y(x_0)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |y(x)|$. Por invariância da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg por translação e multiplicação por escalar positivo, podemos assumir $x_0 = 0$ e que $|y(0)| = 1$.

Portanto, nessa nova situação de $y(x)$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |y(x)|^6 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |y(x)|^2 \, dx. \tag{1.51}$$

Definimos agora

$$f(s) = (s^2 - s^6)^{\frac{1}{2}} \text{ para } 0 \leq s \leq 1, \tag{1.52}$$

de modo que para $0 < s < 1$

$$\frac{df}{ds}(s) = \frac{1}{2}\frac{(2s^2 - 6s^6)}{sf(s)}. \tag{1.53}$$

Consideremos agora a função auxiliar

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds,\ 0 \leq u \leq 1. \tag{1.54}$$

Assim, pelas definições de f e de F, obtemos que

$$|F(|y(x_1)|) - F(|y(x_2)|)| = |\int_{|y(x_2)|}^{|y(x_1)|} f(s)\, ds| \tag{1.55}$$

$$\leq ||y(x_1)| - |y(x_2)|| \tag{1.56}$$

$$\leq |y(x_1) - y(x_2)|. \tag{1.57}$$

Note também que $F^{'}(|y(\cdot)|)(x) = f(|y(x)|)(sign(y(x)))y^{'}(x)$. E pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(|y(x)|)|y^{'}(x)|\, dx \leq (\int_{\mathbb{R}} (f(|y(x)|))^2\, dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{R}} |y^{'}(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \tag{1.58}$$

$$= (\|y\|_{L^2}^2 - \|y\|_{L^6}^6)^{\frac{1}{2}} \left\|y^{'}\right\|_{L^2}. \tag{1.59}$$

Além disso, também temos uma cota inferior para $\int_{\mathbb{R}} f(|y(x)|)|y^{'}(x)|\,dx$, pois

$$\int_{\mathbb{R}} f(|y(x)|)|y^{'}(x)|\,dx \geq \Big[-\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0\Big] sign(y(x)) f(|y(x)|) y^{'}(x)\,dx \tag{1.60}$$

$$= \Big[-\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0\Big] \frac{dF(|y(x)|)}{dx}\,dx \tag{1.61}$$

$$= 2F(|y(0)|) = 2F(1). \tag{1.62}$$

Assim, combinando as últimas duas desigualdades, obtemos que

$$2F(1) \leq (\|y\|_2^2 - \|y\|_6^6)^{\frac{1}{2}} \left\|y^{'}\right\|_2. \tag{1.63}$$

Definição 1.5.2. *Denotaremos* $V(y) = \frac{\|y\|_6^6}{\|y\|_2^2}$. *Logo, a desigualdade* (1.63) *é equivalente a*

$$V^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2F(1)} V^{\frac{1}{2}} (1-V)^{\frac{1}{2}} \|y\|_2 \left\|y^{'}\right\|_2. \tag{1.64}$$

Usando que $0 \leq V \leq 1$ e desigualdade entre as médias aritmética e geométrica obtemos $(V(1-V))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$; além disso a igualdade só ocorre se $V = \frac{1}{2}$. Com relacão a $F(1)$, temos então

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 [s^2(1-s^4)]^{\frac{1}{2}}\,ds \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\Gamma(2)}\Big). \end{aligned}$$

Em particular, a desigualdade (1.64) implica em

$$\|y\|_6^3 \leq \Big(\frac{1}{4F(1)}\Big) \|y\|_2^2 \left\|y^{'}\right\|_2, \tag{1.65}$$

que é equivalente a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg enunciada nessa seção. Note que se as desigualdades (1.60), (1.63), (1.64) fossem igualdades e $V(y) = \frac{1}{2}$ obteríamos igualdade em (1.65). Ou seja, a melhor constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg seria $(\frac{1}{4F(1)})^{\frac{1}{3}}$.

Não é difícil verificar que as condições para ocorrer igualdade em (1.65) são:

- $V(y) = \frac{1}{2}$,
- $|y^{'}(x)| = c(f(|y|(x))$ para haver igualdade na desigualdade de Holder entre $y^{'}$ e $f(|y|)$ com $c > 0$,
- $|y^{'}| = sign(y)y^{'}$ se $x < 0$ e $|y^{'}| = (-sign(y))y^{'}$ se $x > 0$ para que $2F(1) = \int_{\mathbb{R}} f(|y(x)|)|y^{'}(x)|\,dx$.

É fácil verificar que as duas condições serem simultaneamente verídicas se e só se valer

$$y^{'}(x) = cf(|y(x)|) \text{ se } x < 0, \tag{1.66}$$
$$y^{'}(x) = -cf(|y(x)|) \text{ se } x > 0. \tag{1.67}$$

Dado que $y \in H^1$, a condição acima de $y^{'}$ implica que $y(x) > 0$ q.t.p., caso contrário existiria um intervalo da forma $[a, +\infty]$ ou $[-\infty, b]$ no qual $|y(x)| > \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ o qual contradiria $y \in L^2(\mathbb{R})$. Agora note que

$$\|y\|_6^6 - \|y\|_2^2 + \frac{1}{2}[6\,\|y\|_6^6 - 2\,\|y\|_2^2] = \int_{\mathbb{R}} y(x)^6 - y(x)^2 + \frac{1}{2}[6y(x)^6 - 2y(x)^2]\,dx. \tag{1.68}$$

Suponha agora $[\sigma, \tau]$ seja o maior intervalo contendo 0 em que $y(x) = 1$. Note que (1.66) e (1.67) mais f ser maior igual a 0 e $y(x) > 0$ implicam que $y(x)$ é monotonamente decrescente em $\mathbb{R}_+$ e $y(x)$ é monotonamente crescente em $\mathbb{R}_-$. Logo, o conjunto onde $y(x) = 1$ deveria ser um intervalo compacto por $|y(x)| \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Nesse contexto, teríamos as seguintes igualdades, para $h(x) = y(x)^6 - y(x)^2 + \frac{1}{2}[6y(x)^6 - 2y(x)^2]$, dadas por

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} y(x)^6 - y(x)^2 + \frac{1}{2}[6y(x)^6 - 2y(x)^2]\,dx &= \int_{\sigma}^{\tau} h(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\sigma} h(x)\,dx + \int_{\tau}^{+\infty} h(x)\,dx \\ &= (\tau - \sigma)2 - [\int_{-\infty}^{\sigma} + \int_{\tau}^{+\infty}]f(y(x))^2 \\ &+ y(x)f(y(x))^{\frac{1}{2}}f^{'}(y(x))\,dx\end{aligned} \tag{1.69}$$

usando a definicão de f e de sua derivada. Mas também podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^{+\infty} f^2(y(x)) + y(x)f(y(x))^{\frac{1}{2}}f^{'}(y(x))\,dx &= \int_{1}^{0} f^2(y) + yf(y)^{\frac{1}{2}}f^{'}(y)\frac{dx}{dy}\,dy \\ &= \int_{1}^{0} \frac{1}{c}(f(y) + yf^{'}(y)dy) = 0\end{aligned} \tag{1.70}$$

por $y(x)$ ser estritamente decrescente e com derivada contínua em $\mathbb{R}_+$. Por analogia, verifica-se que $\int_{-\infty}^{\sigma} h(x)\,dx = 0$ e os termos do lado direito e esquerdo de (1.69) são nulos por causa da hipótese de valer condição $V = \frac{1}{2}$. Em particular todas essas últimas computacões implicam que se $y(x) = 1$ apenas em $x = 0$ e y satisfazer condições (1.66) e (1.67), então esse $y(x)$ satisfaz igualdade em (1.50) a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg com a constante ótima.

Definição 1.5.3. $y_1(x) = u$ *é definida como função inversa de:*

$$x = \int_u^1 \frac{1}{[s^2(1-s^4)]^{\frac{1}{2}}}\, ds, \tag{1.71}$$

para $0 \leq u \leq 1$.

A partir de agora, denotaremos $y_2(x) = y_1(|cx|)$, não é difícil verificar que essa nova função $y_2(x)$ satisfaz as mesmas condições enunciadas antes para V, (1.66), (1.67) e $y_2(x) = 1$ se, e somente se, $x = 0$. Se y_2^2 e y_2^6 fossem integráveis em $\mathbb{R}$, poderíamos repetir as contas feitas em $y(x)$ para ver a igualdade $V(y_2) = \frac{1}{2}$ e assim existiria uma função que satisfaz a igualdade na desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, assim a constante dessa desigualdade seria ótima.

Portanto, estudaremos agora a integrabilidade das potências citadas de $y_2(x)$, lembrando que esse c é a mesma constante positiva que aparece em $y(x)$.

$$\int_0^\infty (y_1(|cx|))^2\, dx = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} (y_1(x))^\beta\, dx, \tag{1.72}$$

$$\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} (y_1(x))^2\, dx = \frac{1}{c}\int_1^0 u^2 \frac{dx}{du}\, du, \tag{1.73}$$

$$\frac{1}{c}\int_1^0 u^\beta \frac{dx}{du}\, du = \frac{1}{c}\int_0^1 u^1(1-u^4)^{-\frac{1}{2}}\, du < +\infty. \tag{1.74}$$

Logo $y_2(x)^2$ é integrável e de maneira análoga é fácil ver que $y_2'(x)^2$ é integrável e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg dessa subseção, verifica-se que y_2^6 também é integrável na reta. Em particular, sabe-se que $y_2(x)$ é par e positiva, logo dilatando essa função e multiplicando por escalar verificamos que existe função par e positiva que maximimiza em $H^1(\mathbb{R})$ o seguinte operador

$$H(f) = \frac{\|f\|_2^3 \, \|\nabla(f)\|_2}{\|f\|_6^6}. \tag{1.75}$$

Sendo esse máximo uma função par e positiva $g(x)$ que é ponto crítico de H em H^1, resolvendo a equação de Euler-Lagrange oriunda de $dH(g)(\phi) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Verifica-se que g pode ser transformada utilizando dilatação, translacão e multiplicação por escalar na função positiva e radial $m(x) = (3)^{\frac{1}{4}} sech^{\frac{1}{2}}(2x)$ e logo a melhor constante pode ser achada aplicando $m(x)$ em $H(\cdot)$.

Capítulo 2

Transformações de Calibre

2.1 Primeira Transformação de Calibre

A Transformação de Calibre que aqui estudaremos foi pela primeira vez apresentada por Hideo Takaoka para estudar um modelo unidimensional de equacão não linear com derivada de Schrödinger no artigo [25]. Os operadores serão definidos em espaços da forma $C([-T,T];H^s(\mathbb{T}))$ e seguiremos de perto as ideias trabalhadas no artigo [14].

Definição 2.1.1. *Se $u \in L^2(\mathbb{T})$, definimos*

$$J(u)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\theta^x |u(y)|^2 - \frac{1}{2\pi}|u|^2_{L^2(\mathbb{T})}\,dy\,d\theta. \tag{2.1}$$

Observação. É fácil verificar que $J(u)(x)$ é periódica por $|u(y)|^2 - \frac{|u|^2_{L^2(\mathbb{T})}}{2\pi}$ ter média zero.

Com essa primeira definição, podemos definir agora a primeira transformação de calibre.

Definição 2.1.2. *Se $f \in L^2(\mathbb{T})$, definimos*

$$g(f)(x) = \mathrm{e}^{-iJ(f)(x)}f(x). \tag{2.2}$$

Seja $\mu : L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ tal que para cada $u \in L^2(\mathbb{T})$, $\mu(u) = \frac{|u|^2_{L^2(\mathbb{T})}}{2\pi}$. Assim, se $u \in C([-T,T];L^2(\mathbb{T}))$ e u tem norma $L^2(\mathbb{T})$ conservada no tempo t, então a transformação de calibre de u é

$$G(u)(t,x) = g(u(t))(x - 2\mu(u)t). \tag{2.3}$$

Agora, provaremos o resultado que garante ser possível estender esse operador como homeomorfismo em $C([-T,T],H^s(\mathbb{T}))$ para qualquer $s \geq 0$.

Lema 2.1.1. *Se $s \geq 0$, então a transformação*

$$G : C([-T,T]; H^s(\mathbb{T})) \mapsto C([-T,T]; H^s(\mathbb{T})) \tag{2.4}$$

é um homeomorfismo. Além disso, para qualquer $r > 0$, existe $c > 0$, tal que, para

$$u, v \in B_{r,\mu} = \Big\{ u \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T})) \,:\, \sup_{|t|\leq T} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq r,\ \mu(u) = \mu \Big\} \tag{2.5}$$

temos, para qualquer $\mu \geq 0$ que

$$\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq c\, \|u(t) - v(t)\|_{H^s(\mathbb{T})}. \tag{2.6}$$

Além disso, a aplicação inversa G^{-1} satisfaz as mesmas condições de G.

Antes de provar o Lema 2.1.1, precisamos dos seguintes resultados:

Lema 2.1.2 (Desigualdade Multiplicativa de Sobolev)**.** *Vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} \leq C\, \|f\|_{H^\alpha}\, \|g\|_{H^\beta} \tag{2.7}$$

para $\beta = \begin{cases} \alpha, \alpha > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \epsilon \text{ caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração. Note que

$$\|fg\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x-y)\hat{g}(y)\, dy|^2 (1 + |x|^2)^\alpha\, dx. \tag{2.8}$$

Para qualquer $r > 0$, existe $C > 0$, tal que

$$(1 + |x|^2)^\alpha \leq C \tfrac{(1+|y|^2)^{\alpha+r}}{(1+|x-y|^2)^r} + C(1 + |x-y|^2)^\alpha,$$

logo vale

$$\begin{aligned} \|fg\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R})} \leq C \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x-y)\hat{g}(y)\, dy|^2 \frac{(1+|y|^2)^{\alpha+r}}{(1+|x-y|^2)^r}\, dx \\ + C \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x-y)\hat{g}(y)\, dy|^2 (1 + |x-y|^2)^\alpha\, dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela desigualdade de interpolação de Young, temos que

$$\|fg\|^2_{H^\alpha} \leq C\Big(\left\| \frac{\hat{f}(x)}{(1+|x|^2)^{-r}} \right\|_{L^1} \|g\|_{H^{\alpha+r}} \Big)^2 + C(\|f\|_{H^\alpha}\, \|\hat{g}\|_{L^1})^2. \tag{2.10}$$

Usando desigualdade de Hölder, obtemos também que

$$\left\| \frac{\hat{f}(x)}{(1+|x|^2)^{-r}} \right\|_{L^1} \leq \|f\|_{H^\alpha} \left\| (1+|x|^2)^{-(r+\alpha)} \right\|_{L^1}, \tag{2.11}$$

$$\|\hat{g}\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon}}. \tag{2.12}$$

□

O caso em que $\alpha > \frac{1}{2}$, $H^\alpha(\mathbb{R})$ é álgebra e a proposição segue diretamente. No outro caso, tomamos $r = \frac{1}{2} + \epsilon - \alpha$ e (2.11), (2.12) combinados com (2.10) implica (2.7) para $\alpha \leq \frac{1}{2}$, o que encerra a demonstração.

Observação. O Lema 2.1.2 vale para $\mathbb{T}$ no lugar de $\mathbb{R}$ e a demonstração é análoga.

Lema 2.1.3. *Para qualquer $s \geq 0$ existe $c > 0$, tal que para f, $g, h \in H^s(\mathbb{T})$, temos que*

$$\left\| (\mathrm{e}^{\pm iJ(f)} - \mathrm{e}^{\pm iJ(g)})h \right\|_{H^s} \leq c\mathrm{e}^{c\|f\|^2_{H^s} + c\|g\|^2_{H^s}} (\|f\|_{H^s} + \|g\|_{H^s}) \|f-g\|_{H^s} \|h\|_{H^s}. \tag{2.13}$$

Demonstração. Provaremos a desigualdade primeiro no espaço

$$S_{per} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) |\, f(t, x+2\pi) = f(t,x),\ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} |t^{k_1} \partial_t^{k_2} \partial_x^{k_3} f(t,x)| < \infty\}$$

e usaremos depois o argumento de densidade em $H^s(\mathbb{T})$.

Usando uma desigualdade multiplicativa de Sobolev da forma:

$$\|fg\|_{H^\alpha} \leq C \|f\|_{H^\alpha} \|g\|_{H^\beta}, \tag{2.14}$$

para

$$\beta = \begin{cases} \alpha, \text{ se } \alpha > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \epsilon \text{ qualquer } \epsilon > 0 \text{ e } C \text{ depende de } \epsilon. \end{cases} \tag{2.15}$$

Primeiro, temos por simples contas que

$$(\mathrm{e}^{iJ(f)} - \mathrm{e}^{iJ(g)})h = hi(J(f) - J(g)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (iJ(f))^j (iJ(g))^{k-1-j}. \tag{2.16}$$

Usamos o fato de $H^\beta(\mathbb{T})$ ser álgebra se $\beta > \frac{1}{2}$. Aplicando a desigualdade (2.14) em (2.16) e sendo $s' = \sup\{s, \frac{1}{2} + \epsilon\}$, com $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ a ser escolhido depois, obtemos

$$\left\| h(\mathrm{e}^{iJ(f)} - \mathrm{e}^{iJ(g)}) \right\|_{H^s} \leq \|h\|_{H^s} \|J(f) - J(g)\|_{H^{s'}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (c\|J(f)\|_{H^{s'}})^j (c\|J(g)\|_{H^{s'}})^{k-1-j}. \tag{2.17}$$

Notando também que

$$e^{c\|J(f)\|_{H^{s'}}+c\|J(g)\|_{H^{s'}}} \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(c\,\|J(f)\|_{H^{s'}})^{j}(c\,\|J(g)\|_{H^{s'}})^{k-1-j}. \tag{2.18}$$

Podemos concluir que

$$\left\|h(e^{iJ(f)}-e^{iJ(g)})\right\|_{H^s} \leq \|h\|_{H^s}\,\|J(f)-J(g)\|_{H^{s'}}\,e^{c\|J(f)\|_{H^{s'}}+c\|J(g)\|_{H^{s'}}}. \tag{2.19}$$

Usando a definição de $H^{s'}(\mathbb{T})$ e o fato de $J(h)$ ter valor médio zero para qualquer $h \in L^2(\mathbb{T})$ temos que

$$\|J(f)-J(g)\|^2_{H^{s'}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash 0} |(\widehat{J(f)}-\widehat{J(g)})(n)|^2(1+|n|)^{2s'}. \tag{2.20}$$

Agora, para $f, g \in S_{per}$, temos que $f \in H^1(\mathbb{T})$, logo nesse caso teríamos que $J(f), J(g) \in H^1(\mathbb{T})$, logo vale

$$\partial_x(J(f)-J(g))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi in(J(\hat{f})(n)-J(\hat{g})(n))e^{2\pi inx} \text{ q.t.p.} \tag{2.21}$$

Logo, segue que

$$\|\partial_x(J(f)-J(g))\|^2_{H^{s'-1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2|J(\hat{f})(n)-J(\hat{g})(n)|^2(1+|n|)^{2s'-2}|n|^2. \tag{2.22}$$

Assim, fica fácil verificar que existem constantes positivas fixas k_1, k_2 para quaisquer $f, g \in H^s(\mathbb{T})$ com

$$k_1\,\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}} \leq \|J(f)-J(g)\|_{H^{s'}} \leq k_2\,\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}}.$$

Mas $\partial_x J(f)(x) = (|f(x)|^2 - \frac{|f|^2_{L^2}}{2\pi})$ q.t.p. Assim, segue

$$\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}} \leq \left\||f|^2-|g|^2\right\|_{H^{s'-1}} + \left\|\frac{|f|^2_{L^2}-|g|^2_{L^2}}{2\pi}\right\|_{H^{s'-1}}. \tag{2.23}$$

Já que, para qualquer constante $m > 0$, $\|m\|_{H^{s'-1}} = m$, segue de (2.23) que

$$\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}} \leq \left\||f|^2-|g|^2\right\|_{H^{s'-1}} + \frac{||f|^2_{L^2}-|g|^2_{L^2}|}{2\pi}. \tag{2.24}$$

Agora, terminaremos a demonstração do Lema 2.1.3 resolvendo três casos e escolheremos $\epsilon \leq 2s$, se $s \geq 0$ para poder usar desigualdades de Sobolev em um dos três casos.

1. $s = 0$.

   Nesse caso,usando Desigualdade de Minkowski, desigualdade de Hölder para

$p = 2$ e definição de operador J, obtém-se que

$$\begin{aligned}\left\|e^{iJ(f)} - e^{iJ(g)}\right\|_{L^\infty} &\leq \|J(f) - J(g)\|_{L^\infty} \\ &\leq 2(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}) \|f - g\|_{L^2} .\end{aligned}$$

Com isso, é obtida pela desigualdade

$$\left\|e^{iJ(f)} - e^{iJ(g)} h\right\|_{L^2} \leq 2(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}) \|f - g\|_{L^2} \|h\|_{L^2} . \tag{2.25}$$

Finalmente a densidade de S_{per} em $L^2(\mathbb{T})$ implicará o resultado do Lema 2.1.3 nesse caso.

2. $s > \frac{1}{2} + \epsilon$. Nessa condição, tem-se que $H^s(\mathbb{T})$ é uma álgebra, assim vale

$$\begin{aligned}\left\||f(x)|^2 - |g(x)|^2\right\|_{H^s(\mathbb{T})} &= \left\|f(x)(\overline{f(x)} - \overline{g(x)}) + \overline{g(x)}(f(x) - g(x))\right\|_{H^s} \\ &\leq \left\|f(x)(\overline{f(x)} - \overline{g(x)})\right\|_{H^s} + \left\|\overline{g(x)}(f(x) - g(x))\right\|_{H^s} \\ &\leq (\|f\|_{H^s} + \|g\|_{H^s}) \|f - g\|_{H^s} .\end{aligned}$$

Combinando essa última desigualdade com

$$|\, \|f\|_{L^2}^2 - \|g\|_{L^2}^2 \,| \leq \|f - g\|_{H^s} (\|f\|_{H^s} + \|g\|_{H^s})$$

e a desigualdade (2.24), obtemos o Lema 2.1.3 no segundo caso usando densidade de S_{per} em H^s.

3. $s \leq \frac{1}{2} + \epsilon$. Primeiro, note que, para $p = \frac{1}{(1-\epsilon)}$, e quaisquer funções $u, v \in S_{per}$:

$$\begin{aligned}\||u||v|\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon}} &\leq C \||u||v|\|_{L^p} \text{ pela desigualdade (1.12).} \\ &\leq C \|u\|_{L^{2p}} \|v\|_{L^{2p}} \text{ por Hölder.} \\ &\leq C \|u\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} \|v\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} \text{ pela desigualdade (1.11).}\end{aligned}$$

Em particular, para $u(x) = |f(x)|$ e $v(x) = |f(x)| - |g(x)|$, repetindo o argumento acima e usando que $||f(x)| - |g(x)|| \leq |f(x) - g(x)|$, obtemos

$$\||f(x)|(|f(x)| - |g(x)|)\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C \|f\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} \|f - g\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} . \tag{2.26}$$

Trocando, f por g na equação (2.26) e usando a equação a mesma, obtemos

$$\left\||f(x)|^2 - |g(x)|^2\right\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C(\|f\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} + \|g\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}}) \|f - g\|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}} . \tag{2.27}$$

Usando as desigualdades (2.27), (2.24) e a equivalência de

$\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}}$ com $\|J(f)-J(g)\|_{H^{s'}}$, concluímos a veracidade do Lema 2.1.3 nesse caso.

Assim, todos os casos foram feitos e, logo, por (2.24), segue que existe $C>0$, com

$$\|\partial_x(J(f)-J(g))\|_{H^{s'-1}} \leq C(\|f\|_{H^s}+\|g\|_{H^s})\|f-g\|_{H^s}. \tag{2.28}$$

Isso último combinado com a equivalência da norma da derivada da diferença em $H^{s'-1}$ com a norma da diferença em $H^{s'}$ finalizam a demonstração do lema. $\square$

Agora, podemos demonstrar o Lema 2.1.1, e consideramos $u, v \in B_{r,\mu}$.

Prova do Lema 2.1.1. Primeiro, note que, usando o lema multiplicativo de Sobolev e o raciocínio da demonstração do Lema 2.1.3 e $s' = \sup\{s, \frac{1}{2}+\epsilon\}$ para mesmo ϵ do Lema 2.1.3, temos que

$$\begin{aligned}
\|G(u)(t)\|_{H^s} &= \left\| u(t,x)\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{J(u(t))(x)^k}{k!}\Big) \right\|_{H^s} \\
&\leq C\|u\|_{H^s} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c^k \|j(u(t))(x)\|_{H^{s'}}^k}{k!} \\
&\leq C\|u\|_{H^s} \mathrm{e}^{c\|J(u(t))\|_{H^{s'}}} \\
&\leq C\|u\|_{H^s} \mathrm{e}^{cc_1\|u(t)\|_{H^s}^2}.
\end{aligned}$$

Em particular, isso implica que o mapa G é bem definido. Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}
\|G(u(t))-G(v(t))\|_{H^s} \leq{}& \left\|(\mathrm{e}^{-iJ(u(t))}-\mathrm{e}^{-iJ(v(t))})(t)\right\|_{H^s} \\
&+\left\|(\mathrm{e}^{-iJ(v(t))}-1)(u-v)(t)\right\|_{H^s} + \|(u-v)(t)\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1.3 e o fato de $\|v(t)\|_{H^s}, \|u(t)\|_{H^s} \leq r$, para qualquer $t\in[-T,T]$, obtemos que

$$\|G(u(t))-G(v(t))\|_{H^s} \leq (2cr^2\mathrm{e}^{2cr^2}+cr^2\mathrm{e}^{cr^2}+1)\|(u-v)(t)\|_{H^s}. \tag{2.29}$$

Assim, provamos que G é Lipschitz em $B_{r,\mu}$ e é fácil ver que

$$G^{-1}(v(t))(x) = \mathrm{e}^{iJ(\mathrm{trans}_{2\mu t}\, v(t))}\,\mathrm{trans}_{2\mu t}\, v(t,x). \tag{2.30}$$

Com $\mathrm{trans}_h\, v(t,x) = v(t,x+h)$, assim provar que G^{-1} é bem definido e Lipschitz em $B_{r,\mu}$ é totalmente análogo. Assim, terminamos a demonstração do Lema 2.1.1. $\square$

2.2 Segunda Transformação de Calibre

Agora, estudaremos a variante da transformação de calibre dada para qualquer $\beta > 0$ por:

$$G(u)(x) = \mathrm{e}^{-i\beta \int_0^x |u(t,y)|^2 \, dy}. \tag{2.31}$$

Essa nova transformação será usada para a demonstração do resultado final deste trabalho. O β será escolhido de forma conveniente.

Ambas transformações de calibre apresentadas serão úteis no estudo a ser realizado no modelo:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) + (u^5)_x(t,x) = 0, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{T}^1). \end{cases}$$

O seguinte resultado, referente à segunda transformação, será importante.

Lema 2.2.1. *Seja $\mathbb{T} = [0,1]/\{1=0\}$. Se $u \in H^1(\mathbb{T}^1)$ e*

$$F(u)(y) = \mathrm{e}^{-i\beta \int_0^x |u(y)|^2 \, dy}. \tag{2.32}$$

Então, $F(u(y)) \in H^1(\mathbb{T})$, mais ainda vale:

$$F(u)_x(x) = -i\beta |u(x)|^2 \mathrm{e}^{-i\beta \int_0^x |u(y)|^2 \, dy} \ \ q.t.p. \tag{2.33}$$

Demonstração. Temos que a função $g(x) = \mathrm{e}^{ix}$ é suave e tem derivada limitada em $\mathbb{R}$. Além disso, a função $h(x) = \beta \int_0^x |u(y)|^2 \, dy$ está em $H^1(\mathbb{T})$, pois $u \in H^1(\mathbb{T}) \subset C([T]) \subset C([0,1])$, logo $u^2 \in L^1([0,1])$.

Assim, $h(x)$ é função absolutamente contínua e, por isso, $h_x(x) = \beta |u(x)|^2$ q.t.p. Por outro lado, dado que $u \in C([0,1])$ e $[0,1]$ é intervalo compacto, segue que h e $h_x \in L^2(\mathbb{T})$. Isso mais o fato de que para qualquer $\phi \in C_0^\infty([0,1])$, termos $v(x)\phi(x)$ absolutamente contínua se v for absolutamente contínua, segue que usando a versão contínua da função $h(x)$, que:

$$\int_0^1 h_x(y)\phi(y) + h(y)\phi_x(y) \, dy = v(1)h(1) - v(0)h(0) = 0. \tag{2.34}$$

Portanto, isso conclui que $h \in H^1(\mathbb{T})$ e usando a informação que $g(x)$ é suave com derivada limitada, por um resultado do capítulo de preliminares, segue que $F(u)(x) = g(-h)(x) \in H^1(\mathbb{T})$ e que derivada de $F(u)(x)$ é dada por (2.33) $\square$

Usando o Teorema 1.1.3 para $f(x) = \mathrm{e}^{i\beta x}$ e para $g(x) = \int_{-\infty}^x |u(y)|^2 \, dy$ com $u \in L^2(\mathbb{R})$ obtemos o seguinte resultado:

Lema 2.2.2. *Se* $u \in L^2(\mathbb{R})$*, então* $\mathrm{e}^{-i\beta\int_{\infty}^{x}|u(y)|^2\,dy} = h(x)$ *satisfaz*

$$h_x(x) = -i\beta|u(x)|^2\mathrm{e}^{-i\beta\int_{-\infty}^{x}|u(y)|^2\,dy}. \tag{2.35}$$

Em particular, h *pertence a* $H^1(\mathbb{R})$*.*

Todos esses resultados das transformacões de calibre serão usados nas demonstrações dos resultados dos próximos capítulos.

Capítulo 3

Solução Global para a equação não-linear de Schrödinger com derivada em $\mathbb{R}$

3.1 Soluções globais com restrição da massa

Primeiramente, iremos abordar a primeira aplicação da Transformação de Calibre na equação não-linear de Schrödinger com derivada (NLSD) escrito no artigo [27] de Yifei Wu. É apresentada uma restrição de massa que permite provar a massa crítica para existência global da solução em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$, da seguinte equação:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = i\partial_x(|u|^2 u)(t,x) \ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.0}$$

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.1.1. *Se $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e $\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < 4\pi$, então o problema de Cauchy* (3.0)*é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.*

Formalmente, verifica-se que a solução em H^1 dessa equação de (NLSD) satisfaz as seguintes leis de conservação: a Massa de u

$$M(u(t)) = \|u(t)\|^2_{L^2} = \|u_0\|^2_{L^2} = M_0, \tag{3.1}$$

a Energia de u

$$E_D(u(t)) = \int_{\mathbb{R}} (|u_x(t)|^2 + \frac{3}{2}\operatorname{Im}|u(t)|^2 u(t)\overline{u_x}(t) + \frac{1}{2}|u(t)|^6)\, dx = E_D(u_0), \tag{3.2}$$

e o Momento de u

$$P_D(u(t)) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \overline{u_x}(t)u(t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^4\,dx = P_D(u_0). \tag{3.3}$$

Usando a variante da Transformação de Calibre $v(t,x) = \mathrm{e}^{-i\beta\int_{-\infty}^{x}|u(t,y)|^2\,dy}u(t,x)$, verifica-se que para qualquer $p > 0$, $\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}$, em particular massa de $v(t)$ é conservada e igual a M_0.

Além disso, o fato de $u(t,x)$ ser absolutamente contínua em x por $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ e usando o Teorema 1.1.2 encontrado no capítulo de preliminares, vale que o produto $(h(t)u(t))(x)$ é uma função absolutamente contínua e $(h(t)u(t))_x = h_x(t)u(t) + v(t)h_x(t)$, agora, para $v(t,x)$, temos primeiramente que

$$v_x(t,x) = (u_x(t,x) - i\beta|u(t,x)|^2u(t,x))\mathrm{e}^{-i\beta\int_{-\infty}^{x}|u(t,y)|^2\,dy}. \tag{3.4}$$

Assim, tem-se que

$$\|v_x(t)\|_{L^2}^2 = \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \beta^2\|u(t)\|_{L^6}^6 + 2\beta\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}|u|^2u\overline{u_x}(t)\,dx. \tag{3.5}$$

Usando a equação acima e substituindo $\|u_x(t)\|_{L^2}^2$ pelos termos da conservação da energia E_D aparecerá um coeficiente não necessariamente nulo vezes $\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}|u|^2u\overline{u_x}(t)\,dx$. Mas, escolhendo $\beta = \frac{3}{4}$, não haverá o termo $\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}|u|^2u\overline{u_x}(t)\,dx$ na nova identidade, e ela será

$$\|v_x(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{16}\|v(t)\|_{L^6}^6 = E(v(t)) = E(v(0)). \tag{3.6}$$

Também usando a igualdade (3.4), verifica-se uma nova lei de conservação para v, o "momento", dado por

$$P(v(t)) = -\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}\overline{v_x}v(t)\,dx + \frac{1}{4}\|v(t)\|_{L^4}^4 = P(v(0)). \tag{3.7}$$

Agora fazendo o uso das desigualdades de Minkowski e Gagliardo-Nirenberg

$$\|g\|_{L^6(\mathbb{R})}^6 \leq \tfrac{4}{\pi^2}\|g\|_{L^2}^4\|g_x\|_{L^2}^2$$

obtemos para $u(t,x)$ e $v(t,x)$:

$$\begin{aligned}
\|u_x(t)\|_{L^2} &\leq \|v_x(t)\|_{L^2} + \frac{3}{4}\|v(t)\|_{L^6}^3 \\
&\leq \|v_x(t)\|_{L^2} + \frac{3}{2\pi}\|v(t)\|_{L^2}\|v_x(t)\|_{L^2} \\
&\leq (1 + \frac{3}{2\pi}M_0)\|v_x(t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Em particular, usando a conservação da massa, obtemos que se $\|u(t_n)\|_{H^1}$ tende para

$+\infty$ para certa sequência t_n indo a T ou a $+\infty$, sem perder generalidades, temos que o mesmo ocorre em $\|v(t_n)\|_{H^1}$. Assim, pela alternativa de blow-up, temos que u é globalmente bem posta com solução em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ se $\|v_x(t)\|_{L^2}$ for limitado por uma constante positiva para qualquer t do domínio de v.

A partir de agora, supondo por contradição que $u(t,x)$ não pertence a $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ para certo u_0 com $\|u_0\|_{L^2}^2 < 4\pi$ e pelas observações feitas e por u e v terem mesmo domínio, basta estudar se $v(t,x) \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$.

Seja $(-T_1, +T_2)$ o intervalo maximal em que $v \in C((-T_1, +T_x), H^1(\mathbb{R}))$. Então, existe uma sequência t_n convergindo a T_2 e $\lim_{n\to\infty} \|v_x(t_n)\|_{L^2} = +\infty$, no caso da sequência ir a $-T_1$ a demonstração da contradição é totalmente análoga e será omitida. Para essa sequência seja:

$$f_n = \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^4}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}. \tag{3.8}$$

Assim, temos que da energia em (3.6), pode-se obter a igualdade:

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^8 = 16 f_n^2 (\|v_x(t_n)\|_{L^2}^2 - E(v(0))). \tag{3.9}$$

Relembraremos também o primeiro tipo de desigualdade de Gagliardo-Nirenberg citado na seção de preliminares:

$$\|h\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq C_{GN} \|h\|_{L^4(\mathbb{R})}^{\frac{8}{9}} \|h_x\|_{L^2}^{\frac{1}{9}}. \tag{3.10}$$

Assim, com todas as conclusões obtidas e ferramentas enunciadas, podemos então provar o seguinte resultado

Lema 3.1.2. *Existe uma sequência $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ tal que*

$$2C_{GN}^{-\frac{9}{2}} + \epsilon_n \leq f_n \leq \sqrt{M_0}. \tag{3.11}$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder segue que

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq \|v(t_n)\|_{L^6}^3 \|v(t_n)\|_{L^2}^2,$$

portanto, obtemos que $f_n \leq \|v(t_n)\|_{L^2}^2 = M_0$. Além disso, usando a desigualdade de

Gagliardo-Nirenberg (3.10) e equação (3.9), obtemos que:

$$
\begin{aligned}
f_n &\geq \frac{C_{GN}^{-\frac{9}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^{\frac{3}{2}}}{\|v_x(t_n)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{C_{GN}^{-\frac{9}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{16}\|v(t_n)\|_{L^6}^{6} + E(v(0)))^{\frac{1}{4}}} \\
&= 2\frac{C_{GN}^{-\frac{9}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^{\frac{3}{2}}}{(\|v(t_n)\|_{L^6}^{6} + 16E(v(0)))^{\frac{1}{4}}} \\
&= 2C_{GN}^{-\frac{9}{2}}\frac{1}{(1+16\frac{E(v(0))}{\|v(t_n)\|_{L^6}^{6}})^{\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}
$$

Mas, pela conservação da energia em (3.9) e a hipótese de $\lim_{n\to\infty}\|v(t_n)\|_{L^2} = +\infty$, temos que $\frac{E(v(0))}{\|v(t_n)\|_{L^6}^{6}}$ vai a zero quando n vai a infinito. Isso implica imediatamente que: $f_n \geq 2C_{GN}^{-\frac{9}{2}} + \epsilon_n$. □

Agora definiremos $\phi(t,x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}v(t,x)$, é fácil verificar que por $v(t,x)$ e $\mathrm{e}^{i\alpha x}$ serem funções absolutamente contínuas em x que $\phi(t,x)$ também é uma função absolutamente contínua em x e vale:

$$
\phi_x(t,x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}(i\alpha v(t,x) + v_x(t,x)) \text{ q.t.p.} \tag{3.12}
$$

Assim, segue a seguinte identidade

$$
\|\phi_x(t)\|_{L_x^2}^2 = \|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}} \overline{v} v_x(t,x)\,dx + \alpha^2 \|v(t)\|_{L^2}^2 . \tag{3.13}
$$

Dado que $|\phi(t,x)| = |v(t,x)|$, segue então $\|\phi(t)\|_{L^p} = \|v(t)\|_{L^p}$ para qualquer $p > 0$, logo vale:

$$
E(\phi(t)) = E(v(t)) + 2\alpha \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}} \overline{v} v_x(t,x)\,dx + \alpha^2 \|v(t)\|_{L^2}^2 . \tag{3.14}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E(\phi(t_n)) &= \|\phi_x(t_n)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{16}\|\phi(t_n)\|_{L^6}^6 \\
&\geq C_{GN}^{-18}\|\phi(t_n)\|_{L^6}^{18}\|\phi(t_n)\|_{L^4}^{-16} - \frac{1}{16}\|\phi(t_n)\|_{L^6}^6 \\
&= (C_{GN}^{-18}\|v(t_n)\|_{L^6}^{12}\|v(t_n)\|_{L^4}^{-16} - \frac{1}{16})\|v(t_n)\|_{L^6}^6 \\
&= (C_{GN}^{-18} f_n^{-4} - \frac{1}{16})\|v(t_n)\|_{L^6}^6 .
\end{aligned}
$$

Em particular a estimativa em $E(\phi(t_n))$ e a identidade (3.13) implicam que para qualquer $\alpha > 0$ vale a desigualdade:

$$-\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}} \overline{v}(t_n,x)v_x(t_n,x)\,dx \leq (\frac{1}{16} - C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6\,\frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}M_0 + \frac{1}{2\alpha}E(v(0)). \tag{3.15}$$

Agora temos todas as ferramentas e hipóteses necessárias para demonstrar o teorema principal do capítulo.

Demonstração do Teorema 3.1.1. Usando a desigualdade (3.15) e a conservação do momento em v (3.7), obtemos para qualquer $\alpha > 0$ a desigualdade:

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq (\frac{1}{4} - 4C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6\,\frac{1}{2\alpha} + \alpha 2M_0 + \frac{2E(v(0))}{\alpha} + 4P(v(0)). \tag{3.16}$$

Se $(\frac{1}{16} - C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6 \leq M_0$ para infinitos índices n, escolhendo $\alpha = 1$, teremos para esses infinitos índices que

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq 2M_0 + 2E(v(0)) + 4P(v(0)). \tag{3.17}$$

Por outro lado, $\|v_x(t_n)\|_{L^2} \to +\infty$ e a conservação da energia $E(v)$, implica que $\lim_{n\to\infty}\|v(t_n)\|_{L^6} = +\infty$ e o Lema 3.1.2 implica que $\lim_{n\to\infty}\|v(t_n)\|_{L^4} = +\infty$, o que implica ser impossível existir infinitos índices n com $\frac{1}{4} < 4C_{GN}^{-18}f_n^{-4}$.

Portanto, resta verificar o caso em que $(\frac{1}{16} - C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6 > M_0$ para n suficientemente grande. Nesse caso tome para cada índice n, $\alpha_n = \sqrt{M_0^{-1}(\frac{1}{16} - C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6}$ e é fácil ver que $\alpha_n > 1$ nessa situação. Assim, usando a desigualdade (3.16), obtemos

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq M_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 - 16C_{GN}^{-18}f_n^{-4})\,\|v(t_n)\|_{L^6}^6} + 2E(v(0)) + 4P(v(0)). \tag{3.18}$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|v(t_n)\|_{L^6}^3$ e usando as propriedades de f_n, obtemos

$$f_n \leq M_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 - 16C_{GN}^{-18}f_n^{-4}} + \frac{2E(v(0)) + 4P(v(0))}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}. \tag{3.19}$$

Note que o termo $\frac{2E(v(0))+4P(v(0))}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}$ tende para zero quando n vai a $+\infty$ e $M_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{16} - C_{GN}^{-18}f_n^{-4}}$ é uniformemente limitado por cima pelo Lema 3.1.2. Assim, multiplicando a desigualdade (3.19) por f_n^2 e elevando em seguida ao quadrado, obtemos

$$f_n^6 \leq M_0 f_n^4 - 16C_{GN}^{-18}M_0 + O(\|v(t_n)\|_{L^6}^{-3}); \tag{3.20}$$

O que finaliza a demonstração. $\square$

Consideremos o polinômio $p(x) = x^3 - x^2M_0 + 16C_{GN}^{-18}M_0$. Se $p(x) > 0$ para todo $x \in [0,+\infty]$, então, dado que $f_n > 0$, teríamos que desigualdade (3.20) não poderia ocorrer para n suficientemente grande, e, assim, deveria ocorrer de $v(t,x)$ ser globalmente bem posta e logo $u(t,x)$ também.

Note que em $p(x)$, existe ponto crítico x_0 de $p(x)$ em $(0+\infty]$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Em particular, temos que $p^{'}(x) = x(3x - 2M_0)$, assim é fácil verificar que $p^{'}(x) < 0$ se $0 < x < x_0 = \frac{2M_0}{3}$, com isso, segue que x_0 é mínimo global de $p(x)$ em $[0, +\infty]$.

Portanto, a desigualdade em (3.20) é falsa em $[0, +\infty]$ para n suficientemente grande se e só se $p(\frac{2M_0}{3}) > 0$, assim, fica claro que isso é equivalente a :

$$M_0 < 6\sqrt{3}C_{GN}^{-9} = 4\pi. \tag{3.21}$$

Logo, se $\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < 4\pi$, então é impossível que $\|v_x(t_n)\|_{L^2}$ exploda para alguma sequência (t_n) e, como visto antes, isso implica que não existe sequência (t_n) com $\lim_{n\to\infty} \|u_x(t_n)\| = +\infty$. Logo, $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$, o que encerra a demonstração do Teorema 3.1.1.

Capítulo 4

Solução Global na equação não-linear de Schrödinger com derivada em $\mathbb{T}$

Nesse capítulo repetiremos o raciocínio do capítulo anterior para obter o mesmo resultado de massa crítica na mesma equação só que agora no espaço $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ em vez do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, seguindo as ideias de [23].

4.1 Soluções periódicas globais

Denotaremos por $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \simeq [0, L)$ e provaremos o resultado a seguir.

Teorema 4.1.1. *Considere o Problema de Valor Inicial*

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = i\partial_x(|u|^2 u)(t,x), (t,x) \in \mathbb{T}_L \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{T}_L) \end{cases} \tag{4.0}$$

Se $\|u_0\|_{L^2}^2 < 4\pi$, *então existe solução global* $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$.

Para esse modelo da equação de Schrödinger, formalmente, pode-se verificar as seguintes identidades:

- Conservação da Massa

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2 = M_0. \tag{4.1}$$

- Conservação do Momento

$$H(u) = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{T}} u\overline{u_x}(t)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_L} |u(t)|^4\, dx. \tag{4.2}$$

- Conservação da Energia

$$E(u) = \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{T}_L} uu\overline{uu_x}(t)\,dx + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^6}^6 = E_0. \tag{4.3}$$

Antes de provar o Teorema 4.1.1, consideremos $f \in H^1(\mathbb{T}_L)$ e $\delta > 0$ pequeno suficiente e, então, definiremos a seguinte função

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < -\delta \text{ ou } x > L+\delta, \\ f(x) \text{ se } x \in [0, L], \\ f(0)\frac{(x+\delta)}{\delta} \text{ se } -\delta \geq x < 0, \\ f(0)\frac{L+\delta-x}{\delta} \text{ se } L \geq< x \geq L+\delta. \end{cases} \tag{4.4}$$

Uma vez que f é função periódica e contínua em $[0, L]$, podemos substituir f por uma translação dela $\operatorname{trans}_h f$ de modo que vale

$$|\operatorname{trans}_h f(0)| \leq \frac{\|f\|_{L^4(\mathbb{T})}^4}{L}.$$

Assim, utilizando $f(0) \leq \frac{\|f\|_{L^4(\mathbb{T})}^4}{L}$, sem perder generalidades, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{T}_\mathbb{L})} \leq \|f_1\|_{L^6(\mathbb{R})}, \tag{4.5}$$

$$\|f_1\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \leq (1 + \frac{2\delta}{5L})\,\|f\|_{L^4(\mathbb{T}_\mathbb{L})}^4, \tag{4.6}$$

$$\left\|\frac{df_1}{dx}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left\|\frac{df}{dx}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|f\|_{L^4(\mathbb{T}_L)}^4 \frac{2}{\delta L^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.7}$$

Logo aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.25) em f_1 e utilizando as desigualdades $(4.5), (4.6)$ e (4.7), obtemos

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{T}_L)} \leq C_{GN}(1 + \frac{2\delta}{5L})^{\frac{2}{9}}(\|f_x\|_{L^2(\mathbb{T}_L)}^2 + \frac{2}{\delta L^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^4}^2)^{\frac{1}{18}}\|f\|_{L^4}^{\frac{8}{9}}. \tag{4.8}$$

Usaremos a primeira versão das transformações de calibre em $u(t, x)$ dada por

$$v(t, x) = \mathrm{e}^{-i\beta\frac{1}{L}\int_0^L\int_\theta^x |u(t,y)|^2 - \frac{1}{L}M_0\,dy\,d\theta}u(t, x).$$

Como as leis de conservação são as mesmas do capítulo 3 por serem associadas ao mesmo modelo de equação, será escolhido $\beta = \frac{3}{4}$. Essa escolha será feita para que na nova energia conservada só apareçam a norma da derivada de v em L^2 e outras normas L^p.

Calculando a derivada $v_x(t)$ explicitamente usando que $u(t) \in H^1(\mathbb{T}_L)$, e usando as leis de conservações dadas em (4.2) e (4.3), verifica-se que

$$E_1(v(t)) = \|v_x(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{16}\|v(t)\|_{L^6(\mathbb{T})}^6 + \frac{3M_0}{8L}\|v(t)\|_{L^4}^4 = E_1(v(0)), \tag{4.9}$$

$$P_1(v(t)) = \operatorname{Im}\int_{\mathbb{T}_L} v\overline{v_x}(t)\,dx - \frac{1}{4}\|v(t)\|_{L^4(\mathbb{T}_L)}^4 = P_1(v(0)). \tag{4.10}$$

Utilizando a definição de $v(t,x)$, pode-se verificar que $\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{T}_L)} = \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}_L)}$ para qualquer $p > 0$. E por analogia ao raciocínio do capítulo 3, verifica-se que $\|u_x(t)\|_{L^2} \leq \|v_x(t)\|_{L^2}$.

Analogamente ao capítulo 3, provaremos o Teorema 4.1.1 por argumento de contradição, assumindo que existe um intervalo maximal $(-T, T^*)$ e uma sequência (t_n) convergindo a T^*, sem perder generalidades, com $\lim_{n\to\infty}\|v_x(t_n)\|_{L^2} = +\infty$. Pelas observações feitas anteriormente, verifica-se que se a alternativa do Blow-up acima for impossível, então existe única solução $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}_L))$.

De maneira análoga ao capítulo 3 para $f_n = \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^4}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}$, verifica-se

Lema 4.1.2. *Sejam $L, \delta > 0$ e seja $f_n = \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^4}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}$. Então, existe uma sequência $\epsilon_n \to 0$ de modo que vale a desigualdade*

$$2C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(1 + \tfrac{2\delta}{5L}) + \epsilon_n \leq f_n \leq M_0^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, repetindo o raciocínio do capítulo 3, para cada índice n da sequência (t_n), construiremos funções $\phi_n(x) = \mathrm{e}^{i\alpha_n x}v(t_n, x)$. Os $\alpha_n > 0$ serão definidos mais tarde com ϕ_n satisfazendo a igualdade:

$$\|(\phi_n)_x\|_{L_x^2}^2 = \|v_x(t_n)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_n \operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}} \overline{v}v_x(t_n, x)\,dx + \alpha_n^2\|v(t_n)\|_{L^2}^2. \tag{4.11}$$

A identidade (4.11) com $E_1(v(t_n)) - E_1(\phi_n) = \|v_x(t_n)\|_{L^2}^2 - \|(\phi_n)_x\|_{L^2}^2$ implica

$$\operatorname{Im}\int_{\mathbb{T}_L} v\overline{v_x}(t_n)\,dx = -\frac{E_1(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{1}{2\alpha_n}E_1(v) + \frac{\alpha_n}{2}M_0. \tag{4.12}$$

Finalmente, com a conservação do momento $P_1(v)$, obtemos

$$P_1(v) + \frac{1}{4}\|v(t_n)\|_{L^4(\mathbb{T}_L)} = -\frac{E_1(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{1}{2\alpha_n}E_1(v) + \frac{\alpha_n}{2}M_0. \tag{4.13}$$

Agora para $\gamma_n = (\frac{2}{\delta L^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{8}\frac{M_0}{L})\frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^2}{\|v(t_n)\|_{L^6}^6}$ e $\omega_n = \frac{1}{16} - (1 + \frac{2\delta}{5L})^{-4}C_{GN}^{-18}f_n^{-4}$, verificamos que

$$E_1(\phi_n) + (\gamma_n + \omega_n)\|v(t_n)\|_{L^6}^6 = \|(\phi_n)_x\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\delta L^{\frac{1}{2}}}\|\phi_n\|_{L^6}^6 - (1 + \frac{2\delta}{5L})^{-4}\|\phi_n\|_{L^6}^{18}\|\phi_n\|_{L^4}^{-16}. \tag{4.14}$$

Notemos que a desigualdade $E_1(\phi_n) + (\gamma_n + \omega_n) \|\phi_n\|_{L^6}^6 \geq 0$ é equivalente a

$$\|\phi_n\|_{L^6}^{18} \leq (1 + \frac{2\delta}{5L})^4(\|(\phi_n)_x\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\delta L^{\frac{1}{2}}} \|\phi_n\|_{L^6}^6) \|\phi_n\|_{L^4}^{16}, \tag{4.15}$$

o que é verdade pela versão de um tipo de Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg em (4.8). Ou seja, tem-se

$$-E_1(\phi_n) \leq (\gamma_n + \omega_n) \|\phi_n\|_{L^6}^6. \tag{4.16}$$

Logo, usando (4.16) e (4.13) temos que

$$\frac{1}{4} \|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq -P_1(v) + \frac{1}{2\alpha_n} E_1(v) + \alpha_n \frac{M_0}{2} + \frac{(\gamma_n + \omega_n) \|v(t_n)\|_{L^6}^6}{2\alpha_n}. \tag{4.17}$$

Agora, notando também que pela conservação da energia em (4.9) e dado que $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^2} = +\infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^6} = +\infty$. Usando o Lema 4.1.2 relacionado a f_n, verifica-se que $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^4}^4 = +\infty$. Usando os limites dessas normas e o Lema 4.1.2, verifica-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}}{\|v(t_n)\|_{L^6}^6} = 0$, o que implica $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

A partir daqui será estudado apenas a desigualdade (4.17) e provaremos que a contradição proposta no início do capítulo não poderá ocorrer. Com esse objetivo estudamos 2 casos:

1. $(\gamma_n + \omega_n) \leq 0$ para infinitos índices n. Nesse caso, basta escolher $\alpha_n = 1$ para qualquer índice n, pois assim teríamos

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq -4P_1(v) + 2E_1(v) + 2M_0. \tag{4.18}$$

Isso implicaria existir uma constante $C > 0$ com $\|v(t_n)\|_{L^4} < C$ para infinitos n, o que é absurdo por contradizer $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^4} = +\infty$.

2. $(\gamma_n + \omega_n) > 0$ para n suficientemente grande. Nesse caso, podemos tomar $\alpha_n = \lfloor (M_0^{-1}(\gamma_n+\omega_n))^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3 \rfloor + 1$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função parte inteira. Assim $\alpha_n \geq 1$, $\alpha_n > (M_0^{-1}(\gamma_n+\omega_n))^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3$ e $\alpha_n \geq (M_0^{-1}(\gamma_n+\omega_n))^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3 + 1$. Portanto, temos da desigualdade (4.17) e da definição de f_n, que

$$\frac{1}{4} f_n \leq \frac{-P_1(v) + \frac{E_1(v)}{2} + \frac{M_0}{2}}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3} + M_0^{\frac{1}{2}} (\omega_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.19}$$

Lembrando que $\omega_n = \frac{1}{16} - (1 + \frac{2\delta}{5L})^{-4} C_{GN}^{-18} f_n^{-4}$ e que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, decorrem de (4.19) as seguintes desigualdades

$$f_n \leq O(\|v(t_n)\|_{L^6}^{-3}) + M_0^{\frac{1}{2}}(16\omega_n)^{\frac{1}{2}} + o(1), \tag{4.20}$$

$$f_n^3 \leq O(\|v(t_n)\|_{L^6}^{-3}) + M_0^{\frac{1}{2}}(f_n^4 16\omega_n)^{\frac{1}{2}} + o(1), \tag{4.21}$$

$$f_n^6 \leq (M_0)f_n^4 - 16M_0(1+\frac{2\delta}{5L})^{-4}C_{GN}^{-18} + o(1). \tag{4.22}$$

Assim, se tivermos $f_n^6 - (M_0)f_n^4 + 16M_0(1+\frac{2\delta}{5L})^{-4}C_{GN}^{-18} > 0$ para n suficientemente grande o segundo caso ficaria impossível e, consequentemente, u estaria bem definida globalmente. Para isso, basta verificar que o polinômio $p(x) = x^3 - M_0x^2 + 16M_0(1+\frac{2\delta}{5L})^{-4}C_{GN}^{-18}$ é positivo em $[0,+\infty)$. Como $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, e $p^{'}(x) = x(3x - 2M_0) \leq 0$ para $x \in [0, \frac{2M_0}{3}]$ e $\frac{2M_0}{3}$ é o único ponto crítico de $p(x)$ em $(0,+\infty)$, verifica-se que o mínimo de $p(x)$ é atingido em $\frac{2M_0}{3}$. Logo se $p(\frac{2M_0}{3}) > 0$, então o caso 2 não poderia ocorrer, em particular, não é difícil verificar que $p(\frac{2M_0}{3}) > 0$ se e só se $M_0 < 4\pi(1+\frac{2\delta}{5L})^{-2}$. Como isso pode ser feito para qualquer $\delta > 0$, conclui-se que se $M_0 < 4\pi$, então é impossível o segundo caso ocorrer.

Portanto, se $\|u_0\|_{L^2}^2 = M_0 < 4\pi$, então a solução local u resolve o modelo de equação da Schrödinger (4.0), o que encerra a demonstração do Teorema 4.1.1.

Capítulo 5

Sobre a existência de soluções globais para a equação de Korteweg- de Vries L^2-crítica em $\mathbb{T}$.

5.1 Primeira restrição de massa

Apresentaremos a prova da existência de solução global do seguinte modelo da equação de Korteweg-de-Vries não-linear quando há certa cota superior para norma $L^2(\mathbb{T})$ do dado inicial $u_0(x)$.

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) + (u^5)_x(t,x) = 0, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u(0,x) = u_0(x), u_0 \in H^1(\mathbb{T}). \end{cases} \tag{5.0}$$

Teorema 5.1.1. *Para a equação* (5.0)*, se* $\|u_0\|_{L^2}^2 < \frac{9\sqrt{3}\pi}{24}$*, então a solução local* u *em* $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$ *do Problema de Cauchy* (5.0) *pode ser globalmente estendida em tempo.*

Se a solução de (5.0) estiver em $C([-T,T], H^1(\mathbb{T}))$, é um fato conhecido que ela satisfaz as seguintes leis de conservação. A conservação da Massa que é dada por

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = M_0, \tag{5.1}$$

e a conservação da Energia dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |u_x(t,y)|^2 \, dy - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{T}} |u(t,y)|^6 \, dy = E_0. \tag{5.2}$$

Ambas as leis de conservação (5.1) e (5.2) serão utilizadas no argumento de contradição da prova do Teorema 5.1.1 para obter uma desigualdade polinomial com coeficientes constantes dependendo apenas de M_0 e E_0. Essa desigualdade polinomial só seria válida para certa restrição no valor de M_0, além disso ambas as leis de conservação serão usadas também em estimativas de $\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T})}$ para valores específicos de $p > 1$. O mesmo método será usado nas subseções subsequentes. O objetivo desse capítulo é estimar uma cota superior m para massa M_0 tal que se $M_0 < m$ e $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$, então a equação KdV Quíntica (5.0) possui solução global pertencente a $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$.

Para provar a existência da solução global usaremos o resultado conhecido da alternativa de blow-up, o qual afirma que a equação KdV Quíntica (5.0) não possui solução global bem posta se e somente se existe $T^* > 0$ ou $T^* < 0$ com $\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{T})}$ tendendo a $+\infty$ se $t \to T^*$. Assim, tomaremos uma cota superior m para M_0 no decorrer da demonstração que implicará a impossibilidade de ocorrer a alternativa de blow-up e, por argumento de contradição, isso implicará que para $M_0 < m$, a equação terá solução global.

Consideramos $v(t,x) = G_1(u(t))(x) = \mathrm{e}^{-iJ(u(t))(x)}u(t,x)$, usando a regra da cadeia e produto na derivação, temos que, em quase todo $x \in \mathbb{T}$, vale

$$v_x(t,x) = \mathrm{e}^{-iJ(u(t))(x)}(u_x(t,x) - i(u(t,x)^2 - \frac{M_0}{2\pi})u(t,x)). \tag{5.3}$$

Não é difícil verificar que $|v_x(x,t)| \geq |u_x(t,x)|$, pois $u(t,x) \in \mathbb{R}$ e ${}^{-iJ(u(t))(x)}$ ter módulo igual a 1. Logo, já que $\|u(t)\|_{L^2} = \|v(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} = M_0^{\frac{1}{2}}$, então, se valesse a alternativa de blow-up em u no instante T^*, também iria valer para v no instante T^*. Ou seja, $\|v_x(t)\|_{L^2} \to \infty$ e $\|u_x(t)\|_{L^2} \to \infty$ se $t \to T^*$.

Verifica-se também que $|u(t,x)| = |v(t,x)|$, portanto para qualquer $p > 0$ e qualquer t do domínio de u, segue

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T})}. \tag{5.4}$$

Multiplicando $v_x(t,x)$ por $\overline{v_x(t,x)}$, integrando em x, usando as conservações da energia (5.2) e da massa (5.1), obtemos a nova lei de conservação em v:

$$\|v_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \frac{4}{3}\|v(t)\|^6_{L^6} + \frac{M_0}{\pi}\|v(t)\|^4_{L^4} = 2E_0 + \frac{M_0^3}{4\pi^2} = E_2(v). \tag{5.5}$$

Além disso, usando o raciocínio do artigo [27], definiremos a nova lei de conservação em v, o Momento, que pode ser obtido utilizando a definição de $v(t,x)$ e a identidade (5.3), obtemos

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{T}} \overline{v_x(t,y)}v(t,y)\,dy = \|v(t)\|^4_{L^4(\mathbb{T})} - \frac{M_0^2}{2\pi}. \tag{5.6}$$

Semelhante ao raciocínio do artigo [27], usaremos a seguinte desigualdade de Gagliardo-Nirenberg:

$$\|v(t)\|_{L^6(\mathbb{T})} \leq C_{GN}(1+\frac{2\delta}{5})^{\frac{2}{9}}(\|v_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}+\frac{2}{\delta}\|v(t)\|^2_{L^4})^{\frac{1}{18}}\|v(t)\|^{\frac{8}{9}}_{L^4}. \tag{5.7}$$

Agora se u não fosse solução global, por causa da alternativa blow-up existiria $t_n \to T^*$, $|T^*| < \infty$ e $\|v_x(t_n)\|_{L^2} \to \infty$,$\|u_x(t_n)\|_{L^2} \to \infty$. A partir de agora, consideramos essa situação e para essa sequência t_n, considere

$$f_n = \frac{\|v(t_n)\|^4_{L^4}}{\|v(t_n)\|^3_{L^6}}. \tag{5.8}$$

Primeiro, provaremos o seguinte lema

Lema 5.1.2. *Para n suficientemente grande, existem constantes positivas c_1, c_2, dependendo de E_0, tal que:*

$$c_1 \leq f_n \leq c_2. \tag{5.9}$$

Demonstração. Por Hölder, para $p = 2$, temos que

$$\int_{\mathbb{T}} |v(t_n, y)|^3 |v(t_n, y)|^1\, dy \leq \|v(t_n)\|_{L^2}\|v(t_n)\|^3_{L^6}. \tag{5.10}$$

Assim, isso implica que $f_n \leq \|v(t_n)\|_{L^2} = M_0^{\frac{1}{2}}$, obtemos $c_2 = M_0^{\frac{1}{2}}$. Note que elevando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (5.7) a $\frac{9}{2}$ e invertendo a nova desigualdade, obtemos

$$f_n = \frac{\|v(t_n)\|^4_{L^4}}{\|v(t_n)\|^3_{L^6}} \geq C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(1+\frac{2\delta}{5})^{-1}(\|v_x(t_n)\|^2_{L^2}+\frac{2}{\delta}\|v(t_n)\|^2_{L^4})^{-\frac{1}{4}}\|v(t_n)\|^{\frac{3}{2}}_{L^6}. \tag{5.11}$$

Usando a conservação da energia $E_2(v)$ em (5.5), podemos substituir $\|v_x(t_n)\|^2_{L^2}$ por outro termo e assim, obter a nova desigualdade

$$f_n \geq C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(1+\frac{2\delta}{5})^{-1}(E_2(v)+\frac{4}{3}\|v(t_n)\|^6_{L^6}-\frac{M_0}{\pi}\|v(t_n)\|^4_{L^4}+\frac{2}{\delta}\|v(t_n)\|^2_{L^4})^{-\frac{1}{4}}\|v(t_n)\|^{\frac{3}{2}}_{L^6}. \tag{5.12}$$

Portanto, temos

$$f_n \geq C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(1+\frac{2\delta}{5})^{-1}(\frac{E_2(v)+\frac{4}{3}\|v(t_n)\|^6_{L^6}-\frac{M_0}{\pi}\|v(t_n)\|^4_{L^4}+\frac{2}{\delta}\|v(t_n)\|^2_{L^4}}{\|v(t_n)\|^6_{L^6}})^{-\frac{1}{4}}. \tag{5.13}$$

A conservação da energia (5.2) de u e o fato de $\|u_x(t_n)\|_{L^2}$ tende a $+\infty$ quando n tende a infinito e as normas L^p de $u(t)$ e $v(t)$ serem iguais para qualquer $p > 0$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^6} = \infty. \tag{5.14}$$

A desigualdade (5.9) e a igualdade (5.14) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^4}{\|v(t_n)\|_{L^6}^6} = 0\,, \lim_{n\to\infty} \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^2}{\|v(t_n)\|_{L^6}^6} = 0. \tag{5.15}$$

A Desigualdade (5.13) e o fato de $E_2(v)$ e M_0 serem constantes implicam que

$$f_n \geq C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(o(1) + \frac{4}{3}). \tag{5.16}$$

Portanto, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$, tal que se $n > N(\epsilon)$, então vale a seguinte desigualdade

$$f_n \geq C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(\frac{4}{3} - \epsilon). \tag{5.17}$$

Logo, podemos tomar $c_1 = C_{GN}^{-\frac{9}{2}}(\frac{1}{3})$ por exemplo, que teremos $c_1 \leq f_n \leq c_2$ para n suficientemente grande. Assim, encerramos a prova. $\square$

Em particular esse lema implica que $\|v(t_n)\|_{L^4}$ tende a ∞ quando $n \to \infty$. Repetiremos o raciocínio do artigo [27], denotaremos

$$\phi_n(x) = \mathrm{e}^{i\alpha_n x} v(t_n, x), \tag{5.18}$$

tal que as constantes $\alpha_n \in \mathbb{R}$ vão ser determinadas mais tarde. Note que, usando a regra do produto em funções de $H^1(\mathbb{T})$, temos que

$$\|(\phi_n)_x\|_{L^2}^2 = \alpha_n \|v(t_n)\|_{L^2}^2 + \|v_x(t_n)\|_{L^2}^2 + i\alpha_n \int_{\mathbb{T}} \overline{v_x} v(t_n, x) - v_x \overline{v}(t_n, x)\, dx. \tag{5.19}$$

Uma vez que $\|\phi_n\|_{L^p} = \|v(t_n)\|_{L^p}$ para qualquer $p > 0$, segue, então

$$\begin{aligned} E_2(\phi_n) - E_2(v) = \|(\phi_n)_x\|_{L^2}^2 - \|v_x(t_n)\|_{L^2}^2 = \alpha_n i \int_{\mathbb{T}} \overline{v}(t_n, x) v_x(t_n, x) \\ - v(t_n, x)\overline{v_x}(t_n, x)\, dx - \alpha_n^2 \|v(t_n)\|_{L^2}^2 . \end{aligned} \tag{5.20}$$

Em particular, obtém-se para $\alpha_n > 0$ e usando que $M_0 = \|v(t)\|_{L^2}^2$ a seguinte igualdade

$$-\frac{E_2(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{E_2}{2\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{2} M_0 = \mathrm{Im} \int_T \overline{v_x}(t_n, x) v(t_n, x)\, dx. \tag{5.21}$$

Logo, usando (5.21) com a equação do momento (5.6), obtemos, para qualquer $\alpha_n > 0$:

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 - \frac{M_0^2}{2\pi} = -\frac{E_2(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{E_2(v)}{2\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{2} M_0. \tag{5.22}$$

Antes de provar o teorema principal, provaremos o seguinte lema

Lema 5.1.3. *Para o $v(t_n, x) \in H^1(\mathbb{T})$ descrito antes, e $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\phi(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x} v(t_n, x)$*

e E_2 o funcional definido antes para qualquer $h \in H^1(\mathbb{T})$, dado por:

$$\|h_x\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \frac{4}{3}\|h\|^6_{L^6} + \frac{M_0}{\pi}\|h\|^4_{L^4} = E_2(h). \tag{5.23}$$

Então, existem reais γ_n, ω_n dependendo apenas das normas $\|v(t_n)\|_{L^2}, \|v(t_n)\|_{L^4}, \|v(t_n)\|_{L^6}$, com

$$E_2(\phi) \geq -(\gamma_n + \omega_n)\|v(t_n)\|^6_{L^6}. \tag{5.24}$$

Mais precisamente, $\gamma_n = \frac{2\|v(t_n\|^2_{L^4}}{\delta\|v(t_n)\|^6_{L^6}} - \frac{M_0\|v(t_n\|^4_{L^4}}{\pi\|v(t_n)\|^6_{L^6}}$ e $\omega_n = \frac{4}{3} - (1+\frac{2\delta}{5})^{-4}C^{-18}_{GN}f_n^{-4}$.

Demonstração. Não é difícil verificar para os valores dados de γ_n, ω_n que (5.24) é equivalente a

$$\begin{aligned} E_2(\phi) + (\gamma_n + \omega_n)\|v(t_n)\|^6_{L^6} &= \alpha^2\|v(t_n)\|^2_{L^2} + \|v_x(t_n)\|^2_{L^2} \\ &+ i\alpha\int_T \overline{v_x}(t_n,x)v(t_n,x) - v_x(t_n,x)\overline{v}(t_n,x)\,dx \\ &+ \frac{2}{\delta}\|v(t_n)\|^2_{L^4} - (1+\frac{2\delta}{5})^{-4}C^{-18}_{GN}f_n^{-4}\|v(t_n)\|^6_{L^6} \\ &= \|\phi_x\|^2_{L^2} + \frac{2}{\delta}\|\phi\|^2_{L^4} - (1+\frac{2\delta}{5})^{-4}C^{-18}_{GN}f_n^{-4}\|\phi\|^6_{L^6} \geq 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Lembrando que $f_n = \frac{\|v(t_n)\|^4_{L^4}}{\|v(t_n)\|^3_{L^6}} = \frac{\|\phi\|^4_{L^4}}{\|\phi\|^3_{L^6}}$, verifica-se que a desigualdade (5.25) é equivalente a

$$C^{18}_{GN}(1+\frac{2\delta}{5})^4\|\phi\|^{16}_{L^4}(\|\phi_x\|^2_{L^2} + \frac{2}{\delta}\|\phi\|^2_{L^4}) \geq \|\phi\|^{18}_{L^6}. \tag{5.26}$$

Pode-se verificar que a desigualdade acima é equivalente a versão (5.7) da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, o que conclui a demonstração do lema. □

Agora, com todas essas conclusões obtidas, poderemos demonstrar o resultado principal dessa seção

Demonstração do Teorema 5.1.1. Seja $\phi_n(x) = e^{i\alpha_n x}v(t_n,x)$, $E_2(\phi_n)$ satisfaz condição (5.24) e o real α_n será determinado mais tarde. Utilizando que

$$\|v(t_n)\|^4_{L^4} - \frac{M_0^2}{2\pi} = -\frac{E_2(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{E_2(v)}{2\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{2}M_0, \tag{5.27}$$

segue do Lema 5.1.3 que

$$\|v(t_n)\|^4_{L^4} - \frac{M_0^2}{2\pi} \leq \frac{(\gamma_n + \omega_n)\|v(t_n)\|^6_{L^6}}{2\alpha_n} + \frac{E_2(v)}{2\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{2}M_0. \tag{5.28}$$

Assim, reduziremos o Teorema 5.1.1 em analisar dois casos: $\gamma_n + \omega_n \leq 0$ para infinitos naturais n ou $\gamma_n + \omega_n > 0$ para n suficientemente grande, e verificar a impossibilidade deles ocorrerem.

1. $\gamma_n + \omega_n \leq 0$ para infinitos naturais n.
   Nesse caso para os índices n em que o primeiro caso ocorre, verifica-se que $\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq \frac{E_2(v)}{2\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{2} M_0$ para qualquer $\alpha_n > 0$. Escolhendo $\alpha_n = 1$ em todos índices desse caso, por exemplo, verifica-se que

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq \frac{E_2(v)}{2} + \frac{M_0}{2} + \frac{M_0^2}{2\pi}. \tag{5.29}$$

   Assim, teríamos que em todos os índices do primeiro caso que $\|v(t_n)\|_{L^4}$ seria limitado por uma constante $C > 0$, o que contradiz $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^4} = +\infty$. Logo, o primeiro caso é impossível.

2. $\gamma_n + \omega_n > 0$ para n suficientemente grande.
   Para cada n natural denotaremos, sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ função parte inteira, que

$$\alpha_n = 2\pi \lfloor \frac{M_0^{-\frac{1}{2}} (\gamma_n + \omega_n)^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3}{2\pi} \rfloor + 2\pi. \tag{5.30}$$

   Pode-se verificar sem dificuldades que $2\pi \leq \alpha_n \leq (M_0^{-\frac{1}{2}} (\gamma_n + \omega_n)^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3) + 2\pi$ e $\alpha_n \geq (M_0^{-\frac{1}{2}} (\gamma_n + \omega_n)^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3)$. Assim, usando a desigualdade (5.28), obtemos

$$\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq M_0^{\frac{1}{2}} (\gamma_n + \omega_n)^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^6}^3 + \frac{M_0^2}{2\pi} + \frac{E_2(v)}{4\pi} + \pi M_0. \tag{5.31}$$

   Logo, dividindo a desigualdade (5.31) por $\|v(t_n)\|_{L^6}^3$, obtemos

$$f_n \leq M_0^{\frac{1}{2}} (\gamma_n + \omega_n)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{M_0^2}{2\pi} + \frac{E_2(v)}{4\pi} + \pi M_0}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}. \tag{5.32}$$

   Utilizando que $\gamma_n = \frac{2\|v(t_n\|_{L^4}^2}{\delta \|v(t_n)\|_{L^6}^6} - \frac{M_0 \|v(t_n\|_{L^4}^4}{\pi \|v(t_n)\|_{L^6}^6}$, $f_n \leq M_0^{\frac{1}{2}}$ e $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^6} = \infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Multiplicando a desigualdade (5.32) por f_n^2 e, em seguida, elevando ela ao quadrado e usando que $E_2(v)\,, M_0$ são constantes e ω_n é uniformemente limitado para qualquer n, obtemos

$$f_n^6 \leq M_0 f_n^4 \omega_n + o(1). \tag{5.33}$$

   Usando a definição de ω_n, obtemos para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que se $n > N(\epsilon)$, então, deveríamos ter:

$$f_n^6 - f_n^4 (M_0 \frac{4}{3}) + M_0 (1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} C_{GN}^{-18} \leq \epsilon. \tag{5.34}$$

A contradição do segundo caso ocorreria se, pelo fato de $f_n \geq c_1 > 0$, houvesse a seguinte desigualdade polinomial para qualquer $x \geq 0$

$$p(x) = x^3 - (\frac{4M_0}{3})x^2 + M_0(1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} C_{GN}^{-18} > 0. \tag{5.35}$$

O qual ocorre apenas se o ponto crítico x_0 de p(x) em $[0, \infty]$ satisfazer $p(x_0) > 0$. Realizando o teste da derivada em x_0, verifica-se que $x_0 = \frac{8M_0}{9}$ e $p(x_0) > 0$ ocorre apenas se $M_0 < \frac{27}{16}(1 + \frac{2\delta}{5})^{-2} C_{GN}^{-9}$. Utilizando que $K = (2\pi)^{-\frac{1}{9}} 3^{\frac{1}{6}}$ na Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.25) e o fato de δ poder ser qualquer numero positivo, obtemos que o segundo caso é falso se $M_0 < \frac{9\sqrt{3}\pi}{24}$.

Portanto, se $M_0 < \frac{9\sqrt{3}\pi}{24}$, a equação KdV não-linear do Teorema 5.1.1 tem solução em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$. $\square$

5.2 Segunda restrição de massa

Teorema 5.2.1. *Para a equação* (5.0) *se* $\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})} < \frac{2\pi}{3}$, *então existe solução global* $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$.

Nessa seção, aplicaremos uma variante da segunda transformação calibrada dada para cada $u \in H^1(\mathbb{T})$

$$F(u)(y) = \mathrm{e}^{-i\beta \int_0^x |u(y)|^2 \, dy}. \tag{5.36}$$

Se $u(t, x)$ é solução integral da equação (5.0), para $v(t, x) = u(t, x)F(u(t))(x)$, verifica-se que $v(t, x)$ satisfaz as seguintes conservações no tempo: a conservação da Massa

$$M_0 = \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}, \tag{5.37}$$

e a conservação da Energia

$$E(v) = \|v_x(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - (\frac{1}{3} + \beta^2) \|v(t)\|^6_{L^6}. \tag{5.38}$$

Além disso, de maneira completamente análoga ao raciocínio na seção 5.1, verifica-se que em quase todo instante t do domínio de u vale

$$\mathrm{Im} \int_{\mathbb{T}} \overline{v_x}(t, x) v(t, x) \, dx = \beta \|v(t)\|^4_{L^4}. \tag{5.39}$$

Note que, para cada t do domínio de u, verifica-se pelas observações feitas no capítulo 2 que $v_x(t, x) = (u_x(t, x) - i\beta |u(t, x)|^2) \mathrm{e}^{-i\beta \int_0^x |u(y)|^2 \, dy}$ q.t.p. em x. Logo, se u não tivesse solução em $C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}))$, então existiria $T^* > 0$ sem perder generalidades e sequência t_n convergindo a T^* com $\|u_x(t_n)\|_{L^2}$ tendendo a $+\infty$ quando $n \to \infty$. Isso implica também que $\|v_x(t_n)\|_{L^2}$ irá para infinito quando $n \to \infty$, pois u tem imagem real.

Seja $f_n = \frac{\|v(t_n)\|_{L^4}^4}{\|v(t_n)\|_{L^6}^3}$, é óbvio que f_n ainda satisfaz o lema (5.1.2) isso mais a conservação da energia de v (5.38) e o fato de $\|v_x(t_n)\|_{L^2}$ ir a mais infinito implica em $\|v(t_n)\|_{L^6}$ e $\|v(t_n)\|_{L^4}$ irem para infinito quando $n \to \infty$.

Agora para cada t_n, seja $\phi_n(x) = \mathrm{e}^{i\alpha_n x} v(t_n, x)$, α_n a ser determinado depois, verifica-se de maneira análoga usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_{L^6(\mathbb{T})} \leq C_{GN}(1 + \frac{2\delta}{5})^{\frac{2}{9}}(\|v_x\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{2}{\delta}\|v\|_{L^4}^2)^{\frac{1}{18}} \|v\|_{L^4}^{\frac{8}{9}}, \tag{5.40}$$

obtemos a desigualdade

$$E(\phi_n) + \frac{2\|\phi_n\|_{L^4}^4}{\delta} + (\frac{1}{3} + \beta^2)\|\phi_n\|_{L^6}^6 - (1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} C_{GN}^{-18} \geq 0. \tag{5.41}$$

Logo, temos que para

$$\gamma_n = \frac{2\|v(t_n)\|_{L^4}^2}{\delta\|v(t_n)\|_{L^6}^6}, \tag{5.42}$$

$$\omega_n = (\frac{1}{3} + \beta^2) - (1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} C_{GN}^{-18} f_n^4 \tag{5.43}$$

vale a desigualdade

$$E(\phi_n) \geq -(\omega_n + \gamma_n)\|v(t_n)\|_{L^6}^6. \tag{5.44}$$

E uma vez que

$$\begin{aligned} -\left\|(\mathrm{e}^{i\alpha_n x} v(t_n, x))_x\right\|_{L^2}^2 + \|v_x(t_n, x)\|_{L^2}^2 \\ + \alpha_n^2 \|v(t_n, x)\|_{L^2}^2 = 2\alpha_n \int_{\mathbb{T}} \overline{v_x}(t_n, x) v(t_n, x)\, dx, \end{aligned} \tag{5.45}$$

verifica-se, usando a equação (5.19), a definição do funcional energia (5.38) e (5.39) que

$$-\frac{E(\phi_n)}{2\alpha_n} + \frac{E(v(t_n))}{2\alpha_n} + M_0 \frac{\alpha_n}{2} = \beta\|v(t_n)\|_{L^4}^4. \tag{5.46}$$

Se $(\gamma_n + \omega_n) \leq 0$ para infinitos índices n, então teríamos pela desigualdade (5.44) e para $\alpha_n = 1$ em infinitos índices n que $\|v(t_n)\|_{L^4} \leq C$ para algum $C > 0$ fixo, o que contradiz $\lim_{n\to\infty} \|v(t_n)\|_{L^4} = +\infty$.

Logo, semelhante à demonstração na seção 5.1, resta achar uma cota para M_0 que impossibilite a ocorrência do caso de $(\gamma_n + \omega_n) > 0$ para n suficientemente grande. Nessa nova situação, teremos

$$\beta\|v(t_n)\|_{L^4}^4 \leq \frac{(\gamma_n + \omega_n)\|v(t_n)\|_{L^6}^6}{2\alpha_n} + \frac{E(v)}{2\alpha_n} + \frac{M_0\alpha_n}{2}. \tag{5.47}$$

Agora, tomando $\alpha_n = \lfloor \frac{c(M_0(\omega_n+\gamma_n))^{-\frac{1}{2}}\|v(t_n)\|_{L^6}^3}{2\beta} \rfloor + 1$, notando que $\gamma_n = o(1)$ e que $\|v(t_n)\|_{L^6}$ tende a infinito, verifica-se que dividindo a desigualdade (5.47) por $\beta\|v(t_n)\|_{L^6}^3$ e substituindo o valor de α_n, obtém-se que

$$f_n \leq (\omega_n)^{\frac{1}{2}} M_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{c} + \frac{c}{4\beta^2}) + \frac{M_0}{2\beta} + \frac{E_3}{2\beta} + o(1). \tag{5.48}$$

Multiplicando a desigualdade (5.48) por f_n^2 e, em seguida, elevando ao quadrado, obtemos

$$f_n^6 \leq f_n^4((\frac{1}{3} + \beta^2)M_0(\frac{1}{c} + \frac{c}{4\beta^2})^2) - (1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} M_0(\frac{1}{c} + \frac{c}{4\beta^2})^2) C_{GN}^{-18} + o(1). \tag{5.49}$$

Semelhante ao método usado por Yifei Wu em [27], colocaremos uma cota superior para M_0 tal que seja impossível a desigualdade (5.49) ocorrer para n suficientemente grande. Para isso, seja

$$p(x) = x^3 - x^2((\frac{1}{3} + \beta^2)M_0(\frac{1}{c} + \frac{c}{4\beta^2})^2) + (1 + \frac{2\delta}{5})^{-4} M_0(\frac{1}{c} + \frac{c}{4\beta^2})^2) C_{GN}^{-18}. \tag{5.50}$$

Não é difícil verificar que se $p(x) > 0$ para qualquer $x \geq 0$, então a desigualdade (5.49) fica impossível para n suficientemente grande. Portanto, se o mínimo de $p(x)$ em $[0, +\infty]$ for positivo, então (5.49) falha para n suficientemente grande. Isso só ocorre quando o termo $x_0 \in [0, +\infty]$ com $p^{'}(x_0) = 0$ satisfazer $p(x_0) > 0$. Usando que $C_{GN}^{-9} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$,verifica-se que $p^{'}(x_0) = 0$ e $p(x_0) > 0$ é equivalente a:

$$M_0 < \frac{2\pi}{3}. \tag{5.51}$$

Portanto, obtemos o resultado do Teorema 5.2.1 o que encerra essa seção.

5.3 Soluções globais com média nula

Teorema 5.3.1. *Se $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ e $\|u_0\|_{L^2}^2 < \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, então a equação (5.0) possui solução global em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$.*

Estudaremos a equação (5.0) com dado inicial com média nula dada por $⨍_{\mathbb{T}} u_0(y)\,dy = 0$. Utilizaremos as leis de conservação (5.1) e (5.2) seguindo o mesmo raciocínio da seção 5.1. Utilizando integração por partes e a definição de u_t, verifica-se que

Lema 5.3.2. *Se $u_0(x) \in H^1(\mathbb{T})$ tem média zero, então q.t.p. t no domínio de u, então $u(t)$ também tem média zero.*

Demonstração. Sabemos que se $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ para $s > 0$ suficientemente grande e u_0 tem média nula, então vale

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathbb{T}} u(t,y)\,dy &= \int_{\mathbb{T}} u_t(t,y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{T}} -u_{xxx}(t,y) - (u^5)_x(t,y)\,dy = 0\end{aligned}$$

pelo teorema fundamental do cálculo.

Esse fato combinado com o Teorema da Dependência Contínua das soluções de (5.0) implica no resultado do lema. □

Em particular, temos agora a nova lei de conservação no caso de média de u_0 igual a zero.

$$\int_{\mathbb{T}} u(t,x)\,dx = 0 \ t\text{−q.t.p.} \tag{5.52}$$

Veremos T equivalente a $[0,1]/\{1 = 0\}$. Agora, para qualquer valor de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})} = M_0 > 0$, existe solução local da equação u em $C([-T,T];H^1(\mathbb{T}))$ para determinado $T > 0$. Para cada $t \in [-T,T]$, temos que $u(t) \in H^1(\mathbb{T};\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{T};\mathbb{R})$. Em particular podemos substituir $u(t)$ pela função contínua $u_1(t)$ de modo que $u(t,x) = u_1(t,x)$ q.t.p. em $\mathbb{T}$. Com isso, a partir de agora para cada $t \in [-T,T]$, assumiremos a partir de agora $u(t) \in C(\mathbb{T};\mathbb{R})$.

Pelo teorema do valor médio para integrais e $\int_0^1 u(t,y)\,dy = 0$, temos que existe $z \in [0,1]$ com $u(t,z) = 0$. Agora, definiremos a seguinte função em $\mathbb{R}$ dada por

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0, \\ u(t,z+x), \text{ se } x \in [0,1], \\ 0, \text{ se } x \geq 0. \end{cases} \tag{5.53}$$

Não é difícil verificar que v tem derivada em $L^2(\mathbb{R})$ q.t.p., por $u \in H^1([0,1])$ dada por:

$$v_x(t,x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0, \\ u_x(t,z+x), \text{ se } x \in [0,1], \\ 0, \text{ se } x \geq 0. \end{cases} \tag{5.54}$$

Por $u(t,x) = \int_0^x u_x(t,y)\,dy$ e $u(t,1) = u(t,0)$ considerando a versão contínua de u, segue que

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^x v_x(t,y)\,dy. \tag{5.55}$$

Logo, pelo mesmo raciocínio de $u(t) \in H^1(\mathbb{T})$ mais $v(t)(x)$ ser absolutamente contínua, verifica-se que $v(t)(x) \in H^1(\mathbb{R})$, logo vale a seguinte desigualdade de

Gagliardo-Nirenberg

$$\frac{1}{6}\left\|v(t)\right\|_{L^6(\mathbb{R})}^6 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\int v(t)^2}{\int \Omega^2}\right)^2 \int (v_x(t))^2. \tag{5.56}$$

Para Ω a solução forte de $\Omega_{xx}+\Omega^5 = \Omega$ dado por $\Omega = 3^{\frac{1}{4}}(\operatorname{sech} 2x)^{\frac{1}{2}}$. Usando cálculo, pode-se ver que $\int_{\mathbb{R}} \Omega(x)^2\, dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

Pela definição de $v(t,x)$, não é difícil verificar que

$$-\frac{1}{3}\left\|v(t)(x)\right\|_{L^6(\mathbb{R})}^6 + \left\|v_x(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2E_0 \tag{5.57}$$

$$\left\|v(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \left\|u(t)\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = M_0. \tag{5.58}$$

Assim, substituindo as equações (5.57), (5.58) em (5.56), obtemos

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{M_0}{\left\|\Omega\right\|_{L^2}^2}\right)\int_{\mathbb{R}} v_x(t,x)^2\, dx \leq 2E_0. \tag{5.59}$$

Em particular, se $M_0 < \left\|\Omega\right\|_{L^2}^2$ e como $\left\|v_x(t)\right\|_{L^2} = \left\|u_x(t)\right\|_{L^2}$ por (5.54), (5.59) implica $\left\|u_x(t)\right\|_{L^2}$ uniformemente limitado para qualquer t do domínio de u, logo a alternativa do blow-up nunca irá ocorrer nesse caso. Ou, seja obtemos o resultado do Teorema 5.3.1.

5.4 Terceira restrição de massa

Analisando a equação (5.0), encontraremos uma nova massa crítica encontrada $M > 0$, a qual implica a existência global de $u(t,x)$ em $H^1(\mathbb{T})$ se $\left\|u_0\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 < M$. Semelhante a demonstração da primeira seção do Capítulo 5, os valores para $\left\|u_0\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = M_0 > 0$ serão determinados mais tarde e também será utilizado a alternativa blow-up, que implicará existir um $T^* > 0$ e uma sequência t_n convergindo a T^*, com $\lim_{n\to\infty}\left\|u_x(t_n)\right\|_{L^2(\mathbb{T})} = \infty$, para u solução da equação acima com dado inicial u_0.

Repetindo o raciocínio e os resultados construídos na primeira seção do Capítulo 5, temos para a sequência $u(t_n)$ determinada antes, e sendo $f_n = \frac{\left\|u(t_n)\right\|_{L^4}^4}{\left\|u(t_n)\right\|_{L^6}^3}$, então existem constantes positivas c_1, c_2, com

$$c_1 \leq f_n \leq c_2. \tag{5.60}$$

Novamente consideraremos as seguintes desigualdades de Gagliardo-Niremberg para cada função $u(t)$ em $\mathbb{T}$ da solução da equação (5.0)

$$\|u(t)\|_{L^6}^6 \leq K_{GN}^6(1+\frac{2\delta}{5})^{\frac{4}{3}}(\|u_x(t)\|_{L^2}^2+\frac{2}{\delta}\|u(t)\|_{L^4}^2)^{\frac{1}{3}}\|u(t)\|_{L^4}^{\frac{16}{3}}, \tag{5.61}$$

$$\|u(t)\|_{L^6}^6 \leq \frac{4}{\pi^2}\|u_x(t)\|_{L^2}^2\|u(t)\|_{L^2}^4. \tag{5.62}$$

Logo por termos a seguinte conservação de energia

$$\|u(t)\|_{L^6}^6 = 3\|u_x(t)\|_{L^2}^2 - 6E_0, \tag{5.63}$$

e para cada t_n da sequência associado ao blow-up, usando translação e o fato de $u(t_n)$ ser periódica de período 1, podemos assumir pela Desigualdade de Hölder e teorema do valor médio que $|u(t_n,1)| = |u(t_n,0)| \leq \|u(t_n)\|_{L^4}^2 = M_0$. Assim podemos considerar:

$$v(t_n,x) = \begin{cases} u(t_n,1)(\frac{(1+\delta)-x}{\delta}), \text{ se } x\in[1,1+\delta], \\ u(t_n,x), \text{ se } x\in[0,1], \\ u(t_n,0)(\frac{x+\delta}{\delta}), \text{ se } x\in[-\delta,0]. \end{cases} \tag{5.64}$$

Assim, a derivada de $v(t_n)$ na variável x será dada q.t.p. pela função

$$(v)_x(t_n,x) = \begin{cases} u(t_n,1)(\frac{-1}{\delta}), \text{ se } x\in[1,1+\delta], \\ u_x(t_n,x), \text{ se } x\in[0,1], \\ u(t_n,0)(\frac{1}{\delta}), \text{ se } x\in[-\delta,0]. \end{cases} \tag{5.65}$$

Portanto, podemos obter que

$$\|v(t_n)\|_{L^2}^2 = \|u(t_n)\|_{L^2}^2 + \frac{2\delta}{5}\|u(t_n)\|_{L^2}^2, \tag{5.66}$$

$$\|v_x(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|u_x(t_n)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\delta}\|u(t_n)\|_{L^4}^2, \tag{5.67}$$

$$\|u(t_n)\|_{L^6} \leq \|v(t_n)\|_{L^6}. \tag{5.68}$$

Usando a equação (5.63) e a desigualdade (5.62) e as observações acima para $v(t_n)$, obtemos, então a desigualdade

$$3\|u_x(t_n)\|_{L^2}^2 - 6E_0 \leq \frac{4}{\pi^2}(\|u_x(t_n)\|_{L^2}^2+\frac{2}{\delta}\|u(t_n)\|_{L^4}^2)(M_0+\frac{2\delta}{5}M_0)^2. \tag{5.69}$$

O que é falso para t_n suficientemente grande, se $(M_0)^2(1+\frac{2\delta}{5})^2\frac{4}{\pi^2} < 3$ e isso pode ser obtido para qualquer $\delta > 0$. E pelas propriedades de f_n as quais implicam $\|u_x(t_n)\|_{L^2}^2 >> \|u(t_n)\|_{L^4}^2$, verifica-se que se $M_0 < \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, então existem solução globais u em $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{T}))$.

Referências Bibliográficas

[1] Agueh, M. Sharp Gagliardo-Nirenberg Inequalities and Mass Transport Theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations 2006*, 4 (2006).

[2] Agueh, M., Ghoussoub, N., and Kang, X. Geometrics inequalities via a general compararison principle for interacting gases.

[3] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 2 ed. Textos Universitários. SBM, 2015.

[4] Bourgain, J. *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*, vol. 46 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1999.

[5] Béla, V., and Nagy, S. Uber Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung. *Acta. Sci. Math.*, 10 (1941), 64–74.

[6] Caffarelli, L. Allocation maps with general cost functions. *In P. Marcellini et al, editor, Partial Differential Equations and Applications, number 177 in Lectures Notes in Pure and Appl. Math* (1996), 29–35.

[7] Caffarelli, L., Feldman, M., and McCann, R. Construction optimal maps in Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs. *American Mathematical Society*, 15 (2002), 1–26.

[8] Evans, L., and Gangbo, W. The Monge mass transfer problem and its applications. *Contemporary Mathematics 226* (1999).

[9] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, 2 ed., vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. AMS.

[10] Fernandez, P. J. *Medida e integracão*. PROJETO EUCLIDES. IMPA, 2015.

[11] Gangbo, W. An introduction to the mass transportation theory and its applications. `https://www.math.cmu.edu/CNA/LectureNotesFiles/notes3.pdf`, 2004.

[12] Gangbo, W., and McCann, R. J. Optimal maps in Monge's mass transport problem. *Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 321* (1995), 1653–1658.

[13] Gangbo, W., and McCann, R. J. The geometry of optimal transportation. *Acta Math. 177* (1996), 113–161.

[14] Herr, S. On the Cauchy Problem for the Derivative Nonlinear Schrodinger Equation with Periodic Boundary Condition. *International Mathematics Research Notices 2006*, 1–33.

[15] Korteweg, D., and de Vries, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine 91* (1895).

[16] Linares, F., and Ponce, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, 3 ed. Universitex. SPRINGER, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; UCSB, Santa Barbara, California, EUA.

[17] Linares, F., Ponce, G., and Santos, G. N. On a class of solutions to the generalized derivative Schrödinger equations.

[18] Linares, F., Ponce, G., and Santos, G. N. On a class of Solutions to the Generalized Derivative Schrödinger equations II.

[19] McCann, R. J. *A CONVEX THEORY FOR INTERACTING GASES AND EQUILIBRIUM CRYSTALS*. PhD thesis, 1994.

[20] Mio, W., Ogino, T., and Minami, K. Modified nonlinear Schrödinger for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasma. *J. Phys. Soc. Japan* (1976).

[21] Mjølhus, E. On the modulation instability of hydromagnetic waves paralell to the magentic field. *J. Plasma Phys.* (1976).

[22] N.Trudinger, and X.-J.Wang. On the Monge mass transfer problem. *Calculus Variations Partial Differential Equations 13* (2001), 19–31.

[23] Oh, T., and Mosincat, R. A remark on global well-posedness of the derivative nonlinear Schrödinger equation on the circle.

[24] Santambrogio, F. *Optimal Transport for Applied Mathematicians.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 87. Birkhäuser.

[25] Takaoka, H. Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity. *Advances in Differential Equations 4*, 4 (July 1999), 561–580.

[26] Villani, C. *Topics in Optimal Transportation.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2003.

[27] Wu, Y. Global well-posedness on the derivative nonlinear Schrödinger equation. *Anal. PDE 8*, 5 (2015), 1101–1112.

[28] Wu, Y., and Guo, Z. Global well-posedness for the derivative nonlinear Schrödinger equation in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.