UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

David Paternina Salgado

Operadores Li-Yorke Caóticos

Rio de Janeiro
29 de julho de 2016

Operadores Li-Yorke Caóticos

David Paternina Salgado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior.

Rio de Janeiro
29 de julho de 2016

Paternina Salgado, David Antonio
Operadores Li-Yorke Caóticos / David Antonio
Paternina Salgado. – Rio de Janeiro, 2016.
30 f.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal
do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,
Programa de Pos-graduação em Matemática, 2016.

1. Espaços de Fréchet. 2. Dinâmica Linear. 3.
Operadores Li-Yorke caóticos. 4. Vetores irregulares
e vetores semi-irregulares. I. Da Costa Bernardes
Junior, Nilson, orient. II. Título.

Operadores Li-Yorke Caóticos

David Paternina Salgado

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior.

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

(Presidente) Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior - IM/UFRJ

Prof. Antônio Roberto da Silva - IM/UFRJ

Prof. Isabel Lugão Rios - IM/UFF

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior - IM/UFF

Rio de Janeiro

29 de Julho de 2016

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte da minha força e conhecimento.

Agradeço a meus pais, Emilce Salgado e Freddy Paternina que sempre me apoiaram para que eu tivesse a melhor educação que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a meu irmão pelo apoio durante todo minha formação.

Agradeço a meu orientador, Professor Nilson da Costa Bernardes, por seus ensinamentos, orientações, paciência e dedicação ao revisar atentamente este trabalho.

Agradeço aos professores do meu curso de mestrado: Rolci Cipolatti, Cecília Salgado, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal, Andrew Clarke por contribuir com minha formação.

Agradeço aos professores que compuseram a minha banca avaliadora e é claro por suas importantes correções e sugestões.

Agradeço a todos aqueles que permitiram tornar este trabalho melhor, aos meus companheiros e colegas do mestrado.

Agradeço a todos os funcionários do IM-UFRJ que nos possibilitam as melhores condições de ambiente e suporte burocrático.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM-UFRJ.

Resumo

Nesta dissertação, baseada em um artigo de Bernardes, Bonilla, Müller e Peris, apresentaremos diversas caracterizações dos conceitos de caos Li-Yorke, caos Li-Yorke denso e caos Li-Yorke genérico para operadores lineares contínuos sobre espaços de Fréchet. Também apresentaremos condições suficientes para que um operador admita um subespaço denso de vetores irregulares. Alguns dos resultados gerais serão aplicados aos operadores de deslocamento com pesos sobre espaços de Fréchet de sequências e aos operadores de composição sobre espaços de funções holomorfas.

Palavras chaves: Espaços de Fréchet, dinâmica linear, operadores Li-Yorke caóticos, vetores irregulares e vetores semi-irregulares.

Abstract

In this thesis, based on a paper by Bernardes, Bonilla, Müller and Peris, we will present several characterizations of the notions of Li-Yorke chaos, dense Li-Yorke chaos and generic Li-Yorke chaos for continuous linear operators on Fréchet spaces. We will also present sufficient conditions for an operator to admit a dense subspace of irregular vectors. Some of the general results will be applied to weighted shifts on Fréchet sequence spaces and to composition operators on spaces of holomorphic functions.

Key words: Fréchet spaces, linear dynamics, Li-Yorke chaotic operators, semi-irregular vectors and irregular vectors.

Conteúdo

Introdução

O primeiro exemplo de um operador linear contínuo que exibe algum tipo de comportamento caótico foi essencialmente obtido por Birkhoff [6] em 1929. Ele mostrou que existe uma função inteira f cujo conjunto das translações

$$\{f(\cdot + a) : a \in \mathbb{C}\}$$

é denso no espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ de todas as funções inteiras munido da topologia da convergência compacta. Contudo, a demonstração de Birkhoff essencialmente prova um resultado mais forte: para cada $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, o operador translação

$$T_a : f \in H(\mathbb{C}) \mapsto f(\cdot + a) \in H(\mathbb{C})$$

possui uma órbita densa, o que na linguagem da área de Sistemas Dinâmicos significa dizer que T_a é *topologicamente transitivo*. Mais tarde, em 1952, Maclane [11] mostrou que o operador derivação

$$D : f \in H(\mathbb{C}) \mapsto f' \in H(\mathbb{C})$$

também possui uma órbita densa. O próximo passo for dado por Rolewicz [17] em 1969, que exibiu os primeiros exemplos de operadores com órbitas densas sobre espaços de Banach. Mais precisamente, ele mostrou que todo múltiplo λB, com $|\lambda| > 1$, do operador deslocamento à esquerda B sobre ℓ_p (onde $1 \leq p < \infty$) possui uma órbita densa. Mais tarde, operadores com órbitas densas passaram a ser chamados de *operadores hipercíclicos*. Um operador é dito *Devaney caótico* quando é hipercíclico e possui um conjunto denso de pontos periódicos. É um fato que todos os exemplos de operadores mencionados acima são, na verdade, Devaney caóticos.

Durante os últimos 30 anos o estudo da dinâmica de operadores lineares foi bastante desenvolvido, como pode ser comprovado através dos livros [1] e [9] especializados no assunto. A maior parte dos esforços se concentraram no estudo dos operadores hipercíclicos e dos operadores Devaney caóticos. Entretanto, mais recentemente, outros tipos de comportamentos caóticos têm atraído a atenção dos especialistas em dinâmica de operadores lineares, dentre os quais o conceito de caos no sentido de Li-Yorke ou, simplesmente, caos Li-Yorke. Este conceito de caos foi introduzido por Li e Yorke [10] em 1975 no contexto de funções do intervalo $[0, 1]$. Foi o primeiro conceito de caos a aparecer explicitamente na literatura matemática e se tornou muito popular. Com o tempo, diversas variações do conceito de caos Li-Yorke foram introduzidas e estudadas por diversos autores, incluindo os conceitos de caos Li-Yorke denso, caos Li-Yorke genérico e caos distribucional. Recentemente, Bernardes, Bonilla, Müller e Peris [4, 5] desenvolveram um estudo consideravelmente amplo desses conceitos de caos no contexto de operadores lineares contínuos sobre espaços de Fréchet, o que complementou consideravelmente o trabalho anterior de Bermúdez, Bonilla, Martínez-Giménez e Peris [3]. O artigo [4] é dedicado ao caos distribucional, enquanto o artigo [5] é dedicado ao caos Li-Yorke.

O objetivo da presente dissertação é apresentar parte do artigo [5] sobre caos Li-Yorke e suas variações no contexto de operadores lineares contínuos sobre espaços de Fréchet. Detalhes sobre o conteúdo de cada capítulo podem ser encontrados na introdução do correspondente capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns preliminares essenciais para o desenvolvimento desta dissertação, tais como o Teorema de Baire e o conceito de conjunto residual, espaços de Fréchet e operadores sobre tais espaços, e uma breve introdução à dinâmica linear.

A notação e a terminologia usadas são bastante usuais. Observamos que $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos números inteiros positivos e que $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Também mencionamos que $\mathbb{K}$ sempre denotará ou o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

1.2 Categoria de Baire

A seguir vamos lembrar alguns conceitos e resultados sobre Categoria de Baire. Omitiremos as demonstrações, que podem ser encontradas em [7, Capítulo IX, Seção 5], por exemplo.

Definição 1.1. *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Dizemos que:*

- *A é um **conjunto nunca denso** se $\overline{A}$ tem interior vazio.*
- *A é um **conjunto de primeira categoria** (ou **conjunto magro**) se A é a união de uma família contável de conjuntos nunca densos.*
- *A é um **conjunto de segunda categoria** (ou **conjunto não-magro**) se A não é um conjunto de primeira categoria.*
- *A é um **conjunto residual** se $X \backslash A$ é um conjunto de primeira categoria.*

Proposição 1.2. *Para todo espaço topológico X, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Toda interseção contável de conjuntos abertos e densos em X é denso em X;

(ii) Toda união contável de conjuntos fechados de interior vazio em X é um conjunto de interior vazio em X;

(iii) Todo conjunto aberto e não vazio em X é um conjunto de segunda categoria em X;

(iv) Todo conjunto residual em X é denso em X.

Definição 1.3. *Um espaço topológico X é dito um* ***espaço de Baire*** *se X satisfaz às condições da Proposição 1.2.*

Teorema 1.4 (Baire)**.** *Todo espaço completamente metrizável*[1] *e todo espaço localmente compacto de Hausdorff é um espaço de Baire.*

Definição 1.5. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto A de X é dito um* ***conjunto*** *G_δ se A pode ser escrito como uma interseção contável de conjuntos abertos em X.*

Proposição 1.6. *Se X é um espaço de Baire e $A \subset X$, então A é um conjunto residual em X se e somente se A contém um conjunto G_δ denso em X.*

Exemplo 1.7. *Considere $\mathbb{R}$ munido de sua topologia usual. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$. Contudo, $\mathbb{Q}$ é um conjunto de primeira categoria (pois $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$), mas $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ é um conjunto residual.*

De maneira intuitiva, um conjunto residual em um espaço de Baire X é comumente entendido como uma "maioria topológica" , isto é, um conjunto que contém a maioria dos elementos de X. Assim, o exemplo acima nos diz que a "maioria" dos números reais são irracionais.

Lema 1.8. *Toda interseção contável de conjuntos residuais em um espaço topológico é um conjunto residual.*

Demonstração: Seja $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos residuais em um espaço topológico X. Então

$$X \backslash \bigcap R_j = \bigcup (X \backslash R_j), \quad \text{onde cada} \quad X \backslash R_j \quad \text{é de primeira categoria.}$$

Logo, como toda união contável de conjuntos de primeira categoria é de primeira categoria, então $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} R_j$ é um conjunto residual. ■

1.3 Espaços de Fréchet

Nesta seção vamos lembrar alguns conceitos e resultados básicos sobre espaços de Fréchet. Para mais detalhes, ver [8] e [18], por exemplo.

Definição 1.9. *Um* ***espaço de Fréchet*** *é um espaço localmente convexo que é metrizável e completo.*

Para todo espaço de Fréchet X, existe uma sequência crescente $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de seminormas sobre X tal que

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x - y)\} \quad (x, y \in X)$$

define uma métrica completa e invariante sobre X.

Definição 1.10. *Sejam X e Y dois espaços de Fréchet. Um* ***operador de*** *X* ***em*** *Y é uma aplicação linear contínua $T : X \to Y$.*

[1] Espaço topológico que admite uma métrica completa compatível com a sua topologia.

O espaço vetorial de todos os operadores de X em Y é denotado por $L(X,Y)$. Se $X = Y$, dizemos que T é um **operador sobre** X e escrevemos $L(X)$ em lugar de $L(X,X)$.

Proposição 1.11. *Sejam X e Y dois espaços de Fréchet. Suponha que as topologias de X e Y são induzidas pelas sequências crescentes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas, respectivamente. Para toda aplicação linear $T : X \to Y$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é contínua em 0;

(ii) T é contínua;

(iii) Para todo $m \in \mathbb{N}$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$q_m(Tx) \leq Cp_n(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Nesta dissertação trabalharemos com espaços de Fréchet abstratos e também com duas classes particulares de espaços de Fréchet, que serão descritas abaixo.

Exemplo 1.12. *Um* ***espaço de Fréchet de sequências*** *é um subespaço vetorial X do espaço vetorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de todas as sequências de escalares que está munido de uma topologia com a qual ele é um espaço de Fréchet e tal que convergência em X implica convergência coordenada a coordenada. Também é comum exigirmos que a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores canônicos, que são definidos por*

$$e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

onde o número 1 aparece na n-ésima posição, esteja contida em X e seja uma ***base*** *para X no sentido de que vale a expansão*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad \text{para cada } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Exemplos concretos de espaços deste tipo são os espaços de Banach c_0 e ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. A **aplicação deslocamento com pesos** $B_w : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é definida por

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots),$$

onde

$$w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma sequência de escalares não-nulos, dita uma **sequência de pesos.** Dado um espaço de Fréchet de sequências X, dizemos que B_w **define um operador sobre** X se

$$B_w(X) \subset X.$$

Neste caso, a aplicação restrita

$$B_w : X \longrightarrow X$$

(por abuso de notação também denotamos a aplicação restrita por B_w) é automaticamente um operador sobre X. De fato, a linearidade de B_w é óbvia. Para provarmos a continuidade de B_w, vamos usar o Teorema do Gráfico Fechado $\big($[18], Teorema 2.15$\big)$

$$\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x^{(0)} \quad \text{em } X$$

e
$$\left(B_w x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow y \text{ em } X.$$
Basta provarmos que $y = B_w x^{(0)}$. Escreva $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como convergência em X implica convergência coordenada a coordenada, temos que
$$\left(x_n^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_n^{(0)} \text{ e } \left(w_{n+1}x_{n+1}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow y_n \quad (n\in\mathbb{N}).$$
Portanto,
$$y_n = w_{n+1}x_{n+1}^{(0)} \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N},$$
ou seja,
$$y = B_w x^{(0)},$$
como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.13. *Seja Ω um conjunto aberto não-vazio no plano complexo $\mathbb{C}$. Definimos*
$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ é holomorfa}\},$$
*que é um espaço vetorial complexo. Seja $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma **sequência exaustiva de compactos** em Ω, ou seja, uma sequência de subconjuntos compactos de Ω tal que*
$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{e} \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$
Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $p_n : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ por
$$p_n(f) := \sup_{z\in K_n} |f(z)|.$$
Consideramos $H(\Omega)$ munido da topologia induzida pela sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas (é fácil verificar que esta topologia é independente da sequência exaustiva de compactos em Ω escolhida). Então
$$H(\Omega) \text{ é um espaço de Fréchet.}$$

*Para cada **automorfismo** φ de Ω (isto é, aplicação holomorfa bijetiva de Ω sobre Ω), definimos o **operador de composição** $C_\varphi : H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega)$ por*
$$C_\varphi f := f \circ \varphi.$$
Claramente, C_φ é linear. Para provarmos que C_φ é contínuo, seja $m\in\mathbb{N}$. Como $\varphi(K_m)$ é compacto e
$$\varphi(K_m) \subset \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_n,$$
existe $n\in\mathbb{N}$ tal que
$$\varphi(K_m) \subset K_n.$$
Portanto,
$$p_m(C_\varphi f) = \sup_{z\in K_m} |f(\varphi(z))| \le \sup_{w\in K_n} |f(w)| = p_n(f),$$
para toda $f\in H(\Omega)$. Logo, pela Proposição 1.11, concluímos que C_φ é contínuo.

No caso particular em que $\Omega = \mathbb{C}$, temos o espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras. Uma classe interessante de operadores sobre $H(\mathbb{C})$ é a dos ***operadores translação*** *$T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$, para $a \in \mathbb{C}$ arbitrário, que são definidos por*

$$(T_a f)(z) := f(z + a).$$

Claramente, cada T_a é um operador sobre $H(\Omega)$. Outro exemplo interessante é o ***operador derivação*** *$D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$, que é dado por*

$$Df := f'.$$

Pelas Estimativas de Cauchy,

$$\sup_{|z| \leq n} |f'(z)| \leq \sup_{|z| \leq n+1} |f(z)| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

o que implica a continuidade de D.

1.4 Introdução à Dinâmica Linear

Definição 1.14. *Um* ***sistema dinâmico linear*** *é um par (X, T) que consiste de um espaço de Fréchet X e de um operador $T : X \longrightarrow X$.*

Exemplos 1.15. *Vejamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos lineares:*

- *(X, B_w), onde X é um espaço de Fréchet de sequências e B_w é um operador deslocamento com pesos sobre X.*
- *$(H(\Omega), C_\varphi)$, onde Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$, φ é um automorfismo de Ω e C_φ é o operador de composição por φ.*
- *$(H(\mathbb{C}), T_a)$, onde $a \in \mathbb{C}$ e T_a é o operador translação por a.*
- *$(H(\mathbb{C}), D)$, onde D é o operador derivação.*

Definição 1.16. *Um operador $T \in L(X)$ é dito* ***hipercíclico*** *se tem uma órbita densa, ou seja, se existe algum $x \in X$ cuja órbita com respeito a T, definida como*

$$Orb(x, T) := \{x, Tx, T^2x, \dots\},$$

é densa em X. Em tal caso x é dito um ***vetor hipercíclico*** *para T.*

Como a órbita de um ponto é um conjunto contável, é imediato observar que a separabilidade do espaço é necessária para a existência de órbitas densas. Assim, a noção de operador é hipercíclico somente tem sentido em espaços de Fréchet separáveis.

Definição 1.17. *Um operador $T \in L(X)$ é dito (**topologicamente**)* ***transitivo*** *se para qualquer par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X, existe algum $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Um teorema que conecta estas duas definições é o Teorema de Transitividade de Birkhoff, o qual enunciaremos a seguir, mas não faremos a sua demonstração. Sua demonstração pode ser encontrada em [9, Teorema 2.19].

Teorema 1.18 (Teorema de Transitividade de Birkhoff)**.** *Um operador $T \in L(X)$ é hipercíclico se e somente se é topologicamente transitivo. Neste caso, o conjunto $HC(T)$ de todos os vetores hipercíclicos para T é um conjunto G_δ denso em X.*

Este teorema é extremamente útil para estabelecer a hipercíclicidade de certos operadores. O exemplo abaixo ilustra esta afirmação.

Exemplo 1.19 (MacLane)**.** *Consideremos o operador derivação*

$$D : f \longmapsto f'$$

sobre $H(\mathbb{C})$. Como os polinômios são densos em $H(\mathbb{C})$, dados U, V subconjuntos abertos não vazios de $H(\mathbb{C})$, podemos tomar polinômios $p \in U$ e $q \in V$. Escreva

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z_k \quad e \quad q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z_k.$$

Seja $n \geq N + 1$ arbitrário. Então o polinômio

$$r(z) := p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k! b_k}{(k+n)!} z^{k+n}$$

tem a propriedade de que $D^n r = q$. Além disso, para todo $R > 0$, temos que

$$\sup_{|z| \leq R} |r(z) - p(z)| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k! |b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Assim, para n suficientemente grande, temos que $r \in U$ e $D^n r \in V$. Portanto, D é topologicamente transitivo. Pelo Teorema de Transitividade de Birkhoff, concluímos que D é hipercíclico.

Capítulo 2

Operadores Li-Yorke Caóticos

2.1 Introdução

Sejam M um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um par $(x, y) \in M \times M$ é dito um *par Li-Yorke* para f se

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Um *conjunto misturador* para f é um subconjunto S de M tal que (x, y) é um par Li-Yorke para f sempre que x e y são pontos distintos em S. Dizemos que a função f é *Li-Yorke caótica* se existe um conjunto misturador não-contável para f. Este conceito de caos foi introduzido por Li e Yorke [10] no contexto de funções do intervalo $[0, 1]$. Foi o primeiro conceito de caos a aparecer explicitamente na literatura matemática e se tornou muito popular.

Neste capítulo estudaremos o conceito de caos Li-Yorke no contexto de operadores sobre espaços de Fréchet. Os resultados principais são os Teoremas 2.10 e 2.13. O Teorema 2.10 contém algumas caracterizações de caos Li-Yorke para operadores, incluindo o fato de que um operador é Li-Yorke caótico se e somente se admite um vetor irregular (veja a Definição 2.1 abaixo). Já o Teorema 2.13 caracteriza caos Li-Yorke para operadores através do chamado Critério de Caos Li-Yorke. A equivalência entre caos Li-Yorke e a existência de um vetor irregular e uma versão um pouco mais fraca do Critério de Caos Li-Yorke foram originalmente obtidas em [3] no contexto de operadores sobre espaços de Banach. Os resultados na generalidade em que aparecem aqui foram obtidos em [5].

Por todo este capítulo, X denotará um espaço de Fréchet arbitrário.

2.2 Caracterizações de Caos Li-Yorke

Começamos com a definição do conceito de vetor irregular, que foi introduzido em [2].

Definição 2.1. *Dados um operador $T \in L(X)$ e um vetor $x \in X$, dizemos que x é um **vetor irregular** para T se a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada e tem uma subsequência que converge para zero.*

Também precisaremos do conceito de vetor semi-irregular, introduzido em [5].

Definição 2.2. *Dados um operador $T \in L(X)$ e um vetor $x \in X$, dizemos que x é um **vetor semi-irregular** para T se a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para zero mas tem uma subsequência que converge para zero.*

Observamos que estes conceitos só têm sentido em espaços de dimensão infinita. De fato, a proposição abaixo, que decorre do Teorema da Forma Canônica de Jordan, implica que não existe vetor semi-irregular para operadores sobre espaços de dimensão finita.

Proposição 2.3. *Seja T um operador sobre $\mathbb{K}^N$, $N \geq 1$. Então, para cada $x \in \mathbb{K}^N$, uma das seguintes opções ocorre:*

1. $T^n x \to 0$;

2. $||T^n x|| \to \infty$;

3. *existem $m, M > 0$ tais que $m \leq ||T^n x|| \leq M$ para todo $n \geq 0$.*

Para a demonstração desta proposição, veja [9, Proposition 2.57].

Proposição 2.4. *Seja $T \in L(X)$. O conjunto de todos os vetores $x \in X$ tais que $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para zero é um conjunto G_δ em X.*

Demonstração: Definamos o conjunto

$$K := \{x \in X : (T^n x)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tem uma subsequência que converge para } 0\,\}. \tag{2.1}$$

Como X é um espaço de Fréchet, podemos tomar uma base local contável $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de 0 em X, com cada V_j aberto. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja

$$A_j := \{x \in X \,:\, T^n x \in V_j \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\,\}. \tag{2.2}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, A_j é aberto em X, pois $A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T^n)^{-1}(V_j)$, o qual é uma união de conjuntos abertos, já que cada T^n é contínuo.

Afirmação 1.

$$K = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

“ $\subset$ ” Suponha $x \in K$. Por definição, $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(T^{n_k} x)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para 0. Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k} x \in V_j$ sempre que $k \geq k_j$. Daí, $x \in A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

“ $\supset$ ” Suponha que $x \in A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Temos que mostrar que $x \in K$. Como isso é óbvio se $T^n x = 0$ para algun $n \in \mathbb{N}$, podemos supor que $T^n x \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos construir indutivamente uma sequência $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ de números naturais tal que

$$d(T^{n_k} x, 0) < \frac{1}{k} \tag{2.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Começamos escolhendo $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{j_1} \subset B(0,1)$. Como $x \in A_{j_1}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_1} x \in V_{j_1}$. Logo,

$$d(T^{n_1} x, 0) < 1.$$

Suponhamos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_t$ já foram escolhidos de modo que (2.3) se verifica para todo $1 \leq k \leq t$. Vamos escolher n_{t+1}; como os vetores $Tx, T^2 x, \dots, T^{n_t} x$ são todos não nulos, existe $j_{t+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{j_{t+1}} \subset B\Big(0, \frac{1}{t+1}\Big) \tag{2.4}$$

e

$$\{Tx, T^2x, \ldots, T^{n_t}x\} \cap V_{j_{t+1}} = \emptyset. \tag{2.5}$$

Como $x \in A_{j_{t+1}}$, existe $n_{t+1} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{t+1}}x \in V_{j_{t+1}}$. Por (2.4),

$$d(T^{n_{t+1}}x, 0) < \frac{1}{t+1}$$

e por (2.5),

$$n_{t+1} > n_t.$$

Por indução, obtemos uma subsequência $(T^{n_k}x)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para 0, por causa de (2.3). Isto mostra que $x \in K$.

$\diamondsuit$

De todo o anterior se conclui que K é um conjunto G_δ. ■

Corolário 2.5. *Seja $T \in L(X)$. Se o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero é denso em X, então ele é residual em X.*

Demonstração: Seja K o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero. Pela Proposição 2.4, K é um conjunto G_δ. Como, por hipótese, K é denso, temos que K é um conjunto residual em X. ■

Proposição 2.6. *Seja $T \in L(X)$. Se T tem um vetor com órbita ilimitada, então T tem um conjunto residual de vetores com órbitas ilimitadas.*

Demonstração: Pela hipótese, existe um vetor $z \in X$ tal que

$$Orb(z, T) = \{z, Tz, T^2z, \ldots\}$$

é ilimitada. Pela definição de conjunto limitado, existe uma vizinhança absolutamente convexa[1] e fechada N de 0 em X tal que

$$Orb(z, T) \not\subset sN \quad \text{para todo } s > 0. \tag{2.6}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$A_k := \{x \in X : Orb(x, T) \not\subset kN\}. \tag{2.7}$$

Afirmamos que cada A_k é aberto e denso em X.

Mostremos primeiro que cada A_k é aberto em X. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x \in A_k$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^m x \notin kN.$$

Como kN é fechado, então $T^m x \in X \backslash kN$ o qual é aberto. Logo, existe uma vizinhança W_x de x tal que $T^m(W_x) \subset X\backslash kN$. Portanto,

$$W_x \subset A_k.$$

Mostremos agora que cada A_k é denso em X, isto é,

$$\overline{A_k} = X \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[1]Uma vizinhança equilibrada e convexa.

Como $A_k \subset X$, basta provar que arbitrariamente próximo de qualquer elemento de X existem elementos de A_k. Seja $y \in X$. Se $y \in A_k$, não há nada a ser feito. Suponhamos $y \in X \backslash A_k$. Então $Orb(y, T) \subset kN$, ou seja,

$$T^n y \in kN \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.8}$$

Isto implica que $y + \frac{1}{m}z \in A_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y + \frac{1}{n_0}z \notin A_k$. Então $Orb(y + \frac{1}{n_0}z, T) \subset kN$, isto é, $T^n y + \frac{1}{n_0}T^n z \in kN$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$\begin{aligned} T^n z &\in n_0 kN - n_0 T^n y \\ &\subset n_0 kN - n_0 kN \quad \text{(por (2.8))} \\ &= n_0 kN + n_0 kN \quad (N \text{ é equilibrada}) \\ &= 2n_0 kN \quad (N \text{ é convexa}). \end{aligned}$$

Então existe $s_0 := 2n_0 k > 0$ tal que

$$Orb(z, T) \subset s_0 N,$$

o que contradiz (2.6). Portanto, $y + \frac{1}{m}z \in A_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como

$$y + \frac{1}{m}z \to y \;\; \text{quando} \;\; m \to \infty,$$

concluímos que $y \in \overline{A_k}$.

◊

Por conseguinte,

$$G := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

é um conjunto residual em X. Pela Definição dos A_k's, segue que cada vetor de G tem órbita ilimitada. ■

Corolário 2.7. *Seja $T \in L(X)$. Se o conjunto de todos os vetores irregulares para T é denso em X, então ele é residual em X.*

Demonstração: Sejam R_1 o conjunto de todos os vetores $x \in X$ tais que $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para 0 e R_2 o conjunto de todos os vetores $x \in X$ com órbita $Orb(x, T)$ ilimitada. Pela Definição 2.1, o conjunto I de todos os vetores irregulares para T é dado por

$$I = R_1 \cap R_2.$$

Como estamos supondo que I é denso em X, temos que R_1 e R_2 são densos em X. Logo, pelo Corolário 2.5 e pela Proposição 2.6, R_1 e R_2 são residuais em X. Portanto, $I = R_1 \cap R_2$ também é residual em X. ■

O lema seguinte é um resultado fundamental para o nosso trabalho.

Lema 2.8. *Seja $T \in L(X)$ e suponha que $x \in X$ é um vetor semi-irregular para T que não é irregular para T. Então existe uma sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de vetores não-nulos em X tal que $\alpha x + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ é um vetor irregular para T, sempre que α é um escalar e $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de escalares que assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não-nulas.*

Demonstração. Como x é um vetor semi-irregular para T, então a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para 0, isto é, existe uma vizinhança W de 0 tal que

$$T^n x \notin W \quad \text{para infinitos } n\text{'s}.$$

Como X é um espaço de Fréchet, existe uma vizinhança absolutamente convexa e fechada V de 0 em X tal que $V \subset W$. Logo,

$$T^n x \notin V \quad \text{para infinitos } n\text{'s}. \tag{2.9}$$

Afirmação 2. *Existe uma base local contável $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ de vizinhanças absolutamente convexas e fechadas de 0 em X tal que*

$$V_0 = V,\ \ V_j + V_j \subset V_{j-1} \ \textit{e}\ T(V_j) \subset V_{j-1} \quad \textit{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

De fato, como X é metrizável, X possui uma base local contável $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vizinhanças de 0. Tomemos $V_0 := V$. Existe uma vizinhança W_1 de 0 tal que $W_1 + W_1 \subset V_0$. Como T é contínuo em 0, existe uma vizinhança Z_1 de 0 tal que $T(Z_1) \subset V_0$. Existe uma vizinhança Q_1 de 0 tal que $\overline{Q_1} \subset U_1 \cap W_1 \cap Z_1$. Existe uma vizinhança absolutamente convexa O_1 de 0 tal que $O_1 \subset Q_1$. Definamos $V_1 := \overline{O_1}$. Então V_1 é uma vizinhança absolutamente convexa e fechada de 0 com as seguintes propriedades:

$$V_1 + V_1 = \overline{O_1} + \overline{O_1} \subset \overline{Q_1} + \overline{Q_1} \subset W_1 + W_1 \subset V_0,$$

$$T(V_1) = T(\overline{O_1}) \subset T(\overline{Q_1}) \subset T(Z_1) \subset V_0,$$
$$V_1 = \overline{O_1} \subset \overline{Q_1} \subset U_1.$$

Continuando a construção desta maneira, obtemos uma sequência $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ de vizinhanças absolutamente convexas de 0 em X tal que (2.10) se verifica. Além disso, por construção,

$$V_j \subset U_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

o que implica que $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma base local para 0 em X.

$\diamondsuit$

Da Afirmação 2, como $V_j + V_j \subset V_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, obtemos

$$V_0 \supset V_1 + V_1 \supset V_1 \supset V_2 + V_2 \supset V_2 \supset V_3 + V_3 \supset V_3 \cdots . \tag{2.11}$$

Além disso, como $T(V_j) \subset V_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, obtemos de maneira recursiva que

$$\begin{aligned} T^n(V_j) &= T^{n-1}(T(V_j)) \subset T^{n-1}(V_{j-1}) \\ &= T^{n-2}(T(V_{j-1})) \subset T^{n-2}(V_{j-2}) \\ &\ \vdots \\ &= T(T(V_{j-n+2})) \subset T(V_{j-n+1}) \\ &\subset V_{j-n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$T^n(V_j) \subset V_{j-n} \quad \text{sempre que } n \le j. \tag{2.12}$$

E, sempre que $1 \leq p < q$,

$$\begin{aligned}
V_{p-1} &\supset V_p + V_p \supset V_p + V_{p+1} + V_{p+1} \\
&\supset V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + V_{p+2} \\
&\vdots \\
&\supset V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \cdots + V_{q-1} + V_{q-1} \\
&\supset V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \cdots + V_{q-1} + V_q + V_q \\
&\supset V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \cdots + V_{q-1} + V_q.
\end{aligned}$$

Resumindo,

$$V_{p-1} \supset V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \cdots + V_{q-1} + V_q \quad \text{sempre que } 1 \leq p < q. \tag{2.13}$$

Por outra parte, como x não é um vetor irregular para T, a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n x \in rV \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Definamos de forma recursiva uma sequência crescente $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de inteiros não negativos dada por

$$c_0 := 0 \quad e \quad c_k := k^2(2 + r(c_0 + \cdots + c_{k-1})) \quad \forall\, k \geq 1.$$

Afirmação 3. *Existem sequências crescentes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos com $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ tais que as seguintes propriedades se verificam para todo $k \in \mathbb{N}$:*

(a) $T^{n_k} x \in c_k^{-1} V_{m_{k-1}+p_{k-1}}$,

(b) $T^{m_k} x \notin V$,

(c) $T^{p_k} x \in V_k$,

(d) $T^{p_k}(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j T^{n_j} x) \in V_k$ *sempre que* $|\lambda_j| \leq k$ *para todo* j,

onde $m_0 = p_0 = 0$.

De fato, como $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{n_1} x \in c_1^{-1} V_{m_0+p_0}.$$

Por (2.9), existe $m_1 > n_1$ tal que

$$T^{m_1} x \notin V.$$

Seja W_1 uma vizinhança de 0 em X tal que

$$T^{n_1}(W_1) \subset c_1^{-1} V_1.$$

Novamente pelo fato de $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ter uma subsequência convergindo para zero, temos que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{p_1} x \in V_1 \cap W_1 \subset V_1.$$

Logo, se $|\lambda_1| \leq 1$ então

$$T^{p_1}(\lambda_1 c_1 T^{n_1} x) = \lambda_1 c_1 T^{n_1} T^{p_1} x \in \lambda_1 c_1 T^{n_1}(W_1) \subset \lambda_1 V_1 \subset V_1,$$

já que V_1 é equilibrada. Construímos, assim, n_1, m_1 e p_1 de modo que $n_1 < m_1$ e $(a)-(d)$ se verificam para $k = 1$.

Suponhamos que $s \geq 2$ e que n_k, m_k, p_k já foram construídos para todo $1 \leq k \leq s-1$, de modo que todas as propriedades desejadas são satisfeitas. Como $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero, existe $n_s > n_{s-1}$ tal que

$$T^{n_s}x \in c_s^{-1} V_{m_{s-1}+p_{s-1}}.$$

Por (2.9), existe $m_s > n_s$ tal que

$$T^{m_s}x \notin V.$$

Seja W_s uma vizinhança de 0 em X tal que

$$T^{n_j}(W_s) \subset c_j^{-1}s^{-2}V_s \text{ para todo } 1 \leq j \leq s.$$

Novamente pelo fato de $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ter uma subsequência convergindo para zero, temos que existe $p_s > p_{s-1}$ tal que

$$T^{p_s}x \in V_s \cap W_s \subset V_s.$$

Logo, se $|\lambda_j| \leq s$ para todo $1 \leq j \leq s$, então

$$\begin{aligned} T^{p_s}\Big(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j c_j T^{n_j} x\Big) &= \sum_{j=1}^{s} \lambda_j c_j T^{n_j} T^{p_s} x \in \sum_{j=1}^{s} \lambda_j c_j T^{n_j}(W_s) \\ &\subset \sum_{j=1}^{s} \lambda_j s^{-2} V_s \subset V_s, \end{aligned}$$

já que V_s é absolutamente convexa (note que $\sum_{j=1}^{s} |\lambda_j s^{-2}| \leq 1$). Construímos, assim, n_s, m_s e p_s de modo que $m_{s-1} < n_s < m_s$, $p_{s-1} < p_s$ e $(a)-(d)$ se verificam para $k = s$. Isto completa a demonstração da Afirmação 3.

$\diamondsuit$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos

$$x_j := c_j T^{n_j} x.$$

Vejamos que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tem as propriedades que desejamos. Seja $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de escalares que assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não-nulas. Seja $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\min\{|\beta_j| : j \in \mathbb{N} \text{ e } \beta_j \neq 0\} \geq \frac{1}{\gamma} \quad \text{e} \quad \max\{|\beta_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq \gamma.$$

Pela Afirmação 3 (a) e pelas equações (2.11) e (2.13), sempre que $2 \leq p < q$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^{q} \beta_j x_j &\in \sum_{j=p}^{q} \beta_j V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \subset \gamma \sum_{j=p}^{q} V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \\ &\subset \gamma(V_p + V_{p+1} + \cdots + V_q) \subset \gamma V_{p-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j=p}^{q} \beta_j x_j \subset \gamma V_{p-1} \text{ sempre que } 2 \leq p < q. \tag{2.15}$$

Vamos provar que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ converge em X. Para tal, fixemos $\epsilon > 0$. Seja $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{n_\epsilon} \subset \gamma^{-1} B(0, \epsilon).$$

Denotando por $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais da série em questão e usando (2.15), vemos que a relação $q > p \geq n_\epsilon$ implica

$$S_q - S_p = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j x_j \in \gamma V_p \subset \gamma V_{n_\epsilon} \subset B(0, \epsilon).$$

Portanto,

$$d(S_q, S_p) = d(S_q - S_p, 0) < \epsilon \text{ sempre que } q > p \geq n_\epsilon.$$

Isto prova que $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Como X é completo, segue que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ converge em X. Assim, podemos definir

$$y := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j \in X.$$

Mostremos que y é um vetor irregular para T. De fato, fixe $k \geq 2$. Se $j \geq k + 1$ então

$$x_j \in V_{m_{j-1}+p_{j-1}} \subset V_{j+p_k},$$

donde $T^{p_k} x_j \in T^{p_k}(V_{j+p_k})$. Pela equação (2.12),

$$T^{p_k} x_j \in T^{p_k}(V_{j+p_k}) \subset V_j.$$

Logo, por (2.13), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{q} T^{p_k}(\beta_j x_j) = \sum_{j=k+1}^{q} \beta_j T^{p_k} x_j &\in \sum_{j=k+1}^{q} \beta_j V_j \\ &\subset \sum_{j=k+1}^{q} \gamma V_j \subset \gamma V_k, \end{aligned}$$

para todo $q > k + 1$. Resumindo,

$$\sum_{j=k+1}^{q} T^{p_k}(\beta_j x_j) \subset \gamma V_k \text{ para todo } q > k + 1. \tag{2.16}$$

Passando ao limite $q \to \infty$, obtemos que

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} T^{p_k}(\beta_j x_j) \in \gamma V_k, \tag{2.17}$$

já que V_k é fechada. Pela Afirmação 3 (d) e (2.17), concluímos que

$$\begin{aligned} T^{p_k} y = T^{p_k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j\right) &= T^{p_k}\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j\right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{p_k}(\beta_j x_j) \\ &\in V_k + \gamma V_k = (1 + \gamma) V_k, \end{aligned}$$

sempre que $k \geq \gamma$. Assim,

$$T^{p_k} y \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Agora, fixe $k \geq \gamma$ tal que $\beta_k \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} T^{m_k - n_k} y &= \sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) + T^{m_k - n_k}(\beta_k x_k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) + T^{m_k}(\beta_k c_k x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pela Afirmação 3 (b),

$$T^{m_k}(\beta_k c_k x) \notin \beta_k c_k V = \beta_k k^2 (2 + r(c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1}))V.$$

Como

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\gamma} \leq \min\{|\beta_j| : j \in \mathbb{N} \text{ e } \beta_j \neq 0\} \leq |\beta_k|,$$

temos que $1 \leq |\beta_k| k$. Daí, $(\beta_k k)V \supset V$, implicando que

$$T^{m_k}(\beta_k c_k x) \notin k(2 + r(c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1}))V. \tag{2.19}$$

Por (2.14), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) &= \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j c_j T^{m_k - n_k + n_j} x \\ &\in \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j c_j r V \subset \sum_{j=1}^{k-1} \gamma c_j r V \\ &\underset{(k \geq \gamma)}{\subset} \sum_{j=1}^{k-1} k c_j r V = kr(c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1})V. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) \in kr(c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1})V. \tag{2.20}$$

Se $j \geq k+1$ então

$$x_j \in V_{m_{j-1} + p_{j-1}} \subset V_{m_k - n_k + j - 1}.$$

Logo, por (2.12), temos que

$$T^{m_k - n_k} x_j \in T^{m_k - n_k}(V_{m_k - n_k + j - 1}) \subset V_{j-1}.$$

Assim, por (2.13),

$$\sum_{j=k+1}^{q} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) \in \gamma \left(\sum_{j=k+1}^{q} V_{j-1} \right) \subset \gamma V_{k-1} \subset kV,$$

para todo $q > k+1 \geq 2$. Passando ao limite $q \to \infty$, obtemos

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} T^{m_k - n_k}(\beta_j x_j) \in kV, \tag{2.21}$$

já que V é fechada. De (2.18) - (2.21), concluímos que $T^{m_k-n_k} y \notin kV$, mostrando que a sequência $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada. Portanto, y é um vetor irregular para T.

$\diamondsuit$

Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, a sequência $(T^n(\alpha x + y))_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada (pois $T^n(\alpha x)$ é limitada) e

$$T^{p_k}(\alpha x + y) \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty,$$

pela Afirmação 3 (c). Portanto, $\alpha x + y$ é um vetor irregular para T para todo escalar α. ■

Como uma primeira aplicação do lema acima, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.9. *Se $T \in L(X)$, então toda vizinhança de um vetor semi-irregular para T contém um vetor irregular para T.*

Demonstração: Suponha que x é um vetor semi-irregular para T. Se x é irregular para T, então não há nada a ser feito. Suponha que x não é irregular para T. Pelo Lema 2.8, existe um vetor $y \in X$ tal que $x + \beta y$ é irregular para T para todo $\beta \neq 0$. Como

$$x + \beta y \to x \quad \text{quando} \quad \beta \to 0,$$

temos o resultado desejado. ■

Aplicaremos o Teorema 2.9 para estabelecer algumas caracterizações de operadores Li-Yorke caóticos.

Teorema 2.10. *Se $T \in L(X)$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é Li-Yorke caótico;

ii) T admite um par Li-Yorke;

iii) T admite um vetor semi-irregular;

iv) T admite um vetor irregular.

Demonstração: $i) \Longrightarrow ii)$ Como T é Li-Yorke caótico, existe um subconjunto $S \subset X$ que é não-contável e misturador para T. Logo, para quaisquer $x, y \in S$ com $x \neq y$, (x, y) é um par Li-Yorke para T.
$ii) \Longrightarrow iii)$ Seja (a, b) um par Li-Yorke para T. Por definição,

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n a, T^n b) = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} d(T^n a, T^n b) > 0.$$

Como d é uma métrica invariante e T é linear,

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n(a-b), 0) = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} d(T^n(a-b), 0) > 0.$$

Tomando $x := a - b$, vemos que

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n x, 0) = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} d(T^n x, 0) > 0.$$

Pela Definição 2.2, x é um vetor semi-irregular para T.
$iii) \implies iv)$ Se x é um vetor semi-irregular para T, pelo Teorema 2.9, toda vizinhança de x contém um vetor irregular para T.
$iv) \implies i)$ Suponha que x é um vetor irregular para T e consideremos o conjunto

$$Span\{x\} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Este conjunto é não-contável, já que $\mathbb{K}$ é não-contável. Sejam y e z elementos distintos de $Span\{x\}$. Então $y = \lambda x$ e $z = \mu x$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\lambda \neq \mu$. Pela invariância da métria d,

$$d(T^n y, T^n z) = d(T^n(y - z), 0) = d((\lambda - \mu)T^n x, 0). \tag{2.22}$$

Como x é um vetor irregular para T, a sequência $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada e tem uma subsequência que converge para zero. Portanto, por (2.22), obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n y, T^n z) = 0 \quad \limsup_{n\to\infty} d(T^n x, T^n z) > 0.$$

Em outras palavras, (y, z) é um par Li-Yorke para T. Isto mostra que $Span\{x\}$ é um conjunto misturador para T, o que estabelece $i)$. ■

2.3 Critério de Caos Li-Yorke

Vamos agora estabelecer o seguinte resultado auxiliar e um critério sobre o caos Li-Yorke.

Lema 2.11. *Seja $T \in L(X)$ e suponha que existe um subconjunto $X_0 \subset X$ com as seguintes propriedades:*

i) $T^n x \to 0$ para todo $x \in X_0$;

ii) Existe uma sequência limitada (a_n) em $Y := \overline{span(X_0)}$ tal que a sequência $(T^n a_n)$ é ilimitada.

Então existe uma sequência (x_j) de vetores não nulos em X tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ é um vetor irregular para T, sempre que (β_j) é uma sequência de escalares que assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não nulas.

Demonstração: Se existe um vetor semi-irregular para T que não é irregular para T, então o resultado segue do Lema 2.8. Assim, vamos assumir que todo vetor semi-irregular para T é irregular para T. Por (ii), existe uma sequência limitada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(T^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada. Logo, existem uma subsequência $(T^{q_k} a_{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais positivos tais que $t_k \to 0$ mas $(t_k T^{q_k} a_{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ não converge para zero. Por outro lado, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $t_k a_{q_k} \to 0$. Pela densidade do $span(X_0)$ em Y, podemos tomar vetores y_{q_k} em $span(X_0)$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} (y_{q_k} - t_k a_{q_k}) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} T^{q_k}(y_{q_k} - t_k a_{q_k}) = 0.$$

Definindo $y_n := 0$ sempre que $n \neq q_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset span(X_0)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} y_n = 0, \tag{2.23}$$

mas $(T^n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para 0. Logo, existe uma vizinhança equilibrada e fechada V de 0 em X tal que

$$T^n y_n \notin V \quad \text{para infinitos } n\text{'s}. \tag{2.24}$$

Além disso, por hipótese,

$$T^n x \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \ n \longrightarrow \infty, \tag{2.25}$$

para todo $x \in span(X_0)$. Como X é um espaço de Fréchet, existe uma base local $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vizinhanças de 0 em X tal que cada V_j é fechada e equilibrada,

$$V_0 = V \ \text{ e } \ V_j + V_j \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$V_p + V_{p+1} + \cdots + V_q \subset V_{p-1} \quad \text{sempre que} \quad 1 \leq p < q. \tag{2.26}$$

Afirmação 4. *Existem sequências crescentes $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos tais que:*

a. $T^{m_k} y_{m_k} \notin V$;

b. $y_{m_k} \in V_k$;

c. $T^{m_j} y_{m_k} \in k^{-2} V_k$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$;

d. $T^{p_j} y_{m_k} \in V_k$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$;

e. $T^{m_k} y_{m_j} \in k^{-2} V_{j+1}$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$; *e*

f. $T^{p_k} y_{m_j} \in V_{k+j}$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Primeiro vamos considerar o caso $k = 1$ da afirmação. Por (2.23) e (2.24), podemos tomar $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$y_{m_1} \in V_1 \ \text{ e } \ T^{m_1} y_{m_1} \notin V.$$

Como $y_{m_1} \in span(X_0)$, segue de (2.25) que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{p_1} y_{m_1} \in V_{1+1}.$$

Assim, (a), (b) e (f) se verificam para $k = 1$.

Suponhamos que $s \geq 2$ e que m_k e p_k já foram construídos para todo $1 \leq k \leq s-1$ de modo que todas as propriedades desejadas são satisfeitas. Podemos escolher $m_s > m_{s-1}$ tão grande de modo que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

- $T^{m_s} y_{m_s} \notin V$ (por (2.24));
- $y_{m_s} \in V_s$ (por (2.23));
- $T^{m_j} y_{m_s} \in s^{-2} V_s$ para $j = 1, \ldots, s-1$ (por (2.23));
- $T^{p_j} y_{m_s} \in V_s$ para $j = 1, \ldots, s-1$ (por (2.23));

- $T^{m_s} y_{m_j} \in s^{-2} V_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, s-1$ (por (2.25)).

Agora, por (2.25), podemos escolher $p_s > p_{s-1}$ tão grande que:

- $T^{p_s} y_{m_j} \in V_{s+j}$ para $j = 1, \ldots, s$.

Assim, obtemos m_s e p_s de modo que $(a) - (f)$ se verificam para $k = s$.

$\diamondsuit$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja

$$x_j := y_{m_j}.$$

Mostremos que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tem as propriedades desejadas. Fixemos uma sequência de escalares $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não nulas. Seja $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\min\{|\beta_j| : j \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \beta_j \neq 0\} \geq \frac{1}{\gamma} \ \text{ e } \ \max\{|\beta_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq \gamma.$$

Mostremos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ converge em X. Para tal, seja $\epsilon > 0$. Existe um $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{k_\epsilon} \subset \gamma^{-1} B(0, \epsilon).$$

Denotando por $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais da série $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$, pela Afirmação 4 (b) e por (2.26), temos que se $n > m \geq k_\epsilon$ então

$$\begin{aligned} H_n - H_m = \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j x_j \in \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j V_j \subset \gamma \sum_{j=m+1}^{n} V_j \\ \subset \gamma V_m \subset \gamma V_{k_\epsilon} \subset B(0, \epsilon). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(H_n, H_m) = d(H_n - H_m, 0) < \epsilon$$

sempre que $n > m \geq k_\epsilon$. Isto prova que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Como X é completo, segue que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ converge em X.

Definamos o vetor

$$y := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j \in X.$$

Vejamos que y é um vetor semi-irregular para T. De fato, fixe $k \geq 2$. Pela Afirmação 4 (d) e (f), para todo $q > k+1$,

$$\sum_{j=1}^{q} T^{p_k}(\beta_j x_j) \in \sum_{j=1}^{k} \gamma V_{k+j} + \sum_{j=k+1}^{q} \gamma V_j \subset \gamma(V_k + V_k) \subset \gamma V_{k-1}.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{q} T^{p_k}(\beta_j x_j) \in \gamma V_{k-1} \ \text{ sempre que } q > k+1.$$

Passando ao limite $q \to \infty$, obtemos

$$T^{p_k} y = \sum_{j=1}^{\infty} T^{p_k}(\beta_j x_j) \in \gamma V_{k-1},$$

já que a vizinhança V_{k-1} de 0 é fechada. Isto prova que

$$T^{p_k}y \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Agora, fixemos $k \geq \gamma$ tal que $\beta_k \neq 0$. Pela Afirmação 4 (c) e (e), para todo $q > k+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} T^{m_k}(\beta_j x_j) &= \sum_{j=1}^{k-1} T^{m_k}(\beta_j x_j) + T^{m_k}(\beta_k x_k) + \sum_{j=k+1}^{q} T^{m_k}(\beta_j x_j) \\
&\in \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j k^{-2} V_{j+1} + \beta_k T^{m_k} x_k + \sum_{j=k+1}^{q} \beta_j j^{-2} V_j \\
&\subset \gamma \sum_{j=1}^{k-1} k^{-2} V_{j+1} + \beta_k T^{m_k} x_k + \gamma \sum_{j=k+1}^{q} j^{-2} V_j \\
&\subset \underbrace{\gamma^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} V_{j+1}}_{k \geq \gamma} + \beta_k T^{m_k} x_k + \underbrace{\gamma^{-1} \sum_{j=k+1}^{q} V_j}_{j > \gamma} \\
&\subset \gamma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} V_{j+1} + \sum_{j=k+1}^{q} V_j \right) + \beta_k T^{m_k} x_k \\
&\subset \gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{k} V_j + \sum_{j=k+1}^{q} V_j \right) + \beta_k T^{m_k} x_k \\
&\underset{2.26}{\subset} \gamma^{-1} V_1 + \beta_k T^{m_k} x_k.
\end{aligned}$$

Resumindo,

$$\sum_{j=1}^{q} T^{m_k}(\beta_j x_j) \in \gamma^{-1} V_1 + \beta_k T^{m_k} x_k$$

para todo $q > k+1$. Passando ao limite $q \to \infty$, obtemos que

$$T^{m_k} y = \sum_{j=1}^{\infty} T^{m_k}(\beta_j x_j) \in \beta_k T^{m_k} x_k + \gamma^{-1} V_1.$$

Como $T^{m_k} x_k = T^{m_k} y_{m_k} \notin V$ pela Afirmação 4 (a), segue que $T^{m_k} y \notin \gamma^{-1} V_1$. Assim, a sequência $(T^n y)$ não converge para zero, mostrando que y é um vetor semi-irregular para T. Pela hipótese inicial de que todo vetor semi-irregular para T é um vetor irregular para T, segue que

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$$

é um vetor irregular para T. ∎

Definição 2.12. *Seja $T \in L(X)$. Dizemos que T satisfaz o **Critério de Caos Li-Yorke** se existe um subcojunto X_0 de X com as seguintes propriedades:*

(a) $(T^n x)$ tem uma subsequência convergindo para zero, para todo $x \in X_0$;

(b) Existe uma sequência limitada (a_n) em $Y := \overline{span(X_0)}$ tal que a sequência $(T^n a_n)$ é ilimitada.

Observamos que o critério acima é um pouco diferente do Critério Caos Li-Yorke definido em [3, Definição 7] no contexto de espaços de Banach. A propriedade (b) é equivalente à propriedade (b) em [3, Definição 7], mas a propriedade (a) é mais fraca que a propriedade (a) naquela definição. De fato, [3, Definição 7] exige a existência de uma sequência crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números inteiros positivos tal que $T^{n_k}x \to 0$ para cada $x \in X_0$. Na Definição 2.12, a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pode depender de x.

A seguir mostraremos que o Critério de Caos Li-Yorke caracteriza o caos Li-Yorke, generalizando assim [3, Teorema 8] de espaços de Banach para espaços de Fréchet.

Teorema 2.13. *Um operador $T \in L(X)$ é Li-Yorke caótico se e somente se ele satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se T é um operador Li-Yorke caótico, então T admite um vetor irregular $x_0 \in X$ (Teorema 2.10). Definamos $X_0 := \{x_0\}$. Assim, $X_0 \subset X$ e $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para 0. Além disso, considerando a sequência $a_n := x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que está contida no $\overline{span(X_0)}$, temos que ela é limitada e $(T^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada. Então T satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke.

($\Leftarrow$) Suponha que T satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke, ou seja, existe um conjunto X_0 como na Definição 2.12. Se algum $x_0 \in X_0$ é um vetor semi-irregular para T, pelo Teorema 2.10 T é um operador Li-Yorke caótico. Por outra parte, se cada $x \in X_0$ não é um vetor semi-irregular para T, então $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 para cada $x \in X_0$. Logo, T satisfaz as condições do Lema 2.11, donde T possui um vetor irregular. Logo, pelo Teorema 2.10, concluímos que T é um operador Li-Yorke caótico. ∎

Capítulo 3

Operadores Densamente Li-Yorke Caóticos

3.1 Introdução

Diversas variações do conceito de caos Li-Yorke foram introduzidas e estudadas por vários autores (veja [14], [15] e [16], por exemplo). Consideraremos aqui quatro dessas variações.

Seja M um espaço métrico e seja $f : M \to M$ um função contínua. Dizemos que f é *densamente* (respectivamente *genericamente*) *Li-Yorke caótica* se existe um conjunto misturador não-contável e denso (respectivamente residual) para f. Além disso, dizemos que f é *densamente* (respectivamente *genericamente*) *w-Li-Yorke caótica* se o conjunto de todos os pares Li-Yorke para f é denso (respectivamente residual) em $M \times M$. A letra “ w ” é uma abreviação para “ weakly ”, que significa “ fracamente ”.

Neste capítulo veremos que os conceitos de caos Li-Yorke denso, caos w-Li-Yorke denso e caos w-Li-Yorke genérico coincidem para operadores sobre espaços de Fréchet separáveis e que são equivalentes à existência de um conjunto denso (ou residual) de vetores irregulares (Teorema 3.1). Também veremos o chamado Critério de Caos Li-Yorke Denso para tais operadores (Teorema 3.3). Estes resultados foram estabelecidos em [5] já no contexto de espaços de Fréchet, embora fossem originais mesmo no contexto de espaços de Banach (e mesmo para espaços de Hilbert).

O conceito de caos Li-Yorke genérico será estudado no Capítulo 5.

Por todo o presente capítulo, X denotará um espaço de Fréchet separável arbitrário.

3.2 Caracterizações de Caos Li-Yorke Denso

Teorema 3.1. *Para todo $T \in L(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é densamente Li-Yorke caótico;

ii) T é densamente w-Li-Yorke caótico;

iii) T é genericamente w-Li-Yorke caótico;

iv) T admite um conjunto denso de vetores semi-irregulares;

v) T admite um conjunto denso de vetores irregulares;

vi) T admite um conjunto residual de vetores irregulares.

Demonstração: $i) \Longrightarrow ii)$ Se T é densamente Li-Yorke caótico, então existe um conjunto não-contável e denso S em X que é misturador para T. Logo,

$$\{(x,y) \in S \times S : x \neq y\}$$

é um conjunto denso em $X \times X$ formado por pares Li-Yorke para T. Portanto, T é densamente *w-Li-Yorke* caótico.
$ii) \Longrightarrow iv)$ Fixemos $x \in X$ e V uma vizinhança de 0 em X. Existe uma vizinhança equilibrada U de 0 em X tal que

$$U + U \subset V.$$

Pela hipótese, existe um par $(a,b) \in (x,0) + (U \times U)$ Li-Yorke para T. Definamos $y := a - b$. Como (a,b) é um par Li-Yorke para T, y é um vetor semi-irregular para T. E temos $y \in x + V$[1]. Portanto, o conjunto dos vetores semi-irregulares para T é denso em X.
$iv) \Longrightarrow v)$ Suponha que T admite um conjunto denso de vetores semi-irregulares para T. Fixemos $x \in X$ e V uma vizinhança de 0 qualquer. Pela hipótese, existe um vetor z semi-irregular para T tal que $z \in x + V$. Como $x + V$ é uma vizinhança de x, existe uma vizinhança U de 0 tal que $U \subset V$ e $z + U \subset x + V$. Pelo Teorema 2.9, existe um vetor $y \in z + U$ que é irregular para T. Assim $y \in x + V$, provando que T admite um conjunto denso de vetores irregulares para T.
$v) \Longrightarrow vi)$ Aplicação direita do Corolário 2.7.
$vi) \Longrightarrow iii)$ Suponha que T admite um conjunto residual de vetores irregulares, isto é, existe uma sequência $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos tais que $K = \cap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ é um conjunto denso que consiste de vetores irregulares para T. Para todo $j \in \mathbb{N}$, definamos

$$B_j := \{(a,b) \in X \times X : a - b \in A_j\}.$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ fixo e suponha $(a,b) \in B_j$. Então $a - b \in A_j$. Como A_j é aberto, existe uma vizinhança U de 0 tal que $a - b + U \subset A_j$. Existe uma vizinhança equilibrada V de 0 tal que $V + V \subset U$. Então

$$(a + V) - (b + V) \subset (a - b) + (V + V) \subset (a - b) + U \subset A_j.$$

Assim,

$$(a + V) \times (b + V) \subset B_j,$$

provando que B_j é aberto em $X \times X$. Agora, vejamos que B_j é denso em $X \times X$, isto é, que

$$\overline{B_j} = X \times X.$$

Fixemos $j \in \mathbb{N}$ e $(\alpha,\beta) \in X \times X$. Seja V uma vizinhança de 0 em X. Como $\alpha - \beta \in X = \overline{A_j}$, existe $a \in (\alpha - \beta + V) \cap A_j$. Logo, existe $\gamma \in V$ tal que

$$a = \alpha - \beta + \gamma \in A_j.$$

Então

$$(\alpha + \gamma, \beta) \in ((\alpha,\beta) + (V \times V)) \cap B_j.$$

[1] $(a,b) \in (x,0) + (U \times U) \Rightarrow a \in x + U$ e $b \in U \Rightarrow a = x + z$ onde $z \in U$ e $-b \in U$, pois U é equilibrada $\Rightarrow a - b = x + (z - b) \in x + (U + U) \Rightarrow a - b \in x + V$

Assim, $(\alpha, \beta) \in \overline{B_j}$. Logo, $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos não-vazios, abertos e densos de $X \times X$. Pelo Teorema de Baire, $H = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j$ é denso em X. Além disso,

$$H \subset {}^{2}\{(a, b) \in X \times X : (a, b) \text{ é um par Li-Yorke para T}\}.$$

Portanto, T é genericamente *w-Li-Yorke* caótico.
$iii) \implies ii)$ Segue do fato de que todo conjunto residual em um espaço de Baire é denso no espaço.
$vi) \implies i)$ Pela hipótese, existe um conjunto residual R em X de vetores irregulares para T. Seja $D := \mathbb{Q}$ ou $D := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dependendo se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respectivamente. Como X é separável, existe uma sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densa em X. Agora, como R é denso, existe $x_1 \in X$ tal que

$$x_1 \in B(y_1, 1) \cap R.$$

Como $\dim(span\{x_1\}) = 1 < \infty$, então $B\left(y_2, \frac{1}{2}\right) \setminus span\{x_1\}$ é um aberto não-vazio, e como as translações são homeomorfismos, então para todo α temos que $\alpha x_1 + R$ é um conjunto residual. Logo,

$$\bigcap_{\alpha\in D} (\alpha x_1 + R)$$

é residual pelo Lema 1.8. Logo, existe

$$x_2 \in B\Big(y_2, \frac{1}{2}\Big) \cap \bigcap_{\alpha\in D} (\alpha x_1 + R).$$

Agora, suponha que já construímos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Vejamos como construir $x_{n+1} \in X$. Como $\dim span\{x_j : 1 \le j \le n\} = n < \infty$, então $B\left(y_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \setminus span\{x_j : 1 \le j \le n\}$ é um aberto não-vazio. Como as translações são homeomorfismos, então

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + R$$

é um conjunto residual para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in D$. Logo, pelo Lema 1.8,

$$\widehat{R} := \bigcap_{\overrightarrow{\alpha}\in D^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + R\right), \text{ onde } \overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

é um conjunto residual. Em particular, ele é denso, donde existe

$$x_{n+1} \in B\left(y_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \cap \widehat{R}.$$

Portanto, construímos assim uma sequência $(x_j)_j$ em X de vetores irregulares e linearmente independentes. Além disso, como

$$d(x_j, y_j) < \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência densa em X. Consideremos o seguinte conjunto

$$M := \left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j : m \ge 1 \text{ e } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D\right\}.$$

M é D-subespaço vetorial de X que é denso em X.

[2] $(a, b) \in H \iff (a, b) \in B_j\ \forall j \in \mathbb{N} \iff a - b \in A_j\ \forall j \in \mathbb{N} \implies a - b$ é um vetor irregular para T $\implies$ $a - b$ é um vetor semi-irregular para T $\iff$ (a,b) é um par Li-Yorke para T.

Afirmação 5. *Todo vetor $x \in M \backslash \{0\}$ é irregular para T.*

Seja $x \in M\backslash\{0\}$. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in D$, com $\alpha_m \neq 0$, tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m.$$

Então tomando $\frac{\alpha_i}{\alpha_m} \in D$, temos que existe $y \in R$ tal que

$$x_m{}^{3} = -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_m} x_i + y.$$

Portanto

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \alpha_m y.$$

Como $y \in R$ é um vetor irregular, então $\alpha_m y$ é um vetor irregular. Assim, os elementos não-nulos de M são vetores irregulares.

$\diamondsuit$

Em particular, M é um conjunto misturador denso. Contudo, M é enumerável. Agora precisaremos aumentar M para obter um conjunto não-numerável denso e misturador para T. Para isso precisaremos da afirmação abaixo.

Afirmação 6. *Se $y, z \in X$ e o conjunto*

$$A := \{\lambda \in \mathbb{K} : y - \lambda z \text{ é semi-irregular para } T\}$$

é denso em $\mathbb{K}$, então A é um conjunto residual em $\mathbb{K}$.

Definamos o conjunto

$$B := \{\lambda \in \mathbb{K} : (T^n(y - \lambda z)) \text{ tem subsequência que converge a } 0\}.$$

Primeiro mostremos que B é um conjunto residual. Com efeito, sendo X um espaço de Fréchet, então consideremos uma base local de vizinhanças $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de 0. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja

$$A_j := \{\lambda \in \mathbb{K} : T^n(y - \lambda z) \in V_j \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

1. $A_j \neq \emptyset$, pois se $\lambda_0 \in A$ então $y - \lambda_0 z$ é um vetor semi-irregular. Logo $T^{n_k}(y - \lambda_0 z) \in V_j$ para algum $n_k \in \mathbb{N}$.
2. Como T^n é contínua, A_j é aberto para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. B $= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

"$\subseteq$" Se $\lambda \in B$ então $T^{n_k}(y - \lambda z) \to 0$, isto é, para todo $j \in \mathbb{N}$, $T^n(y - \lambda z) \in V_j$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lambda \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

---

[3] $x_m \in B(y_m, \frac{1}{m}) \cap \bigcap_{\overrightarrow{\alpha} \in D^{m-1}} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j + R\right)$

" $\supseteq$ " Se $\lambda \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ então $\lambda \in A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{array}{lll} j=1: & \exists n_1 \in \mathbb{N} & / \; T^{n_1}(y-\lambda z) \in V_1 \\ j=2: & \exists n_2 \in \mathbb{N},\, n_2 > n_1 & / \; T^{n_2}(y-\lambda z) \in V_2 \\ & \vdots & \\ j=k: & \exists n_k \in \mathbb{N},\, n_k > n_{k-1} & / \; T^{n_k}(y-\lambda z) \in V_k. \end{array}$$

Tomemos $\epsilon = \frac{1}{k}$. Como a bola $B(0, \frac{1}{k})$ é uma vizinhança de 0 e como $(V_j)_j$ é uma base local de 0, então existe V_k tal que $T^{n_k}(y-\lambda z) \in V_k \subset B(0, \frac{1}{k})$, isto é,

$$d(T^{n_k}(y-\lambda z), 0) < \frac{1}{k}.$$

Daí resulta que

$$T^{n_k}(y-\lambda z) \to 0 \;\; \text{quando} \;\; k \to \infty.$$

Assim $\lambda \in B$.

De 1), 2) e 3) concluímos que B é um conjunto G_δ. Além disso, $A \subset B$ e A é denso por hipótese. Logo, B é um conjunto residual em $\mathbb{K}$. Temos duas possibilidades:

i) Se $A \supset \mathbb{K}\backslash\{0\}$ então dado que $B \subset \mathbb{K}\backslash\{0\}$ pronto, $A = B$.

ii) Se existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ tal que $\lambda_0 \notin A$, então acontece que:

$$T^n(y-\lambda_0 z) \to 0 \;\; \text{ou} \;\; T^{n_k}(y-\lambda_0 z) \nrightarrow 0.$$

1. Se $T^n(y-\lambda_0 z) \to 0$: Seja $\gamma \in A$ fixo ($A \neq \emptyset$). Então $T^n(y-\gamma z) \nrightarrow 0$ pois $y-\gamma z$ é semi-irregular para T. Logo, $T^n z \nrightarrow 0$ já que se $T^n z \to 0$, então $T^n \gamma z \to 0$ e assim $T^n(y-\gamma z) \to 0$, o qual é absurdo; daqui se $\lambda \neq \lambda_0$ ($\lambda \in B\backslash\{\lambda_0\}$) então $T^n(y-\lambda z) \nrightarrow 0$.[4] Assim $\lambda \in B\backslash\{\lambda_0\}$ implica que $T^{n_k}(y-\lambda z) \to 0$ e $T^n(y-\lambda z) \nrightarrow 0$. Portanto,
$$B\backslash\{\lambda_0\} \subset A.$$
Logo, A é um conjunto residual em $\mathbb{K}$.

2. Se $T^{n_k}(y-\lambda_0 z) \nrightarrow 0$: Seja $\gamma \in A\backslash\{0\}$ fixo. Então existe uma subsequência crescente $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{m_j}(y-\gamma z) \to 0$, pois $y-\gamma z$ é semi-irregular para T. Logo $T^{m_j} z \nrightarrow 0$ já que se $T^n z \to 0$, então $T^n \gamma z \to 0$ e assim $T^{m_j}(y-\gamma z) \to 0$, o qual é absurdo; daqui se $\lambda \neq \gamma$ ($\lambda \in B\backslash\{\gamma\}$) então $T^{m_j}(y-\lambda z) \nrightarrow 0$.[5] Assim $\lambda \in B\backslash\{\gamma\}$ implica que $T^{n_j}(y-\lambda z) \to 0$ e $T^n(y-\lambda z) \nrightarrow 0$. Portanto,
$$B\backslash\{\gamma\} \subset A.$$
Logo, A é um conjunto residual em $\mathbb{K}$.

$\diamondsuit$

[4] Se $T^n(y-\lambda z) \to 0$ e como $T^n(y-\lambda_0 z) \to 0$ então $T^n(\lambda-\lambda_0)z \to 0$. Portanto, $T^n z \to 0$ o qual é absurdo.

[5] Se $T^{n_j}(y-\lambda z) \to 0$ e como $T^{m_j}(y-\gamma z) \to 0$ então $T^{n_j}(\lambda-\gamma)z \to 0$. Portanto, $T^{m_j} z \to 0$ o qual é absurdo.

Agora, seja

$$N := \{\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m : m \geq 2 \ \text{ e } \ \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in D\}.$$

Para cada $y \in N \backslash \{0\}$, definamos

$$A_y := \{\lambda \in \mathbb{K} : y - \lambda x_1 \text{ é um vetor semi-irregular para } T\}.$$

Como $D \subset A_y$, A_y é denso em $\mathbb{K}$. Pela Afirmação 6, temos que A_y é um conjunto residual em $\mathbb{K}$. Consideremos

$$A := \bigcap_{y \in N \backslash \{0\}} A_y.$$

Como N é um conjunto contável, A é interseção contável de conjuntos residuais, donde A é um conjunto residual que contém D. Olhemos $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre D. Uma aplicação do Lema de Zorn mostra que existe um D-subespaço vetorial maximal H de $\mathbb{K}$ tal que:

$$D \subset H \subset A.$$

Afirmação 7. *H é um conjunto não-contável.*

De fato, suponha H contável. Então

$$\bigcap_{\beta \in D \backslash \{0\}} \bigcap_{\alpha \in H} \beta(\alpha + A) \text{ é residual em } \mathbb{K}.$$

Logo, existe γ nessa interseção que está fora de H. Então $H' := H + \{\beta\gamma : \beta \in D\}$ é um D-subespaço vetorial de $\mathbb{K}$ satisfazendo $D \subset H' \subset$ [6]A e $H \subsetneq H'$. Isto contradiz a maximalidade de H.

$\diamondsuit$

Finalmente, definamos

$$^{7}M' := \{\alpha x_1 : \alpha \in H\} + N \qquad (M \subset M' \subset Z).$$

Como M' é um subgrupo aditivo de X e todo $x \neq 0$ em M' é semi-irregular, então M' é um conjunto misturador denso. Logo, T é densamente Li-Yorke caótico. ∎

3.3 Critério de Caos Li-Yorke Denso

Definição 3.2. *Seja $T \in L(X)$. Dizemos que T satisfaz o **Critério de Caos Li-Yorke Denso** se existe um subconjunto denso X_0 de X com as seguintes propriedades:*

(a) $(T^n x)$ tem uma subsequência convergindo para zero, para todo $x \in X_0$;

(b) Existe uma sequência limitada (a_n) em X tal que a sequência $(T^n a_n)$ é ilimitada.

[6]Seja $h' \in H' \Rightarrow \exists \alpha \in H$ e $\beta \in D$ tal que $h' = \alpha + \beta\gamma$

a. Se $\beta = 0 \Rightarrow h' = \alpha \in H \subset A$.

b. Se $\beta \neq 0 \Rightarrow \gamma \in \beta^{-1}(-\alpha + A) \Rightarrow \beta\gamma \in -\alpha + A$ logo $\beta\gamma + \alpha \in A$.

[7]M' um D-subespaço vetorial denso e todo vetor $\neq 0$ é semi-irregular.

Teorema 3.3. *Um operador $T \in L(X)$ é densamente Li-Yorke caótico se e somente se ele satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke Denso.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que T é densamente Li-Yorke caótico. Então existe um conjunto denso de vetores irregulares (Teorema 3.1). Considere X_0 dito conjunto; procedendo de maneira análoga à demonstração do Teorema 2.13 com $x_0 \in X_0$, temos que o conjunto X_0 satisfaz as propriedades (a) e (b) da Definição 3.2. Portanto, T satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke Denso.

($\Leftarrow$) Suponhamos que T satisfaz o Critério de Caos Li-Yorke Denso. Então T é um operador Li-Yorke caótico (Teorema 2.13). Logo, T admite um vetor $x_0 \in X$ semi-irregular.

Da Definição 3.2, existe um conjunto denso $X_0 \subset X$ com as propriedades (a) e (b). Pelo Teorema 3.1 é suficiente provar que arbitrariamente perto de qualquer ponto de X_0 existe um vetor semi-irregular para T. Seja $x \in X_0$. Então há duas possibilidades:

1. x é um vetor semi-irregular para T.
2. x não é um vetor semi-irregular para T.

Se x é um vetor semi-irregular para T, então não há nada a ser feito. Se x não é um vetor semi-irregular para T, então o fato de $(T^n x)$ ter uma subsequência convergindo para zero (propriedade (a)) implica que $(T^n x)$ tem que convergir para zero.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos o vetor

$$z_m := x + \frac{1}{m} x_0.$$

Como $T^n x \to 0$ e $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero, temos que $(T^n z_m)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero. Por outro lado, como $T^n x \to 0$ e $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para zero, temos que $(T^n z_m)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para zero. Portanto, z_m é um vetor semi-irregular para T, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $x_0 = \lim_{m \to \infty} z_m$, vemos que arbitrariamente perto de x_0 existem vetores semi-irregulares para T. ■

Capítulo 4

Existência de Subespaços Irregulares Densos

4.1 Introdução

Seja T um operador sobre um espaço de Fréchet X. Um *subespaço irregular* para T é um subespaço vetorial Y de X tal que todo $y \in Y \backslash \{0\}$ é um vetor irregular para T. Veremos que um tal subespaço é sempre um conjunto misturador para T (Proposição 4.1). Assim, a existência de um subespaço irregular $Y \neq \{0\}$ para T implica que T é Li-Yorke caótico e a existência de um subespaço irregular denso Y para T implica que T é densamente Li-Yorke caótico.

Neste capítulo apresentaremos uma condição suficiente para a existência de subespaços irregulares densos para operadores sobre espaços de Fréchet separáveis (Teorema 4.2). Tal resultado foi originalmente obtido em [3] no contexto de espaços de Banach e foi generalizado em [5] para espaços de Fréchet. Como aplicação, provaremos que um operador deslocamento com pesos B_w sobre um espaço de Fréchet de sequências Z admite um subespaço irregular denso (logo, é densamente Li-Yorke caótico) se e somente se possui uma órbita ilimitada (Teorema 4.6). Também caracterizaremos caos Li-Yorke para operadores de composição sobre espaços de funções holomorfas; neste caso, provaremos que um tal operador é Li-Yorke caótico se e somente se é hipercíclico (Teorema 4.17). Os teoremas 4.6 e 4.17 foram estabelecidos em [5].

Por todo este capítulo, X denotará um espaço de Fréchet separável arbitrário.

4.2 Existência de Subespaços Irregulares Densos

Começamos esta seção com o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Seja $T \in L(X)$. Todo subespaço irregular para T é um conjunto misturador para T.*

Demonstração: Seja $M \subset X$ um subespaço irregular de T. Se $x, y \in M$ e $x \neq y$, então $x - y \in M$ (pois M é um subespaço vetorial de X) e $x - y \neq 0$, donde $x - y$ é um vetor irregular para T. Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n x, T^n y) = \liminf_{n\to\infty} d(T^n(x-y), 0) = 0$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} d(T^n x, T^n y) = \limsup_{n\to\infty} d(T^n(x-y), 0) > 0,$$

provando que (x, y) é um par Li-Yorke para T. Portanto, M é um conjunto misturador para T. ■

Vamos agora apresentar uma condição suficiente para a existência de um subespaço irregular denso.

Teorema 4.2. *Suponha que $T \in L(X)$ satisfaz:*

i) Existe um subconjunto denso X_0 de X tal que $T^n x \to 0$ para todo $x \in X_0$.

ii) Existe uma sequência limitada (a_n) em X tal que a sequência $(T^n a_n)$ é ilimitada.

Então T admite um subespaço irregular denso.

Demonstração: Pelo Lema 2.11, existe uma sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vetores não nulos em X tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j \quad \text{é um vetor irregular para } T, \tag{4.1}$$

sempre que $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de escalares que assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não nulas. Seja $N_1, N_2, N_3, \ldots$ uma sequência de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ que são dois a dois disjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\beta_{j,n} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j \in N_n \\ 0, & \text{se} \quad j \in \mathbb{N}\backslash N_n. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o vetor

$$w_n := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j,n} x_j.$$

Por (4.1), cada w_n é um vetor irregular para T. Como X é separável, existe uma sequência densa $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contida em X_0. Definimos

$$z_n := y_n + \frac{1}{n} w_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X (pela construção dos x_j's no Lema 2.11) e a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é densa em X, temos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é densa em X. Logo,

$$Z := span\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é um subespaço denso de X. Se $z \in Z\backslash\{0\}$, então podemos escrever z na forma

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n z_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n y_n + \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{n} w_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n y_n + \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{j\in N_n} \frac{\alpha_n}{n} x_j \right) \\ &= y + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j, \end{aligned}$$

onde $y := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n y_n \in span(X_0)$, $\beta_j := \frac{\alpha_n}{n}$ sempre que $j \in N_n$ $(1 \leq n \leq k)$ e $\beta_j := 0$ se $j \in \mathbb{N} \backslash (N_1 \cup \cdots \cup N_k)$. Note que a sequência $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ assume apenas um número finito de valores e tem infinitas coordenadas não nulas. Como $T^n y \to 0$ (por (i)) e $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$ é um vetor irregular para T (por (4.1)), concluímos que z é um vetor irregular para T. ■

Observação. 4.3. *Note que a condição i) no teorema acima é automaticamente satisfeita por qualquer operador* $T : X \to X$ *com núcleo generalizado* $\bigcup_{n=1}^{\infty} ker(T^n)$ *denso em* X*.*

Combinando os Teoremas 2.10 e 4.2, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.4. *Seja* $T \in L(X)$ *e suponha que existe um subconjunto denso* $X_0 \subset X$ *tal que* $T^n x \to 0$ *para todo* $x \in X_0$*. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T *é Li-Yorke caótico;*

ii) T *admite um subespaço irregular denso;*

iii) T *admite uma órbita ilimitada.*

Demonstração: $i) \Rightarrow iii)$ Suponhamos que T é Li-Yorke caótico. Pelo Teorema 2.10, T admite um vetor irregular z. Da definição de vetor irregular temos que a sequência $(T^n z)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, ou seja, a órbita de z é ilimitada.
$iii) \Rightarrow ii)$ Por hipótese, existe um vetor z cuja órbita é ilimitada, isto é, o conjunto $Orb(z,T)$ é ilimitado em X. Tomando $a_n := z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que a sequência a_n satisfaz a condição (ii) do Teorema 4.2. Por outra parte, a condição (i) é satisfeita por hipótese. Assim, do Teorema 4.2 concluímos que T admite um subespaço irregular denso.
$ii) \Rightarrow i)$ Por hipótese, T tem um subespaço irregular denso Y. Pela Proposição 4.1, Y é um conjunto misturador para T. Em particular, T é Li-Yorke caótico. ■

Observação. 4.5. *Todo operador hipercíclico* T *sobre* X *admite um subespaço irregular denso e, em particular, é densamente Li-Yorke caótico.*

Com efeito, como todo vetor hipercíclico para T é trivialmente um vetor irregular para T, a afirmação acima decorre imediatamente do seguinte resultado:

Teorema 4.6 (Herrero-Bourdon). *Se* x *é um vetor hipercíclico para* T*, então*

$$Y := \{p(T)x \,:\, p \text{ é um polinômio}\}$$

é um subespaço vetorial denso de X *consistindo, exceto por zero, de vetores hipercíclicos para* T*.*

Para a demonstração do Teorema de Herrero-Bourdon, veja [9, Teorema 2.55].

4.3 Operadores Deslocamento com Pesos

O objetivo desta seção é apresentar uma aplicação da teoria já estabelecida anteriormente, estabelecendo caracterizações do caos Li-Yorke para operadores deslocamento com pesos.

Teorema 4.7. *Seja Z um espaço de Fréchet de sequências para o qual $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base. Suponha que a aplicação deslocamento com pesos*

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4, \dots)$$

define um operador sobre Z. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) B_w é Li-Yorke caótico;

(ii) B_w admite um subespaço irregular denso;

(iii) B_w admite uma órbita ilimitada.

Demonstração: Tendo em vista o Corolário 4.4, basta provar que B_w tem núcleo generalizado

$$X_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(B_w^n)$$

denso em X. De fato, vemos que

$$\begin{aligned}
\ker B_w &= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, B_w(x_1, x_2, \dots) = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, (w_2x_2, w_3x_3, \dots) = (0, 0, \dots)\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, w_2x_2 = 0, w_3x_3 = 0, \dots\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, x_k = 0,\ \forall k \geq 2\},
\end{aligned}$$

o que implica que $e_1 \in \ker B_w$. Como

$$\begin{aligned}
\ker B_w^2 &= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, B_w^2(x_1, x_2, \dots) = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, (w_2w_3x_3, w_3w_4x_4, \dots) = (0, 0, \dots)\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, w_2w_3x_3 = 0, w_2w_3x_4 = 0, \dots\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, x_k = 0,\ \forall k \geq 3\},
\end{aligned}$$

temos que $e_2 \in \ker B_w^2$. Assim, de forma indutiva temos que

$$\begin{aligned}
\ker B_w^n &= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, B_w^n(x_1, x_2, \dots) = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots) \in Z \,:\, x_k = 0,\ \forall k \geq n+1\},
\end{aligned}$$

donde $e_n \in \ker B_w^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$span\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \,:\, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ e } k \in \mathbb{N}\right\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(B_w^n) = X_0, \tag{4.2}$$

provando que X_0 é denso em X. ■

Observação. 4.8. *Um operador deslocamento com pesos pode ser Li-Yorke caótico mas não ser hipercíclico.*

De fato, seja $Z := \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ ou $Z := c_0$, e consideremos o operador de deslocamento à esquerda com peso B_w sobre Z, demos uma caracterização para dito operador.

Afirmação 8. *B_w é Li-Yorke caótico se e somente se*

$$\sup\left\{\prod_{i=n}^{m}|w_i| : n\in\mathbb{N},\ m>n\right\}=\infty.$$

Primeiramente introduziremos alguns conceitos. Como toda teoria matemática tem sua noção de isomorfismo, então a pergunta natural é: Quando podemos considerar dois sistemas dinâmicos $T : X \longrightarrow X$ e $S : Y \longrightarrow Y$ iguais? Deveria haver um homeomorfismo $\phi : Y \longrightarrow X$ tal que, quando $x \in X$ corresponde a $y \in Y$ via ϕ, então $T(x)$ deve corresponder a um $S(y)$ via ϕ. Em outras palavras, se $x = \phi(y)$ então $Tx = \phi(S(y))$. Isto equivale a dizer que

$$T\circ\phi=\phi\circ S.$$

Lembremos que um homeomorfismo é uma função bijetiva contínua com inversa contínua. Em muitas aplicações basta exigir que ϕ seja contínua com imagem densa.

Definição 4.9. *Sejam $S : Y \longrightarrow Y$ e $T : X \longrightarrow X$ sistemas dinâmicos lineares. Dizemos que é T **linearmente conjugado** a S, se existe um homeomorfismo linear $\phi : Y \longrightarrow X$ tal que $T\circ\phi = \phi\circ S$, isto é, tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ X & \xrightarrow[T]{} & X \end{array}$$

comuta.

Uma conjugação linear é uma relação de equivalência entre sistemas dinâmicos lineares, e tais sistemas dinâmicos conjugados têm os mesmos comportamentos dinâmicos.

Definição 4.10. *Dizemos que uma propriedade P dos sistemas dinâmicos lineares se preserva por conjugação linear. Se dado $S : Y \longrightarrow Y$ é um sistema dinâmico que tem a propriedade P, então todo sistemas dinâmico linear $T : X \longrightarrow X$ que é linearmente conjugado com S também a tem.*

Consideremos o operador

$$B_w : (x_0, x_1, x_2, \dots) \in Z \mapsto (w_1x_1, w_2x_2, w_3x_3, \dots) \in Z$$

onde $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de inteiros positivos limitada, e o operador deslocamento sem peso

$$B : (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{Z} \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \widetilde{Z}$$

sobre o espaço com peso

$$\widetilde{Z}=\ell_p(\nu):=\left\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : ||x||=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},$$

com $1 \le p < \infty$ e onde $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de inteiros positivos tal que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\frac{\nu_i}{\nu_{i+1}}<\infty.$$

Afirmamos que o operador B é Li-Yorke caótico sobre $\widetilde{Z}$ se, e somente se,

$$M_\nu := \sup\left\{\frac{\nu_n}{\nu_m} : n \in \mathbb{N},\ m > n\right\} = \infty.$$

Suponhamos que B é Li-Yorke caótico, e seja $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ um vetor irregular para B. Então

$$\begin{aligned} ||B^n(x)||^p =& \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k |x_{k+n}|^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{\nu_{k+n}} \nu_{k+n} |x_{k+n}|^p \\ \leq& M_\nu \sum_{k=0}^{\infty} \nu_{k+n} |x_{k+n}|^p \leq M_\nu ||x||^p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||B^n(x)|| \leq M_\nu ||x|| \quad (||x|| \text{ constante fixa}).$$

Se assumimos $M_\nu < \infty$, então $B^n(x)$ converge para zero. Logo, B não admite vetor irregular o que é um absurdo já que B é Li-Yorke.

Para provar a recíproca, suponhamos que $M_\nu = \infty$; então o conjunto $\{\frac{\nu_n}{\nu_m} : n \in \mathbb{N},\ m > n\}$ é ilimitado. Como $m > n$, então $m = n + k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ $(q_k > p_k)$ tais que

$$\frac{v_{p_k}}{v_{q_k}} > 3^k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Por outro lado, dado que

$$M_\nu = \lim_{\substack{k\to\infty \\ m=p+k}} \frac{\nu_k}{\nu_{p+k}} = \infty,$$

então, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > n_0$ então $\frac{\nu_k}{\nu_{p+k}} \geq M$. Assim, tomando as sequências crescentes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} := (n_0 + k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} := (n_0 + 2k)_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos temos que $m_k > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{k\to\infty} (m_k - n_k) = \infty. \tag{4.4}$$

Portanto, para todo $k \geq n_0$ temos que (4.3) e (4.4). Definamos o vetor $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \widetilde{Z}$

$$x := \begin{cases} (2^k \nu_{m_k})^{-\frac{1}{p}} & \text{se } i = n_k \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||B^{m_k-n_k}(x)||^p =& \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i |x_{i+m_k-n_k}|^p = \nu_{n_k} |x_{m_k}|^p \\ =& \nu_{n_k} \left(\frac{1}{(2^k \nu_{m_k})^{\frac{1}{p}}}\right)^p \\ =& \left(\frac{\nu_{n_k}}{\nu_{m_k}}\right)\left(\frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Resumindo,

$$||B^{m_k-n_k}(x)|| = \left(\frac{\nu_{n_k}}{\nu_{m_k}}\right)\left(\frac{1}{2^k}\right) > \left(\frac{3}{2}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite $k \to \infty$, temos

$$\lim_{k\to\infty} ||B^{m_k-n_k}(x)|| = \infty. \tag{4.5}$$

Por outra parte, como o suporte de x é finito então para $s_k > n_k$, assim temos que

$$||B^{s_k}(x)|| = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Portanto, das equações (4.5) e (4.6) concluímos que B é Li-Yorke caótico em $\widetilde{Z}$.

Definamos $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots)$, onde

$$\nu_n := \left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e considere o espaço

$$Z_\nu := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z\}.$$

Definimos em Z_ν as seminormas

$$P_n(x) := \sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Z_v$. A aplicação

$$\begin{aligned} \phi_\nu : Z_\nu &\longrightarrow Z \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_n\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, com a topologia em Z_ν dada pela família de seminormas citada acima. Não é difícil ver que U é aberto em Z_ν se, e somente se, $\phi_\nu(U)$ é aberto em Z. Além disso,

$$\begin{aligned} (B_w \circ \phi_\nu)(x_1, x_2, x_3, \dots) &= B_w(x_1\nu_1, x_2\nu_2, x_3\nu_3, \dots) \\ &= B_w\Big(x_1 w_1^{-1}, x_2\Big(\prod_{i=1}^{2} w_i\Big)^{-1}, x_2\Big(\prod_{i=1}^{3} w_i\Big)^{-1}, \dots\Big) \\ &= \Big(w_2 x_2\Big(\prod_{i=1}^{2} w_i\Big)^{-1}, w_3 x_3\Big(\prod_{i=1}^{3} w_i\Big)^{-1}, \dots\Big) \\ &= \Big(x_2 w_1^{-1}, x_3\Big(\prod_{i=1}^{2} w_i\Big)^{-1}, \dots\Big), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\phi_\nu \circ B_w)(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \phi_\nu(x_2, x_3, x_4, \dots) \\ &= (x_2\nu_1, x_3\nu_2, x_4\nu_3, \dots) \\ &= \Big(x_2 w_1^{-1}, x_3\Big(\prod_{i=1}^{2} w_i\Big)^{-1}, \dots\Big). \end{aligned}$$

Portanto, $B_w \circ \phi_\nu = \phi_\nu \circ B$, e assim ϕ_ν é uma conjugação linear.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{B_w} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X_\nu & \xrightarrow[B]{} & X_\nu \end{array}$$

Como B é um operador Li-Yorke caótico sobre $\widetilde{Z}$, então B_w também será um operador Li-Yorke caótico sobre Z, já que a propriedade é preservada por conjugação. Além disso,

$$\sup\left\{\frac{\nu_n}{\nu_m} : n \in \mathbb{N},\ m > n\right\} = \sup\left\{\prod_{i=n}^{m} w_i : n \in \mathbb{N},\ m > n\right\}.$$

Assim,

$$\sup\left\{\prod_{i=n}^{m} |w_i| : n \in \mathbb{N},\ m > n\right\} = \infty,$$

mostrando uma caracterização para os operadores de deslocamento com peso.

Por outra parte, temos outra caracterização para a hiperciclicidade de B_w, a saber: B_w é um operador hipercíclico sobre Z se, e somente se,

$$\sup\left\{\prod_{i=1}^{n} |w_i| : n \in \mathbb{N}\right\} = \infty;$$

a demonstração pode ser vista em [9, exemplo 4.9(a)]. Portanto, estas caracterizações nos permitem construir sequências de pesos $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que B_w seja Li-Yorke caótico mas não hipercíclico.

4.4 Operadores de Composição

Nesta seção vamos caracterizar caos Li-Yorke para operadores de composição.

Proposição 4.11. *Sejam Ω_1 e Ω_2 domínios em $\mathbb{C}$ e $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ um mapa conforme. Se φ_1 e φ_2 são automorfismos de Ω_1 e Ω_2, respectivamente, tais que $\varphi_2 \circ \psi = \psi \circ \varphi_1$ então C_{φ_2} e C_{φ_1} são linearmente conjugados via o mapa*

$$\begin{array}{rcl} J : H(\Omega_2) & \longrightarrow & H(\Omega_1) \\ f & \longmapsto & f \circ \psi, \end{array}$$

tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(\Omega_2) & \xrightarrow{C_{\varphi_2}} & H(\Omega_2) \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ H(\Omega_1) & \xrightarrow[C_{\varphi_1}]{} & H(\Omega_1) \end{array}$$

comuta.

A demonstração da Afirmação 4.11 está fora do objetivo deste trabalho e pode ser encontrada em [9].

Definição 4.12. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e $\varphi_n : \Omega \longrightarrow \Omega$, $n \geq 1$, uma sequência de automorfismos. Então a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita* ***run-away*** *se, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$\varphi_m(K) \cap K = \emptyset.$$

Na prática, esta definição é aplicada à sequência de iterações $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um automorfismo φ sobre Ω. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplos 4.13.

(a) Seja $\Omega = \mathbb{C}$. Então os automorfismos de $\mathbb{C}$ são as funções

$$\varphi(z) = az + b, \quad a \neq 0, \; b \in \mathbb{C},$$

e $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência run-away se, e somente se, $a = 1$, $b \neq 0$. De fato, seja φ um automorfismo de $\mathbb{C}$. Se φ não é um polinômio então, pelo Teorema de Casorati-Weierstrass, $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ é denso em $\mathbb{C}$ e portanto intercepta o conjunto $\varphi(\mathbb{D})$, o qual é aberto pelo Teorema da aplicação aberta. Assim isto contradiz o fato que φ seja injetivo. Portanto φ é um polinômio. Novamente pela injetividade, o grau do polinômio tem que ser um, assim φ tem duas formas de ser escrito. Se $a = 1$ então $\varphi^n(z) = z + nb$. Assim $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência run-away se, e somente se, $b \neq 0$. Enquanto se $a \neq 1$ então $(1-a)^{-1}b$ é um ponto fixo de φ. Portanto, $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ser uma sequência run-away.

(b) Seja $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, o plano perfurado. Com um argumento análogo como em (a) podemos mostrar que os automorfismos de $\mathbb{C}^*$ são as funções

$$ou \quad \varphi(z) = az \quad ou \quad \varphi(z) = \frac{a}{z}, \quad a \neq 0.$$

Então $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência run-away se, e somente se, $\varphi(z) = az$ com $|a| \neq 1$.

Mostraremos, a seguir, que a propriedade de ser run-away para uma sequência $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, é uma condição necessária para que o operador composição seja Li-Yorke caótico.

Proposição 4.14. *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $\varphi \in Aut(\Omega)$. Se C_φ é Li-Yorke caótico, então $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência run-away.*

Demonstração: Suponhamos que C_φ é Li-Yorke caótica e $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência run-away, isto é, existe um compacto $K_1 \subset \Omega$ tal que $\varphi^n(K_1) \cap K_1 \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $f \in H(\Omega)$ um vetor irregular para C_φ (Teorema 2.10). Então a sequência $((C_\varphi)^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, ou seja, existe um compacto $K_2 \subset \Omega$ tal que a sequência $(f \circ \varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uniformemente limitada sobre K_2.

Afirmação 9. *Existe um subconjunto $K \subset \Omega$, compacto e conexo contendo K_1 e K_2.*

Como $K_1 \cup K_2$ é compacto e $\Omega\backslash\mathbb{C}$ é aberto, então $2\epsilon = d(K_1 \cup K_2, \Omega\backslash\mathbb{C}) > 0$. Definamos as coleções

$$\mathcal{A} = \{R_\epsilon : R_\epsilon \cap K_1 \neq \emptyset\}$$

e

$$\mathcal{B} = \{R_\epsilon : R_\epsilon \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

onde, R_ϵ é um retângulo aberto de lados ϵ. Assim, temos que

$$K_1 \subset \bigcup_{R_\epsilon \in \mathcal{A}} R_\epsilon \quad \text{e} \quad K_2 \subset \bigcup_{R_\epsilon \in \mathcal{B}} R_\epsilon.$$

Como $(R_\epsilon)_{R_\epsilon \in \mathcal{A}}$ e $(R_\epsilon)_{R_\epsilon \in \mathcal{B}}$ são recobrimentos abertos K_1 e K_2, respectivamente, existem coleções finitas $(\widetilde{\epsilon}_i)_{i=1}^n$ e $(\epsilon_i)_{i=1}^m$ tais que

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^n R_{\widetilde{\epsilon}_i} \quad \text{e} \quad K_2 \subset \bigcup_{i=1}^m R_{\epsilon_i}.$$

Daí,

$$K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i=1}^k R_i,$$

onde $\bigcup_{i=1}^k R_i$ é compacto em Ω, já que é união (finita) de compactos. Mas não necessariamente é conexo. Para isso definimos os conjuntos

$$L_1 := \{L_{R_i;R_j} : R_i \in \mathcal{A},\ R_j \in \mathcal{A} \text{ e } i,j = 1,\dots,k.\}$$

e

$$L_2 := \{L_{R_i;R_j} : R_i \in \mathcal{B},\ R_j \in \mathcal{B} \text{ e } i,j = 1,\dots,k.\}$$

os quais são compactos. Além disso, como $\bigcup_{i=1}^k R_i$ é compacto em Ω, existe um caminho em Ω tal que liga $R_n \in \mathcal{A}$ e $R_m \in \mathcal{B}$ [1]. Contudo,

$$K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i=1}^k R_i \subset \bigcup_{i=1}^k R_i \cup L_1 \cup L_2 \cup \{L_{R_n;R_m}\} =: K,$$

o qual é compacto (por ser uma união finita de compactos) e conexo (por ser conexo por caminhos) em Ω. Assim, concluímos que existe um conjunto compacto e conexo K contendo a K_1 e K_2.

$\diamondsuit$

Então temos que,

$$\varphi^n(K) \cap K \neq \emptyset \tag{4.7}$$

e

$$(f \circ \varphi^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ não é uniformente limitada sobre } K. \tag{4.8}$$

Por outra parte, como f não é identicamente nula (f é irregular), pelo **Princípio da Identidade**, f tem um número finito de zeros em K. Se $f \in H(\Omega)$ não tem zeros em K, por (4.7) existe um $x \in K$ tal que $\varphi^n(x) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $f \circ \varphi^n \neq 0$ em K. Assim, $f \circ \varphi^n \nrightarrow 0$ uniformemente sobre K o que contradiz o fato que $f \in H(\Omega)$ é um vetor irregular para C_φ concluindo que f tem ao menos um zero em K. Suponhamos que $z_1, z_2, \dots, z_r \in K$ são zeros de f em K. Pela maneira pela qual K foi construído, podemos supor que $z_1, z_2, \dots, z_r \in \overset{\circ}{K}$, e assim que posso escolher abertos disjuntos V_j tais que $z_j \in V_j$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$. Seja

$$\delta := \min\{|f(z)| \,:\, z \in K \backslash (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r)\}.$$

[1] No caso que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

Como $f \in H(\Omega)$ é um vetor irregular, $((C_\varphi)^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para 0 uniformemente em K, ou seja, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } k > n_0 \text{ então } P_k(f\circ\varphi^n) := \sup_{z\in K} |f\circ\varphi^k(z)| < \delta;$$

em particular tomando $m_0 > n_0$ temos que

$$\sup_{z\in K} |f\circ\varphi^{m_0}(z)| < \delta.$$

Logo,

$$\sup_{z\in K} |f(\varphi^{m_0}(z))| < \epsilon \iff \sup_{\widehat{z}\in\varphi^{m_0}(K)} |f(\widehat{z})| < \delta,$$

então

$$\sup_{\widehat{z}\in\varphi^{m_0}(K)\cap K} |f(\widehat{z})| \leq \sup_{\widehat{z}\in\varphi^{m_0}(K)} |f(\widehat{z})| < \delta.$$

Assim,

$$\varphi^{m_0}(K)\cap K \subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_r,$$

isto é, $\varphi^{m_0}(K)\cap V_j \neq \emptyset$, para alguns j's. Daí,

$$\varphi^{m_0}(K)\cap K \subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_r\cup(\Omega\backslash K).$$

Por outra parte, como K é conexo e φ^{m_0} é contínuo, então $\varphi^{m_0}(K)$ é conexo, logo $\varphi^{m_0}(K)\subset V_j$ para algum $j\in\{1,\ldots,r\}$. Em particular, $\varphi^{m_0}(K)\subset K$ e assim

$$\varphi^n(K) \subset \underbrace{K\cup\varphi(K)\cup\cdots\cup\varphi^{m_0-1}(K)}_{B} \quad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Dado que K é compacto e φ^n é contínuo, então $\varphi^p(K)$ é compacto com $0\leq p\leq m-1$. Logo B é compacto em Ω e assim $f\in H(\Omega)$ é limitada sobre o compacto $B\supset K$ o que contradiz (4.8) concluindo que a sequência $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é run-away. ■

Corolário 4.15. *Não existe automorfismo em $\mathbb{C}^*$ tal que o operador composição seja Li-Yorke caótico.*

Demonstração. Pela Proposição 4.14 e o Exemplo 4.13, temos que o operador C_φ é Li-Yorke caótico sobre $H(\Omega)$ se $\varphi(z) = az$ com $|a|\neq 1$. Seja $f\in H(\mathbb{C}^*)$ e suponha que $((C_\varphi)^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergindo para zero em $H(\mathbb{C}^*)$. Então existe uma sequência crescente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos tal que

$$((C_\varphi)^{n_j} f)(z) = f(a^{n_j} z) \longrightarrow 0 \text{ uniformemente sobre o círculo unitário } \mathbb{T}. \tag{4.9}$$

Portanto, aplicando o Teorema do Módulo Máximo temos que

$$f(z)\to 0 \text{ quando } |z|\to\infty \text{ se } |a|>1 \text{ e } f(z)\to 0 \text{ quando } |z|\to 0 \text{ se } |a|<1. \tag{4.10}$$

De fato, consideremos dois casos separadamente.

(i) $|a| > 1$ então $|a^{n_j}| \underset{j}{\to} +\infty$ (são círculos concêntricos).

Aplicando a definição a (4.9), dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(a^{n_j}z)| < \epsilon$ para todo $z \in \mathbb{T}$ e para todo $j \geq j_0$, isto é, para $j > j_0$ temos que

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z| = |a|^{n_j} \quad \text{e} \quad |f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z| = |a|^{n_{j+1}}. \tag{4.11}$$

Logo, como f é holomorfa, aplicando o **Teorema do Módulo Máximo** no domínio

$$\Omega := \{z : |a|^{n_j} < |z| < |a|^{n_{j+1}}\},$$

temos que $|f|$ atinge o máximo na fronteira, mas por (4.11) vemos que

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \Omega.$$

Então,

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z| > |a|^{n_{j_0}}.$$

Assim,

$$f(z) \to 0 \;\text{ quando }\; |z| \to \infty \;\; (\text{se } |a| > 1).$$

(ii) $|a| < 1$ então $|a^{n_j}| \underset{j}{\to} 0$ (são círculos concêntricos contraindo).

Aplicando a definição a (4.9), dado $\epsilon > 0$ existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(a^{n_j}z)| < \epsilon$ para todo $z \in \mathbb{T}$ e para todo $j \geq j_1$, isto é, para $j > j_1$ temos que

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z| = |a|^{n_j} \quad \text{e} \quad |f(z)| < \epsilon \quad \forall\, |z| = |a|^{n_{j+1}}. \tag{4.12}$$

Logo, como f é holomorfa, aplicando o **Teorema do Módulo Máximo** no domínio

$$\Omega := \{z : |a|^{n_{j+1}} < |z| < |a|^{n_j}\},$$

temos que $|f|$ atinge o máximo na fronteira; mas por (4.12) vemos que

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall\, z \in \Omega.$$

Daí,

$$|f(z)| < \epsilon \quad \forall |z| \leq |a|^{n_{j_0}}.$$

Portanto,

$$f(z) \to 0 \;\text{ quando }\; |z| \to 0 \;\; (\text{se } |a| < 1).$$

Logo, de (4.10) temos que

$$f(a^n z) \to 0 \quad \text{uniformemente sobre } K \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compacto}).$$

De igual forma devemos considerar dois casos.

(a) Se $|a| > 1$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(z)| < \epsilon \;\; \forall\, |z| \geq C. \tag{4.13}$$

Como K é compacto e $0 \notin K$, então $d(0, K) > 0$. Logo, tomando $r > 0$ tal que

$$|z| \geq r > 0 \;\text{ para cada } z \in K,$$

segue que

$$|a^n z| = |a|^n |z| \geq |a|^n r \to +\infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty \quad \forall z \in K.$$

Logo existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a|^{n_0} r \geq C$. Daí, se $n \geq n_0$ então $|a^n z| \geq C$ para todo $z \in K$. Portanto, por (4.13) temos que

$$|f(a^n z)| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

Portanto $f(a^n z) \to 0$ uniformemente sobre K.

(b) Se $|a| > 1$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $R > 0$ tal que

$$|f(z)| < \epsilon \ \ \forall |z| < R. \tag{4.14}$$

Como K é limitado, então existe um $\gamma > 0$ tal que $|z| \leq \gamma$ para todo $z \in K$. Então

$$|a^n z| = |a|^n |z| \leq |a|^n \gamma \quad \forall z \in K.$$

Logo,

$$|a^n z| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Daí, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_1$ então $|a^n z| < R$ para todo $z \in K$. Logo, por (4.14) temos que

$$|f(a^n z)| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

Portanto $f(a^n z) \to 0$ uniformemente sobre K.

Acabamos de mostrar que $(C_\varphi)^n f$ converge para zero em $H(\mathbb{C}^*)$, provando que o operador C_φ não tem vetor irregular; assim C_φ não é Li-Yorke caótico. ■

Quando $\Omega = \mathbb{C}^*$, a propriedade de uma sequência ser run-away não é uma condição suficiente para ser Li-Yorke caótico. O objetivo é mostrar que em outros casos, o operador Li-Yorke caótico é caracterizado pela propriedade run-away. Para isso, introduzimos algumas propriedades topológicas de conjuntos no plano complexo.

Denotemos por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{C}$. Um domínio Ω diz-se **simplesmente conexo**, se $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ é conexo. Um domínio Ω diz-se **finitamente conexo**, se $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ contém no máximo uma quantidade finita de componentes conexas, em outro caso dizemos que é **infinitamente conexo**. Se M é qualquer conjunto em $\mathbb{C}$ então dizemos que uma componente limitada de $\widehat{\mathbb{C}} \backslash M$ é um buraco. Neste sentido, um domínio finitamente conexo contém só um número finito de buracos e um domínio simplesmente conexo não contém buracos. No caso de ter domínios finitamente conexos, mas não simplesmente conexos Ω, pode-se mostrar que tais domínios são conformalmente equivalentes a $\mathbb{C}^*$, assim que Ω não admite um automorfismo φ tal que $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência run-away, mas omitiremos a demonstração neste caso. Portanto da Proposição 4.14 e o Corolário 4.15 temos a seguinte proposição.

Proposição 4.16. *Seja Ω um domínio finitamente conexo, mas não simplesmente conexo em $\mathbb{C}$. Então C_φ não é Li-Yorke caótico para qualquer automorfismo φ de Ω.*

Em outro caso, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.17. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{C}$ o qual é ou simplesmente conexo ou infinitamente conexo e seja φ qualquer automorfismo de Ω. Então C_φ sobre $H(\Omega)$ é Li-Yorke caótico se e somente se é hipercíclico.*

Demonstração: Suponhamos que C_φ é um operador Li-Yorke caótico. Pela Proposição 4.14, temos que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência run-away, logo pelo [9, Teorema 4.32] concluímos que C_φ é um operador hipercíclico.

Reciprocamente suponhamos que C_φ é um operador hipercíclico. Então admite um vetor hipercíclico $f \in H(\Omega)$, o qual é também é um vetor irregular para C_φ. Portanto C_φ é um operador Li-Yorke caótico (Teorema 2.10). ■

Capítulo 5

Operadores Genericamente Li-Yorke Caóticos

5.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o conceito de caos Li-Yorke genérico para operadores sobre espaços de Fréchet. O resultado principal é o Teorema 5.1 que nos fornece caracterizações para caos Li-Yorke genérico. Em particular, este teorema nos diz que um operador $T \in L(X)$ é genericamente Li-Yorke caótico se e somente se o espaço todo X é um conjunto misturador para T. Como aplicação, veremos que nenhum operador deslocamento com pesos B_w sobre um espaço de Fréchet de sequências Z e nenhum operador de composição C_φ sobre um espaço de Fréchet de funções holomorfas $H(\Omega)$ pode ser genericamente Li-Yorke caótico (Teorema 5.2). Também apresentaremos um exemplo de um operador genericamente Li-Yorke caótico sobre o espaço de Hilbert ℓ_2 que não é completamente irregular (Teorema 5.3). Todos os resultados deste capítulo foram obtidos em [5].

No que se segue, X denotará um espaço de Fréchet arbitrário.

5.2 Caracterizações de Caos Li-Yorke Genérico

Teorema 5.1. *Para todo $T \in L(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é genericamente Li-Yorke caótico;

(ii) Todo vetor não-nulo é semi-irregular para T;

(iii) X é um conjunto misturador para T.

Demonstração:

($(ii) \Leftrightarrow (iii)$) Segue do fato de que (x, y) é um par Li-Yorke para T se e somente se $x - y$ é um vetor semi-irregular para T.

($(iii) \Rightarrow (i)$) Óbvio, já que X é um conjunto residual em X.

($(i) \Rightarrow (ii)$) Fixemos x um vetor não nulo em X. Por hipótese, existe um conjunto residual misturador S para T. Por translação, $x + S$ também é residual em X. Logo, $S \cap (x + S)$ também é um conjunto residual. Em particular, é diferente de vazio, isto é, existe $y \in S \cap (x + S)$. Então $y \in S$ e $y = x + z$ com $z \in S$. Como $x \neq 0$ então $y \neq z$. Assim, (y, z) é um par Li-Yorke para T, já que S é um conjunto misturador para T. Portanto, $x = y - z$ é um vetor semi-irregular para T. ∎

Teorema 5.2. *As seguintes classes de operadores não contêm operadores genericamente Li-Yorke caóticos:*

(a) Operadores deslocamento com pesos sobre espaços de Fréchet de sequências.

(b) Operadores de composição sobre os espaços de Fréchet $H(\Omega)$ (Ω um domínio em $\mathbb{C}$).

Demonstração:

(a) Consideremos o operador deslocamento com a sequência de pesos $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definido como

$$B_w(x) = (w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Mostremos que B_w não é um operador genericamente Li-Yorke caótico. Aplicando o Teorema 5.1 (ii), basta provar que existe um vetor não-nulo que não é semi-irregular para B_w. De fato, ponha $z := e_1$. Como

$$B_w^n(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

z não é um vetor semi-irregular para B_w.

(b) Consideremos o operador de composição C_φ sobre $H(\Omega)$, o espaço das funções holomorfas sobre o domínio Ω. Vamos mostrar que C_φ tem um ponto fixo não trivial, isto é, que existe $f \in H(\Omega)$ não-nula tal que

$$C_\varphi(f) = f.$$

Tomando $f \equiv K$ (constante $K \neq 0$), então

$$C_\varphi(f) = C_\varphi(K) = K \circ \varphi = K = f.$$

Logo, $(C_\varphi^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequência que convirja para zero. Portanto, f não é um vetor semi-irregular para C_φ. Aplicado de novo o Teorema 5.1 (ii), temos o desejado. ■

5.3 Um Operador Genericamente Li-Yorke Caótico que não é Completamente Irregular

Teorema 5.3. *Existe um operador genericamente Li-Yorke caótico $S : \ell_2 \to \ell_2$ que admite um conjunto denso de vetores não-irregulares.*

Demonstração: Na prova de [13, Teorema 3.13], foi construída uma sequência de pesos $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que o operador

$$T : (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \ell_2 \longmapsto (0, w_1a_1, w_2a_2, w_3a_3, \dots) \in \ell_2,$$

tem a propriedade de que todo vetor não nulo $x \in \ell_2$ é um vetor irregular para T. Além disso, a sequência $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$\frac{1}{2} \leq w_i \leq 2 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} w_i = \infty. \tag{5.2}$$

De (5.2), existe um menor inteiro positivo r_1 tal que $\prod_{i=1}^{r_1} w_i > 2$. Ponhamos

$$w_i' := \begin{cases} w_i & \text{se } 1 \leq i < r_1 \\ \frac{w_{r_1}}{\prod_{i=1}^{r_1} w_i} & \text{se } i = r_1. \end{cases}$$

Novamente de (5.2), existe um menor inteiro positivo $r_2 > r_1$ tal que $\prod_{i=r_1+1}^{r_2} w_i > 2$. Ponhamos

$$w_i' := \begin{cases} w_i & \text{se } r_1 < i < r_2 \\ \frac{w_{r_2}}{\prod_{i=r_1+1}^{r_2} w_i} & \text{se } i = r_2. \end{cases}$$

Continuando de maneira indutiva, conseguimos uma sequência $(w_i')_{i\in\mathbb{N}}$ juntamente com uma sequência crescente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$w_i' := \begin{cases} w_i & \text{se } r_n < i < r_{n+1} \\ \frac{w_{r_{n+1}}}{\prod_{i=r_n+1}^{r_{n+1}} w_i} & \text{se } i = r_{n+1}, \end{cases}$$

onde $r_0 = 1$. Note que

$$w_i' \leq w_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

$$\prod_{i=1}^{n} w_i' \leq 2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{5.4}$$

e

$$\prod_{i=1}^{r_n} w_i' = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

De fato, a equação (5.3) resulta óbvia em vista da definição da sequência $(w_i')_{i\in\mathbb{N}}$. A equação (5.5) é verdade, já que dada a definição de $(w_i')_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{r_n} w_i' &= \prod_{i=1}^{r_n-1} w_i' \cdot w_{r_n}' \quad (1 < i \leq r_n - 1 < r_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{r_n-1} w_i\right)\left(\frac{w_{r_n}}{\prod_{i=1}^{r_n} w_i}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, para a equação (5.4), dado $n \in \mathbb{N}$ existe um inteiro positivo k tal que $r_k \leq n < r_{k+1}$. Então

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} w_i' &= \left(\prod_{i=1}^{r_k} w_i'\right)\left(\prod_{i=r_k+1}^{n} w_i'\right) \quad (\text{por } (5.5)) \\ &= \prod_{i=r_k+1}^{n} w_i' \\ &\leq 2, \end{aligned}$$

pela minimalidade de r_{k+1}. Seja $S : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ o operador de deslocamento à direita com a sequência de pesos $(w_i')_{i\in\mathbb{N}}$. Pela equação (5.3), temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \ell_2$

$$||S^n x|| \leq ||T^n x||.$$

Como todo vetor não nulo de ℓ_2 é irregular para T, segue da desigualdade acima que

$$\liminf_{n\to\infty} ||S^n x|| = 0 \quad \forall x \in \ell_2.$$

Por outra parte, das equações (5.4) e (5.5), temos que

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} ||S^n e_1|| \leq 2. \tag{5.6}$$

Logo, como cada elemento de ℓ_2 é uma combinação linear de $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, e pela linearidade do operador, temos que

$$\limsup_{n\to\infty} ||S^n(x)|| > 0 \quad \forall x \in \ell_2 \backslash \{0\}.$$

Portanto, todo vetor não nulo de ℓ_2 é semi-irregular para S. Assim, pelo Teorema 5.1, mostramos que S é genericamente Li-Yorke caótico. Além disso, da equação (5.6), segue-se que todo elemento em ℓ_2 de suporte finito não é um vetor irregular para S. De fato, como

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, w_1' a_1, w_2' a_2, w_3' a_3, \dots),$$

então $S(e_1) = w_1' e_2$. Assim, e_2 posso escrever na forma

$$e_2 = \frac{1}{w_1'} S e_1.$$

De igual forma, como $S^2 e_1 = w_1' w_2' e_3$, posso escrever e_3 na forma

$$e_3 = \frac{1}{w_1' w_2'} S^2 e_1.$$

Logo, de maneira indutiva pode-se mostrar que para todo $j \geq 2$,

$$e_j = \frac{1}{w_1' \dots w_{j-1}'} S^{j-1} e_1.$$

Portanto, existe uma sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ com $c_0 := 1$ tal que, para todo $j \geq 2$,

$$e_j := c_{j-1} S^{j_1} e_1.$$

Como todo vetor $x \in \ell_2$ com suporte finito admite uma representação da forma

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j$$

então

$$S^n x = \sum_{j=1}^{k} x_j S^n e_j = \sum_{j=1}^{k} x_j c_{j-1} S^{n+j-1} e_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||S^n x|| &\leq \sum_{j=1}^{k} |x_j||c_{j-1}|||S^{n+j-1} e_1|| \\ &\leq \underbrace{3 \sum_{j=1}^{k} |x_j||c_{j-1}|}_{=C_k} \quad \text{(por (5.6))} \end{aligned}$$

para todo $n \geq m_0$[1]. Daí, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} ||S^n x|| \leq C_k < \infty.$$

Portanto, como o limite superior fica limitado, então x não é um vetor irregular para S, mostrando assim a existência de um operador genericamente Li-Yorke caótico que não admite um conjunto denso de vetores irregulares.

■

[1] Como $\limsup_{n\to\infty} ||S^n|| = \lim_{n\to\infty}(\sup_{n\geq m_0} ||S^n e_1||) \leq 2$ então, tomando $\epsilon = 1$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n\geq m} ||S^n e_1|| \leq 3$. Portanto $||S^n e_1|| \leq 3$ para todo $n \geq m_0$

Bibliografia

[1] F. Bayart; É. Matheron, *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, 2009.

[2] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] T. Bermúdez; A. Bonilla; F. Martínez-Giménez; A. Peris, Li-Yorke and distributionally chaotic operators, *J. Math. Anal. Appl.* **373** (2011), 83-93.

[4] N. C. Bernardes Jr; A. Bonilla; V. Müller; A. Peris, Distributional chaos for linear operators, *J. Funct. Anal.* **265** (2013), 2143-2163.

[5] N. C. Bernardes Jr; A. Bonilla; V. Müller; A. Peris, Li-Yorke chaos in linear dynamics, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **35** (2015), 1723-1745.

[6] G. D. Birkhoff, Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[7] N. Bourbaki, *General Topology*, Chapters 5-10, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, second edition, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1990.

[9] K.-G. Grosse- Erdmann; A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*. Springer-Verlag, London, 2001.

[10] T. Y. Li; J. A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 985-992.

[11] G. R. MacLane, Sequences of derivatives and normal families, *J. Analyse Math.* **2** (1952/53), 72-87.

[12] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[13] G. T. Prăjitură, Irregular vectors of Hilbert space operators, *J. Math. Anal. Appl.* **354**(2) (2009), 689-697.

[14] J. Piórek, On the generic chaos in dynamical systems, *Univ. Iagel. Acta Math.* **25** (1985), 293-298.

[15] L. Snoha, Generic chaos, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **31** (1990), 793-810.

[16] L. Snoha, Dense chaos, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **33** (1992), 747-752.

[17] S. Rolewicz, On orbits of elements, *Studia Math.* **32** (1969), 17-22.

[18] W. Rudin, *Functional Analysis*, second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.