Teoria de Morse e a Homologia do Free Loop Space de Variedades Globalmente Simétricas de Posto Um

Aloizio Tadeu Sampaio Alves Macedo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Leonardo Magalhães Macarini

Rio de Janeiro
22 de Março de 2016

Teoria de Morse e a Homologia do Free Loop Space de Variedades Globalmente Simétricas de Posto Um

Aloizio Tadeu Sampaio Alves Macedo
Orientador: Leonardo Magalhães Macarini

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Leonardo Magalhães Macarini- IM/UFRJ

Prof. Umberto Leone Hryniewicz - IM/UFRJ

Prof. Miguel Abreu - IST

Prof. Stefano Nardulli - IM/UFRJ (Suplente)

Rio de Janeiro
22 de Março de 2016

Agradecimentos

A ordem dos nomes nessa seção é cronológica.

Agradeço aos meus pais por fornecer conforto o suficiente para que meu estudo em Matemática pudesse acontecer de forma suave e irrestrita.

Agradeço a meus professores do ensino fundamental, em especial às "tias" Elaine e Daniela, pela excelente educação primária que recebi.

Agradeço a meus professores do ensino médio, em especial ao professor Sérgio Lins Gouveia, por me fornecerem uma sólida base de formação científica.

Agradeço ao departamento de Matemática Aplicada da UFRJ por me fornecer boas oportunidades para o aprendizado de Matemática, ao mesmo tempo proporcionando um bom ambiente de convívio intelectual.

Agradeço aos colegas de curso, entre eles Gabriel Victorino, Davi, Gabriel Sanfins, Gabriel Mayrink, Karina, Ivani, Guilherme, Paloma, Cláudio, Bruno Santiago, Rafael, Barata, Jonathas, Victor Coll etc (não listarei todos, uma vez que só para listar todos os Gabriéis provavelmente daria meia página), pelas discussões matemáticas e não-matemáticas. Em especial, agradeço aos colegas Gabriel Martins, João Caminada e Rogério Lourenço por serem peças fundamentais no meu crescimento como matemático.

Agradeço ao professor Francesco Noseda, meu orientador de iniciação científica da graduação, por participar de forma decisiva no meu crescimento como matemático, pela paciência, atenção e amizade desenvolvida ao longo dos anos. Gostaria de agradecer também por tentar me tornar um enxadrista decente, e fica aqui o compromisso de que continuarei tentando.

Agradeço a Walter Rudin pela fenomenal tríade de livros da mais alta qualidade de exposição.

Agradeço ao professor Nilson da Costa Bernardes Júnior pelo papel fundamental na minha educação, por estar sempre disposto a ajudar, por ser um professor atencioso, um matemático extraordinário e um ser humano admirável.

Agradeço à comunidade do site MSE (Math.Stackexchange), e ao próprio site, por ser um excelente lugar para garantir que o conhecimento se mantenha, além de treinar a comunicatividade matemática. Em especial, agradeço aos usuários Mike Miller, Eric Wofsey, Qiaochu Chan e Asaf Karagila.

Agradeço aos meus professores do Mestrado em Matemática da UFRJ pela atenção com os alunos.

Agradeço ao professor Leonardo Macarini, meu orientador no Mestrado, pelas conversas trocadas, pelo conhecimento matemático adquirido, pela atenção com o meu desenvolvimento como estudante e futuro pesquisador, pelos ensinamentos sobre como expor Matemática e por me apresentar a bela Matemática com a qual pretendo trabalhar.

Anacronicamente, agradeço a Daphne Poll pela companhia e parceria na vida e também no desenvolvimento desta dissertação. Se há algum amor no conteúdo desta dissertação, certamente está temperado pelo amor que ela cultiva em mim.

CIP - Catalogação na Publicação

M113t

Macedo, Aloizio Tadeu Sampaio Alves
Teoria de Morse e a Homologia do Free Loop Space de Variedades Globalmente Simétricas de Posto Um / Aloizio Tadeu Sampaio Alves Macedo. -- Rio de Janeiro, 2016.
120 f.

Orientador: Leonardo Magalhães Macarini.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Geometria. 2. Teoria de Morse. 3. Topologia Algébrica. 4. Topologia. I. Macarini, Leonardo Magalhães, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Teoria de Morse e a Homologia do Free Loop Space de Variedades Globalmente Simétricas de Posto Um

Aloizio Tadeu Sampaio Alves Macedo

Orientador: Leonardo Magalhães Macarini

O objetivo deste trabalho é estudar a homologia do Loop Space de uma variedade compacta globalmente simétrica de posto 1.

Os cálculos envolvidos e a maioria da teoria é inspirada nas técnicas desenvolvidas por Wolfgang Ziller.

Teoria de Morse e a Homologia do Free Loop Space de Variedades Globalmente Simétricas de Posto Um

Aloizio Tadeu Sampaio Alves Macedo

Advisor: Leonardo Magalhães Macarini

The main purpose of this work is to study the homology of the Loop Space of a compact globally symmetric manifold of rank 1.

The calculations involved and most of the theory is inspired in the techniques developed by Wolfgang Ziller.

Sumário

Capítulo 1

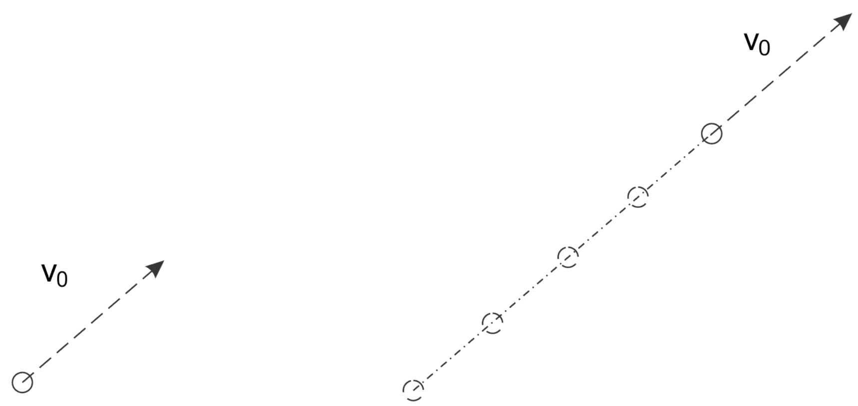
Introdução

> That's all well and good in practice,
> but how does it work in theory?
>
> Shmuel Weinberger

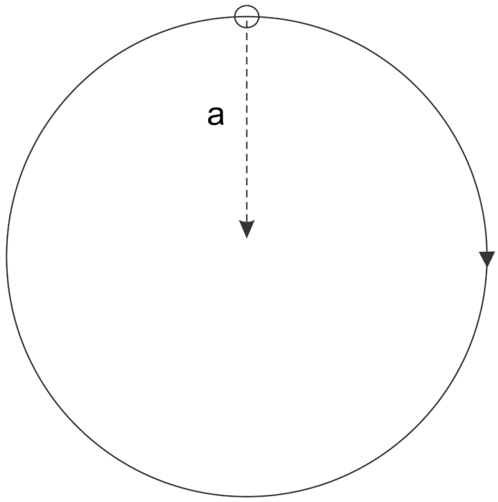
Considere a equação de Newton

$$F = ma.$$

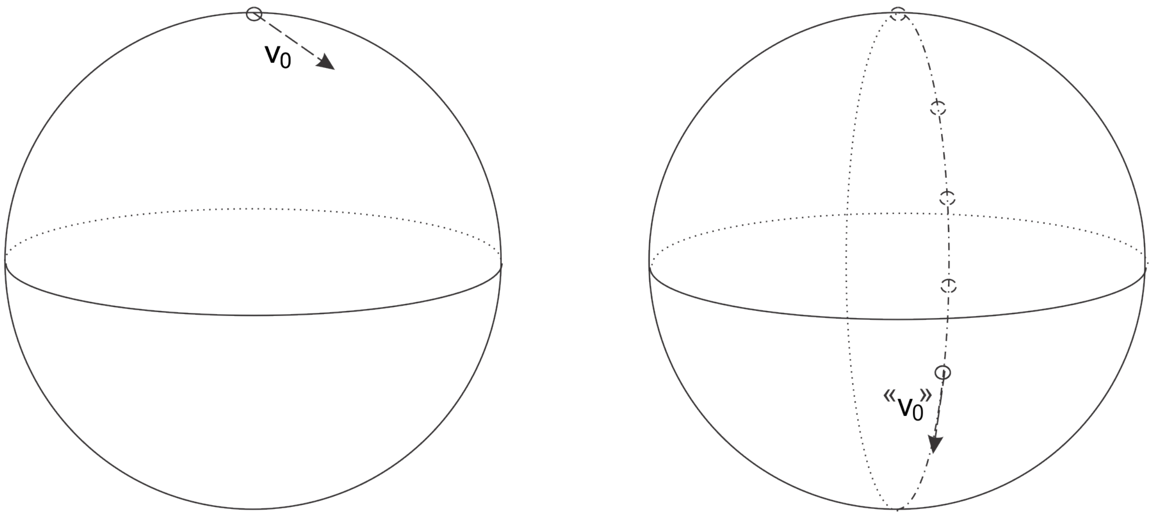
Ela nos diz que um corpo que não sofre ação de uma força externa possui aceleração nula. Assim, seu movimento será retilíneo. Isto é, resolvendo a equação $ma = 0$ com condições iniciais de posição p_0 e velocidade v_0 dadas, temos uma única solução: a reta que sai do ponto p_0 com velocidade v_0. Colocando em termos práticos, se dada uma partícula soltarmos ela com uma velocidade v_0 a partir de um ponto, seu caminho natural é a reta naquela direção.



Assim sendo, uma trajetória circular não é o caminho natural de nenhuma partícula no espaço, uma vez que tal trajetória possui uma aceleração.



Porém se ao invés de considerarmos o $\mathbb{R}^3$ inteiro como nosso espaço ambiente nos restringirmos a uma esfera na qual tal círculo seja um grande círculo (isto é, um círculo de diâmetro igual ao diâmetro da esfera), temos então que a esfera não vê esta aceleração, já que ela é inteiramente normal. Assim sendo, os grandes círculos são as trajetórias de aceleração nula (com respeito à esfera). São os caminhos naturais de partículas soltas sobre ela.



A ideia intuitiva que acabou de ser descrita é uma descrição lúdica, porém esclarecedora, do conceito de *geodésica*. Mais especificamente, dada uma variedade Riemanniana, as geodésicas são as curvas $c : I \to M$ que satisfazem

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0,$$

onde ∇ é um operador, chamado *derivada covariante*, que permite fazer uma derivada de um campo vetorial em relação ao outro. No caso de uma variedade Riemanniana dentro de $\mathbb{R}^n$, nada mais é que a projeção da aceleração sobre o espaço tangente. Temos assim uma descrição explícita dos "caminhos naturais" de partículas em uma variedade Riemanniana qualquer. Observando esta última figura de uma geodésica na esfera vemos que ela forma um ciclo, retornando em si mesma. Como todas as geodésicas na esfera são grandes círculos, temos que todos os caminhos naturais de partículas sobre a esfera são órbitas periódicas. Isso é uma característica notável das geodésicas na esfera, uma vez que órbitas periódicas são objetos de intrínseco interesse.

Existem inúmeras motivações para o estudo de geodésicas fechadas (geodésicas que são periódicas). Historicamente, o estudo de órbitas periódicas possui grande bagagem. Por exemplo, o movimento dos planetas é algo diretamente relacionado com tal estudo. Um dos nomes mais proeminentes em tal assunto é Henri Poincaré, responsável por dar respostas a problemas de mecânica celeste, além de dar nome ao mapa de Poincaré, Teorema de Poincaré-Bendixson, entre muitas outras contribuições. Matematicamente, órbitas periódicas proporcionam um objeto estável de um determinado problema. Além disso, seu caráter global é obviamente muito mais bem-controlado. Fisicamente, geodésicas são extremamente importantes não só para a mecânica clássica, mas também para a relatividade geral, uma vez que a própria luz é uma geodésica do espaço curvado pela massa e energia (no entanto, nesse caso são consideradas métricas pseudo-Riemannianas). Logo, procurar geodésicas que sejam periódicas fornecem soluções interessantes também do ponto de vista físico. Existem muitas outras aplicações e motivações, mas podemos já notar pelos exemplos dados que um estudo para um bom entendimento sobre tais objetos é algo altamente justificado.

Colocam-se então as seguinte perguntas: em quais variedades Riemannianas podemos garantir a existência de geodésicas fechadas? Quantas podemos garantir? Essas indagações fazem parte de áreas de intensa pesquisa moderna e possuem muitas questões em aberto. Por exemplo, não se sabe se existem infinitas geodésicas fechadas na esfera S^n, com $n \geq 3$, para uma métrica Riemanniana qualquer.

Analisemos superficialmente o problema: achar geodésicas é equivalente a resolver uma EDO, de forma que em um contexto geral de uma variedade Riemanniana qualquer, o comportamento global do resultado pode estar longe de nossas capacidades. Ao invés de resolver a EDO diretamente procuramos então uma outra forma de tentar chegar a alguma conclusão. Isso sugere a ideia de tentarmos analisar obstruções e/ou vantagens topológicas relacionadas à existência de geodésicas.

Não está claro, no entanto, como usamos as informações topológicas para extrairmos informações sobre a existência de geodésicas. Para isso, introduzimos a ideia do Princípio de Mínima Ação, da física. Essencialmente, ele diz que as trajetórias feitas pela natureza tendem a minimizar uma determinada "ação". No caso de geodésicas, podemos ver essa ação como sendo a energia da partícula que descreve o movimento. Ou seja, as geodésicas são os pontos críticos do funcional de energia. E existe uma elegante teoria que relaciona os pontos críticos de um determinado funcional em uma variedade com a sua topologia. Esta teoria é chamada *Teoria de Morse*, cujo nome é devido ao matemático Marston Morse. Em suma, a teoria de Morse permite fazer a seguinte relação:

$$\text{Pontos críticos de um funcional} \leftrightarrow \text{Topologia da variedade.}$$

Note, no entanto, que os pontos críticos do funcional de energia são curvas. Assim sendo, nossa variedade não vai possuir dimensão finita. Parte do nosso trabalho reside em dar um framework formal para essa discussão.

Imediatamente surge um problema: queremos saber informações sobre pontos críticos de um dado funcional, e queremos obter tais informações através da topologia da variedade. Mas não temos informações sobre a topologia da variedade, visto que estamos tratando de uma variedade de dimensão infinita a priori desconhecida e complicada. O que fazer, então?

A ideia é usar o fato simples de que a topologia da variedade obviamente não depende do funcional. Assim, usamos um funcional que entendemos relativamente bem, obtemos informações sobre a topologia da variedade, e usamos tais informações para entender outros funcionais mais complicados e gerais. Esquematicamente, fazemos o seguinte caminho:

$$\text{Pontos críticos de um funcional específico} \to \text{Topologia da variedade}$$

$$\to \text{Pontos críticos de um funcional qualquer.}$$

Nesta dissertação estaremos interessados na primeira seta, e abordaremos o problema em todas as suas complexidades. Resolveremos o caso específico de um determinado tipo de variedade, as *variedades simétricas compactas de posto um* (CROSS - Compact Rank One Symmetric Spaces) com o funcional de energia padrão nelas definido. Mais precisamente, descreveremos explicitamente a homologia do espaço de curvas associados a cada uma de tais variedades usando técnicas de teoria de Morse.

Apresentamos agora um guia para a leitura desta dissertação.

No Capítulo 2 transferimos a linguagem básica de variedades de dimensão finita para o contexto de dimensão infinita. Mais especificamente, definimos o conceito de variedade Hilbertiana.

No Capítulo 3 definimos uma estrutura de variedade Hilbertiana no espaço de loops sobre uma variedade compacta M de forma que possamos discutir questões relacionadas a diferenciabilidade. Também fornecemos outras estruturas importantes para nossos propósitos em tal espaço.

No Capítulo 4 descrevemos de forma rigorosa as geodésicas fechadas como pontos críticos do funcional de energia. Assim, temos um dos resultados fundamentais para nossa discussão.

No Capítulo 5 estendemos os resultados sobre Teoria de Morse em dimensão finita para nosso contexto. Veremos que o bom comportamento do funcional de energia é de fundamental importância na transferência de tais resultados.

No Capítulo 6 analisamos de perto o caso da esfera S^n, fazendo uma descrição intuitiva da situação antes da abordagem rigorosa.

No Capítulo 7 mostramos os resultados fundamentais da teoria de grupos e álgebras de Lie que precisaremos para a dissertação, além de exemplos clássicos.

No Capítulo 8 mostramos a teoria e resultados básicos sobre espaços globalmente simétricos. Focamos nossa discussão para o contexto das CROSS.

No Capítulo 9 mostramos que o free loop space satisfaz as condições necessárias para a aplicação efetiva da teoria de Morse.

No Capítulo 10 exibimos explicitamente as homologias das CROSS, obtidas através da reunião dos resultados prévios da dissertação, além de observações finais sobre a teoria.

Capítulo 2

Variedades Hilbertianas

> Mathematics is the art of giving the same name to different things.
>
> Henri Poincaré

Dada uma variedade M e uma função real diferenciável em M, é natural pensar se a topologia de M influencia de alguma forma as características da nossa função, e vice-versa. Por exemplo, uma função diferenciável na esfera S^n sempre terá no mínimo dois pontos críticos, uma vez que a esfera é compacta. Através desse exemplo, somos levados a crer que a quantidade de pontos críticos de uma função diferenciável pode estar relacionada com a topologia do espaço.

A Teoria de Morse é responsável por grandes sucessos em responder perguntas desse gênero. Por exemplo, as desigualdades de Morse relacionam diretamente a topologia (mais especificamente, a homologia) da variedade e os números de pontos críticos de uma função f.

De vários contextos físicos e matemáticos, surgem motivações de achar pontos críticos de determinados funcionais definidos em lugares que não são variedades de dimensão finita. O princípio de mínima ação da física já fornece inúmeros exemplos para isto. Assim sendo, ter uma ferramenta que forneça informação sobre pontos críticos desses funcionais é de grande interesse.

Felizmente, sob condições razoáveis, podemos usar Teoria de Morse para atacar problemas em espaços menos bem comportados que variedades de dimensão finita. Sendo assim, é de interesse o cálculo de homologia desses espaços.

Em especial, trabalharemos com o *Free Loop Space* de uma variedade globalmente simétrica, e a função diferenciável na qual estaremos interessados é o funcional de energia. Os pontos críticos desse funcional são geodésicas fechadas, de forma que usar Teoria de Morse permitirá um melhor entendimento sobre elas.

Para a referência dessa primeira parte de introdução, cf. [13].

2.1 Definições Básicas

Ao estudar o *Free Loop Space*, estaremos estudando um espaço não mais de dimensão finita (localmente um espaço euclidiano), mas sim um espaço que é localmente um espaço de Hilbert separável. Em breve, definiremos o *Free Loop Space* e mostraremos como ver sua estrutura de variedade Hilbertiana.

Definição 2.1.1. Um espaço topológico M é dito uma *variedade Hilbertiana* se é segundo-contável, Hausdorff, e é localmente um espaço de Hilbert separável $\mathbb{M}$ fixado. Mais precisamente, todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U que é homeomorfa a um aberto do espaço de Hilbert $\mathbb{M}$ através de um homeomorfismo ϕ. Chamaremos, como no caso de variedades euclidianas, (ϕ, U) de uma carta local. Exigimos também, é claro, que as trocas de carta sejam diferenciáveis. Podemos resumir esta definição dizendo que M é modelado sobre $\mathbb{M}$.

O espaço tangente pode ser definido analogamente a como é feito em dimensão finita. Por exemplo, podemos tomar as classes de equivalências de vetores respeitando as trocas de cartas (cf. [12]). Temos assim o fibrado tangente associado

$$\tau = \tau_M : TM \to M.$$

Um atlas (ϕ_α, U_α) de M dá origem canonicamente a um atlas $(T\phi_\alpha, TU_\alpha)$ de TM analogamente ao caso euclidiano.

Podemos considerar também fibrados vetoriais gerais

$$\pi : E \to M$$

sobre M onde cada fibra $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach. Na verdade, na maior parte desta dissertação, estaremos interessados no caso em que E é TM. Assim sendo, quando for útil a intuição de TM em lugar de E, faremos um comentário.

Como temos um fibrado, temos associado um atlas em que cada carta (ϕ, U) é parte de uma trivialização. Mais especificamente, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & U \times \mathbb{E} \arrow[r] \arrow[dl] & \phi(U) \times \mathbb{E} \arrow[dl] \\
U \arrow[r] & \phi(U). &
\end{tikzcd}$$

Consideraremos o seguinte fragmento do diagrama:

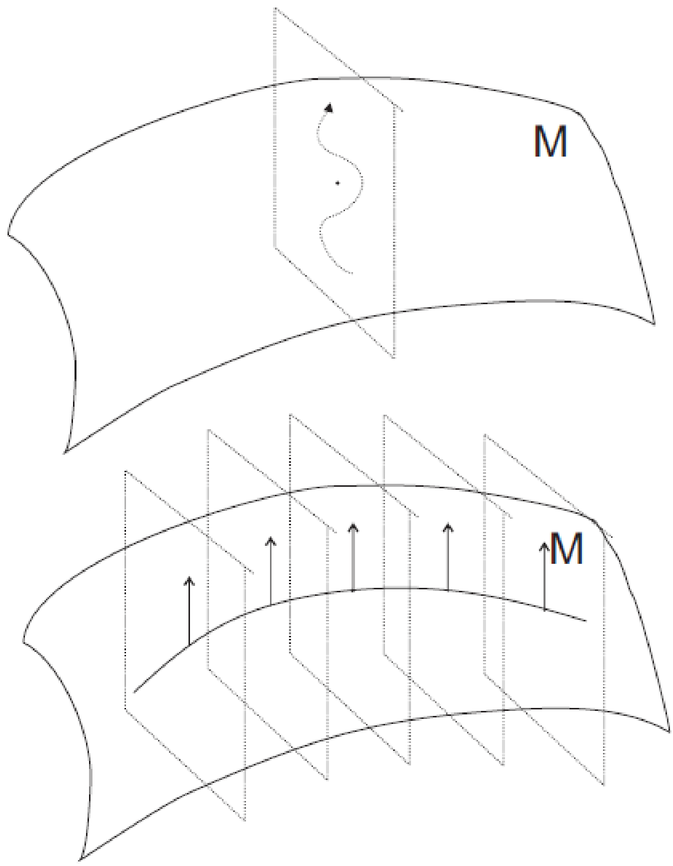
$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \phi(U) \times \mathbb{E} \arrow[d] \\
U \arrow[r] & \phi(U).
\end{tikzcd}$$

Sendo $(x, \omega) \in \phi(U) \times \mathbb{E}$ a representação local de um elemento de E, chamamos de ω a *parte principal* da representação.

Temos também o seguinte diagrama (no mesmo espírito do primeiro):

$$
\begin{array}{ccc}
T\pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \phi(U) \times \mathbb{E} \times \mathbb{M} \times \mathbb{E} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \phi(U) \times \mathbb{E}.
\end{array}
$$

Introduziremos agora o conceito de uma *conexão* no fibrado E. Observe a figura.



Temos, na parte de cima, uma forma canônica de ver o que seria o espaço vertical de TE. São as derivadas de curvas que estão contidas em uma fibra, as curvas que não variam horizontalmente. Queremos agora dizer o que é uma curva que não varia verticalmente, isto é, uma curva que não tem variação na fibra (ilustrado pela segunda figura).

Temos, então, um problema: não há um jeito canônico de *conectar* as fibras. Uma primeira ideia seria ver por cartas locais, trivializando o fibrado. Porém isso não se comporta bem, a definição acaba dependendo fortemente da carta, não sendo algo intrínseco. A *conexão* é o instrumento que se encarrega de fazer esse trabalho de conectar as fibras.

Definição 2.1.2. Uma *conexão* em um fibrado $\pi : E \to M$ é um mapa

$$K : TE \to E$$

de forma que para qualquer representação local (Φ, ϕ, U) de E dada, existe um mapa diferenciável

$$\Gamma_\phi : \phi(U) \to L(\mathbb{M}, \mathbb{E}; \mathbb{E})$$

tal que a representação local $K_\phi := \Phi \circ K \circ T\Phi^{-1}$ de K

$$K_\phi : \phi(U) \times \mathbb{E} \times \mathbb{M} \times \mathbb{E} \to \phi(U) \times \mathbb{E}$$

é dada por

$$(x, \omega, y, \eta) \mapsto (x, \eta + \Gamma_\phi(x)(y, \omega)).$$

Os Γ_ϕ são chamados de *símbolos de Christoffel*.

Observação 2.1.3. Existe uma outra interpretação (mais comum) para conexões. Veja o Apêndice para mais detalhes.

Segue de sua representação local que K é um morfismo de fibrados de τ_E em π sobre π.

Definição 2.1.4. Dado $\theta \in\ E_p = \pi^{-1}(p)$, defina

$$T^v_\theta E := \ker(T\pi : T_\theta E \to T_p M),$$

$$T^h_\theta E := \ker(K_\theta : T_\theta E \to E_p).$$

$T^v_\theta E$ é dito o subespaço vertical de $T_\theta E$, e $T^h_\theta E$ é dito o subespaço horizontal de $T_\theta E$.

A proposição a seguir ilustra a ideia intuitiva dada anteriormente sobre conexões.

Proposição 2.1.5. *Uma conexão K em um fibrado $\pi : E \to M$ define um splitting*

$$TE = T^h E \oplus T^v E$$

com

$$T_\theta E = T^h_\theta E \oplus T^v_\theta E.$$

Demonstração. Identificando $T^v_\theta E$ com E_p, é fácil ver que K é projeção.

Mais formalmente, seja K_ϕ a representação local de K, e seja $i : E_p \to TE$ dada (localmente) por

$$(x, \eta) \mapsto (x, \omega, 0, \eta).$$

Note que x e ω estão fixos. Agora, faça $\tilde{K}_\phi := i \circ K_\phi$. Temos que $\tilde{K}_\phi^2 = \tilde{K}_\phi$ e $\tilde{K}_\phi T_\theta E = T^v_\theta E$. Logo, $\tilde{K}_\phi$ é uma projeção, e induz o splitting da proposição.

$\square$

Uma conexão, ao nos dar uma noção horizontal, permite definir uma *derivada covariante*, isto é, um jeito de calcular derivadas de campos ao longo de outros campos.

Definição 2.1.6. Dada uma conexão K em $\pi : E \to M$, definimos a *derivada covariante* de uma seção diferenciável $\xi : M \to E$ por

$$\nabla \xi := K \circ T\xi.$$

Considerando E como TM, vemos que $\nabla\xi$ é uma aplicação que leva TM em TM. A ideia é que $\nabla\xi$ aplicado em θ de TM diga a derivada do campo ξ na direção da parte principal de θ.

Através da representação local de E, vemos que a parte principal de $\nabla\xi$ é dada por

$$\nabla\xi_\phi(x) = (D\xi_\phi(x))(\ \ .\ \ ) + \Gamma_\phi(x)(\ \ .\ \ , \xi_\phi(x)),$$

onde ξ_ϕ é a parte principal de ξ em sua representação local.

Seja S o círculo de perímetro 1, e $c : S \to M$ um mapa diferenciável (uma curva fechada em M). Então, temos o fibrado induzido

$$\begin{array}{ccc} c^*E & \xrightarrow{\pi^*c} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle c^*\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & \xrightarrow{c} & M. \end{array}$$

Caso $\pi : E \to M$ seja dotado de uma conexão, o fibrado induzido tem uma conexão natural, dada pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} Tc^*E & \xrightarrow{T\pi^*c} & TE \\ \Big\downarrow{\scriptstyle K_{c^*\pi}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle K_\pi} \\ c^*E & \xrightarrow{\pi^*c} & E. \end{array}$$

Sendo o vetor tangente canônico a S denotado por ∂t, e ξ uma seção em $c^*\pi$, definimos

$$\nabla_c\xi = \nabla\xi.\partial t.$$

Isto deve ser entendido como a derivada covariante de ξ na direção canônica do círculo.

Definição 2.1.7. Uma *métrica Riemanniana* em $\pi : E \to M$ é uma seção diferenciável

$$g : M \to L^2_s(E).$$

(onde $L^2_s(E)$ é o fibrado de formas simétricas bilineares) tal que $g(p)$ é positiva definida para todo $p \in M$.

Se uma métrica Riemanniana é dada em $\tau : TM \to M$, dizemos que M é uma *variedade Riemanniana* e também dizemos que g é uma *métrica Riemanniana* em M.

As duas definições seguintes são a chave para gerar uma conexão "padrão".

Definição 2.1.8. Uma conexão é dita *Riemanniana* se para todo aberto $U \subset M$, temos que

$$Dg(\xi, \eta)\ .\ v = g(\nabla\xi\ .\ v, \eta) + g(\xi, \nabla\eta\ .\ v),$$

onde v é uma seção arbitrária no fibrado $\tau_M|_U$ e ξ, η são seções arbitrárias em $\pi|U$.

Definição 2.1.9. A *torção* de uma conexão K em $\tau : TM \to M$ é uma seção T no fibrado de mapas bilineares alternados contínuos sobre TM[1] cuja parte principal em representação local

$$T_\phi : \phi(U) \to L^2_a(\mathbb{M}, \mathbb{M})$$

é dada por

$$T_\phi(x) = \Gamma_\phi(x)(u, v) - \Gamma_\phi(x)(v, u).$$

Ademais, se $T \equiv 0$, então K é dita *livre de torção.*

Temos, então, o seguinte teorema fundamental.

Teorema 2.1.10. *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão Riemanniana livre de torção.*

Demonstração. cf. [13], [7] (apesar de a demonstração de [7] ser feita apenas para variedades de dimensão finita, a demonstração é análoga). Ver também Apêndice, 11.6. □

Essa conexão será chamada de *Conexão de Levi-Civita.*

[1]Mais especificamente, o fibrado em questão é $L^2_a(\tau, \tau) : L^2_a(TM; TM) \to M$ com fibra $L^2_a(\mathbb{M}, \mathbb{M})$.

Capítulo 3

O Free Loop Space

There is no royal road to geometry.

Euclides

Neste capítulo, introduziremos o framework básico do nosso objeto de estudo.

O que nós pretendemos é, em essência, estudar o espaço dos caminhos fechados em uma variedade M. Já aí alguns problemas surgem. Uma primeira ideia poderia ser, por exemplo, pegar os mapas $c : S \to M$ que são C^∞. Uma das razões para isso não dar certo é que nosso espaço, apesar de ser completo tomando a topologia C^∞, não seria nem normável. Isto é um problema pros nossos propósitos, uma vez que queremos fazer geometria.

Outra ideia poderia ser pegar funções C^0, com a norma do sup. Teríamos um espaço completo, mas a falta de diferenciabilidade é algo que não estamos dispostos a aceitar.

Assim sendo, se queremos completude mantendo "diferenciabilidade", é razoável pensar em $H^1 = W^{1,2}$. São justamente esses mapas, os mapas $c : S \to M$ tais que c é H^1, que serão os elementos de nosso *free loop space*.

Vale notar que os mapas H^1 de S^1 em M podem ser caracterizados como os mapas absolutamente contínuos [1] de S^1 em M com derivada definida q.t.p. e de quadrado integrável (com respeito à métrica Riemanniana). Para mais informações, veja o Apêndice.

Nosso objetivo nesse capítulo é fornecer uma estrutura diferenciável boa o suficiente a esse espaços de caminhos. Dessa forma, poderemos falar de *funções diferenciáveis* no loop space, com o objetivo de introduzir o funcional de energia, que será nossa função diferenciável de interesse.

Uma observação: o espaço é chamado de *free loop space* em contraste com o *loop space*, que é definido como os mapas do círculo em um espaço topológico, porém com um ponto base.

[1] Uma função em $[0, 1]$ é *absolutamente contínua* quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que qualquer lista finita de intervalos $[x_k, y_k]$ satisfazendo $\sum |x_k - y_k| < \delta$ satisfaz também que $\sum d(f(x_k) - f(y_k)) < \epsilon$.

3.1 A Estrutura de Variedade de ΛM

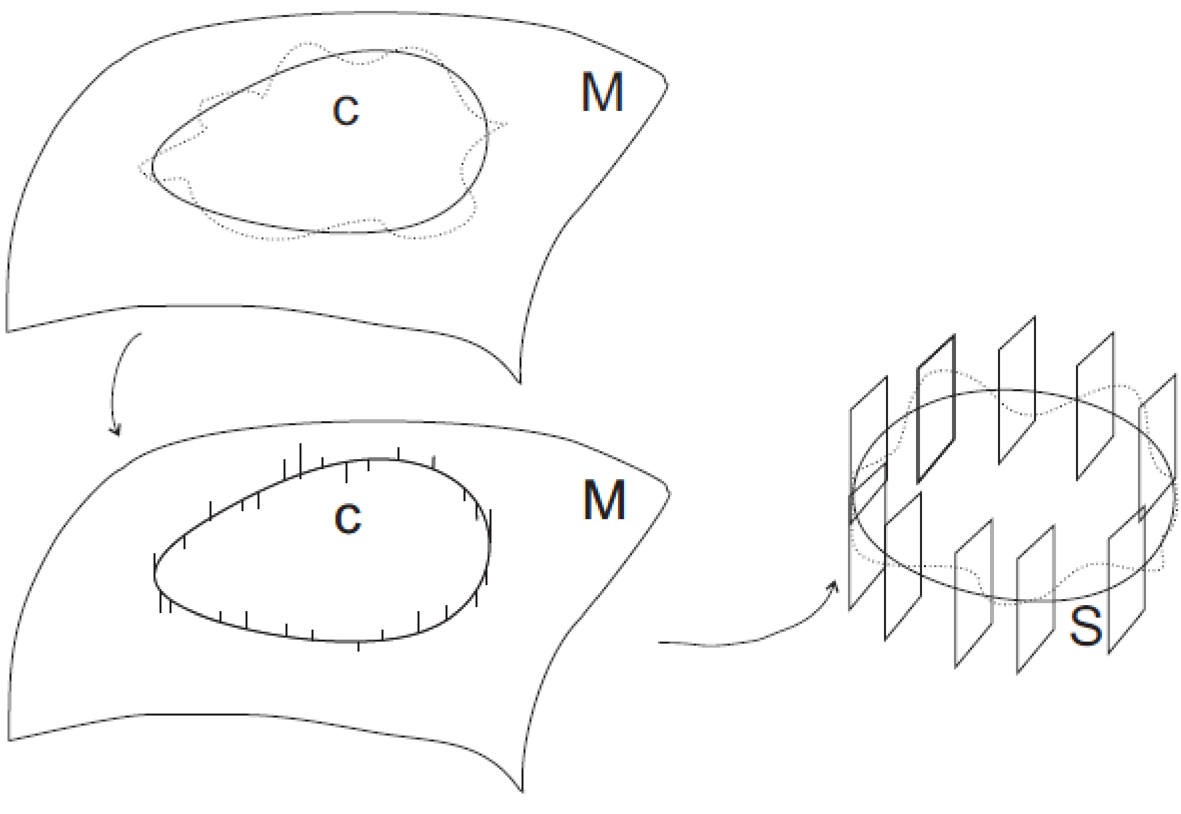
Seja M variedade Riemanniana compacta, ∇ a derivada covariante originada da conexão de Levi-Cività, e $S = [0,1]/\{0,1\}$ novamente o círculo de tamanho 1.

Estabeleceremos as seguintes notações:

- $C^0(S, M) :=$ conjunto de mapas C^0 de S em M.
- $C^\infty(S, M) :=$ conjunto de mapas C^∞ de S em M.
- $H^0(S, M) :=$ conjunto de mapas H^0 de S em M. [2]
- $H^1(S, M) :=$ conjunto de mapas H^1 de S em M.
- $H^r(c^*TM) :=$ conjunto de seções H^r no fibrado $c^*\tau$.

Antes de prosseguir, daremos uma ideia de como a construção da nossa variedade será feita. Pegaremos um loop C^∞ em M, e olharemos para uma vizinhança desse loop no fibrado tangente, de forma que o mapa exponencial esteja bem definido e seja injetivo (na verdade, como a variedade é compacta, ele está sempre bem-definido). Com ele, iremos puxar os outros loops próximos ao nosso loop inicial, e jogaremos eles "de volta" para nosso espaço $H^1(c^*TM)$ através do pullback do fibrado. Essas serão nossas cartas locais.

A figura a seguir ilustra o processo.



[2]os mapas H^0 podem ser caracterizados como mapas de quadrado integrável. Veja Apêndice.

Os “vetores ortogonais” a c na segunda imagem são ilustrações dos vetores do espaço tangente que são mandados na curva perto de c pelo mapa exponencial.

Definição 3.1.1. Sendo ξ e ξ' seções em $H^0(c^*TM), H^1(c^*TM)$ e $C^0(c^*TM)$ respectivamente, definimos os produtos internos

- $\langle \xi, \xi' \rangle_0 := \int_S \langle \xi(t), \xi'(t) \rangle_t dt.$
- $\langle \xi, \xi' \rangle_1 := \langle \xi, \xi' \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0$.[3]
- $\|\xi\|_\infty := \sup |\xi(t)|.$

Proposição 3.1.2.

- $\xi \in C^0 \Rightarrow \|\xi\|_0 \leq \|\xi\|_\infty .$
- $\xi \in H^1 \Rightarrow \|\xi\|_\infty^2 \leq 2 \|\xi\|_1^2 .$

Demonstração. Para o primeiro item, note que

$$\|\xi\|_0^2 = \int_S \langle \xi, \xi \rangle \leq \int_S \|\xi\|_\infty^2 = \|\xi\|_\infty^2 .$$

Para o segundo item, considere t_1 tal que $|\xi(t_1)|$ é mínimo, e t_2 tal que $|\xi(t_2)|$ é máximo. Como t varia sobre o círculo, tais valores estão bem definidos. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_\infty^2 &= |\xi(t_1)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} |\xi(t)|^2 dt \\
&\leq |\xi(t_1)|^2 + 2 \int_S |\xi(t)| |\nabla \xi(t)| dt \\
&\leq \langle \xi, \xi \rangle_0 + \langle \xi, \xi \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \xi \rangle_0 \leq 2 \|\xi\|_1^2 ,
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da derivação junto com Cauchy-Schwartz e o fato de que o integrando é positivo e a segunda segue do fato que $2 \int f.g \leq \int f^2 + \int g^2$, pois $2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$. Além disso, como $|\xi(t_1)|^2$ é mínimo, $|\xi(t_1)|^2 = \int_S |\xi(t_1)|^2 \leq \int_S |\xi(t)|^2 dt$.

□

Corolário 3.1.3. *As inclusões*

$$H^1(c^*TM) \hookrightarrow C^0(c^*TM) \hookrightarrow H^0(c^*TM)$$

são contínuas. [4]

Proposição 3.1.4. *Seja $\mathcal{O}$ um aberto do espaço total $\pi : E \to S$, onde* $\dim \mathbb{E} < \infty$, *de forma que $\mathcal{O}_t := \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(t)$ é não-vazio para todo $t \in S$.* [5]

Então, $H^1(\mathcal{O}) := \{\xi \in H^1(E); \quad \xi(t) \in \mathcal{O}_t \ \ \forall t \in S\}$ é aberto em $H^1(E)$.

---

[3] $\nabla \xi := \nabla_c \xi(t)$.

[4] Note que as topologias não são as topologias induzidas, então não é imediato a continuidade das inclusões.

[5] Assumimos que π tem uma métrica Riemanniana e uma conexão Riemanniana.

Demonstração. Considere $\xi \in H^1(\mathcal{O})$. Por compacidade, existe um $\epsilon > 0$ de forma que se $\eta \in H^1(E)$ e $|\eta(t) - \xi(t)|^2 < 2\epsilon^2$ para todo $t \in S$, então $\eta(t) \in \mathcal{O}_t$ para todo $t \in S$. Assim sendo, temos que $\|\eta - \xi\|_1 < \epsilon$ implica $\eta \in H^1(\mathcal{O})$, pelas desigualdades provadas na Proposição 3.1.2. $\square$

Proposição 3.1.5. *Sejam $\pi : E \to S$, $\phi : F \to S$ e $\mathcal{O} \subset E$ como na proposição anterior. Assuma que*

$$f : \mathcal{O} \to F$$

seja um mapa de fibrado diferenciável ($\phi \circ f = \pi$).

Então, tem-se que o mapa induzido

$$\tilde{f} : H^1(\mathcal{O}) \to H^1(F); \quad (\xi(t)) \mapsto (f \circ \xi(t))$$

é contínuo.

Demonstração. Primeiramente, observamos que o fibrado é sobre o círculo, que é compacto. Assim, o mapa induzido realmente levará um mapa de $H^1(\mathcal{O})$ para $H^1(F)$.

Se $\|\eta - \xi\|_1$ tende a 0, então $\|\eta - \xi\|_\infty$ e $\|\nabla\eta - \nabla\xi\|_0$ também tendem devido às desigualdades provadas. Além disso, $\left\|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)\right\|_0$ também tende a 0, pois $\left\|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)\right\|_0 \leq \left\|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)\right\|_\infty$.

Resta mostrar então que $\left\|\nabla\tilde{f}(\eta) - \nabla\tilde{f}(\xi)\right\|$ tende a 0.

Agora, considere a decomposição $\eta'(t) = \eta'(t)_h + \eta'(t)_v$ da derivada de η nas suas componentes horizontal e vertical. Pelas considerações da seção anterior, temos que $\eta'(t)_h$ é localmente $(t, \eta(t), \partial t, -\Gamma_t(\delta t, \eta(t)))$, e $\eta'(t)_v$ pode ser identificado com $\nabla\eta(t)$.

Faça

$$Df(\eta(t)) = D_1 f(\eta(t)) + D_2 f(\eta(t)),$$

onde o lado direito é a projeção de Df às partes horizontais e verticais respectivamente. Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla(f \circ \eta)(t) - \nabla(f \circ \xi)(t) &= K \circ Tf(\eta'(t)) - K \circ Tf(\xi'(t)) \\
&= K \circ Tf(\eta'(t)_h + \eta'(t)_v) - K \circ Tf(\xi'(t)_h + \eta'(t)_v) \\
&= K \circ Tf(\eta'(t)_h) + K \circ Tf(\eta'(t)_v) - \\
& K \circ Tf(\xi'(t)_h) - K \circ Tf(\xi'(t)_v) \\
&= K \circ Tf(\eta'(t)_v) - K \circ Tf(\xi'(t)_v) + \epsilon(\eta(t), \xi(t)) \\
&= D_2 f(\eta(t)).\nabla\eta(t) - D_2 f(\xi(t)).\nabla\xi(t) + \epsilon(\eta(t), \xi(t)) \\
&= D_2 f(\eta(t)).(\nabla\eta(t) - \nabla\xi(t)) + (D_2 f(\eta(t)) - D_2 f(\xi(t))).\nabla\xi(t) \\
&+ \epsilon(\eta(t), \xi(t)),
\end{aligned}$$

onde $\epsilon(\eta(t), \xi(t))$ tende a 0 quando $\|\xi - \eta\|_\infty$ tende a 0. Assim, como o resto também tende a 0, temos que $\left\|\nabla\tilde{f}(\eta) - \nabla\tilde{f}(\xi)\right\|_0$ tende a 0. $\square$

O próximo lema nos permitirá garantir a diferenciabilidade de diversas funções no nosso estudo. Por exemplo, a troca de cartas no nosso contexto será diferenciável devido a ele.

Lema 3.1.6 (Lema de Palais)**.** *Seja $f : \mathcal{O} \subset E \to F$ um mapa de fibrado diferenciável.*

Então, o mapa induzido $\tilde{f} : H^1(\mathcal{O}) \to H^1(F)$ é diferenciável com $D\tilde{f} = \widetilde{(D_2 f)}$

Demonstração. Pela fórmula de Taylor com resto integral (ver Apêndice), temos que

$$f(\eta(t)) - f(\xi(t)) - D_2 f(\xi(t))(\eta(t) - \xi(t)) = r(\xi(t), \eta(t)).(\eta(t) - \xi(t)),$$

onde r é um mapa de fibrado que leva um aberto $\mathcal{O}' \times \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, com $\mathcal{O}'$ convexo, no fibrado $L(\pi, \phi) : L(E, F) \to S$.

É importante notar o por que de termos apenas $D_2 f$ na fórmula: η e ξ são seções diferenciáveis. Quando fixamos t, resta apenas a variação vertical (na fibra). Assim, só temos a componente $D_2 f$ na fórmula.

A proposição anterior nos garante a continuidade de $\tilde{r} : H^1(\mathcal{O}' \times \mathcal{O}') \to H^1(L(E, F))$ (o mapa induzido por r, da mesma forma que na proposição).

Assim, temos que

$$\left\| \tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi) - (\widetilde{D_2 f}(\xi))(\eta - \xi) \right\|_1 = \|\tilde{r}(\xi, \eta)(\eta - \xi)\|_1 \leq C \left\| r(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right\|_1 \|\eta - \xi\|_1 .$$

Concluímos então que $\tilde{f}$ é diferenciável, e $D\tilde{f} = (\tilde{D_2} f)$.

Analogamente, $D^r \tilde{f} = (\tilde{D_2^r} f)$. □

Agora temos as ferramentas necessárias para começar a pensar nas cartas locais da nossa variedade. A imagem a se ter na cabeça é a da página 8. Como usaremos o mapa exponencial, lembramos o seguinte teorema de Geometria Riemanniana que diz essencialmente que o mapa exponencial é um difeomorfismo local.

Teorema 3.1.7. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Para um $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{O}_\epsilon$ a ϵ-vizinhança aberta da seção nula de $\tau : TM \to M$ (ou seja, $\mathcal{O}_\epsilon = \{\xi \in TM : \|\xi\| < \epsilon\}$.* [6]*.*

Então, existe um $\epsilon > 0$ tal que o mapa

$$(\tau, \exp) : \mathcal{O}_\epsilon \to M \times M$$

$$\xi \mapsto (\tau(\xi), \exp(\xi))$$

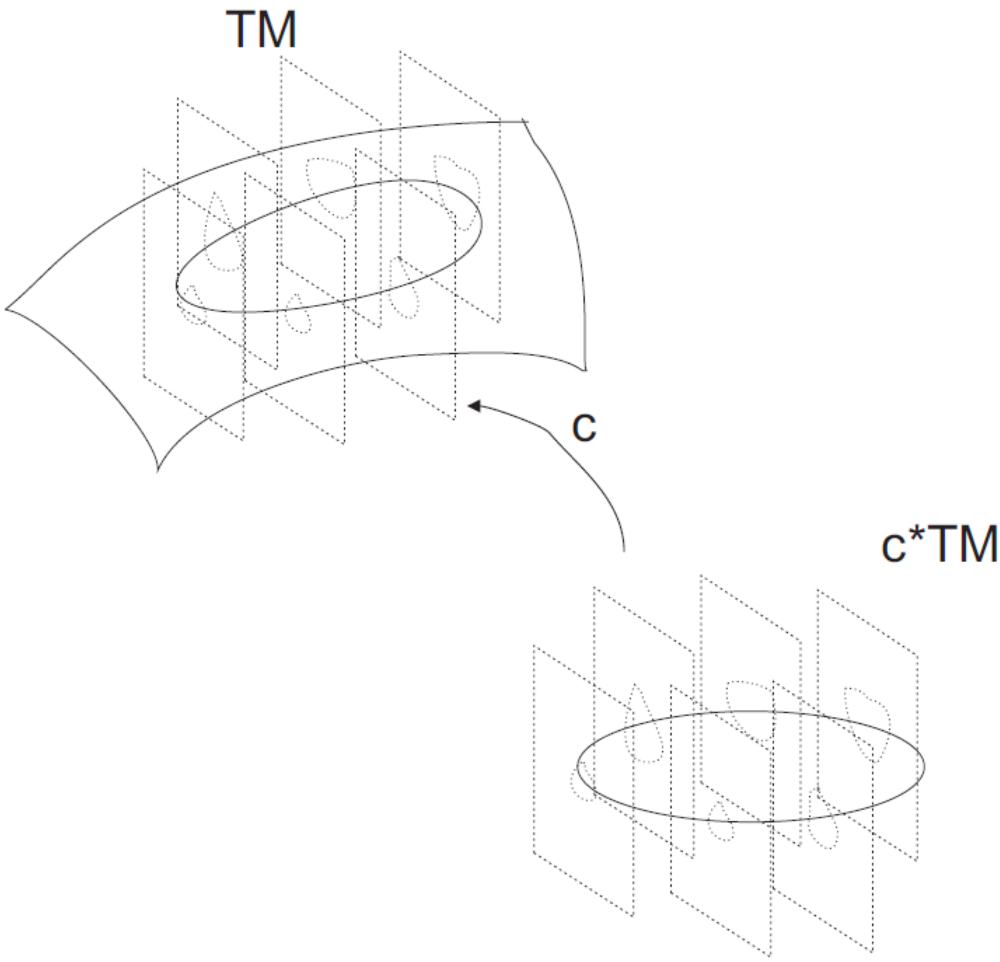
é um difeomorfismo em alguma vizinhança aberta da diagonal em $M \times M$.

Notamos que, em particular, $\exp|_{\mathcal{O}_p := \mathcal{O} \cap T_p M}$ é injetiva.

Para tal $\mathcal{O} \subset TM$, denotamos seu pullback para o fibrado pullback derivado de uma curva $c : S \to M$ que é C^∞ como

$$\mathcal{O}_c = c^* \mathcal{O} \subset c^* TM.$$

[6] Também escreveremos $\mathcal{O}$ em vez de $\mathcal{O}_\epsilon$, por conveniência.



Na figura acima, cada círculo na fibra ilustra a interseção de $\mathcal{O}$ com cada fibra T_pM. Vemos então o que é $\mathcal{O}_c$: o pullback de $\mathcal{O}$. Em termos intuitivos, estamos transportando o aberto $\mathcal{O}$, "sobre" a variedade M, para algo "sobre" o círculo.

Finalmente, podemos definir o que serão nossas cartas locais. Serão os mapas da forma

$$\exp_c : H^1(\mathcal{O}_c) \to H^1(S, M),$$

$$\xi = (\xi(t)) \mapsto (\exp(\tau^* c\xi(t))).$$

Em primeiro lugar, observamos que o mapa definido acima é injetivo, e que sua imagem é $\{e \in H^1(S, M);\ e(t) \in \exp(\mathcal{O} \cap T_{c(t)}M)\}$.

Colocamos $\mathcal{U}(c) = \exp_c H^1(\mathcal{O}_c)$, e provamos que a troca de cartas é diferenciável.

Lema 3.1.8 (Diferenciabilidade da Troca de Cartas)**.** *Sejam $c, d \in C^\infty(S, M)$. Então*

$$\exp_d^{-1} \circ \exp_c : \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)) \to \exp_d^{-1}(\mathcal{U}(d) \cap \mathcal{U}(c))$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. Para cada $t \in S$, defina

$$\mathcal{O}_{c,d,t} := \mathcal{O}_{c,t} \cap (\exp \circ \tau^* c)^{-1} \circ (\exp \circ \tau^* d)\mathcal{O}_{d,t}.$$

Este mapa está levando a curva "ponto a ponto" de uma carta para outra. Agora, faça

$$\mathcal{O}_{c,d} = \bigcup_t \mathcal{O}_{c,d,t}.$$

Pela observação acima, temos que

$$H^1(\mathcal{O}_{c,d}) = \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)).$$

Agora, é evidente que o mapa

$$f_{d,c} := (\exp \circ \tau^* d)^{-1} \circ (\exp \circ \tau^* c) : \mathcal{O}_{c,d} \to d^*TM$$

é um mapa de fibrado e que $\exp_d^{-1} \circ \exp_c = \tilde{f_{d,c}}$.

Temos, pelas propriedades da propriedade exponencial (listadas no Teorema 2.1.7) e pelo Lema de Palais, que $\tilde{f_{d,c}}$ é diferenciável. □

Observação 3.1.9. Para ficar mais claro o que foi feito, note a progressão das construções:

Primeiro, focamos nos mapas ponto a ponto (isto está embutido na definição de $\mathcal{O}_{c,d,t}$). Após isso, vemos o mapa $f_{d,c}$, que é um mapa de fibrados. Depois, vemos o mapa induzido por esse mapa, no contexto do lema de Palais e do lema que o precede.

Com isso em mãos, podemos concluir a construção da estrutura de variedade de Hilbert de $H^1(S, M)$.

Teorema 3.1.10. *$H^1(S, M)$ é uma variedade de Hilbert.*

Demonstração. Devemos checar que

1. Existe um atlas (nas condições da definição do primeiro capítulo),
2. $H^1(S, M)$ tem base contável.

Em relação ao primeiro item, temos que os conjuntos $\mathcal{U}(c)$, com $c \in C^\infty(S, M)$, são uma cobertura aberta de $H^1(S, M)$. Isto segue devido à densidade das funções C^∞ em H^1. Desta forma, as cartas $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ nos fornecem nosso atlas, que é diferenciável devido ao lema anterior. [7]

O segundo item requer um pouco mais de trabalho. Usaremos fortemente a compacidade de M.

Para mostrar que $H^1(S, M)$ tem uma base contável, mostraremos um subatlas contável do nosso atlas original. Para isso, mostraremos que as curvas de energia limitada por um certo valor podem ser cobertas por um subconjunto finito do atlas.

Assim sendo, para cada inteiro $E > 0$, coloquemos

$$H^1(S, M)^E := \{c \in H^1(S, M); \int_S \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \leq 2E\}.$$

[7] Note que as imagens das cartas são a priori diferentes, uma vez que são os espaços de Hilbert separáveis $H^1(c^*TM)$. Mas são todos equivalentes de forma canônica.

Agora, escolha $\epsilon > 0$ de forma a valer o Teorema 3.1.7 e um $m := (m, E)$ para o qual $18E < m\epsilon^2$. Temos então que para qualquer $\gamma \in H^1(S, M)^E$ vale que

$$\begin{aligned} d_M(\gamma_{j-1}, \gamma_j)^2 &\leq \left(\int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{m} \int_S \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \leq \frac{2E}{M} \leq \frac{\epsilon^2}{9}, \end{aligned}$$

onde $\gamma_j := \gamma(\frac{j}{m})$.

Assim sendo, o segmento $\gamma|_{[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]}$ está contido em uma $\frac{\epsilon}{3}$-bola.

Usando a compacidade de M, tome um conjunto finito P de pontos em M de forma que as $\frac{\epsilon}{3}$-bolas em volta desses pontos cubram M. Dado $\gamma \in H^1(S, M)^E$, achamos um subconjunto $\{p_1, ..., p_m\}$ de P tal que $\gamma_j \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(p_j)$.

Agora, para cada possível combinação de m elementos de P, fazemos uma curva c que seja C^∞ e tal que $c(\frac{j}{m}) = p_j$. É evidente agora que $\gamma \in \mathcal{U}(c)$ para alguma c. $\square$

Terminamos esta seção com um teorema bastante interessante. Ele nos diz, em particular, que calcularmos a homologia do free loop space também nos fornece informação sobre a homologia de $C^0(S, M)$, que é um espaço a priori mais bem comportado. Como não usaremos o teorema nesta dissertação, omitimos a demonstração.

Teorema 3.1.11. *$H^1(S, M)$ é homotopicamente equivalente a $C^0(S, M)$.*

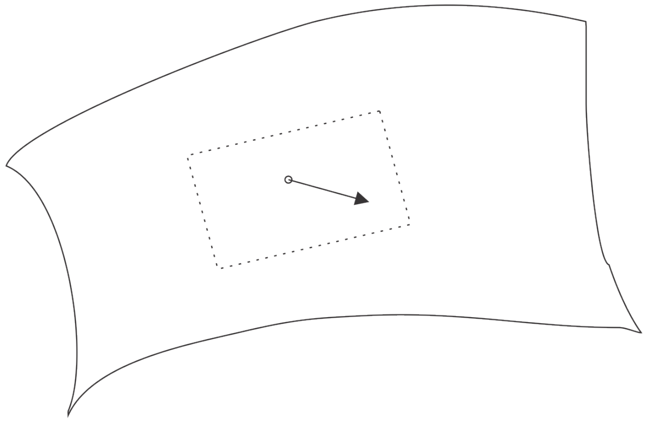
De fato, a própria inclusão é uma equivalência homotópica.

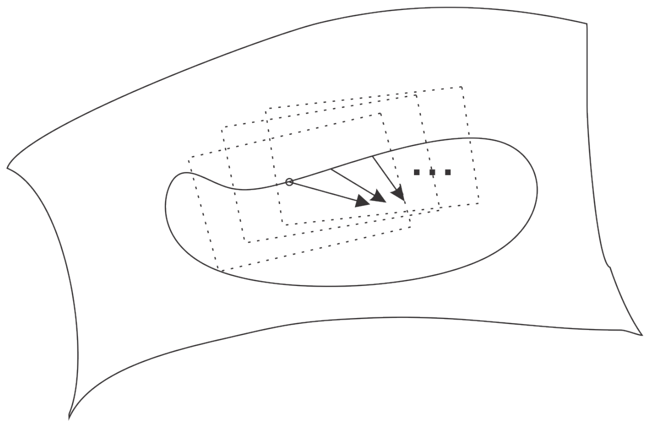
Como o objetivo final desta dissertação é computar grupos de homologia do espaço $H^1(S, M)$, para M suficientemente bem comportados, o teorema anterior nos garante que nossos cálculos servirão também para $C^0(S, M)$.

3.2 O Fibrado Tangente e a Métrica Riemanniana do Free Loop Space

Agora nos direcionamos a analisar o fibrado tangente do Free Loop Space $H^1(S, M)$, ao qual nos referiremos a partir de agora como ΛM ou simplemente Λ.

Como um elemento do espaço tangente de um ponto em uma variedade de dimensão finita M é um vetor tangente a esta variedade, é natural pensarmos que um elemento do espaço tangente de um ponto de Λ (que é uma curva) vai ser um campo vetorial ao longo da curva c. Veja a figura a seguir.





Porém, sendo uma variedade Riemanniana, nós temos uma definição canônica de $T\Lambda$ que não tem por que ser equivalente à interpretação acima. Mostraremos, no entanto, que o fibrado descrito intuitivamente acima é isomorfo ao fibrado tangente.

Nesta seção forneceremos também estruturas para o fibrado tangente, como por exemplo uma métrica Riemanniana.

Definimos, então, dois fibrados

$$\alpha^r : H^r(H^1(S,M)^*TM) \to H^1(S,M), \quad r = 0,1,$$

onde a fibra sobre $c \in H^1(S,M)$ consiste dos campos vetoriais de classe H^r ao longo de c.

Temos, a priori, apenas uma junção de fibras sem estrutura alguma. Prosseguimos então para justificar que tal junção pode ser munida de uma estrutura de fibrado.

Para tais objetivos, será útil o próximo lema.

Lema 3.2.1. *Considere fibrados $\pi_j : E_j \to S$, $1 \le j \le k$, $\phi : F \to S$ de dimensão finita. sobre S. Então, as inclusões canônicas*

$$H^1(L(E_1, E_2, ..., E_k; F)) \hookrightarrow L(H^0(E_1), H^1(E_2), ..., H^1(E_k); H^0(F)),$$

$$H^1(L(E_1, E_2, ..., E_k; F)) \hookrightarrow L(H^1(E_1), H^1(E_2), ..., H^1(E_k); H^1(F))$$

dadas por

$$A = (A\,(t)) \mapsto \{\tilde{A} : (\xi_1, ..., \xi_k) \mapsto (A\,(t)\,.(\xi_1(t), ..., \xi_k(t))\}$$

são contínuas e lineares.

Demonstração. A demonstração segue das desigualdades

$$\left\|\tilde{A}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)\right\|_0^2 \leq 2^k \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_0^2 \|\xi_2\|_1^2 ... \|\xi_k\|_1^2,$$

$$\left\|\tilde{A}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)\right\|_1^2 \leq C \|A\|_1^2 \|\xi_1\|_1^2 \|\xi_2\|_1^2 ... \|\xi_k\|_1^2$$

concluídas através de uma manipulação direta. □

Agora, dado $\xi \in \mathcal{O}$, consideremos o mapa:

$$\nabla_2 \exp(\xi) : T_{\tau\xi}M \to T_{\exp\xi}M$$

$$\eta \to T\exp(\xi) \circ (K|_{T_{\xi_v}TM})^{-1}.\eta.$$

O mapa acima é o que dá origem aos isomorfismos de fibra. De fato, o mapa acima é claramente um isomorfismo.

Agora, definimos, para $r = 0, 1$,

$$\Phi_{r,c}^{-1} : H^1(\mathcal{O}_c) \times H^r(c^*TM) \to (\alpha^r)^{-1}\mathcal{U}(c)$$

$$(\xi(t), \eta_c(t)) \mapsto (\nabla_2 \exp(\tau^* c\xi(t)).\eta_c(t)).$$

Note que $\Phi_{r,c}$ age em um dado $(\alpha^r)^{-1}(c)$ como um isomorfismo, pelo que observamos acima.

Teorema 3.2.2. *Os mapas*

$$\left(\Phi_{r,c}, \exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c)\right), c \in C^\infty(S, M)$$

são representações locais do fibrado

$$\alpha^r : H^r\left(H^1(S, M)^*TM\right) \to \Lambda M,$$

onde a fibra em cada c é o espaço $H^r(S, c^*TM)$.

Em particular, α^1 é isomorfo canonicamente a $\tau : T\Lambda M \to \Lambda M$.

Demonstração. Para o caso $r = 1$, note que o mapa $\Phi_{1,d} \circ \Phi_{1,c}^{-1}$ é da forma $(\tilde{f_{d,c}}, (\widetilde{D_2 f_{d,c}}))$, com $f_{d,c}$ sendo a troca de cartas (ver o Lema 3.1.8). Dessa forma, o mapa realmente age como uma transição de representações de um fibrado.

Para ver o isomorfismo com $\tau : T\Lambda M \to \Lambda M$, simplesmente note que $(\widetilde{D_2 f_{d,c}}) = D\tilde{f}_{d,c}$.

Para o caso $r = 0$, note que o mapa $(\widetilde{D_2 f_{d,c}})$ seguido da inclusão canônica

$$H^1\left(L\left(c^*TM; d^*TM\right)\right) \hookrightarrow L\left(H^0\left(c^*TM\right); H^0\left(d^*TM\right)\right)$$

é um mapa diferenciável. □

Agora, novamente com $\xi \in \mathcal{O}$, definimos o mapa

$$\nabla_1 \exp(\xi) : T_{\tau\xi}M \to T_{\exp\xi}M$$

$$\eta \mapsto T\exp(\xi) \circ \left(T\tau|_{T_{\xi_h}TM}\right)^{-1} .\eta$$

que também é um isomorfismo.

Definimos também

$$\theta : \mathcal{O} \to L(TM;TM)$$

$$\xi \mapsto \nabla_2 \exp(\xi)^{-1} \circ \nabla_1 \exp(\xi).$$

Observação 3.2.3. Por questão de clareza, notamos que $L(TM;TM)$ é o fibrado sobre M onde cada fibra sobre x é $L(T_xM, T_xM)$, no sentido usual de mapas lineares.

Agora, dado um $c \in C^\infty(S, M)$, consideramos o seguinte mapa de fibrados:

$$\theta_c : \mathcal{O}_c \to c^*TM$$

$$\theta_c := (\tau^*c)^{-1} \circ \theta \circ \tau^*c.\partial c.$$

Note que o mapa acima não está rigorosamente descrito... θ é um mapa que leva $\mathcal{O}$ em $L(TM;TM)$, enquanto $(\tau^*c)^{-1}$ leva TM em c^*TM. Logo a composição como está não faz sentido.

O mapa acima é para ser entendido da seguinte forma: dado um elemento $\xi \in \mathcal{O}_c$, $\theta_c(\xi)(t) = (\tau^*c)^{-1}\left(\theta(\tau^*c \cdot \partial c(t))(\xi(t))\right)$.

Proposição 3.2.4. *O mapa*

$$\partial : \Lambda M \to \alpha^0$$

$$e \mapsto \partial e = \dot{e}$$

é uma seção diferenciável no fibrado α^0.

Ademais, na representação local de α^0 [8]*, a parte principal de ∂ é dada por*

$$\partial_c\xi(t) = \nabla_c\xi(t) + \theta_c(\xi(t)).$$

Demonstração. Sendo $e(t) = \exp(\tau^*c\xi(t))$, temos

$$\partial e(t) = T\exp(\tau^*c\xi(t)) \cdot (\tau^*c\dot{\xi}(t)_h + \tau^*c\dot{\xi}(t)_v).$$

Agora, notando que

$$T\tau \cdot \tau^*c\dot{\xi}(t)_h = \partial c(t)$$

e

$$K \cdot \tau^*c\xi(t)_v = \nabla(\tau^*c\xi(t)),$$

temos que

$$\begin{aligned} \partial e(t) &= \nabla_1 \exp(\tau^*c\xi(t)) \cdot \partial c(t) + \nabla_2 \exp(\tau^*c\xi(t)) \cdot \nabla(\tau^*c\xi(t)) \\ &= \nabla_2 \exp(\tau^*c\xi(t)) \circ \tau^*c \cdot (\nabla_c\xi(t) + \theta_c(\xi(t))). \end{aligned}$$

□

[8] Dada por $H^1\mathcal{O}_c \times H^0(c^*TM)$.

Proposição 3.2.5. *$\langle , \rangle_0$ induz uma métrica Riemanniana no fibrado α^0. Mais precisamente, existe uma métrica Riemanniana em α^0 de forma que, em $(\alpha^0)^{-1}(c) = H^0(c^*TM)$, com $c \in C^\infty(S, M)$, a métrica é dada pelo produto $\langle , \rangle_0$.*

Assim sendo, denotaremos essa métrica também por $\langle , \rangle_0$.

Demonstração. Defina
$$G : \mathcal{O} \subset TM \to L(TM; TM)$$
$$\xi \mapsto G(\xi),$$
onde $G(\xi)$ é caracterizado pela seguinte propriedade:

$$\langle G(\xi)(\cdot), \cdot \rangle_{\tau\xi} = \langle \nabla_2 \exp(\xi)(\cdot), \nabla_2 \exp(\xi)(\cdot) \rangle_{\exp \xi}.$$

Temos então que $G(\xi)$ é um operador C^∞ auto-adjunto positivo definido.

Tomando a "representação local"

$$G_c := (\tau^* c)^{-1} \circ G \circ (\tau^* c) : \mathcal{O}_c \to L(c^*TM; c^*TM),$$

que é um mapa de fibrados, vemos que o mapa

$$\tilde{G}_c : H^1(\mathcal{O}_c) \to H^1(L(c^*TM; c^*TM)) \mapsto L(H^0(c^*TM); H^0(c^*TM))$$

é também um operador C^∞ auto-adjunto positivo definido. Assim sendo, $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c) \mapsto \langle \tilde{G_c}(\xi)(\cdot), \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana em $H^1(\mathcal{O}_c)$. [9]

Ademais, se $\xi = 0$, ou seja, é a seção nula, temos que $\tilde{G}_c = Id$, de forma que em $H^0(c^*TM)$ a métrica coincida com $\langle , \rangle_0$. Como as curvas C^∞ são densas em ΛM, esta propriedade caracteriza unicamente nossa métrica, dando sentido ao termo "métrica induzida". □

Proposição 3.2.6. *A conexão de Levi-Cività K no fibrado τ_M induz uma conexão Riemanniana K_{α^0} em α^0.*

Demonstração. A prova segue a mesma ideia da construção da conexão de Levi-Cività. Como as coisas ficam evidentes a partir da definição dos símbolos de Christoffel, omitimos a prova, mas exibimos os símbolos.

Assim, seja
$$\Gamma : \mathcal{O} \to L^2(TM; TM)$$
definido por

$$\begin{aligned} 2\langle G(\xi)\Gamma(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle \equiv\ & \langle D_2 G(\xi) \cdot (\eta, \zeta), \theta \rangle_{\tau\xi} \\ & + \langle D_2 G(\xi) \cdot (\zeta, \theta), \eta \rangle_{\tau\xi} \\ & - \langle D_2 G(\xi) \cdot (\theta, \eta), \zeta \rangle_{\tau\xi}. \end{aligned}$$

[10] □

[9] É fácil verificar que não depende da escolha de representação local.

[10] Note a semelhança com como é feito a definição dos símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Cività no fibrado τ_M.

Lembramos que, tendo uma conexão Riemanniana em α^0, temos também a noção de derivada covariante. Isso vem do que desenvolvemos no primeiro capítulo (lembre que desenvolvemos a teoria justamente em variedades Hilbertianas).

Proposição 3.2.7. *A derivada covariante $\nabla_{\alpha^0}\partial$ da seção ∂ em α^0 é uma seção diferenciável no fibrado*

$$L(\alpha^1; \alpha^0) : L(H^1(H^1(S, M)^*TM); H^0(H^1(S, M)^*TM)) \to \Lambda M.$$

Demonstração. Tome $e \in \mathcal{U}_c$ e $\eta \in T_e\Lambda M$. Sendo $\xi \in H^1(\mathcal{O}_c)$ o representante local de e, temos que a parte principal de $\nabla_{\alpha^0}\partial e.\eta$ é

$$D(\partial_c(\xi(t))) \cdot \eta(t) + \Gamma_c(\xi(t)) \cdot (\eta(t), \partial_c\xi(t)).$$

Usando a linearidade de ∇ e o fato de que θ_c é um mapa de fibrados, temos que isto é

$$\nabla\eta(t) + D_2(\theta_c(\xi(t))) \cdot \eta(t) + \Gamma_c(\xi(t)) \cdot (\eta(t), \partial_c\xi(t)).$$

Assim, como a seção possui essa representação local, concluímos a diferenciabilidade. $\square$

Proposição 3.2.8. *$\langle , \rangle_1$ induz uma métrica Riemanniana no fibrado α^1. Mais precisamente, existe uma métrica Riemanniana em α^1 de forma que, em $T_c\Lambda M \cong H^1(c^*TM)$, com $c \in C^\infty(S, M)$, a métrica é dada pelo produto $\langle , \rangle_1$.*

Assim sendo, denotaremos essa métrica também por $\langle , \rangle_1$.

Demonstração. Faça, em $T_e\Lambda M$, o seguinte produto

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 := \langle \cdot, \cdot \rangle_0 + \langle (\nabla_{\alpha^0}\partial e)(\cdot), (\nabla_{\alpha^0}\partial e)(\cdot) \rangle_0.$$

$\square$

Lembrando que denotamos $\mathcal{O}$ como uma vizinhança na qual o mapa exponencial é um difeo, fazemos

$$\tilde{\mathcal{O}} := \{\eta \in T\Lambda M; \eta(t) \in \mathcal{O} \subset TM\}.$$

Notamos que, pela forma que é definido, temos que $\tilde{\mathcal{O}} \cap T_c\Lambda M \cong H^1(\mathcal{O}_c)$.

Nosso objetivo agora é usar os mapas $\exp_c$ definidos localmente para definir um mapa global $\widetilde{\exp} : \tilde{\mathcal{O}} \to \Lambda$. É válido notar que esse mapa que iremos formar "colando" as exponenciais $\exp_c$ localmente **não** é o mapa exponencial dado pela conexão de Levi-Cività originada da métrica $\langle , \rangle_1$ que colocamos em ΛM. Como esta discussão não é importante para nós, não entraremos em mais detalhes.

Teorema 3.2.9. *O mapa*

$$\tau_{\Lambda M} \times \widetilde{\exp} : \tilde{\mathcal{O}} \to \Lambda M \times \Lambda M$$

$$(\eta(t)) \mapsto (\tau_M\eta(t), \exp(\eta(t)))$$

é diferenciável e, para uma vizinhança suficientemente pequena da seção nula, é um difeomorfismo com sua imagem (uma vizinhança aberta da diagonal $\Lambda \times \Lambda$).

Demonstração. A representação local de $\widetilde{\exp}$ é

$$(\exp \circ \tau^* c)^{-1} \circ \exp \circ \nabla_2 \exp(\tau^* c \xi(t)) \cdot \eta_c(t),$$

onde $\xi(t)$ é a representação local de c e $\eta_c(t)$ é a representação local de um vetor tangente a c (ou seja, ou campo vetorial H^1 sobre c). Dessa forma, temos que $\widetilde{\exp}$ é diferenciável.

Como, na representação local,

$$(\tau_{\Lambda M} \times \widetilde{\exp})(0, \eta_c(t)) = (0, \eta_c(t)),$$

$$(\tau_{\Lambda M} \times \widetilde{\exp})(\xi(t), 0) = (\xi(t), \xi(t)),$$

temos que a derivada em $0 \in T_c \Lambda M$ é um isomorfismo. Segue então que $(\tau_{\Lambda M} \times \widetilde{\exp})$ é um difeomorfismo local ao redor da seção zero.

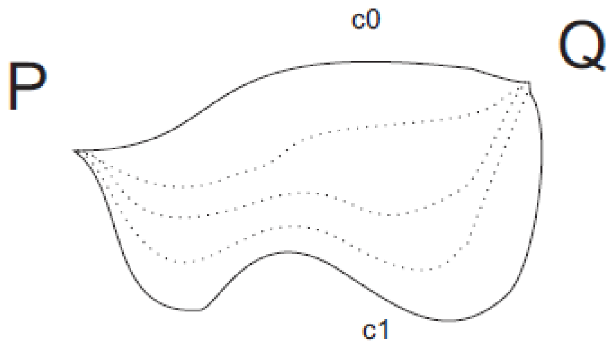
□

Corolário 3.2.10. *Dado $c \in \Lambda$, existe uma carta local $(\exp_c^{-1}, \mathcal{U}(c))$ ao redor de c onde*

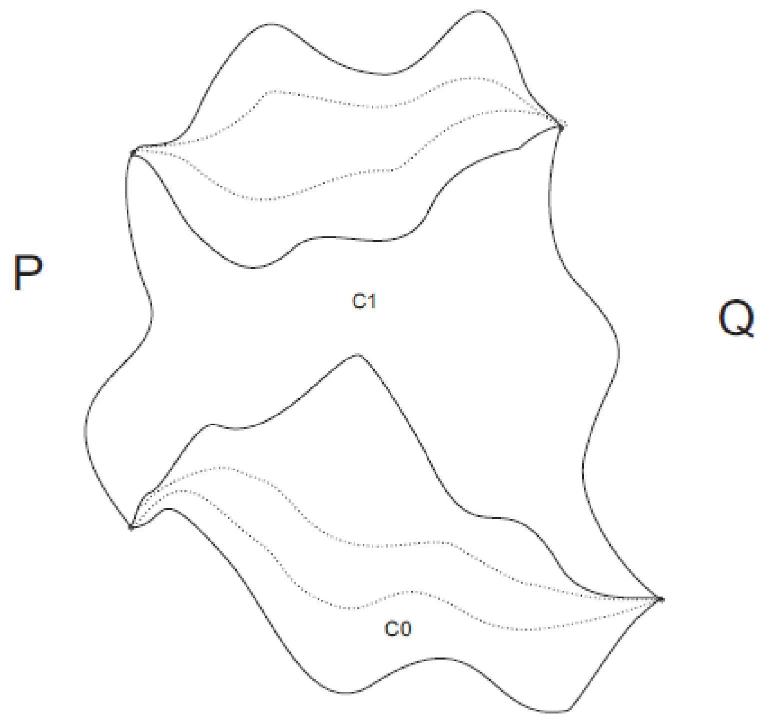
$$\exp_c = \widetilde{\exp}|_{\mathcal{O} \cap T_c \Lambda}.$$

Como terminamos toda a construção estrutural de variedade do nosso free loop space, terminamos o capítulo com uma tentativa de analisar a intuição do nosso objeto em questão.

Para tal, façamos uma analogia. Dadas duas curvas c_0 e c_1, uma homotopia entre elas pode ser visualizada da seguinte forma:



Porém, no free loop space, nossos pontos são curvas. Assim, podemos visualizar uma curva entre pontos como uma superfície, e uma homotopia entre curvas sendo uma deformação de uma superfície em outra. A figura abaixo ilustra o que acaba de ser dito. Note, porém, que essas curvas não são elementos do free loop space, já que não são fechadas.



Assim, já podemos ter uma ideia de uma mudança significativa da topologia do nosso espaço para a topologia do free loop space.

De fato, tome a esfera S^2. Seu primeiro grupo de homotopia é trivial. Agora, considere um grande círculo da esfera, e a superfície obtida rodando ele em torno do seu "eixo". Essa superfície não pode ser deformada de volta para a curva, por motivos análogos ao fato de a esfera não ser contrátil. Assim, temos que o π_1 de ΛS^2 não é trivial.

Capítulo 4

O Funcional de Energia

Physics is mathematical not because we know so much about the physical world, but because we know so little; it is only its mathematical properties that we can discover.

Bertrand Russell

Introdução

Definiremos neste capítulo o funcional de energia e obteremos suas propriedades fundamentais, como por exemplo a caracterização de geodésicas fechadas como pontos críticos e o fato de ele satisfazer à condição (C) de Palais-Smale, que é o que permite (junto com algumas condições sobre as subvariedades críticas) a extensão da teoria de Morse a ΛM.

O funcional de energia tem uma interpretação física simples: ele nos dá o funcional de ação da lagrangiana dada pela energia cinética de uma partícula de massa unitária. Assim sendo, como a lagrangiana não tem uma parte potencial, temos que as curvas que minimizam essa ação são dadas pelo movimento descrito por uma partícula que não está sofrendo forças na variedade, isto é, são geodésicas.

4.1 Definição e Caracterização das Geodésicas

Definição 4.1.1. Dada uma curva $c \in \Lambda M$, definimos

$$E(c) := \frac{1}{2}\langle \partial c, \partial c \rangle_0.$$

Proposição 4.1.2. $E : \Lambda M \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável. Ademais,*

$$DE(c).\eta = \langle \partial c, \nabla \eta \rangle_0.$$

Demonstração. Como vimos no capítulo anterior, o mapa $\partial : \Lambda M \to \alpha^0$ é diferenciável. Como o produto interno é diferenciável, temos uma composição de duas funções diferenciáveis, de onde concluímos que E é diferenciável.

A fórmula segue do fato de a conexão em α^0 ser Riemanniana. De fato,

$$D\langle \partial c, \partial c\rangle_0 \cdot \eta = 2\langle \partial c, \nabla_{\alpha^0}\partial c \cdot \eta\rangle_0,$$

onde já fizemos a convenção de $\nabla_{\alpha^0}\partial c.\eta = \nabla\eta$. □

Teorema 4.1.3 (Caracterização de Geodésicas Fechadas)**.** *$c \in \Lambda$ é uma geodésica fechada ou um mapa constante se e somente se é um ponto crítico do funcional de energia E.*

Demonstração. Se c é uma geodésica fechada ou um mapa constante, temos que

$$DE(c) \cdot \eta = \langle \partial c, \nabla\eta\rangle_0 = -\langle \nabla\partial c, \eta\rangle_0 = 0$$

por integração por partes, já que $\nabla\partial c = 0$.

Agora, se $DE(c) = 0$, então $\langle \nabla\partial c, \eta\rangle_0 = 0$ para todo η. Isto implica que $\nabla\partial c = 0$. Mas isto é dizer que c é uma solução fraca de $\nabla\partial c = 0$. Segue do Teorema de Regularidade Elíptica (ver Apêndice, 11.1) que c é diferenciável. Logo, uma geodésica fechada ou um mapa constante. □

4.2 A Condição (C) de Palais-Smale

Precisaremos de uma quantidade razoável de ferramentas antes de provar que nosso funcional satisfaz à condição (C) de Palais-Smale. Assim sendo, para não perder nosso foco e sabermos onde queremos chegar, definimos agora o que é esta condição.

Definição 4.2.1. [Condição (C) de Palais-Smale] Um funcional $E : \Lambda M \to \mathbb{R}$ é dito satisfazer à *condição (C) de Palais-Smale* se qualquer sequência $c_m \in \Lambda M$ que satisfaz as propriedades

- A sequência $E(c_m)$ é limitada.
- A sequência $\|\mathrm{grad}E(c_m)\|_1$ tende a 0.

possui necessariamente uma subsequência convergente e todo limite de subsequência é um ponto crítico de E.

Antes de prosseguir, observamos que essa condição é tomada do contexto de cálculo de variações, e deve ser vista como uma "substituta" de compacidade. De fato, o "(C)" vem de compacidade.

Proposição 4.2.2. *Dados $c_1, c_2 \in \Lambda M$, temos que*

1. $d_M^2\left(c_1\left(t_0\right), c_1\left(t_1\right)\right) \leq |t_1 - t_0| 2E(c_1)$.
2. $d_\infty^2(c_1, c_2) \leq 2d_\Lambda^2(c_1, c_2)$.
3. $|\sqrt{2E(c_1)} - \sqrt{2E(c_2)}| \leq d_\Lambda(c_1, c_2)$.

Demonstração. Demonstramos cada item um por vez.

1. $d_M^2\left(c\left(t_0\right), c\left(t_1\right)\right) \leq \int_{t_0}^{t_1}|\dot{c}(t)| dt \leq\left|t_1-t_0\right| \int_{t_0}^{t_1}|\dot{c}(t)|^2 dt$.
2. Dada uma curva diferenciável $\kappa(s)$ em ΛM, temos o mapa

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}: & S \times I \rightarrow M \\ & (t, s) \mapsto \kappa(s)(t). \end{aligned}$$

Se fixarmos $t=t_0$, o mapa $\kappa(s)(t_0)$ é um mapa diferenciável, pois o mapa que pega uma curva c de ΛM e leva em $c(t)$ é diferenciável. Como S^1 é compacto, podemos escolher t_0 tal que

$$d_{\infty}(c_1, c_2)=d_M\left(c_1\left(t_0\right), c_2\left(t_0\right)\right).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} d_{\infty}^2(c_1, c_2)=d_M^2\left(c_1\left(t_0\right), c_2\left(t_1\right)\right) & \leq\left(\int_0^1\left|\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t_0, s)\right| ds\right)^2 \\ & \leq\left(\int_0^1 \max_t\left|\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s)\right| ds\right)^2 \\ & \leq 2\left(\int_0^1\left\|\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s)\right\|_1 ds\right)^2. \end{aligned}$$

3. Dada uma curva diferenciável $\kappa(s)$ em ΛM, assuma que $\kappa(s)$ não seja uma curva constante para todo s. Assim, temos que $\|\partial \kappa(s)\|_0$ nunca é zero. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|\partial \kappa(s)\|_0 & =\frac{1}{\|\partial \kappa(s)\|_0} \int_S\langle\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial t}(t, s), \nabla \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s)\rangle dt \\ & \leq \frac{1}{\|\partial \kappa(s)\|_0}\left(\int_S\left|\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial t}(t, s)\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_S\left|\nabla \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(t, s)\right|^2 dt\right)^2 \\ & \leq\left\|\frac{d \kappa}{d s}\right\|_1. \end{aligned}$$

Assim, integrando dos dois lados, temos que

$$\sqrt{2E(\kappa(1))}-\sqrt{2E(\kappa(0))} \leq L(\kappa).$$

Trocando c_1 por c_2 temos a desigualdade com o módulo.

Agora, se $\kappa(s)$ é uma curva constante para algum s, aproximamos κ por uma sequência de mapas tal que isso não ocorra. Assim, levando ao limite, temos o resultado.

□

Lema 4.2.3. *A inclusão*

$$\Lambda M=H^1(S, M) \hookrightarrow C^0(S, M)$$

é uniformemente contínua e compacta [1].

[1] Isto é, imagem de limitado é relativamente compacto.

Demonstração. A continuidade segue do segundo item da proposição anterior. Para a compacidade, usamos o teorema de Arzela-Ascoli, notando que a proposição anterior garante equicontinuidade e a compacidade de M garante a limitação pontual. □

Teorema 4.2.4. *$(\Lambda M, d_\Lambda)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Tome uma sequência de Cauchy c_n em ΛM. Usando que a inclusão é uniformemente contínua, temos que c_n é de Cauchy em $C^0(S, M)$. Como $C^0(S, M)$ é completo, a sequência converge para um $c \in C^0(S, M)$. Aproxime c por uma curva diferenciável c' de forma a colocar c_n dentro de uma vizinhança de carta local para n suficientemente grande.

Puxamos a sequência pelo mapa exponencial para $H^1(c'^*TM)$. Como este é completo, temos que nossa sequência converge aqui. Para concluir, apenas levamos ela de volta para ΛM, junto com seu limite.

□

Observação 4.2.5. Faremos as seguintes notações:

$$\Lambda^k M := \{c \in \Lambda M : E(c) \leq k\}.$$

$$\Lambda^{k-} M := \{c \in \Lambda M : E(c) < k\}.$$

A proposição seguinte mostra que a variedade está "dentro"de ΛM de forma agradável.

Proposição 4.2.6. *A inclusão canônica*

$$M \hookrightarrow \Lambda M$$

é um mergulho isométrico totalmente geodésico.

Demonstração. Omitimos a demonstração. Notamos que a "inclusão canônica" é o mapa que leva $p \mapsto c_p$, onde $c_p(t) = p$ para todo t. Ou seja, é o mapa que leva os pontos nas curvas constantes iguais aos pontos. □

Definição 4.2.7. Analogamente ao caso de dimensão finita, definimos o *campo gradiente* de E como o campo que satisfaz

$$\langle \mathrm{grad} E(c), \cdot \rangle_1 = (DE(c))(\cdot).$$

Observação 4.2.8. Quando c é diferenciável, temos então que o campo gradiente é a solução periódica de

$$\nabla^2 \eta(t) - \eta(t) = \nabla \partial c(t).$$

Chegamos agora ao ponto que desejamos: provar que o funcional de energia satisfaz à condição (C) de Palais-Smale.

Teorema 4.2.9. *E satisfaz à condição (C) de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja c_n uma sequência satisfazendo às hipóteses.

Antes de mais nada, notamos que é facil ver que todo limite de subsequência é ponto crítico. Isto segue da continuidade de DE. Resta então provar que existe alguma subsequência que converge.

Usando a primeira desigualdade da Proposição 4.2.2, temos equicontinuidade da sequência c_n. Como estamos sobre uma variedade compacta, $\{c_m(t_0)\}$ é relativamente compacto. Assim, podemos concluir através do Teorema de Arzela-Ascoli a existência de uma subsequência convergindo para um c de $\{c_n\}$ em $C^0(S, M)$.

Note, porém, que esta convergência ocorre em $C^0(S, M)$.

Aproximamos c por uma curva diferenciável c' de forma a colocarmos os elementos da subsequência dentro de uma carta local para i suficientemente grande. Por conveniência, substituimos a sequência c_n pela subsequência c_{n_i}.

Agora, vamos mostrar que $d_n := \exp_c^{-1} c_n$ é uma sequência de Cauchy na métrica d_Λ de $H^1(\mathcal{O}_c)$. Como provamos que d_Λ é uma métrica completa, teremos concluído o resultado.

Note primeiramente que, como

$$\|d_m - d_n\|_0 \leq \|d_m - d_n\|_\infty ,$$

então $\|d_m - d_n\|_0 \to 0$

Note também que usando a representação local da carta que pegamos, temos

$$\|\nabla d_m\|_0 \leq \|\partial_c d_m\|_0 + \left\|\tilde{\theta}_c(d_m)\right\|_0$$

e

$$C \|\partial_c d_m\|_0^2 \leq \langle \tilde{G}_c(d_m).\partial_c d_m, \partial_c d_m\rangle_0 = 2E(c_m)$$

para alguma constante $C > 0$. Juntando os dois fatos, temos que $\|d_m\|_1^2$ é limitado.

Também pela representação local, temos que

$$\|\nabla d_m - \nabla d_n\|_0 \leq \|\partial_c d_m - \partial_c d_n\|_0 + \left\|\tilde{\theta}_c(d_m) - \tilde{\theta}_c(d_n)\right\|_0 .$$

Desta forma, se mostrarmos que $\|\partial_c d_m - \partial_c d_n\|_0 \to 0$ quando $n, m \to \infty$, teremos mostrado que a sequência é de Cauchy.

Abrindo em representação local, temos que

$$\begin{aligned}
2C \|\partial_c d_m - \partial_c d_n\|_0^2 &\leq \langle \tilde{G}_c(d_m).(\partial_c d_m - \partial_c d_n), (\partial_c d_m - \partial_c d_n)\rangle_0 \\
&+ \langle \tilde{G}_c(d_m).(\partial_c d_m - \partial_c d_n), (\partial_c d_m - \partial_c d_n)\rangle_0 \\
&= 2DE_c(d_m).(d_m - d_n) - 2DE_c(d_n).(d_m - d_n) \\
&- \langle \Big(\tilde{G}_c(d_m) - \tilde{G}_c(d_n)\Big).(\partial_c d_m + \partial_c d_n), (\partial_c d_m - \partial_c d_n)\rangle_0 \\
&+ 2\langle \tilde{G}_c(d_m).\partial_c d_m, \tilde{\theta}_c(d_m) - \tilde{\theta}_c(d_n) - (\widetilde{D_2\theta_c})(d_m).(d_m - d_n)\rangle_0 \\
&- 2\langle \tilde{G}_c(d_n).\partial_c d_n, \tilde{\theta}_c(d_m) - \tilde{\theta}_c(d_n) - (\widetilde{D_2\theta_c})(d_n).(d_m - d_n)\rangle_0 \\
&- \langle (\widetilde{D_2 G_c})(d_m).(d_m - d_n, \partial_c d_m), \partial_c d_m\rangle_0 \\
&+ \langle (\widetilde{D_2 G_c})(d_m).(d_m - d_n, \partial_c d_n), \partial_c d_n\rangle_0 .
\end{aligned}$$

Como $\|d_m\|_1$ é limitada, então $\|\partial_c d_m\|_0$ é limitado. Além disso, $\|d_m - d_n\|_0$ e $\|DE_c(d_m)\|_1$ tendem a 0. Assim, todas os 6 termos acima tendem a 0.

Assim, concluímos que a sequência (subsequência, na verdade) é de Cauchy em ΛM. $\square$

Definição 4.2.10. $Cr\Lambda := \{$Pontos críticos de E em $\Lambda\}$.

Lema 4.2.11. *Sejam $\kappa > 0$, $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa) = K$ e $\mathcal{U}$ vizinhança de K. Então, existe $\epsilon > 0$ e $\rho > 0$ tais que, se c pertence a $\Lambda^{\kappa+\epsilon} - \Lambda^{(\kappa-\epsilon)-}$ e não pertence a $\mathcal{U}$, então*

$$\|gradE(c)\|_1 \geq \rho.$$

.

Demonstração. Suponha que a afirmação seja falsa. Note, então, que teríamos para todo $n \in \mathbb{N}$, um c_n fora de $\mathcal{U}$ tal que $\kappa - \frac{1}{n} \leq E(c_n) \leq \kappa + \frac{1}{n}$ e $\|\text{grad}E(c_n)\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Assim, construímos uma sequência tal que $E(c_n)$ é limitada e cuja norma do grad vai para 0. Como E satisfaz à condição (C) de Palais-Smale, temos que existe uma subsequência convergente, e que ela converge para um ponto crítico. Mas isto é um absurdo, pois como $E(c_n) \to \kappa$, este ponto crítico deveria estar em K, porém nenhum termo da sequência entra na vizinhança $\mathcal{U}$, sendo então impossível que haja uma subsequência convergente. $\square$

Observação 4.2.12. Se $K = \emptyset$, podemos tomar $\mathcal{U} = \emptyset$. Este caso nos remete à Teoria de Morse tradicional da seguinte forma: se não há pontos críticos em uma determinada pre-imagem de um intervalo, então um sublevel set é difeomorfo a outro, e isto acontece devido ao fluxo do gradiente da função de Morse dada, que deforma um em outro. Não entramos em detalhes pois isso será tratado adiante.

Proposição 4.2.13. *$Cr\Lambda \cap \Lambda^{\kappa}$ é compacto para todo $\kappa \geq 0$.*

Demonstração. Uma sequência em $Cr\Lambda \cap \Lambda^{\kappa}$ satisfaz naturalmente as hipóteses da condição (C) de Palais-Smale. Assim, possui uma subsequência convergente. Também pela condição (C), essa subsequência converge para um ponto crítico. Logo, $Cr\Lambda \cap \Lambda^{\kappa}$ é sequencialmente compacto. Como Λ é um espaço métrico, então $Cr\Lambda \cap \Lambda^{\kappa}$ é compacto. $\square$

Corolário 4.2.14. *$Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa)$ é compacto para todo $\kappa \geq 0$.*

Demonstração. Como $E^{-1}(\kappa)$ é um fechado e $Cr\Lambda \cap \Lambda^{\kappa}$ é compacto, temos então que o conjunto em questão é um fechado dentro de um compacto, logo compacto. $\square$

Agora, antes de prosseguirmos, notamos que a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de EDO's (Picard-Lindelöf) se baseia essencialmente em dois fatos:

- $C([0,1], \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo.
- O teorema do ponto fixo de Banach.

Como o primeiro item acima vale no contexto mais geral de $C(K, \mathbb{E})$, onde K é compacto e $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach, temos um análogo ao Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de EDO's para o nosso caso. Assim temos , para um intervalo suficientemente pequeno contendo 0, a existência de uma curva integral $\phi_s c$ do campo vetorial $-\text{grad}E$ começando em c. Ou seja, temos um "fluxo gradiente" local. Para mais informações, cf. [14].

Como uma aplicação direta da regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{ds}E(\phi_s(c)) = -\left\|\mathrm{grad}E(\phi_s(c))\right\|_1^2.$$

Lema 4.2.15.

$$d_\Lambda^2(\phi_{s_1}c, \phi_{s_0}c) \leq E(c)|s_1 - s_0| \quad \forall s_1, s_0 \geq 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d_\Lambda^2(\phi_{s_1}c, \phi_{s_0}c) &\leq \left(\int_{s_0}^{s_1} \left\|\frac{d\phi_s c}{s}\right\|_1 ds\right)^2 \\ &\leq |\int_{s_0}^{s_1} \left\|\mathrm{grad}E\right\|_1^2 ds||s_1 - s_0| \\ &= |E(\phi_{s_1}c) - E(\phi_{s_0}c)||s_1 - s_0| \\ &\leq E(c)|s_1 - s_0|. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema mostra que o fluxo está definido "globalmente para frente". Isto é, partindo de uma curva, o fluxo está definido para qualquer tempo futuro.

Teorema 4.2.16. *O mapa*

$$\phi_s : \Lambda \to \Lambda$$

$$c \mapsto \phi_s c$$

está definido para todo $s \geq 0$.

Demonstração. Suponha que exista $c \in \Lambda$ tal que a afirmação seja falsa. Logo, o conjunto de números reais $A := \{r : \phi_r c \text{ está definido}\}$ é limitado superiormente. Seja $\alpha := \sup A$. α não está em A, caso contrário seria possível arranjar um número maior que α que ainda estaria em A.

Considere uma sequência s_n de números reais com $s_n \to \alpha$. Com o lema anterior, é fácil ver que $(\phi_{s_n}c)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como (Λ, d_Λ) é completo, essa sequência converge. Podemos então definir $\phi_\alpha c$. Contradição. □

Lema 4.2.17. *Seja $\kappa \geq 0$ valor regular. Então, existem $\epsilon > 0$ e $s_0 \geq 0$ tais que*

$$\phi_s\Lambda^{\kappa+\epsilon} \subset \Lambda^{(\kappa-\epsilon)-}$$

para todo $s \geq s_0$.

Demonstração. Usando o Lema 3.2.11., temos que existe $\epsilon > 0$ e $\rho > 0$ tais que $\left\|\mathrm{grad}E(c)\right\|_1 \geq \rho$ para todo c tal que $\kappa - \epsilon \leq E(c) \leq \kappa + \epsilon$. Tome $s_0 > 2\frac{\epsilon}{\rho^2}$. Se $E(c) < \kappa - \epsilon$, é óbvio que $\phi_s(c) \in \Lambda(\kappa - \epsilon)-$ para todo $s \geq s_0$.

Se $\kappa-\epsilon \leq E(c) \leq \kappa+\epsilon$, então $E(\phi_{s_0}c) = E(c) - \int_0^{s_0} \left\|\mathrm{grad}E(\phi_s c)\right\|_1^2 \leq \kappa+\epsilon-\rho^2 s_0 < \kappa-\epsilon$.

Logo, para todo $s \geq s_0$, temos que $E(\phi_s c) < \kappa - \epsilon$.

□

Terminamos esse capítulo com uma aplicação interessante do que foi desenvolvido até agora. Para isso, precisamos da definição a seguir.

Definição 4.2.18. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos não-vazios $A \subset \Lambda$ tais que $E|_A$ é limitada é dita uma *ϕ-família* se $A \in \mathcal{A} \implies \phi_s(A) \in \mathcal{A}$ para todo $s \geq 0$.

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tal que não existem valores críticos de E em $(\alpha, \alpha + \epsilon]$. Uma *$\phi$-família de $\Lambda \mod \Lambda^\alpha$* é uma ϕ-família que também satisfaz a hipótese que nenhum elemento de $\mathcal{A}$ está contido em $\Lambda^{\alpha+\epsilon}$.

O *valor crítico $\kappa_\mathcal{A}$* de uma ϕ-família $\mathcal{A}$ de $\Lambda \mod \Lambda^\alpha$ é $\kappa_\mathcal{A} := \inf\limits_{A \in \mathcal{A}} \sup E|_A$.

Lema 4.2.19. *Dada uma ϕ-família $\mathcal{A}$ de $\Lambda \mod \Lambda^\alpha$, temos que $\kappa_\mathcal{A} > \alpha$ e que existe $c \in Cr\Lambda$ tal que $E(c) = \kappa_\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue da definição de ϕ-família de $\Lambda \mod \Lambda^\alpha$ que $\kappa_\mathcal{A} > \alpha$.

Usando o lema 3.2.17., segue da definição de $\kappa_\mathcal{A}$ que $Cr\Lambda \cap E^{-1}(\kappa_\mathcal{A})$ não pode ser vazio. □

Agora, apresentamos a aplicação que mencionamos anteriormente.

Seja M uma variedade que não é simplesmente conexa. A cada classe de conjugação do grupo fundamental que seja não-trivial, existe uma componente conexa Λ' de Λ que não contém o conjunto Λ^0. Temos, então, o seguinte teorema.

Teorema 4.2.20. *Nas condições dadas acima, E assume seu ínfimo κ' em Λ' e $E^{-1}(\kappa') \cap \Lambda'$ consiste de geodésicas fechadas.*

Em particular, toda variedade compacta que não é simplesmente conexa tem pelo menos uma geodésica fechada (não-trivial).

Demonstração. $\mathcal{P}(\Lambda')$ é uma ϕ-família (é fácil ver que o conjunto das partes de uma componente conexa de Λ é uma ϕ-família). $\kappa_{\mathcal{P}(\Lambda')}$ é positivo, uma vez que se fosse igual a 0, existiria uma curva com energia baixa o suficiente para ser homotopicamente equivalente a um mapa constante.

Pelo teorema anterior, existe um $c \in \Lambda'$ tal que $E(c) = \kappa_{\mathcal{P}(\Lambda')}$.

Agora, suponha que $c \in E^{-1}(\kappa_{\mathcal{P}(\Lambda')}) \cap \Lambda'$ não é ponto crítico de E. Então, a norma do gradiente de E em c é maior que 0, e então descendo um pouco pelo fluxo gradiente conseguiríamos $E(\phi_s c) < \kappa_{\mathcal{P}(\Lambda')}$. Mas isto é um absurdo pela definição de $\kappa_{\mathcal{P}(\Lambda')}$ e pelo fato de Λ' ser uma ϕ-família.

□

Observação 4.2.21. Vale notar que é verdade que toda variedade compacta tem pelo menos uma geodésica fechada mesmo quando $\pi_1 = 0$. Como este não é o objetivo desta dissertação, não entraremos em detalhes. Para mais informações, cf. [13].

Capítulo 5

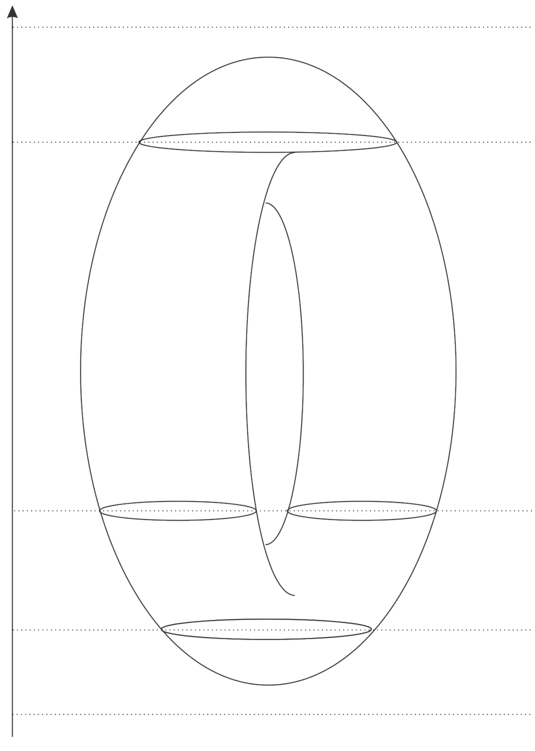
Teoria de Morse

> ... and what is the use of a book - thought Alice - without pictures or conversations?
>
> ---
>
> Lewis Carroll - Alice in the Wonderland

5.1 Teoria de Morse em dimensão finita

Teoria de Morse é o que permite relacionar a topologia (homologia) da nossa variedade com a quantidade de pontos críticos de uma função real definida nela (que seja adequada).

Um exemplo típico disso é a função altura definida no toro. Temos quatro pontos críticos: um ponto de mínimo, dois de sela, e um de máximo. Observe a figura abaixo.



Se observarmos o *sub-level set*, ou seja, a região da variedade cujos pontos estão abaixo de uma certa altura h, veremos uma mudança de topologia assim que passamos em cada ponto crítico:

1. Ao passar do primeiro ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **vazio** para **um disco**.
2. Ao passar do segundo ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um disco** para **um cilindro**.
3. Ao passar do terceiro ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um cilindro** para **um toro furado**.
4. Ao passar do quarto ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um toro furado** para **um toro**.

Podemos ver essa mudança em outro ponto de vista. Em relação a tipo homotópico, temos que

1. Ao passar do primeiro ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **vazio** para **um ponto**.
2. Ao passar do segundo ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um ponto** para **um círculo**.
3. Ao passar do terceiro ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um círculo** para **um oito**, ou seja, **dois círculos ligados em um ponto**.
4. Ao passar do quarto ponto crítico, temos que o sub-level set passa de **um oito** para **um toro**.

Agora note que os índices dos pontos críticos, i.e, a soma das dimensões correspondentes a auto-espaços negativos da Hessiana nos pontos críticos dados, são:

1. 0
2. 1
3. 1
4. 2

Junto com isto, observe que (em relação ao tipo homotópico)

1. Ao passar do primeiro ponto crítico, temos que o sub-level set ganha uma 0-célula.
2. Ao passar do segundo ponto crítico, temos que o sub-level set ganha uma 1-célula.
3. Ao passar do terceiro ponto crítico, temos que o sub-level set ganha uma outra 1-célula.

4. Ao passar do quarto ponto crítico, temos que o sub-level set ganha uma 2-célula.

Isto mostra uma relação entre uma função diferenciável definida na variedade e a topologia da variedade. Mais especificamente, os índices dos pontos críticos estão relacionados ao tipo homotópico da variedade ao representarem adjunções de n-células. Note, porém, que *como* exatamente é esta adjunção não é algo explícito a partir da função.

Tendo apresentado a intuição, exibiremos agora os principais teoremas que permitem desenvolver a teoria. Apresentaremos apenas a ideia da demonstração, uma vez que faremos as demonstrações no caso mais geral de uma variedade Hilbertiana.

Teorema 5.1.1 (Lema de Morse). *Seja M uma variedade de dimensão n e p_0 um ponto crítico não-degenerado [1] de uma função real suave em uma variedade M, cujo índice é λ. Então, existe um sistema de coordenadas (ϕ, U) ao redor de p_0 tal que*

$$f(x) = f(0) - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2,$$

onde $\phi(p_0) = 0$.

Demonstração. A demonstração deste teorema segue um argumento análogo à diagonalização de uma forma bilinear simétrica. □

Lema 5.1.2. *Seja f uma função real suave em uma variedade M tal que $f^{-1}[a, b]$ é compacto e não contenha pontos críticos de f. Então M^a é difeomorfo a M^b [2]. Ademais, M^a é retrato de deformação de M^b, com a inclusão sendo uma equivalência homotópica.*

Demonstração. A demonstração do lema acima segue ao colocarmos uma métrica na variedade e usarmos o fluxo gradiente. A existência global desse fluxo existe graças à hipótese de compacidade: repare que este lema não é verdade com um toro sem um ponto, por exemplo. □

Teorema 5.1.3. *Seja f uma função real suave em uma variedade M e p um ponto crítico não degenerado de f de índice λ. Suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que $f^{-1}[f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon]$ seja compacto e não contenha outros pontos críticos além de p. Então, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $M^{c+\delta}$ é homotopicamente equivalente a $M^{c-\delta}$ com uma λ-célula adjuntada.*

Demonstração. A demonstração deste teorema usa fortemente o Lema de Morse: a "boa aparência" da forma local é um excelente instrumento.

Vale notar também que a extensão natural também é válida. Isto é, se $p_1, ..., p_k$ são pontos críticos não degenerados tais que $f(p_1) = ... = f(p_k)$ então $M^{c+\delta}$ tem o tipo homotópico de $M^{c-\delta}$ com uma λ_i célula adjuntada para todo $1 \leq i \leq k$. □

Teorema 5.1.4. *Se f é uma função real suave em uma variedade M que não tem pontos críticos degenerados e se cada M^a é compacto então M tem o tipo homotópico de um CW-complexo com uma célula de dimensão λ adjuntada para cada ponto crítico de índice λ.*

[1] Isto é, cuja Hessiana tem núcleo trivial (ou seja, é invertível).
[2] $M^a := \{x \in M : f(x) \leq a\}$.

Observação 5.1.5. Observamos que nesta dissertação, quando falamos de variedades de dimensão finita [3], estamos lidando sempre com variedades compactas, de forma que as hipóteses sobre compacidade são sempre satisfeitas.

Interlúdio

Agora, nosso intenção é chegar nos resultados acima (ou resultados análogos) para ΛM, e com E sendo nossa função diferenciável.

Existem vários problemas que devemos tratar. Já tratamos as questões referentes à variedade propriamente dita, isto é, o fato de a variedade ser de dimensão infinita já não é mais um problema com a teoria que desenvolvemos nos primeiros capítulos. Mas precisamos lidar com o fato de que temos várias hipóteses sobre a função suave que usamos. De fato, temos alguma suposições cruciais. Por exemplo, nós assumimos que os pontos críticos são não-degenerados e que cada M^a é compacto.

Mas ocorre que, por exemplo, a suposição de que os pontos críticos sejam não-degenerados é falsa no caso de ΛM com o funcional de energia.

De fato, considere o caso da esfera S^n. $\Lambda^0 S^n$ é um conjunto de pontos críticos e nenhum deles é degenerado, uma vez que todo o espaço tangente à esfera está no núcleo da Hessiana. Isto é um fato geral: o espaço tangente está sempre contido no núcleo da Hessiana, o que impede uma transmissão imediata da teoria de Morse (finita) pro nosso contexto.

Na verdade, a situação do parágrafo anterior não é um caso específico da esfera. Dada uma variedade M qualquer, qualquer geodésica fechada tem associada a si um círculo de pontos críticos devido à ação de S^1 nessa curva, que deixa a energia invariante. Mas a existência de tal círculo de pontos críticos conflita com o fato de que pontos críticos não-degenerados são isolados.

O que ocorre é que a condição (C) de Palais-Smale corrige as questões referentes à hipótese de compacidade porém não é suficiente para corrigir as questões referentes à degenerescência dos pontos críticos. Nós nunca conseguiríamos aplicar os teoremas da última seção se deixássemos a hipótese de não-degenerescência dos pontos críticos. Precisamos então de outra hipótese. Esta hipótese é que a função seja *Morse-Bott*. Essencilamente vamos supor que o núcleo da Hessiana em um dado ponto crítico seja precisamente o espaço tangente à subvariedade crítica.

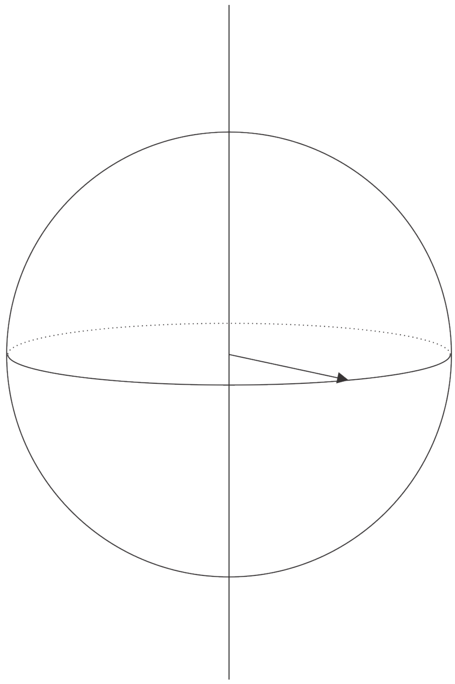
5.2 Funções Morse-Bott em dimensão finita

Se considerarmos a função altura na esfera temos uma função de Morse e as adjunções dadas pelo Teorema de Morse são visualmente muito óbvias: Pega-se um ponto e adjunta-se uma 2-célula, identificando todos os pontos do bordo com esse ponto.

Agora fixe um eixo passando pelo centro da esfera e considere a função que associa a um ponto da esfera a distância ao quadrado desse ponto ao eixo dado [4]. Veja a figura:

[3] Que quase sempre serão apenas nossos espaços-base para o loop space.

[4] A distância *ao quadrado* é apenas uma tecnicalidade para fazer a função ser diferenciável.



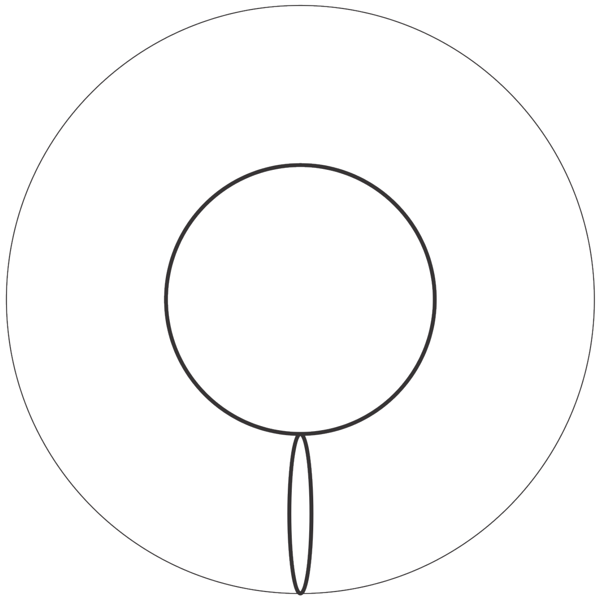
Temos dois pontos de mínimo isolados e uma subvariedade de pontos de máximo, e esses são os únicos pontos críticos.

Antes de prosseguir com a generalização de teoria de Morse para esse caso, explicamos a intuição do que ocorre no caso tradicional de pontos críticos não degenerados.

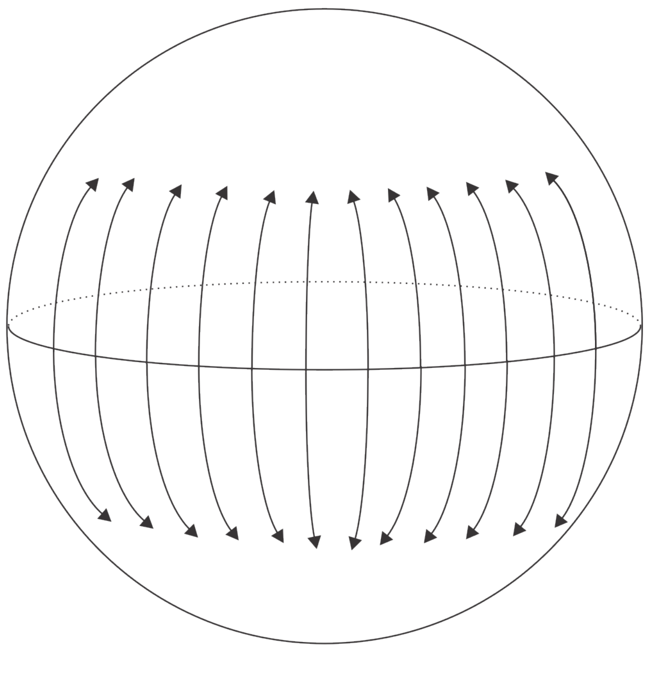
Se não há pontos críticos entre dois valores podemos simplesmente seguir o fluxo gradiente de nossa função para deformar um sub-level set em outro. Se há um ponto crítico, temos uma obstrução e é exatamente essa obstrução que adjunta as células: como não podemos "passar" por tais pontos críticos, somos obrigados a juntar o que "viria depois deles". De fato, o que adjuntamos à estrutura do sub-level set anterior ao ponto crítico após passarmos por ele é exatamente a variedade instável de tal ponto crítico (pelo fluxo $-\text{grad}$). E a variedade instável do ponto crítico está intimamente ligada com os auto-espaços negativos da Hessiana.

Veja novamente o caso do toro e função altura: os círculos destacados são as variedades instáveis do segundo e terceiro pontos críticos, respectivamente. [5]

[5] Na perspectiva da figura, o círculo de baixo deveria aparecer como um segmento de reta. Colocamos um círculo em perspectiva por óbvias questões ilustrativas referentes à teoria.



Podemos voltar agora ao caso da esfera com a função distância ao eixo. Com o que acaba de ser exposto, temos um outro ponto de vista sobre a situação. Se pegarmos a subvariedade crítica há uma forma razoável de interpretar uma subvariedade instável dela. Observe a figura a seguir.



Isso nos leva à ideia de associar a cada ponto da subvariedade crítica sua subvariedade instável. Assim poderemos fluir da nossa subvariedade crítica para o próximo nível crítico. Lembre-se que a subvariedade instável está ligada intrinsecamente aos subespaços associados aos auto-valores negativos da Hessiana.

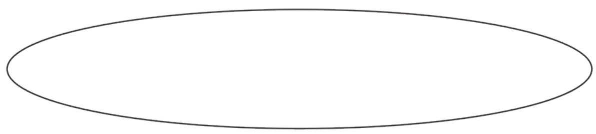
A ideia agora é facilmente justificável. Ao invés de fazer a adjunção de uma célula, iremos adjuntar um *fibrado* de células, cada célula associada a um ponto crítico da subvariedade crítica.

Mais especificamente, teremos então a seguinte mudança na topologia: Considere o fibrado sobre a variedade instável onde cada fibra é dada pelos auto-espaços negativos da Hessiana. Agora tome o *unit disk bundle*, ou seja, restrinja as fibras a vetores de norma menor ou igual a 1. Quando passarmos por um ponto crítico a mudança topológica (a nível de homotopia) será dada pela adjunção deste unit disk bundle, com attaching maps definidos no fibrado tangente unitário (o *unit sphere bundle* do fibrado tangente).

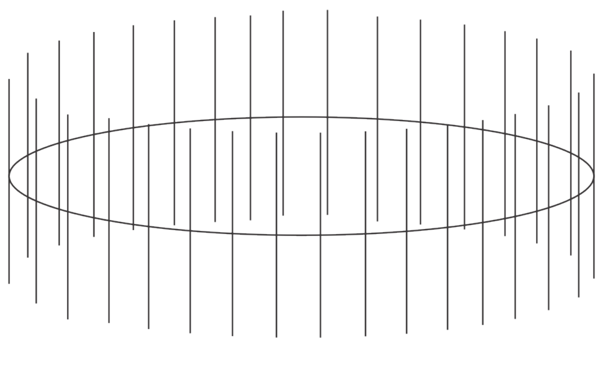
Ilustrando isto nesse caso, temos então:

A passagem pelo primeiro valor crítico, nos fornecendo dois pontos críticos:

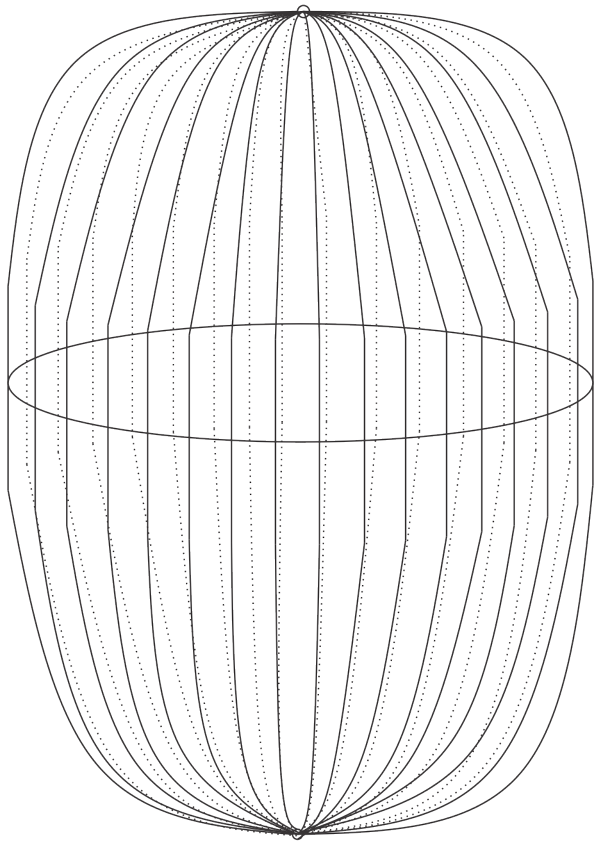
A passagem pelo outro valor crítico, nos fornecendo uma subvariedade crítica:



Fazemos então o fibrado

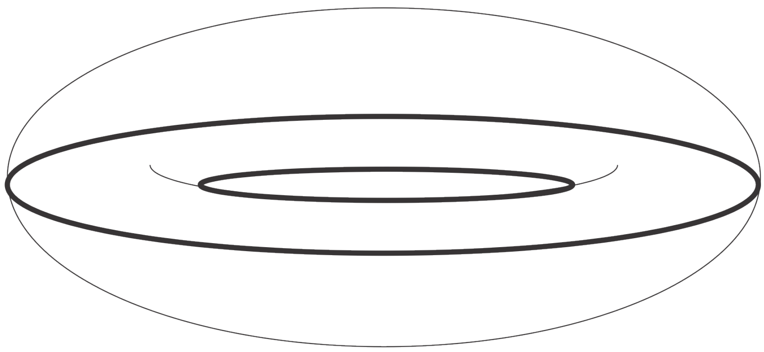


e fazemos o attaching, resultando na esfera

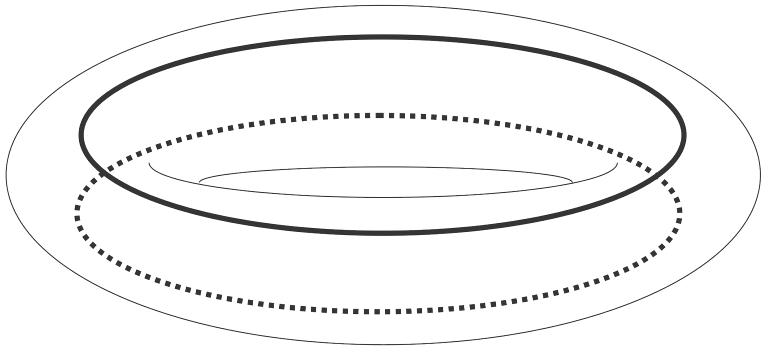


Como um último exemplo antes de prosseguir com a teoria, considere o toro, desta vez "deitado", e a função altura ao quadrado. Desta vez nossos pontos de mínimo formam duas subvariedades críticas: dois círculos, e nossos pontos de máximo também são dois círculos.

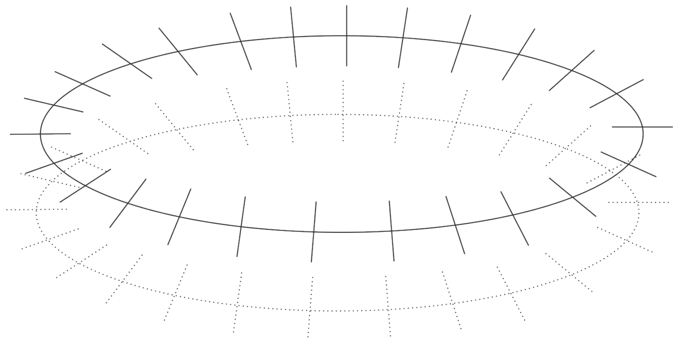
Na figura abaixo estão ilustradas as subvariedades críticas formadas pelos pontos de mínimo.



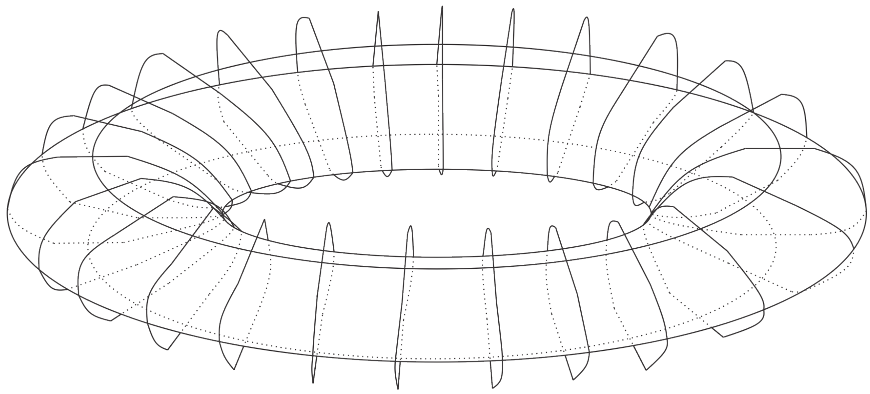
Na próxima, as subvariedades críticas formadas pelos pontos de máximo.



Fazemos então o fibrado a ser adjuntado aos dois círculos:



Agora fazendo o attaching:



5.3 Teoria de Morse no Free Loop Space

Nosso objetivo é conseguir realizar Teoria de Morse em ΛM. Assim sendo, precisamos

- Entender e calcular a Hessiana do funcional de energia.
- Estender a teoria para funções Morse-Bott em variedades Hilbertianas.
- Garantir que as subvariedades críticas serão não-degeneradas.

Notamos que o terceiro item acima conseguirá ser resolvido no nosso caso especial de um CROSS [6]. Assim, começamos a discutir a Hessiana em um ponto crítico c.

A Hessiana $D^2E(c) : T_c\Lambda M \times T_c\Lambda M \to \mathbb{R}$ age da seguinte forma: Dados $\xi, \xi' \in T_c\Lambda M$,

$$D^2E(c)(\xi, \xi') = \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} E(\kappa(0,0)),$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa : [0,1]^2 &\to \Lambda M \\ (s, s') &\mapsto \kappa(s, s') \end{aligned}$$

é uma função diferenciável de forma que $\kappa(0,0) = c$, $\frac{\partial \kappa}{\partial s}(0,0) = \xi$ e $\frac{\partial \kappa}{\partial s}(0,0) = \xi'$.

Faça

$$\tilde{\kappa} : (s, s', t) \in [0,1]^2 \times S \mapsto \kappa(s, s')(t),$$

$$\xi(t; s, s') := \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s}(s, s', t),$$

$$\xi'(t; s, s') := \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial s'}(s, s', t).$$

Pela definição do tensor de curvatura e devido ao fato de c ser uma geodésica fechada, temos que

$$R(\xi(t), \dot{c}(t), \xi'(t)) = \nabla(\nabla \xi'(t).\dot{c}(t)).\xi(t) - \nabla(\nabla \xi'(t).\xi(t)).\dot{c}(t).$$

Pelas propriedades do tensor de curvatura (ver Apêndice, 11.6), temos que

$$\langle R(\xi(t), \partial c(t), \xi'(t)), \partial c(t) \rangle = -\langle R(\xi(t), \partial c(t), \partial c(t)), \xi'(t) \rangle.$$

Dado c um ponto crítico de E definimos, para $\xi, \xi' \in T_c\Lambda$,

$$\tilde{R}(\xi, \partial c, \xi')(t) := R(\xi(t), \partial c(t), \xi'(t)),$$

$$\tilde{K}_c(\xi)(t) := R(\xi(t), \partial c(t), \partial c(t)).$$

Temos então que

$$\nabla_{\alpha^0}(\nabla \xi').(\xi) = \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi') + \nabla(\nabla_{\alpha^0} \xi'.\xi)$$

e

$$\langle \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi'), \partial c \rangle_0 = -\langle \tilde{K}_c(\xi), \xi' \rangle_0.$$

O próximo lema nos ajudará com a primeira tarefa ao dar uma fórmula útil para a Hessiana.

Lema 5.3.1. *Dado c ponto crítico de E em Λ, temos que*

$$D^2E(c)(\xi, \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle_1 - \langle (\tilde{K}_c + I)\xi, \xi' \rangle_0.$$

[6] Na verdade, em um espaço globalmente simétrico geral.

Demonstração. Lembre que a fórmula para DE é

$$DE(c).\xi' = \langle \partial c, \nabla \xi' \rangle_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} DDE(c)(\xi', \xi) &= D\langle \partial c', \nabla \xi' \rangle_0 . \xi|_{c'=c} = \langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0 + \langle \partial c, \nabla_{\alpha^0}(\nabla \xi').\xi \rangle_0 \\ &= \langle \xi, \xi' \rangle_1 + \langle \partial c, \tilde{R}(\xi, \partial c, \xi') \rangle_0 - \langle \xi, \xi' \rangle_0 + \langle \partial c, \nabla(\nabla_{\alpha^0} \xi' . \xi) \rangle_0. \end{aligned}$$

Onde a igualdade da primeira linha segue do fato de a conexão induzida em α^0 ser Riemanniana, e a segunda segue das identidades que mostramos acima. □

Considere agora o operador auto-adjunto $A_c : T_c\Lambda \to T_c\Lambda$ associado à forma bilinear $D^2E(c)$, isto é, o operador definido pela identidade

$$\langle A_c \xi, \xi' \rangle_1 = \langle \xi, A_c \xi' \rangle_1 = D^2E(c)(\xi, \xi').$$

Nosso próximo teorema ajuda no segundo item do início da seção. De fato, ele será o responsável por fazer com que os fibrados adjuntados tenham fibras de dimensão finita.

Teorema 5.3.2. *A_c satisfaz necessariamente uma das duas propriedades a seguir:*

- *Tem finitos auto-valores incluindo* 1
- *Os auto-valores formam um conjunto discreto infinito limitado do qual* 1 *é um ponto de acumulação.*

Ademais, sendo

$$T_c\Lambda = T_c^-\Lambda + T_c^0\Lambda + T_c^+\Lambda$$

a decomposição ortogonal de $T_c\Lambda M$ em auto-espaços , tem-se que $T_c^-\Lambda$ e $T_c^0\Lambda$ tem dimensão finita.

Para demonstrar o teorema, segue do Teorema Espectral para Operadores Compactos (cf. [24]) que basta provarmos o lema a seguir.

Lema 5.3.3.

$$A_c = I + k_c,$$

onde $k_c = -(1 - \nabla^2)^{-1} \circ (\tilde{K}_c + I)$ é um operador compacto.

Demonstração. Dado $\xi \in T_c\Lambda$ diferenciável [7] temos que

$$\langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0 = -\langle \nabla^2 \xi, \xi' \rangle_0.$$

Assim,

$$\langle (I - \nabla^2)\xi, \xi' \rangle_0 = \langle \xi, \xi' \rangle_0 - \langle \nabla^2 \xi, \xi' \rangle_0 = \langle \xi, \xi' \rangle_0 + \langle \nabla \xi, \nabla \xi' \rangle_0 = \langle \xi, \xi' \rangle_1$$

$$\implies \langle \xi, \xi' \rangle_0 = \langle (I - \nabla^2)^{-1} \xi, \xi' \rangle_1.$$

[7] Como os campos diferenciáveis são densos em $H^1(c^*TM) \cong T_c\Lambda$, basta analisar esses casos.

Temos então que

$$-\langle(\tilde{K}_c + I)\xi, \xi'\rangle_0 = -\langle(1-\nabla^2)^{-1} \circ (\tilde{K}_c + I)\xi, \xi'\rangle_1.$$

Devido à fórmula do Lema 4.3.1., temos que

$$\begin{aligned}\langle A_c\xi, \xi'\rangle_1 &= \langle\xi, \xi'\rangle_1 - \langle(\tilde{K}_c + I)\xi, \xi'\rangle_0 \\ &= \langle\xi, \xi'\rangle_1 - \langle(1-\nabla^2)^{-1} \circ (\tilde{K}_c + I)\xi, \xi'\rangle_1 \\ &= \langle(I + k_c)\xi, \xi'\rangle_1.\end{aligned}$$

Logo, $A_c = I + k_c$ como queríamos. Sabendo que

$$\langle k_c\xi, k_c\xi\rangle_1 = -\langle(\tilde{K}_c + I)\xi, k_c\xi\rangle_0,$$

concluímos que

$$\|k_c\xi\|_1^2 \leq \left\|\tilde{K}_c + 1\right\|_\infty \|k_c\xi\|_\infty \|\xi\|_0 \leq C \|k_c\xi\|_1 \|\xi\|_0 .$$

Temos que mostrar que a imagem de uma sequência limitada possui uma subsequência convergente. Assim sendo, seja ξ_n sequência limitada em $H^1(c^*TM) \cong T_c\Lambda M$. Sabe-se, devido à condição (C) de Palais-Smale, que esta sequência possui uma subsequência convergente em $H^0(c^*TM)$. Sabemos que

$$\|k_c\xi_n\|_1 \leq C' \|\xi_n\|_0$$

devido às desigualdades fornecidas pelo fato de a inclusão $i : H^1 \mapsto H^0$ ser contínua (para mais detalhes, ver Proposição 3.1.2)

Assim, a imagem da subsequência convergente em $H^0(c^*TM)$ por k_c é uma sequência de Cauchy. Logo, é convergente.

□

Observação 5.3.4. Poder-se-ia concluir a compacidade de k_c usando o fato de que o inverso do operador elíptico $(I - \nabla^2)$ é compacto.

Corolário 5.3.5. *Os auto-vetores de A_c relacionados ao auto-valor $\lambda \in \mathbb{R}$ são as soluções periódicas da equação diferencial*

$$(\lambda - 1)(\nabla^2 - I)\xi - (\tilde{K}_c + 1)\xi = 0.$$

Definição 5.3.6. Uma subvariedade fechada B é dita *crítica* se consiste de pontos críticos de mesmo valor de energia e, além disso, é invariante pela ação $\tilde{\chi}$ de translação de parâmetro.

Observação 5.3.7. Observe que segue imediatamente da condição (C) de Palais-Smale que toda subvariedade crítica é compacta.

Observação 5.3.8. A "ação de translação de parâmetro" mencionada acima é meramente a aplicação do círculo em Λ dada por

$$S \times \Lambda \to \Lambda$$

$$(z, c) \mapsto z.c,$$

onde $z.c(t) = c(t + \theta)$, $z = e^{2\pi i\theta}$. [8]

Observamos também que a aplicação $\tilde{\chi}$ é uma aplicação contínua de Λ em Λ. [9]

A próxima proposição introduz a questão de não-degenerescência.

Proposição 5.3.9. *Para uma subvariedade crítica B de Λ, o espaço tangente T_cB está contido no espaço nulo $T_c^0\Lambda$.*

Demonstração. Temos que mostrar que fixado $\xi \in T_cB$, $D^2E(c)(\xi, \eta) = 0$ para todo $\eta \in T_c\Lambda$.

Tome um mapa $\kappa : [0, 1]^2 \to \Lambda M$ diferenciável que satisfaça

$$\kappa(0, 0) = c, \quad \kappa(s, 0) \subset B,$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial s'}(0, 0) = \xi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial s'}(0, 0) = \eta.$$

Temos que

$$\frac{\partial}{\partial s'} E(\kappa(s, 0)) = DE(\kappa(s, 0)).\frac{\partial \kappa}{\partial s'}(s, 0) = 0.$$

Logo, como E é constante em B, temos

$$D^2E(c)(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 E(\kappa(0, 0))}{\partial s \partial s'}.$$

□

Definição 5.3.10. Se todos os pontos c de uma subvariedade crítica B tiverem o mesmo índice λ, então λ será o *índice de B*. Analogamente, temos a *nulidade de B*.

Se uma subvariedade crítica tem um índice e nulidade, e sua nulidade coincide com a dimensão da variedade B (ou seja $T_cB = T_c^0\Lambda$) diremos então que B é uma subvariedade crítica *não-degenerada* [10].

Como nossos teoremas irão lidar com fibrados sobre as subvariedades críticas, fazemos primeiro as seguintes observações:

Seja

$$\mu : N \to B$$

um fibrado vetorial sobre uma variedade compacta B, com fibras que são um espaço de Hilbert imbuído de uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle_1$[11]. Suponha também que o fibrado possua uma ação do grupo ortogonal $O(2)$

$$\chi : O(2) \times N \to N$$

de forma que, fixado um elemento de $O(2)$, a ação é um mapa de fibrados isométrico (Mais precisamente, o mapa $\chi_\alpha := \xi(\alpha, .)$).

Tem-se então que a projeção μ e a seção nula são mapas equivariantes [12].

[8] Aqui vemos o círculo como o círculo unitário em $\mathbb{C}$ por conveniência.

[9] Porém não diferenciável, uma vez que o vetor tangente em $z = 1$ seria ∂c, que não necessariamente é um campo H^1.

[10] Exatamente como descrevemos na introdução da seção.

[11] Note que as considerações encaixam exatamente na nossa situação.

[12] Um mapa é dito *equivariante* se comuta com a ação do grupo.

Definição 5.3.11. Seja $D_\epsilon\mu$ o "ϵ-disk bundle"[13] e $D\mu$ o unit disk bundle (disco aberto). Uma função $E : D_\epsilon\mu \to \mathbb{R}$ é dita *função de Morse-Bott* se a seção nula B for uma subvariedade crítica não-degenerada de índice $k \geq 0$ e se $D^2E(c)$ puder ser representada por um operador que seja a identidade + operador compacto.

Temos então que o fibrado normal $\mu : N \to B$ sobre uma subvariedade crítica B de índice k é um exemplo das considerações acima. Note que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o mapa exponencial leva $D_\epsilon\mu$ em uma vizinhança aberta de B em ΛM. Assim sendo, o mapa

$$E \circ \exp : D_\epsilon\mu \to \mathbb{R}$$

é exemplo de uma função de Morse no sentido que definimos.

Enunciamos agora uma generalização do lema de Morse.

Lema 5.3.12 (Lema de Morse Generalizado)**.** *Seja μ um fibrado vetorial sobre B e E uma função de Morse-Bott tal que $E|_B = 0$.*

Então, existe $\epsilon > 0$ e um mergulho ψ de D_ϵ em N que preserva fibras e uma seção diferenciável equivariante $c \in B \mapsto P_c \in L(N)$ [14], onde P_c é a projeção ortogonal sobre o auto-espaço positivo, de forma que

$$E \circ \psi(\xi) = \|P_c\xi\|_1^2 - \|(I - P_c)\xi\|_1^2,$$

com $c = \mu(\xi)$.

Observação 5.3.13. Antes de apresentar a prova, fazemos algumas observações. Primeiramente, fazemos o paralelo com o lema de Morse tradicional: obviamente a condição $E|_B = 0$ existe apenas para tirar o $f(0)$, que seria E avaliado na seção nula. O que é interessante visualizar é que no caso comum, o fibrado normal sobre a subvariedade (que é um ponto) é o espaço tangente inteiro, então essa projeção nada mais é do que moralmente levar um ponto nas suas "últimas n-λ" coordenadas (dado um sistema de coordenadas apropriado), de forma que $I - P_c$ será levar o ponto nas suas "primeiras λ" coordenadas. Assim, pode-se ver que interpretamos a igualdade acima como o lema de Morse tradicional.

Outra observação é que várias versões de generalizações semelhantes do lema de Morse foram demonstradas:

- O caso de B ser um ponto foi provado por Palais (cf. [21]). Note que este caso **não** é equivalente ao lema de Morse tradicional, visto que temos um fibrado arbitrário.

- O caso que não envolve uma ação de $O(2)$ (logo, as questões de equivariância não existem) foi provado por Meyer (cf. [15]).

- O caso no qual a ação de $O(2)$ é diferenciável foi provado por Wasserman (cf. [27]). Note que este caso não se aplica à situação concreta (do fibrado normal sobre uma subvariedade crítica) que queremos, já que nossa aplicação não é diferenciável, como mencionado anteriormente).

[13] Ou seja, cada fibra é restrita a vetores de norma menor que ϵ.

[14] $L(N)$ é o fibrado sobre B onde cada fibra é formada pelos endomorfismos de N_c.

Demonstração. Usando a fórmula de Taylor com resto integral e sabendo que $E|_B = 0$ e que B é uma subvariedade crítica, temos que, em $E|_{N_c}$[15],

$$E(\eta) = \int_0^1 (1-t) D^2 E(t\eta).(\eta,\eta) dt.$$

(Para ver a identidade acima, veja o Apêndice, 11.6). Assim, definindo

$$h(\eta)(\xi,\xi') := \int_0^1 (1-t) D^2 E(t\eta).(\xi,\xi') dt,$$

temos que h é uma forma bilinear equivariante e simétrica.

Usando o fato de que $D^2(E|_{N_c})(0_c)$ é não-degenerada (é aqui que entra nossa hipótese sobre a subvariedade crítica ser não degenerada), a forma h é não-degenerada em uma ϵ-vizinhança da seção nula. Podemos então associar a h um operador auto-adjunto $k(\eta)$ satisfazendo

$$\langle k(\eta)\xi, \xi' \rangle_1 = h(\eta)(\xi,\xi').$$

Considere $l(\eta) = k(0)k(\eta)$. Se $\|\eta\|_1$ for pequena o suficiente, então $l(\eta)$ está próximo da identidade, possuindo uma raiz quadrada $m(\eta)$ (ver Apêndice, 11.6).

Como $k(\eta)$ é auto-adjunta, temos que $l(\eta)^* = k(\eta)k(0)^{-1}$, de forma que

$$l(\eta)^* k(0) = k(0) l(\eta).$$

Usando o fato de que $I - l(\eta)$ é próximo de zero, então a expansão em série de potências de $\big(I - (I - l(\eta))\big)^{1/2}$ existe e é igual a $m(\eta)$. Dessa forma, temos que $m(\eta)^*$ é a mesma série, porém com $l(\eta)^*$ em lugar de $l(\eta)$.

Logo, a igualdade acima vale com $m(\eta)$ e $m(\eta)^*$ em lugar de $l(\eta)$ e $l(\eta)^*$. Assim,

$$m(\eta)^* k(0) = k(0) m(\eta)$$

$$\begin{aligned} &\implies m(\eta)^* k(0) m(\eta) = k(0) m(\eta) m(\eta) \\ &\implies m(\eta)^* k(0) m(\eta) = k(0) l(\eta) \\ &\implies m(\eta)^* k(0) m(\eta) = k(\eta). \end{aligned}$$

Temos então a igualdade

$$\langle k(\eta)\eta, \eta \rangle_1 = \langle k(0_c) m(\eta)\eta, m(\eta)\eta \rangle_1.$$

Considere, para $\|\eta\|_1$ suficientemente pequena (pequena o suficiente para as considerações acima), a função invertível Φ^{-1} que faz $\eta \mapsto \xi' = m(\eta)\eta$. Temos então que

$$E(\Phi(\xi')) = E(\eta) = \langle k(\eta)\eta, \eta \rangle_1 = \langle k(0_c) m(\eta)\eta, m(\eta)\eta \rangle_1 = \langle k(0_c)\xi', \xi' \rangle_1.$$

Pela nossa definição de função de Morse-Bott, $k(0_c)$ é um operador da forma identidade + operador compacto. Assim sendo, podemos fazer uma função ϕ que troque as coordenadas equivariantemente . De fato, defina $\xi = \phi^{-1}(\xi')$ da seguinte forma: dada a componente ξ'_λ

[15]Apesar de E estar possivelmente definida apenas em uma vizinhança da seção nula, omitiremos esse detalhe para não carregar notação.

de ξ' no autovetor e_λ cujo autovalor associado é $\lambda \neq 0$, faça $\xi_\lambda = \sqrt{|\lambda|}\xi'_\lambda$, onde ξ_λ será a componente de ξ no autovetor e_λ.

A função ϕ descrita acima é simplesmente uma redimensionalização adequada das coordenadas. Sendo P_c a projeção da fibra N_c no auto-espaço positivo, temos então que

$$\begin{aligned}
\langle k(0_c)\xi', \xi'\rangle_1 &= \langle k(0_c)\sum_\lambda \xi'_\lambda e_\lambda, \sum_\lambda \xi'_\lambda e_\lambda\rangle_1 \\
&= \langle \sum_{\lambda^-} -|\lambda|\xi'_\lambda e_\lambda + \sum_{\lambda^+} |\lambda|\xi'_\lambda e_\lambda, \sum_{\lambda^-} \xi'_\lambda e_\lambda + \sum_{\lambda^+} \xi'_\lambda e_\lambda\rangle_1 \\
&= \sum_{\lambda^-} -|\lambda|{\xi'_\lambda}^2 + \sum_{\lambda^+} |\lambda|{\xi'_\lambda}^2 \\
&= \|P_c\xi\|_1^2 - \|(1-P_c)\xi\|_1^2 .
\end{aligned}$$

Logo, $\psi := \Phi \circ \phi$ resulta no difeomorfismo desejado. □

Observação 5.3.14. Dois detalhes foram omitidos da demonstração acima: ϕ e P_c ser diferenciáveis. Para isso, cf. [21] e [15] respectivamente.

Corolário 5.3.15. *Suponha que o conjunto B de pontos críticos de E em $E^{-1}(\kappa)$ seja uma subvariedade crítica de índice k. Seja $\mu : N \to B$ o fibrado normal. Então existe, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, um difeomorfismo equivariante ϕ do disk-bundle $D_\epsilon\mu$ em uma vizinhança de B tal que*

$$E \circ \phi(\xi) = \kappa + \|P_c\xi\|_1^2 - \|(I-P_c)\xi\|_1^2, \quad c = \mu(\xi),$$

onde P_c são projeções ortonormais de fibrado equivariantes (as projeções nos auto-espaços positivos).

Demonstração. Aplique o teorema anterior para o nosso caso. □

Corolário 5.3.16. *Nas hipóteses do corolário anterior, o valor crítico κ é um valor crítico isolado.*

Demonstração. Suponha que este não seja o caso. Então, existe uma sequência κ_n de valores críticos tal que $\kappa_n \to \kappa$. Associando um ponto crítico c_n a todo κ_n, temos pela Condição (C) de Palais-Smale que c_n possui uma subsequência convergente para um ponto crítico x. Note que x é um ponto crítico de energia κ. Logo, está situado na subvariedade crítica B. Segue do corolário anterior que todo ponto em uma vizinhança de B (tirando B) não é crítico. Isto é uma contradição com o fato de $x_n \to x$. □

Proposição 5.3.17. *Seja $\mu : N \to B$ um fibrado vetorial Riemanniano com uma ação de $O(2)$ e uma projeção de fibrado ortogonal equivariante $c \in B \mapsto P_c \in L(N_c; N_c)$ de co-kernel de dimensão k.*

Agora, para um $\epsilon > 0$, considere as funções equivariantes

$$E(\xi) = \|P_c\xi\|_1^2 - \|(I-P_c)\xi\|_1^2; \quad c = \mu(\xi),$$

$$F(\xi) = E(\xi) - \frac{3\epsilon}{2}\lambda\left(\frac{\|P_c\xi\|_1^2}{\epsilon}\right); \quad c = \mu(\xi),$$

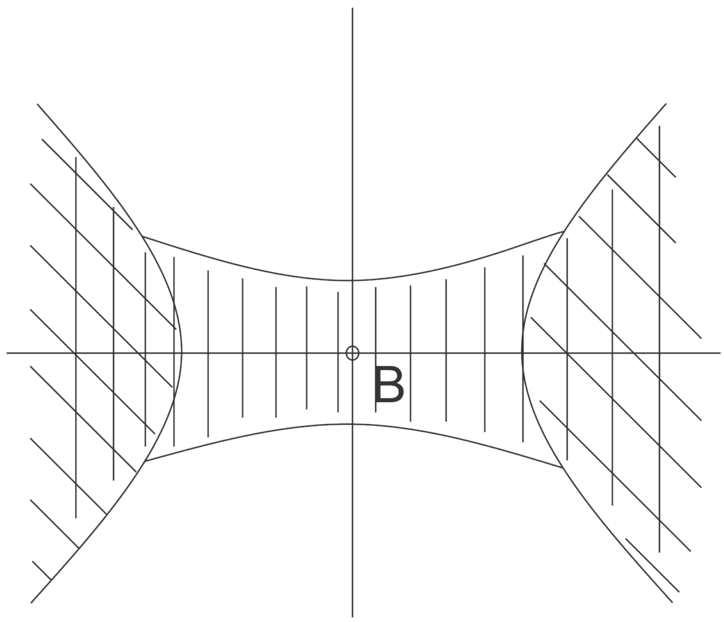
onde λ é como no Lema 11.6.1 (ver Apêndice). Então tem-se que $N_F := \{\xi \in D_{2\epsilon}\mu, F(\xi) \leq -\epsilon\}$ é obtido através de uma adjunção equivariante do fibrado $\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$ [16] ao espaço

[16] $\overline{D}$ é o disk-bundle **fechado** unitário, e os subfibrados são, respectivamente, o núcleo e imagem de P.

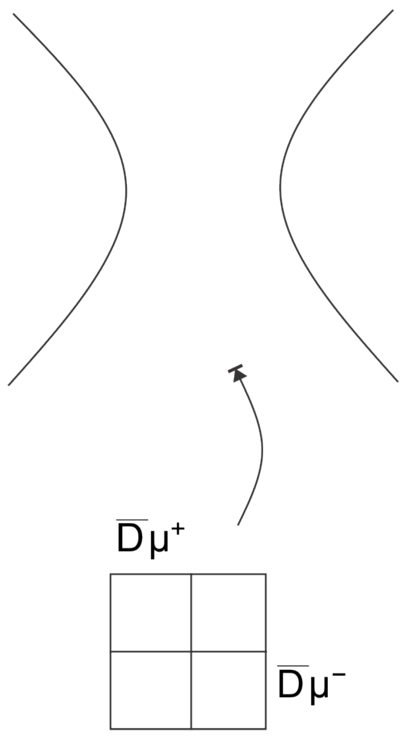
$N_E := \{\xi \in D_{2\epsilon}\mu, E(\xi) \leq -\epsilon\}$.

Observação 5.3.18. Antes de apresentarmos a demonstração, fazemos uma ilustração do que ocorre no lema.

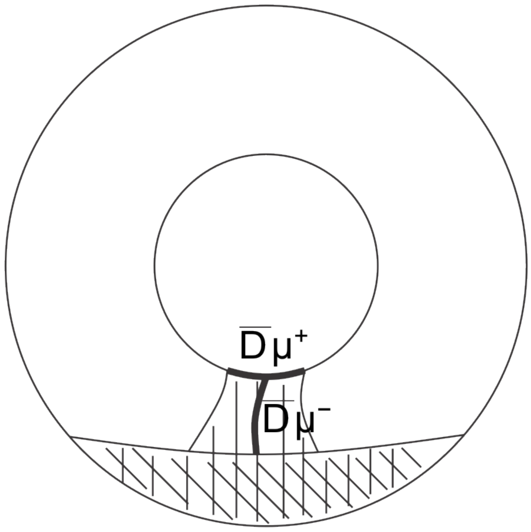
No caso de B ser um ponto e de termos um ponto crítico de índice 1 em uma variedade de dimensão 2 (como por exemplo, o caso padrão do toro), temos a seguinte figura:



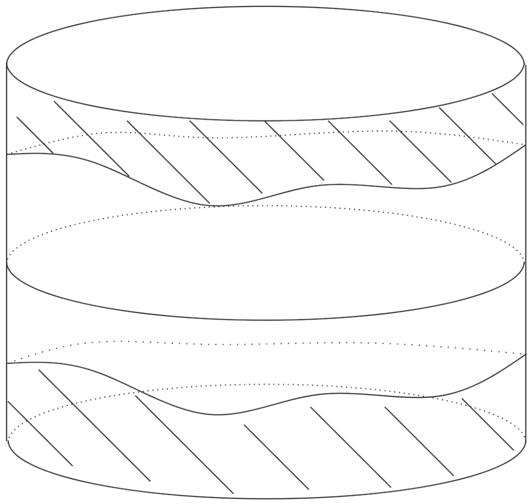
onde a parte com linhas diagonais equivale a N_E e a parte com linhas verticais equivale a F_E. Pode-se ver então que N_F é a adjunção dada pela proposição:



Na variedade, isto se traduz da seguinte forma:



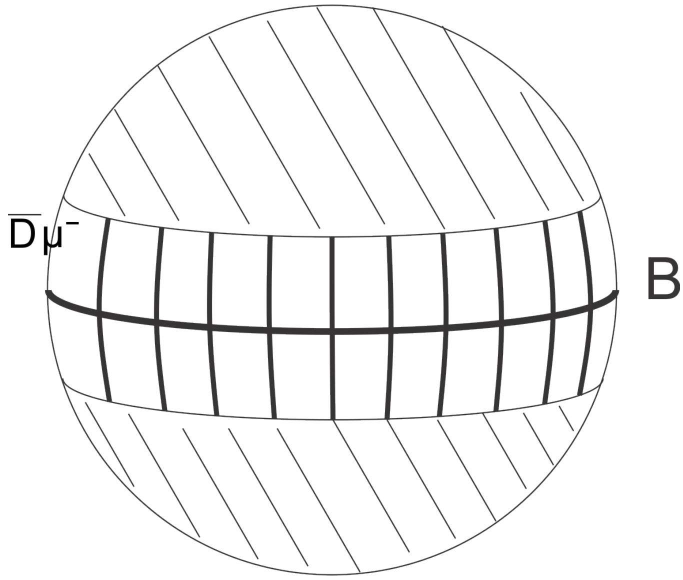
No caso de B ser uma subvariedade de dimensão 1 e de termos um ponto crítico de índice 1 em uma variedade de dimensão 2 (como por exemplo, o caso da esfera e do eixo), temos a seguinte figura [17]:



A adjunção é óbvia.

Na variedade, isto se traduz da seguinte forma:

[17] Não destacamos o que seria N_F pois N_F é tudo.



Por último e por questão de completude, observamos que a afirmação "$N_F := \{\xi \in D_{2\epsilon}\mu, F(\xi) \leq -\epsilon\}$ é obtido através de uma adjunção equivariante do fibrado $\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$ ao espaço $N_E := \{\xi \in D_{2\epsilon}\mu, E(\xi) \leq -\epsilon\}$" significa explicitamente que existe um homeomorfismo equivariante h de $\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$ em um subconjunto fechado $H \subset N_F$ de forma que

- $N_F = N_E \cup H$.
- $h|_{\partial\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+}$ é um difeomorfismo equivariante sobre $\partial N_E \cap H$.
- $h|_{D\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+}$ é um difeomorfismo equivariante sobre $N_F - N_E$.

Demonstração. No Apêndice, construímos uma função $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ que satisfaz

- σ é diferenciável e crescente em $[0,1]$.
- $\sigma(0) = \frac{1}{2}$, $\sigma(1) = 1$.
- Dado $\epsilon > 0$,

$$-\epsilon \leq u^2 - v^2 \leq -\epsilon + \frac{3\epsilon}{2}\lambda\left(\frac{u^2}{3}\right) \implies u^2 \leq \epsilon\sigma\left(\frac{v^2}{\epsilon + u^2}\right),$$

onde λ é uma bump function adequada.

Seja agora

$$h : D\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+ \to N_F$$

$$(\xi_- + \xi_+) \mapsto \left(\epsilon\sigma\left(\|\xi_-\|_1^2\right)\|\xi_+\|_1^2 + \epsilon\right)^{1/2}\xi_- + \left(\epsilon\sigma(\|\xi_-\|_1^2)^{1/2}\xi_+\right),$$

onde $\xi_- = (I - P)\xi$; $\xi_+ = P\xi$. Assim,

$$E(h(\xi_- + \xi_+)) = \epsilon\left(\sigma(\|\xi_-\|_1^2)\|\xi_+\|_1^2(1 - \|\xi_-\|_1^2) - \|\xi_-\|_1^2\right) \geq -\epsilon,$$

$$
\begin{aligned}
F(h(\xi_- + \xi_+)) &= \epsilon(\sigma(\|\xi_-\|_1^2)\,\|\xi_+\|_1^2\,(1 - \|\xi_-\|_1^2) - \|\xi_-\|_1^2 \\
&\quad - \frac{3}{2}\lambda\left(\sigma(\|\xi_-\|_1^2)\,\|\xi_+\|_1^2\right)) \\
&\leq \epsilon\left(\sigma(\|\xi_-\|_1^2)(1 - \|\xi_-\|_1^2) - \|\xi_-\|_1^2 - \frac{3}{2}\lambda(\sigma(\|\xi_-\|_1^2))\right) \leq -\epsilon.
\end{aligned}
$$

Temos então usando as propriedades de σ que h é um homeomorfismo de $D\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$ sobre $H := \{\xi \in D_{2\epsilon}\mu; E(\xi) \geq -\epsilon, F(\xi) \leq -\epsilon\}$, com a inversa sendo

$$
\begin{aligned}
h^{-1}(\eta) &= (\epsilon + \|P\eta\|_1^2)^{-1/2}(I - P)\eta \\
&\quad + \left(\epsilon\sigma\left(\frac{\|(I-P)\eta\|_1^2}{\epsilon + \|P\eta\|_1^2}\right)\right)^{-1/2} P\eta.
\end{aligned}
$$

Como σ é diferenciável e com derivada não-nula em $[0,1)$, temos que $h|_{D\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+}$ é diferenciável de posto maximal (logo, como é também um homeomorfismo, é um difeomorfismo).

Para $\xi = \xi_- + \xi_+ \in \partial\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$, tem-se que

$$
h(\xi) = \left(\epsilon\,\|\xi_+\|_1^2 + \epsilon\right)^{1/2} \xi_- + \epsilon^{1/2}\xi_+,
$$

de forma que $h|_{\partial\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+}$ é um difeomorfismo sobre $\partial N_E \cap H$.

□

Observação 5.3.19. Observamos que a proposição acima equivale no caso de dimensão finita à construção feita em [16] durante a demonstração do teorema equivalente. O próprio uso de uma função diferenciável auxiliar é análogo.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema que dá o instrumento mais importante da nossa teoria. É ele que diz como muda a topologia de Λ ao passar por uma subvariedade crítica, análogo ao caso de uma função de Morse em uma variedade de dimensão finita.

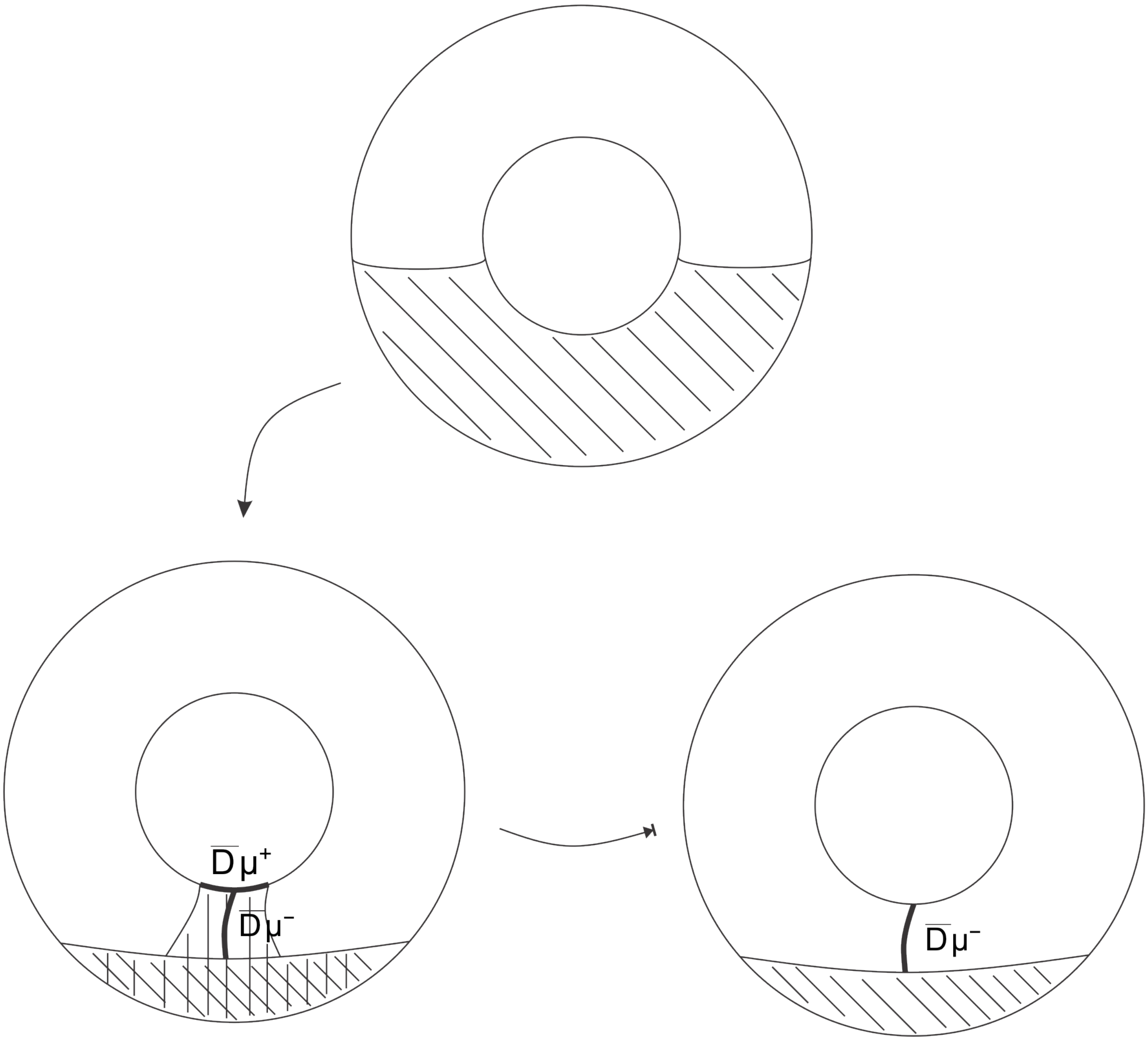
Teorema 5.3.20. *Suponha que o conjunto B de pontos críticos de Λ em $E^{-1}(\kappa)$ é uma subvariedade crítica não-degenerada.*

Então, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\Lambda^{\kappa+\epsilon}$ é equivariantemente difeomorfo a $\Lambda^{\kappa-\epsilon}$ com uma adjunção de $\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$.

Observação 5.3.21. Nas seções introdutórias deste capítulo dissemos que o importante para a mudança topológica era o fibrado de auto-espaços negativos. O teorema acima aparentemente contradiz isso, visto que considera a soma direta do fibrado de auto-espaços negativos e positivos.

Notamos, porém, que não há contradição. De fato, a “parte positiva” que aparece é irrelevante em termos homotópicos. Ela pode ser colapsada de forma a ser homotopicamente irrelevante. A intuição para isto é que, ao passar de um ponto crítico, a mudança topológica relevante acontece no que foi transpassado (e isto é visto pela parte negativa da Hessiana, visto que a energia está crescendo). Como o que importa para a homologia é o tipo homotópico, nossa observação nas seções introdutórias é válida.

Ilustramos a situação com a seguinte figura:



Demonstração. O Lema de Morse Generalizado fornece um difeomorfismo equivariante ϕ de um disk-bundle $D_{2\delta}\mu$ do fibrado normal $\mu : N \to B$ de forma que

$$E \circ \phi(\xi) = \kappa + \|P\xi\|_1^2 - \|(I - P)\xi\|_1^2 .$$

Usando o fato de que o valor crítico κ é isolado, escolha $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \delta^2$ e κ é o único valor crítico em $(\kappa - 3\epsilon, \kappa + 3\epsilon)$.

Definimos no conjunto $W := \{e \in \Lambda, E(e) \geq \kappa - 2\epsilon\}$ a função

$$F(e) = \begin{cases} E(e) - \frac{3\epsilon}{2}\lambda\left(\frac{\left\|P\circ\phi^{-1}(e)\right\|_1^2}{\epsilon}\right) & \text{se } e \in \phi D_{2\delta}\mu \\ E(e) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Temos então que o fecho do conjunto $\{e \in W \cap \phi D_{2\delta}\mu; E(e) \neq F(e)\}$ pertence ao interior do conjunto $\phi(D_{2\delta}\mu)$. Isto segue do fato de que se $e = \phi(\xi) \in W$ e $E(e) \neq F(e)$, então $\lambda\left(\frac{\|P\xi\|_1^2}{\epsilon}\right)$, donde conclui-se que $\|P\xi\|_1^2 < \epsilon$, $E(e) < \kappa + \epsilon$ e $E(e) = \kappa + \|P\xi\|_1^2 - \|(I - P)\xi\|_1^2 \geq \kappa - 2\epsilon$, chegando a $\|\xi\|_1^2 < 4\epsilon < 4\delta^2$.

Note que mostramos também que $\{e \in W;\ E(e) \leq \kappa + \epsilon\} = \{e \in W;\ F(e) \leq \kappa + \epsilon\}$.

Segue agora da proposição anterior que $N_F := \{e \in W \cap \phi D_{2\delta}\mu;\ F(e) \leq \kappa - \epsilon\}$ é a adjunção equivariante de $\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+$ ao espaço $N_E := \{e \in W \cap \phi D_{2\delta}\mu; E(e) \leq \kappa - \epsilon\}$.

Temos que $N_E = \Lambda^{\kappa-\epsilon} \cap D_{2\delta}\mu$ e que $N_F \subset \Lambda^{\kappa+\epsilon}$ contém a subvariedade crítica B em seu interior, uma vez que $F(c) = \kappa - \frac{3\epsilon}{2} < \kappa - \epsilon$.

Como $\mathrm{int} N_F$ é uma vizinhança de B, temos do Lema 3.2.11. que $\|\mathrm{grad} E\|_1$ é limitado inferiormente por uma constante positiva fora de $\mathrm{int} N_F$, de forma que o fluxo gradiente pode servir como uma deformação equivariante de $\Lambda^{\kappa+\epsilon}$ sobre $\Lambda^{\kappa-\epsilon} \cup N_F$. □

Corolário 5.3.22. *Suponha que o conjunto B de pontos críticos de Λ em $E^{-1}(\kappa)$ é uma subvariedade crítica não-degenerada. Então*

$$H_*(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa-\epsilon}; G) = H_*(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa^-}; G) = H_{*-i}(B; G),$$

onde i é o índice de B e G deve ser $\mathbb{Z}_2$ se o fibrado μ^- não for orientável.

Demonstração.

$$\Lambda^{\kappa+\epsilon} \overset{dif}{\cong} \Lambda^{\kappa-\epsilon} \bigcup (\overline{D}\mu^- \oplus \overline{D}\mu^+) \overset{eq.\ hmtp}{\cong} \Lambda^{\kappa-\epsilon} \bigcup \overline{D}\mu^-,$$

onde a união é com um mapa de adjunção no bordo do fibrado unitário $\overline{D}\mu^-$. Assim, temos que

$$\Lambda^{\kappa+\epsilon}/\Lambda^{\kappa-\epsilon} \overset{eq.hmtp}{\cong} \overline{D}\mu^-/\partial\overline{D}\mu^-.$$

Pelo Teorema do Isomorfismo de Thom [18](ver Apêndice),

$$H^{*+i}(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa-\epsilon}) \cong H^*(B)$$

Por dualidade de Poincaré [19],

$$H_*(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa-\epsilon}) \cong H_{*-i}(B).$$

Para concluir o resultado basta usar a sequência exata longa para as triplas $(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa^-})$ e $(\Lambda^{\kappa}, \Lambda^{\kappa-}, \Lambda^{\kappa-\epsilon})$ notando que $H_*(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa}) = 0$ e $H_*(\Lambda^{\kappa-}, \Lambda^{\kappa-\epsilon}) = 0$. □

Temos agora um grande instrumento para calcular $H_*(\Lambda M)$. De fato, o corolário acima é um pilar essencial para o nosso cálculo para a homologia do loop space. Existem, porém, alguns problemas.

Intuitivamente falando, os $H_*(\Lambda^{\kappa+\epsilon}, \Lambda^{\kappa-\epsilon})$ mostram as mudanças homológicas ao passar por um ponto crítico. Uma esperança que poderíamos ter é, então, que

$$H_*(\Lambda(M); G) = \bigoplus H_{*-i(B)}(B; G), \tag{5.1}$$

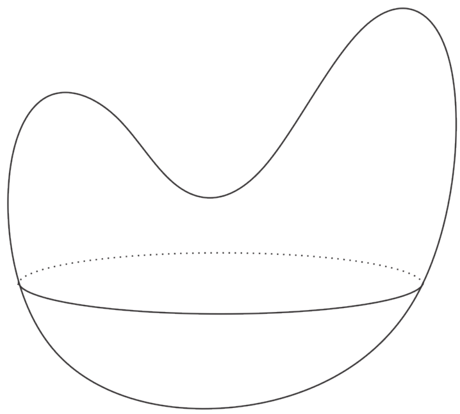
onde a soma é sobre todas as subvariedades críticas e G deve ser $\mathbb{Z}_2$ se nem todos os fibrados de auto-espaços negativos são orientáveis.

Mas este não necessariamente é o caso. Como estamos considerando homologias relativas, pode ser que determinadas classes sejam eliminadas conforme subimos nos níveis críticos ao invés de as homologias apenas se complementarem.

Como um exemplo concreto, tome a esfera deformada abaixo, juntamente com a função altura:

[18]A observação sobre a orientabilidade vem da aplicação deste teorema.

[19]Aqui, lembramos que B é compacta devido à Condição (C).



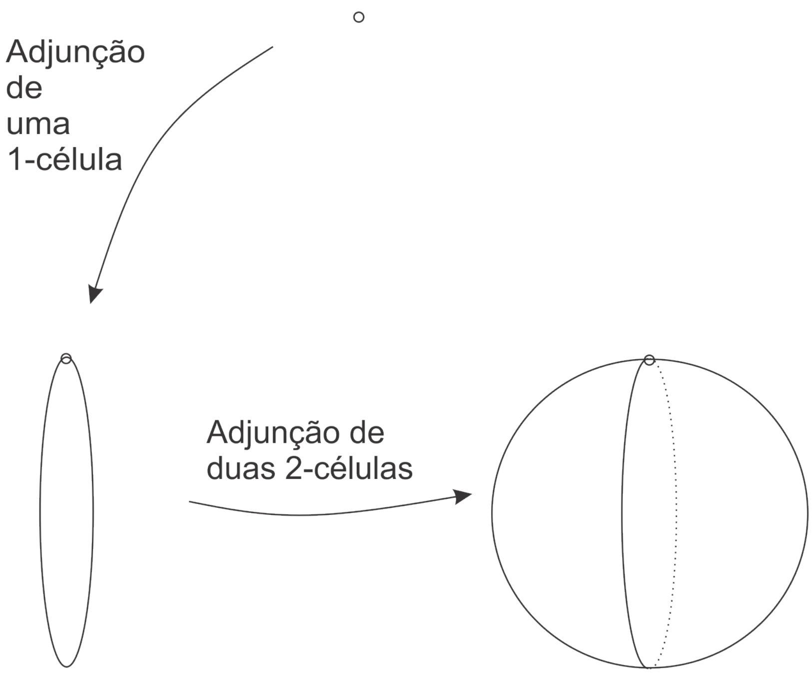
Temos um ponto crítico de índice 0, um ponto crítico de índice 1 e dois de índice 2. O complexo de cadeias do CW-complexo associado é então

$$... \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to 0 \to ...$$

O complexo "está errado" segundo nossos desejos - não reflete diretamente a homologia da esfera. O que ocorre é que os mapas de bordo não se comportam como gostaríamos. De fato, ∂_2 é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{Z} \oplus 0$. Notando que ∂_1 é o mapa trivial, temos então que

$$H_*(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus 0 \cong \mathbb{Z} & \text{if } * = 2 \\ 0/0 \cong 0 & \text{if } * = 1 \\ \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z} & \text{if } * = 0 \end{cases}$$

Esse fenômeno ocorre devido ao fato de o complexo de cadeias do CW-complexo estar relacionado com os mapas de adjunção. Note que nossa função de Morse (neste caso, a altura) está fazendo a seguinte construção da esfera como CW-Complexo:



O problema está exatamente na adjunção das duas 2-células. Ao estarem se adjuntando da mesma forma no círculo, elas promovem uma redundância de informações, o que se traduz no complexo através de ∂_2 não ser trivial.

Além disso, observe que se tivéssemos parado a construção de CW-complexo na primeira etapa, teríamos o complexo de cadeias "correto" do CW-complexo relativo ao círculo S^1.

Já o caso do toro em pé, o complexo de cadeias do CW-complexo toma a forma

$$... \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0 \to ...$$

que é precisamente a homologia do toro. Note que não há redundância de informações nos mapas de adjunção.

Assim, uma questão que coloca-se imediatamente é: o que acontece no caso do funcional de energia em ΛM? Mostraremos nesta dissertação que, em espaços globalmente simétricos, estamos no contexto do caso em que as classes não são eliminadas, fazendo com que tenhamos a equação 5.1 à nossa disposição para o cálculo da homologia do free loop space.

Capítulo 6

O Caso da Esfera

> The art of doing mathematics is finding that special case that contains all the germs of generality.
>
> David Hilbert

Introdução

Nossa intenção agora é aplicar a teoria que construímos em um caso concreto. Primeiramente discutiremos o caso da esfera S^2. Este é um caso rico de intuição e que nos permitirá discutir o assunto de forma bem concreta. Depois, faremos o caso da esfera S^n.

Na seção 6.1, focaremos em justificar intuitivamente o que necessitamos para nossos cálculos. Um bom exemplo será a forma como concluiremos os valores do índice e nulidade das subvariedades críticas da esfera S^2. Na seção seguinte, faremos um cálculo rigoroso da homologia do free loop space da esfera assumindo os valores dos índices e nulidades das subvariedades críticas, os quais provaremos nos capítulos seguintes. Nesta seção, empregamos métodos que podem ser vistos em [19].

6.1 Um cálculo heurístico de $H_*\Lambda S^2$

Queremos computar a homologia de ΛS^2. Para isso, se quisermos usar a fórmula (4.1), precisamos mostrar uma série de coisas. Explicitamente, precisamos:

1. Mostrar que o conjunto B de pontos críticos de $E^{-1}(\kappa)$ é uma subvariedade crítica.

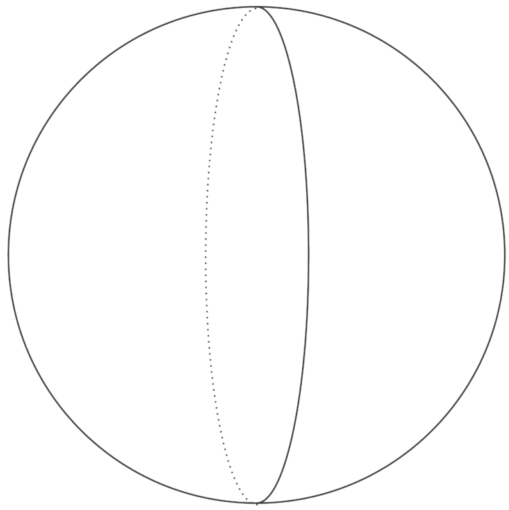
2. Mostrar que B é não-degenerada.

3. Mostrar que nenhuma classe relativa é aniquilada ao passar por um valor crítico.

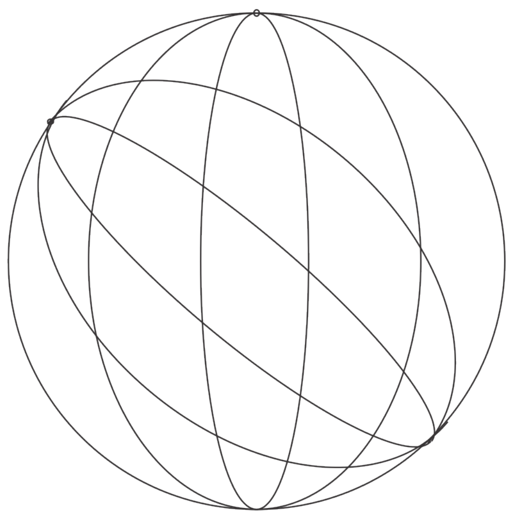
4. Determinar quem é B e computar sua homologia.

Se conseguirmos fazer isso, conseguimos computar a homologia de ΛS^2.

Como os pontos críticos do funcional energia são as geodésicas fechadas, é útil que tenhamos uma descrição das geodésicas fechadas do nosso espaço. Nosso caso escolhido é excelente nesse aspecto, pois sabemos que as geodésicas fechadas de S^2 com sua métrica usual são os grandes círculos.



De agora em diante neste capítulo nos referiremos às geodésicas fechadas apenas como *geodésicas* a fim de evitar repetitividade. Assim sendo temos que o conjunto B_0 de pontos críticos de $E^{-1}(\{0\})$ é dado pelos mapas constantes (este conjunto é evidentemente difeomorfo a S^2; veja a Proposição 4.2.6) e o conjunto $B_{2\pi k}$ de pontos críticos de $E^{-1}(\{2\pi k\})$ é dado por geodésicas que realizam k voltas. Para entender melhor os conjuntos $B_{2\pi_k}$, observe a figura abaixo.



De cada ponto $p \in S^2$, saem geodésicas de mesmo "período" em todas as direções possíveis. Note que as geodésicas são determinadas pelo ponto de saída P e a direção v da velocidade. Assim sendo, é natural visualizar $B_{2\pi k}$ como T^1S^2 - o fibrado tangente unitário sobre a esfera .

De fato, seja $\gamma_{(P,v)}$ a geodésica cuja velocidade inicial é v, de norma 1, e cujo período é $2\pi k$. Agora, considere o mapa

$$\Gamma : T^1S^2 \to B_{2\pi k} \subset \Lambda M$$

$$(P, v) \mapsto \gamma_{(P,v)}.$$

Como já argumentamos, este mapa é bijetivo. É fácil ver que ele é contínuo. Sendo um mapa bijetivo e contínuo definido em um conjunto compacto, ele é um homeomorfismo. Mas temos também que este mapa é um difeomorfismo, devido à suavidade de soluções de EDO's com respeito às condições iniciais. Assim, temos um mergulho de T^1S^2 em ΛM, onde $B_{2\pi k} \cong T^1S^2$. Isto mostra que $B_{2\pi k}$ é uma subvariedade crítica. [1]

No caso específico de S^2, T^1S^2 tem uma interpretação bem elementar: é o grupo de rotações $SO(3)$. Como $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ [2], temos que

$$H_*(SO(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } * = 3 \\ 0 & \text{se } * = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } * = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } * = 0 \end{cases}$$

Se assumíssemos o item 3 do começo da seção teríamos quase tudo em mãos para computar a homologia de ΛM. Faltaria apenas o índice de $B_{2\pi k}$ e a nulidade (para fins de termos que $B_{2\pi k}$ é não degenerada).

Para calcular o índice i_k de $B_{2\pi k}$ note que o índice de um ponto crítico, sendo a dimensão do auto-espaço negativo, indica essencialmente a quantidade de direções que maximizam localmente a velocidade de decrescimento da energia [3]. Por exemplo, no caso do toro em pé com a função altura o índice dos pontos críticos "intermediários" é 1. Observando a figura (veja o capítulo anterior) isso fica claro em termos da descrição que acabamos de dar.

Como em ΛM os pontos são curvas e os pontos críticos são geodésicas, as observações do parágrafo anterior nos levam a uma conclusão que será útil para nós: a nulidade de uma subvariedade crítica está relacionada aos campos de Jacobi definidos sobre as geodésicas. Isso é devido ao fato de que os elementos de ΛM são curvas, de forma que mover elementos é formar variações de geodésicas.

Devido à grande liberdade existente em ΛM, fixaremos um ponto base para nosso estudo [4]. No que vem a seguir, o ponto fixado é o ponto "de trás" da esfera.

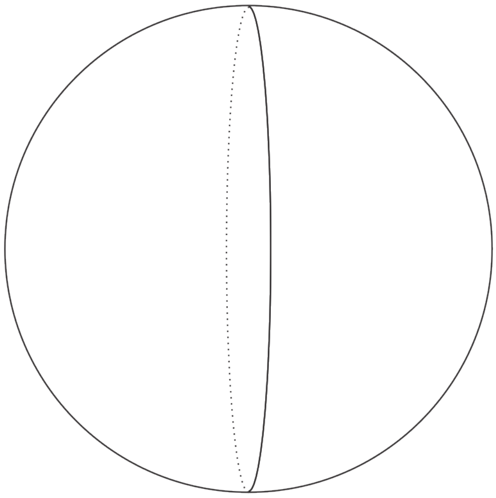
Tome um elemento de $B_{2\pi}$:

[1] Notamos que nada foi concluído sobre a não-degenerescência de $B_{2\pi k}$.

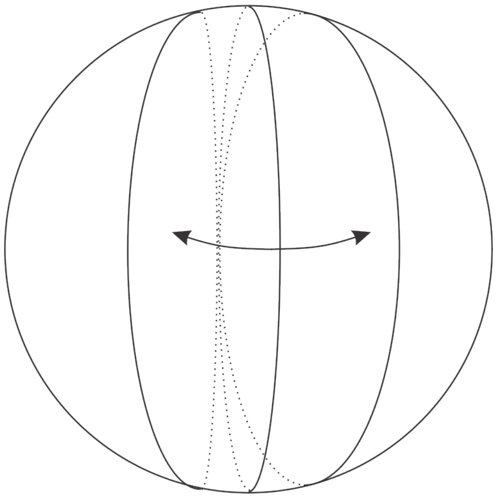
[2] Para uma referência, [5] possui uma seção específica para $SO(3)$.

[3] Formalmente, isto é devido ao fato de auto-valores de um determinado operador A serem os valores críticos de $\langle A(\,\cdot\,), (\,\cdot\,)\rangle$ restrito aos vetores de norma 1.

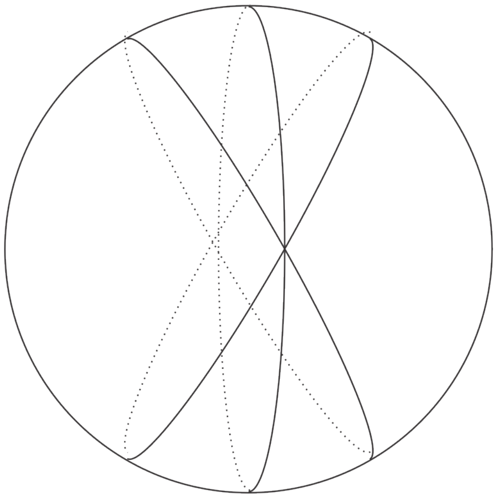
[4] O espaço de loops com um ponto base fixado é frequentemente chamado apenas de *loop space*, ou *pointed loop space*. Cf. [16]



Temos que para maximizar a velocidade de decrescimento de energia direcionalmente, a única opção é mover horizontalmente a geodésica:



Isto nos dá que $i_1 = 1$. Agora, tome um elemento be $B_{2\pi k}$. Vamos refletir sobre o que aconteceu no caso de $B_{2\pi}$. Se rodássemos o círculo verticalmente, ou seja,



estaríamos deixando a energia fixada. Note que o ponto da frente da esfera ficou parado nesse processo. Isto sugere a seguinte ideia: se queremos ser o mais efetivo possível em variar a energia, devemos concentrar a movimentação em pontos que ficam parados no decorrer de uma variação de geodésicas. Afinal, se o resto da geodésica pode se mover sem variar a energia, é razoável acreditar que o ponto que ficou parado seja bastante relevante para a mudança de energia. Ou seja, o índice de uma geodésica (no pointed loop space) é o número de pontos conjugados da mesma. Como estamos fixando os pontos iniciais e finais, é fácil ver que este número para um loop que dá k voltas é $2k-1$.

Queremos então voltar ao nosso caso do free loop space ΛS^2. Para isto, considere uma variação da geodésica que não deixe o ponto base fixado. A essa variação associamos uma variação equivalente, jogando o ponto base das curvas da variação para o ponto base da geodésica através de uma isometria. Dessa forma, temos uma equivalência entre o problema no free loop space e no pointed loop space. Assim, o índice de $B_{2\pi k}$ é $2k-1$. Jogando isto na nossa fórmula 4.1, temos então que

$$\begin{aligned}
H_0(\Lambda S^2) &= H_0(S^2) \oplus H_{-1}(T^1(S^2)) \oplus ... && = \mathbb{Z} \\
H_1(\Lambda S^2) &= H_1(S^2) \oplus H_0(T^1(S^2)) \oplus H_{-2}(T^1(S^2)) \oplus ... && = \mathbb{Z} \\
H_2(\Lambda S^2) &= H_2(S^2) \oplus H_1(T^1(S^2)) \oplus H_{-1}(T^1(S^2)) \oplus ... && = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
H_3(\Lambda S^2) &= H_3(S^2) \oplus H_2(T^1(S^2)) \oplus H_0(T^1(S^2)) \oplus ... && = \mathbb{Z} \\
H_4(\Lambda S^2) &= H_4(S^2) \oplus H_3(T^1(S^2)) \oplus H_1(T^1(S^2)) \oplus ... && = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Mais compactamente, temos

$$H_*(\Lambda S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } * = 0;\ 2k+1, k \geq 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } * = 2k+2, k \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observação 6.1.1. Observamos que o argumento intuitivo dado para $i(B_{2\pi k}) = 2k-1$ em S^2 se transmite diretamente para o caso de S^n, resultando em $i(B_{2\pi k}) = (2k-1)(n-1)$.

6.2 Cálculo de $H_* \Lambda S^n$

Para os fins dessa seção, iremos assumir que temos os valores dos índices e nulidade das subvariedades críticas de S^n. Mudando a notação de $B_{2\pi k}$ para B_k, são eles

$$i(B_k) = (2k-1)(n-1),$$
$$\nu(B_k) = 2n-1.$$

Uma justificativa heurística para tais valores foi dada na seção anterior. O cálculo rigoroso será realizado no Capítulo 9.

Definição 6.2.1. Seja X uma variedade Hilbertiana e f uma função real diferenciável definida em X que satisfaz a condição (C) de Palais-Smale. Seja B o conjunto de pontos críticos de um determinado nível de energia e assuma que B seja uma subvaridade crítica não-degenerada de índice $i(B)$.

Uma *variedade completante* para B é uma variedade fechada Y de dimensão finita junto com uma subvariedade fechada $L \subset Y$ de codimensão $i(B)$ e um mapa $\phi : Y \to X^{\leq 0}$ que satisfaz às condições abaixo:

1. ϕ é um mergulho em uma vizinhança de L, leva L difeomorficamente sobre B e $\phi^{-1}(B) = L$.

2. O mapa canônico $H_*(Y;G) \to H_*(Y, Y\backslash L; G)$ é sobrejetivo.

Diremos que Y é uma *variedade completante forte* se, além das condições acima, é satisfeita a seguinte propriedade.

3. Y é orientável e existe uma retração $p : Y \to L$ que composta com o mergulho $s : L \hookrightarrow Y$ é a identidade em L.

Observação 6.2.2. Para $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, não precisamos da hipótese de orientabilidade na definição de uma variedade completante forte. Ademais, se (3.) vale, então (2.) vale automaticamente (c.f. [20]).

A definição acima permite resolver a questão das classes relativas não serem aniquiladas, como mostra o próximo lema.

Lema 6.2.3. *Sejam X, f, B como na definição anterior e μ^- o fibrado negativo sobre B. Se B admite uma variedade completante, então a sequência a seguir é exata:*

$$0 \to H_*(X^{<0}) \to H_*(X^{\leq 0}) \to H_{*-i(B)}(B; o_{\mu^-}) \to 0.$$

Se B admite uma variedade completante forte, então a sequência acima é split. Assim, tem-se que

$$H_*(X^{\leq 0}) \cong H_*(X^{<0}) \oplus H_{*-i(B)}(B; o_{\mu^-}).$$

Demonstração. Primeiramente, notamos que $X^{=0}$ consiste dos pontos tais que $f = 0$, mas que não necessariamente são pontos críticos. Os pontos que não são pontos críticos possuem gradiente não-nulo. Assim, compondo ϕ com o fluxo de $-$grad para qualquer tempo maior que zero, diminuímos a energia dos elementos de $X^{=0}$ que não são pontos críticos, mantendo os pontos críticos em $X^{=0}$. Temos então um novo mapa $\tilde{\phi} : (Y, Y\backslash L) \to (X^{\leq 0}, X^{<0})$ que satisfaz às mesmas condições de ϕ se o tempo de fluxo for suficientemente pequeno. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \longrightarrow & H_*(X^{<0}) & \longrightarrow & H_*(X^{\leq 0}) & \xrightarrow{i^*} & H_*(X^{\leq 0}, X^{<0}) & \longrightarrow & ... \\
 & & \tilde{\phi}_* \uparrow & & \tilde{\phi}_* \uparrow & & \tilde{\phi}_* \uparrow & & \\
... & \longrightarrow & H_*(Y\backslash L) & \longrightarrow & H_*(Y) & \xrightarrow{j^*} & H_*(Y, Y\backslash L) & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

Note que as suposições sobre uma variedade completante fazem com que o fibrado normal de L em Y seja isomorfo ao pull-back do fibrado negativo sobre K via ϕ. Juntando isto com a demonstração do Corolário 5.3.22, temos então que o morfismo da direita é um isomorfismo. Pela hipótese (2) sobre uma variedade completante, temos então a primeira parte do resultado.

Para a segunda parte, temos que a hipótese (3) nos dá uma inversa à direita de j^*. Logo, também temos que i^* tem uma inversa à direita. Desta forma, a sequência é split, e temos a segunda parte do resultado.

□

No que segue B_k será sempre tomado com $k \geq 1$, uma vez que o caso B_0, como já foi dito, se trata dos mapas constantes (o que é difeomorfo a S^n). Agora, respondamos aos quatro primeiro itens da Seção 6.1 :

1. Mostrar que o conjunto B_k de pontos críticos de $E^{-1}(\kappa)$ é uma subvariedade crítica.

   Isto foi feito na seção anterior, onde mostramos que B_k é uma subvariedade difeomorfa a T^1S^n.

2. Mostrar que B_k é não-degenerada.

   Isto segue do fato (ainda não provado) de a nulidade de B_k ser $2n-1$. Como $B_k \cong T^1S^n$, temos que a dimensão do espaço-nulo é a mesma da dimensão da subvariedade crítica. Logo são todas não-degeneradas.

3. Mostrar que nenhuma classe relativa é aniquilada ao passar por um valor crítico.

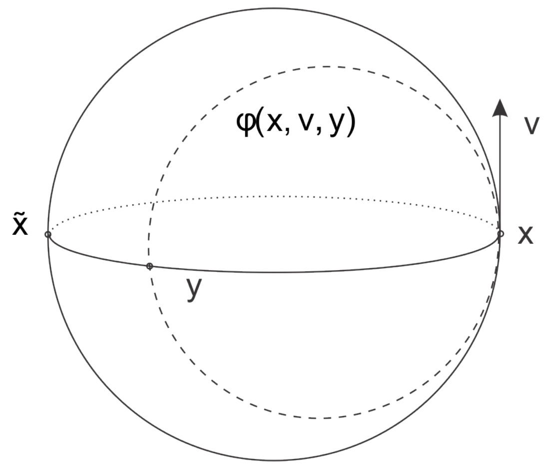
   É o que faremos a seguir.

4. Determinar quem é B_k e computar sua homologia.

   Já sabemos que B_k é o fibrado unitário sobre a esfera.

A ferramenta que empregaremos para lidar com o item 3 é o lema que acabamos de provar. Assim sendo, precisamos fornecer variedades completantes fortes para nossos B_k.

Para B_1, seja Y_1 o fibrado sobre T^1S^n onde cada fibra sobre (x,v) é a esfera de dimensão $n-1$ passando por x ortogonal ao grande círculo que é tangente a v. Faça $L_1 := T^1S^n$, e seja $s : L_1 \hookrightarrow Y_1$ a seção que leva um elemento (x,v) no ponto antípoda $\tilde{x}$. Finalmente, defina $\phi : Y_1 \to \Lambda S^n$ como o mapa que leva (x,v,y), onde y é um elemento da fibra, ao único círculo de S^n que passa por x, y, que é tangente a v e que passa perpendicularmente pela esfera da fibra. Se $y = x$, definimos o círculo como o mapa constante. Se $y \neq x$, parametrizamos ele por comprimento de arco.



Proposição 6.2.4. *ϕ satisfaz à condição* (1.) *da Definição 6.2.*

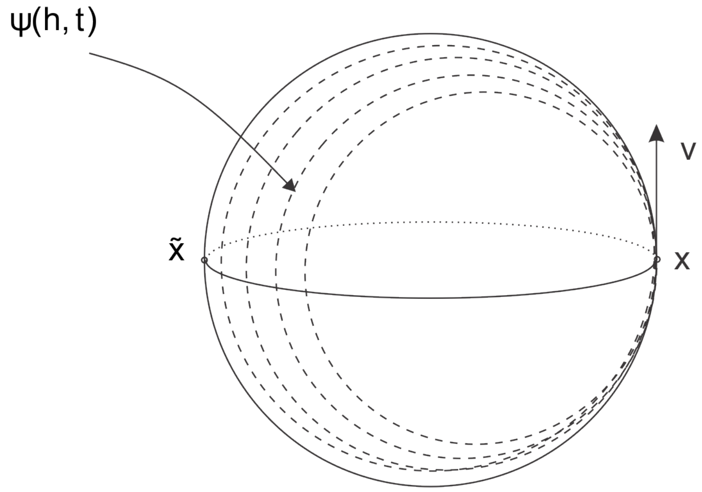
Demonstração. Localmente em torno de (x,v,x^*) podemos ver Y_1 como $\mathbb{R}^n \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-1} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-1}$, onde o penúltimo fator vem da fibra do fibrado tangente unitário e o último da fibra do equador. Mostramos que ϕ, em coordenadas locais, possui derivadas parciais contínuas perto de L_1. Sendo um mapa de um espaço de dimensão finita para um espaço de Hilbert, isso implica que é diferenciável (c.f. [1]).

Primeiramente analisamos a derivada parcial em relação a uma das direções do equador. Tomamos como sendo a primeira, sem perda de generalidade. É fácil ver que o mapa

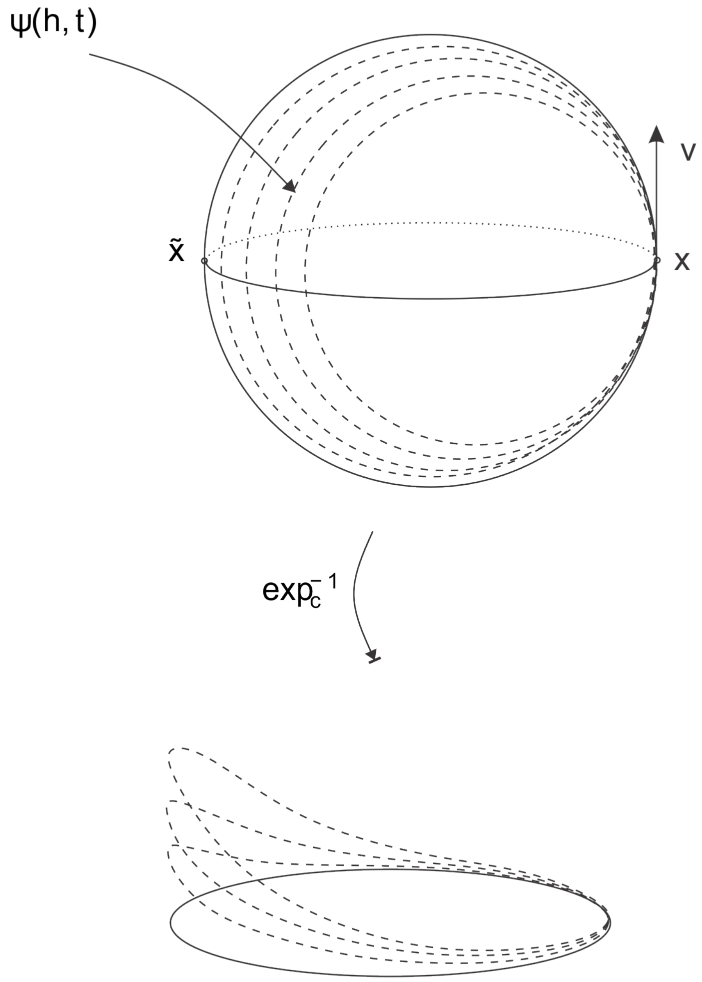
$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \Lambda S^n$$

$$h \mapsto \phi(x, v, (h, y_2, ..., y_{n-1}))(\cdot)$$

fornece uma superfície diferenciável $\psi(h, t)$ (a homotopia da curva ilustrada na imagem da página anterior, crescendo de forma a passar por $\tilde{x}$ e depois diminuindo).



Essa superfície, ao passar para as coordenadas locais $H^1(c^*TM)$ através de $\exp_c^{-1}$ (ver Capítulo 3), se torna então uma homotopia diferenciável de curvas diferenciáveis (onde c é a geodésica).



Desta forma, temos então o limite pontual $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, que nada mais é do que a derivada parcial da homotopia em relação a h. Porém, como estamos no free loop space, devemos mostrar que a convergência é na norma do espaço H^1 (ver Capítulo 3). Mas isto segue do teorema da convergência dominada junto com a convergência pontual que acaba de ser citada, e a análoga convergência pontual das derivadas. Como esta derivada parcial de f depende continuamente de $\frac{\partial \psi}{\partial h}$, então tal derivada parcial é contínua. O mesmo argumento se aplica obviamente para todas as direções na fibra S^{n-1} dada pelo equador.

Ao variarmos a primeira coordenada da primeira fibra (originada do fibrado tangente unitário), vemos que o argumento é análogo, mas a superfície agora é uma rotação da geodésica ortogonalmente ao equador. Ao variarmos a primeira coordenada que se origina de uma parametrização de S^n, temos uma situação simétrica à situação da coordenada da última fibra, com uma única diferença em uma coordenada que gera uma rotação da geodésica. De qualquer forma, os argumentos se repetem.

É imediato pela descrição acima que a derivada é injetiva próximo a L. Tomando um fechado próximo de L que contém uma vizinhança de L, temos que ϕ é uma função injetiva contínua em um compacto. Desta forma, ϕ é homeomorfa à sua imagem. Assim, tomando a restrição de ϕ à vizinhança, temos que ϕ é um mergulho próximo a L, e isto conclui a condição (1.), já que $\phi^{-1}(B) = L$ é claro. $\square$

Temos que Y_1 é orientável. Além disso, é um fibrado sobre L_1 e o mergulho $s : L_1 \hookrightarrow Y_1$

é uma seção no fibrado. Assim, colapsar as fibras dá a retração da terceira condição de uma variedade completante forte. Como observamos, se valem a primeira e terceira condições, então a segunda vale automaticamente. Temos então que Y_1 é uma variedade completante forte.

Y_1 foi construído como um fibrado sobre T^1S^n. Olhando Y_1 como um fibrado sobre S^n, temos então o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \times_{\mathrm{ev}} Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
Y_1 \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & S^n,
\end{tikzcd}$$

onde ev é a composição da projeção $\pi : Y_1 \to T^1S^n$ com a projeção $\eta : T^1S^n \to S^n$. $Y_1 \times_{\mathrm{ev}} Y_1$ é o fibrado pullback.

Mais precisamente, "visualizar" Y_1 como um fibrado sobre S^n significa dar a estrutura a Y_1 como um fibrado sobre S^n da seguinte forma: considere o diagrama comutativo abaixo, dado pelas estruturas de fibrado de T^1S^n sobre S^n e Y_1 sobre T^1S^n

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\tau^{-1}(U)) \subset Y_1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & \tau^{-1}(U) \times S^{n-1} \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
\tau^{-1}(U) \subset T^1S^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tau"] & U \times S^{n-1} \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U \subset S^n. &
\end{tikzcd}$$

Considere também o diagrama estendido

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\tau^{-1}(U)) \subset Y_1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & \tau^{-1}(U) \times S^{n-1} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] & U \times S^{n-1} \times S^{n-1} \arrow[dl, "\mathrm{proj}_{1,2}"] \\
\tau^{-1}(U) \subset T^1S^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\tau"] & U \times S^{n-1} \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] & \\
U \subset S^n. & &
\end{tikzcd}$$

Temos então que $(\tau \circ \pi, Y_1, S^n)$ é um fibrado. Definimos $Y_2 := Y_1 \times_{\mathrm{ev}} Y_1$.

Definimos Y_k indutivamente da seguinte forma: construído Y_{k-1}, visualizamos Y_{k-1} como um fibrado sobre a esfera (da mesma forma como indicado acima) e fazemos o pullback de Y_1 por ev. O fibrado pullback é Y_k.

Notamos que, de k para $k+1$, estamos adicionando uma fibra de dimensão $(n-1)+(n-1) = 2(n-1)$. Assim, como $\dim Y_1 = 2n-1+n-2 = 3n-2 = 3(n-1)+1$, temos que

$$\dim Y_k = (2k+1)(n-1)+1.$$

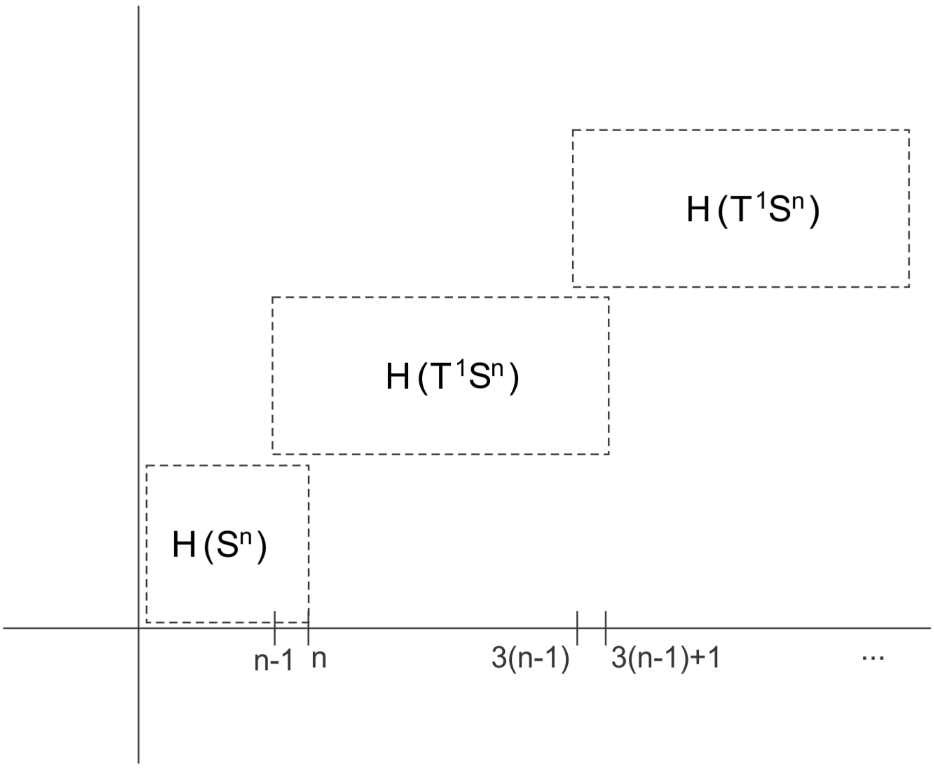
Como $i(B_k) = (2k-1)(n-1)$ e $\nu(B_k) = 2n-1$, temos também que $\dim Y_k = i(B_k) + \nu(B_k)$, de forma que os argumentos dados para Y_1 satisfazer a primeira condição valem também para Y_k, sendo $\phi : Y_k \to \Lambda S^n$ o mapa que leva os pontos do fibrado produto na concatenação de círculos, parametrizados proporcionalmente em relação a como são vistos individualmente no caso de Y_1.

$$L_k := \{(x, v, x^*), (x, v, x^*), ..., (x, v, x^*) \mid (x, v) \in T^1S^n\},$$

onde x^* é novamente o ponto antípoda. Vendo Y_k como um fibrado sobre a esfera, temos que o mergulho $s : L_k \hookrightarrow Y_k$ é uma seção. Assim, da mesma forma como antes, temos que a condição (3.) é satisfeita (note que Y_k é um fibrado produto de variedades orientáveis sobre a esfera S^n, que também é orientável. Assim, Y_k é também orientável.).

O fibrado Y_k possui uma boa visualização geométrica, que explicamos a seguir. Y_1, visto como um fibrado sobre a esfera S^n, associa a cada ponto da esfera uma família de equadores, que são as rotações dos "grandes círculos" [5] passando pelo ponto dado. O fibrado Y_k é, então, o fibrado sobre a esfera cuja fibra é a família de concatenações de "grandes círculos" com origem no dado ponto da esfera.

Usando o Lema 6.2.3 e passando para o limite direto, concluímos então que podemos usar a fórmula 5.1 do capítulo 5. Graficamente, temos a fórmula representada da seguinte forma:



No gráfico, a homologia do free loop space se dá ao fixar um ponto no eixo horizontal e traçar a reta vertical a partir desse ponto.

[5] São na verdade esferas de dimensão $n-1$, mas o contexto é claro.

Capítulo 7

Grupos e Álgebras de Lie

> Groups, as men, will be known by their actions.
>
> Guillermo Moreno

No estudo de espaços globalmente simétricos, as ferramentas da teoria de Grupos e Álgebras de Lie são fundamentais. Neste capítulo, definiremos objetos básicos da teoria e exibiremos os resultados mais importantes para nossos objetivos. Consta também no Apêndice um compêndio de definições relacionadas ao assunto. Como referência para esta seção, c.f. [11].

7.1 Definições Básicas

Definição 7.1.1. Um *grupo de Lie* é um grupo G que também é uma variedade diferenciável tal que o mapa $\phi : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$ é diferenciável.

Definição 7.1.2. Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial $\mathfrak{a}$ sobre um corpo K de característica 0 com uma aplicação bilinear de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ que é bilinear e satisfaz:

- $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{a}$.
- $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{a}$.

Dado um grupo de Lie G, existe uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ canônica associada a ele. Considere $T_\rho : g \mapsto \rho g$ a *translação à esquerda* por ρ. Obviamente, T_ρ é um difeomorfismo. Um campo é dito ser *invariante à esquerda* se $dT_\rho Z = Z$ para todo $\rho \in G$. Dado um vetor tangente $X \in G_e$ (G_e sendo o espaço tangente no elemento neutro do grupo), é fácil ver que existe um único campo vetorial $\tilde{X}$ em G de forma que $\tilde{X}_e = X$ e $\tilde{X}$ é diferenciável. Agora, se $X, Y \in G_e$, então o campo $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$[1] é invariante à esquerda. Definiremos $[X, Y]$ por $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$, para $X, Y \in G_e$. Assim sendo, temos uma estrutura de álgebra de Lie em G_e, e chamaremos essa álgebra de $\mathfrak{g}$.

[1] Note que aqui estamos tomando $[\cdot, \cdot]$ como o colchete de Lie de dois campos.

Definição 7.1.3. Dado $X \in \mathfrak{a}$, o mapa $adX : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ é definido como $Y \mapsto [X, Y]$.

Definição 7.1.4. A álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ é dita ser *abeliana* se $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$.

Definição 7.1.5. Seja M um espaço topológico Hausdorff e G um grupo topológico de forma que para cada $g \in G$ está associado um homeomorfismo $\phi_g : M \to M$; $p \mapsto g.p$ tal que:

- $g_1 g_2.p = g_1.(g_2.p)$.
- o mapa $(g, p) \to g.p$ é um mapa contínuo de $G \times M \to M$.

Dizemos então que G é um *grupo topológico de transformação* de M. A ação desse grupo é dita *efetiva* se o único elemento do grupo que deixa todos os pontos de M fixos é a identidade.

Exemplo 7.1.6. É fácil ver que a ação de S^1 em S^1 por rotações é efetiva, mas a ação de $S^1 \times S^1$ em S^1, onde (g_1, g_2) age em x rodando por g_1, não é efetiva.

Teorema 7.1.7. *Seja G um grupo localmente compacto com base contável. Suponha que G aja transitivamente como um grupo topológico de transformação em um espaço topológico localmente compacto hausdorff M. Seja $p \in M$ um ponto qualquer e $H < G$ o subgrupo de G que deixa p fixo. Então H é fechado e o mapa*

$$gH \mapsto g.p$$

é um homeomorfismo de G/H em M.

Antes de apresentar a demonstração, vamos apresentar um caso que é bom ter em mente: o caso da esfera S^2.

Considere o grupo de isometrias da esfera S^2, que é $O(3)$. A componente conexa da identidade deste grupo, $SO(3)$, ainda age transitivamente. De fato, veremos adiante que isto é um fato geral para espaços globalmente simétricos. Fixado um ponto $p \in S^2$, é fácil ver que o subgrupo de $SO(3)$ que deixa este ponto fixo é isomorfo a $SO(2)$ (de fato, é o grupo das rotações em torno do eixo do ponto). O que o teorema nos diz é que

$$S^2 \sim SO(3)/SO(2).$$

Note que $dim(SO(3)) - dim(SO(2)) = 3 - 1 = 2$. De fato, $S^n \sim SO(n+1)/SO(n)$ por argumentos análogos. Note que a relação entre S^2 e $SO(3)/SO(2)$, no momento, é puramente topológica: não demos nenhuma estrutura analítica a $SO(3)/SO(2)$ (a estrutura topológica é simplesmente a topologia final com respeito à projeção, isto é, a topologia quociente).

Demonstração. Considere o mapa $\phi : G \to M$; $g \mapsto g.p$. Por hipótese, ele é contínuo. Logo, $H = \phi^{-1}(\{p\})$ é fechado. Note que o mapa induzido $\tilde{\phi} : G/H \to M$ é uma bijeção. O mapa induzido é contínuo pela propriedade universal do quociente. Se provarmos que ϕ é aberto, o mapa induzido também será aberto e, como é bijeção, representará um homeomorfismo. Para isso, seja V um aberto de G, e $g \in V$. Já que G é localmente compacto, escolha uma vizinhança compacta U (isto é, um aberto com fecho compacto) de e em G de forma que $U = U^{-1}$, $gU^2 \subset V$. Como G tem base contável, existe uma sequência g_n de elementos de G tal que $G = \bigcup g_n U$. Como a ação do grupo é transitiva em M, temos que $M = \bigcup g_n U.p$. Cada $g_n U.p$ é compacto, logo um subconjunto fechado de M. Pelo Teorema de Categoria de Baire, algum deles tem interior não-vazio. Logo, $U.p$ tem interior não-vazio. Seja $u.p$ um ponto do interior. Então, temos que p é um ponto do interior de $u^{-1}U.p \subset U^2.p$. Assim, temos que $g.p$ é um ponto interior de $V.p$. Assim, concluímos que o mapa é aberto, e então é um homeomorfismo.

□

Definição 7.1.8. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Suponha que G é um grupo topológico de transformação agindo sobre M. G é dito um *grupo de transformação de Lie* se o mapa $(g, p) \mapsto g.p$ é um mapa de $G \times M \to M$ que é diferenciável. (Note que isto implica que para todo $g \in G$, $p \mapsto g.p$ é um difeomorfismo de M em si mesmo.)

Nós não iremos construir a estrutura diferenciável de G/H . Para tal construção, c.f. [11]. Mas apresentaremos o teorema que permite a construção:

Teorema 7.1.9. *Seja G um grupo de Lie, H subgrupo fechado de G, G/H com sua topologia natural. Então, existe uma única estrutura diferenciável em G/H com a propriedade de que G é um grupo de transformação de Lie agindo em G/H.*

A partir de agora, G/H será sempre encarado com a estrutura diferenciável dada acima. Seguem abaixo umas propriedades que precisaremos:

Proposição 7.1.10. *Seja G um grupo de transformação de Lie de uma variedade diferenciável M. Seja $p_0 \in M$ e G_{p_0} o subgrupo de G que deixa p_0 fixo. Então, G_{p_0} é fechado. Seja $\alpha : G/G_{p_0} \to M$; $gG_{p_0} \mapsto g.p_0$. Além disso, valem as seguintes propriedades:*

- *Se α é homeomorfismo, então é um difeomorfismo.*
- *Se α é homeomorfismo e M é conexo, então a componente conexa da identidade de G, denotada por G_0, age transitivamente em M.*

Consideremos agora $I(M)$ o grupo de isometrias da variedade diferenciável M. Com a topologia compacto-aberto, temos que $I(M)$ é um grupo topológico de transformação de M localmente compacto com base contável.

7.2 Exemplos Clássicos

Nesta seção, mostramos exemplos clássicos dos objetos.

Considere os espaços abaixo.

- $M(n, \mathbb{R})$ e $M(n, \mathbb{C})$ são os espaços dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ respectivamente.
- $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são os grupos formados pelos automorfismos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ respectivamente. São os *grupos lineares gerais* sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ respectivamente.

- $SL(n,\mathbb{R})$ e $SL(n,\mathbb{C})$ são os subgrupos dos seus respectivos grupos lineares gerais formados pelos operadores de determinante 1.

- $O(n)$ é o subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ formado pelos operadores ortogonais, isto é, os operadores A tais que $AA^T = I$. Analogamente, $U(n)$ é o subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ formado pelos operadores unitários, isto é, os operadores A tais que $AA^* = I$.

- $SO(n)$ é o subgrupo de $O(n)$ formado pelos operadores de determinante 1. Analogamente, $SU(n)$ é o subgrupo de $U(n)$ formado pelos operadores de determinante 1.

Existe, obviamente, um isomorfismo natural dos espaços acima com as matrizes nos respectivos corpos. Usaremos essa identificação de forma irrestrita.

Observamos também que o mapa exponencial de matrizes $A \mapsto e^A$ corresponde ao mapa exponencial do sentido geométrico.

Em primeiro lugar, para qualquer matriz em $M(n,\mathbb{C})$ (e consequentemente em $M(n,\mathbb{R})$) vale que

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Para ver isto, note que os dois lados da equação são funções contínuas nas matrizes $M(n,\mathbb{C})$. A fórmula é óbvia para matrizes diagonalizáveis. Como tais matrizes são densas em $M(n,\mathbb{C})$, segue que a equação vale para todas as matrizes complexas.

Temos também, pela fórmula do produto de Cauchy, que se A, B comutam então $e^{A+B} = e^A e^B$. A demonstração é idêntica ao caso da exponencial real. Com tal informação, temos que $t \mapsto e^{tA}$ é um homomorfismo contínuo de $\mathbb{R}$ em $GL(n,\mathbb{C})$. Note também que todo homomorfismo contínuo h de $\mathbb{R}$ em $GL(n,\mathbb{C})$ é dado por $t \mapsto e^{tA}$ para alguma $A \in M(n,\mathbb{C})$. Isto segue do fato que, por ser um homomorfismo, seus valores nos racionais são automaticamente determinados. Assim, $h(t) = e^{th(1)}$ para todo $t \in \mathbb{Q}$. Segue então por continuidade e densidade de $\mathbb{Q}$ que as funçoes são iguais.

Proposição 7.2.1. *São grupos de Lie:*

- $GL(n,\mathbb{R})$ *e* $GL(n,\mathbb{C})$.

- $SL(n,\mathbb{R})$ *e* $SL(n,\mathbb{C})$.

- $O(n)$ *e* $U(n)$.

- $SO(n)$ *e* $SU(n)$.

Demonstração. Que são grupos é evidente. Se mostrarmos que são subvariedades mergulhadas de $M(n,\mathbb{R})$, $M(n,\mathbb{C})$, também será imediato que as operações de grupo são suaves. Basta então mostrar isto.

- Como $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ e $GL(n,\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ (onde os det são tomados em $M(n,\mathbb{R})$ e $M(n,\mathbb{C})$ respectivamente), temos que os GL são abertos de $M(n,\mathbb{K})$. A proposição é então imediata.

- Considere o mapa $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Temos que sua derivada é
$$H \mapsto \det(X)\mathrm{tr}(X^{-1} \cdot H).$$
Tomando $H = X$, temos que a derivada aplicada em H é $n \det X$. Logo, quando $\det(X) = 1$, a derivada do mapa det é um funcional linear sobrejetivo. Assim, 1 é valor regular, e $\det^{-1}(1) = SL(n, \mathbb{R})$ é subvariedade mergulhada de $GL(n, \mathbb{R})$ e, consequentemente, de $M(n, \mathbb{R})$. A demonstração é igual para o caso de $SL(n, \mathbb{C})$. Note que, como consequência da demonstração, temos que $\dim(SL(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1$.

- Considere o mapa $f : M(n, \mathbb{R}) \to MS(n, \mathbb{R})$ que faz $A \mapsto AA^T$, onde $MS(n, \mathbb{R})$ são as matrizes simétricas de $M(n, \mathbb{R})$ (que formam um espaço vetorial). Este mapa possui derivada
$$H \mapsto AH^T + HA^T.$$
Se $AA^T = I$, então a derivada é sobrejetiva. De fato, dado $B \in MS(n, \mathbb{R})$, temos que para $H = \frac{1}{2}BA$,
$$AH^T + HA^T = \frac{1}{2}AA^TB + \frac{1}{2}BAA^T = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B.$$
Assim, I é valor regular de f, e $f^{-1}(I) = O(n)$ é variedade mergulhada de $GL(n, \mathbb{R})$. A demonstração do caso complexo é igual, com a observação de que as matrizes hermitianas são um espaço vetorial real (não com coeficientes complexos). Note que, como consequência da demonstração, temos que $\dim(O(n)) = n(n-1)/2$.

- Considere $\det : O(n) \to \mathbb{R}$. Temos que $SO(n) = \det^{-1}\big((1/2, 3/2)\big)$. Logo, $SO(n)$ é um aberto de $O(n)$. Pelo item anterior, $SO(n)$ é uma subvariedade mergulhada de $O(n)$ e consequentemente de $M(n, \mathbb{R})$. O caso complexo é análogo.

□

Proposição 7.2.2. *A álgebra de Lie associada a $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$) é $M(n, \mathbb{R})$ (resp. $M(n, \mathbb{C})$).*

Demonstração. Segue do fato que são abertos de $M(n, \mathbb{R})$ e $M(n, \mathbb{C})$, como observado em 7.2.1. □

Proposição 7.2.3. *A álgebra de Lie associada a $SL(n, \mathbb{R})$ (resp. $SL(n, \mathbb{C})$) é o espaço vetorial das matrizes reais de traço 0 (resp. espaço vetorial das matrizes complexas de traço 0).*

Demonstração. Fazemos o caso real. O caso complexo é análogo.

Seja A matriz de traço 0. Temos então que
$$\det e^{tA} = e^{t^n \mathrm{tr} A} = e^0 = 1.$$
Assim, $t \mapsto e^{tA}$ é uma curva em $SL(n, \mathbb{R})$. Logo, sua derivada no 0 dá um elemento do espaço tangente. Como sua derivada no 0 é A, temos que A está na álgebra de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$.

Agora, como $SL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão $n^2 - 1$, sua álgebra de Lie é um espaço vetorial de dimensão $n^2 - 1$. Como as matrizes de traço 0 formam um espaço vetorial de dimensão $n^2 - 1$, temos nosso resultado. □

Proposição 7.2.4. *A álgebra de Lie associada a $O(n, \mathbb{R})$ (resp. $U(n, \mathbb{C})$) é o espaço vetorial das matrizes reais anti-simétricas (resp. espaço vetorial das matrizes complexas anti-hermitianas).*

Demonstração. Fazemos o caso real, e o caso complexo é análogo.

Seja A matriz anti-simétrica. Temos então que

$$e^{tA}\left(e^{tA}\right)^T = e^{tA}e^{tA^T} = e^{tA+tA^T} = e^{tA-tA} = I.$$

Logo, $t \mapsto e^{tA}$ é uma curva em $O(n)$. Logo, sua derivada no 0 dá um elemento no espaço tangente. Como sua derivada no 0 é A, temos que A está na álgebra de Lie de $O(n)$.

Agora, como $O(n)$ é um grupo de Lie de dimensão $n(n-1)/2$, sua álgebra de Lie é um espaço vetorial de dimensão $n(n-1)/2$. Como as matrizes anti-simétricas reais formam um espaço vetorial de dimensão $n(n-1)/2$, temos nosso resultado. □

Corolário 7.2.5. *A álgebra de Lie associada a $SO(n)$ (resp. $SU(n)$) é o espaço vetorial das matrizes reais anti-simétricas (resp. espaço vetorial das matrizes complexas anti-hermitianas).*

Demonstração. $SO(n)$ (resp. $SU(n)$) é um aberto de $O(n)$ (resp $U(n)$). □

Capítulo 8

Espaços Globalmente Simétricos

It was perfect, it was rounded,
symmetrical, complete, colossal.

Mark Twain

8.1 Introdução

Definição 8.1.1. Uma variedade Riemanniana M é dita um *variedade globalmente simétrica* ou um *espaço globalmente simétrico* se para todo ponto $p \in M$ existe uma isometria involutiva s_p tal que p é um ponto fixo isolado de s_p.

Exemplo 8.1.2. Um exemplo óbvio é a esfera S^n: dado um ponto p qualquer, girar a esfera 180º em torno do eixo vertical passando por esse ponto é uma isometria involutiva tal que p é um ponto fixo isolado. Outros exemplos são o plano projetivo real $\mathbb{R}P^n$ e o plano projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ com suas métricas canônicas (ver Seção 8.2).

Lema 8.1.3. *Seja M uma variedade globalmente simétrica. Para todo ponto $p \in M$, se N_p é uma vizinhança normal simétrica (isto é, é imagem pelo difeomorfismo local* exp *de um aberto simétrico com respeito ao* 0*) do ponto p, então s_p é a simetria geodésica em N_p.*

Demonstração. Seja $A := (ds_p)_p$. Temos então que $A^2 = Id$. Agora, defina

$$V^+ := \{X \mid AX = X\},$$

$$V^- := \{X \mid AX = -X\}.$$

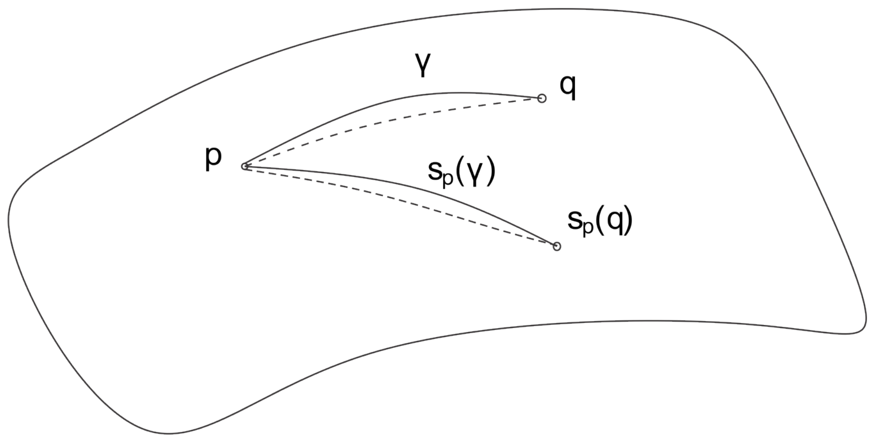
É evidente que $V^+ \cap V^- = \{0\}$ e que ambos são subespaços vetoriais. Afirmamos que todo vetor de M_p pode ser escrito como soma de um elemento de V^+ e V^-, de forma que $M_p = V^+ \oplus V^-$. De fato,

$$X = \frac{1}{2}(X - AX) + \frac{1}{2}(X + AX).$$

Note que $A\frac{1}{2}(X - AX) = \frac{1}{2}(-X + AX)$ e $A\frac{1}{2}(X + AX) = \frac{1}{2}(X + AX)$, de forma que $\frac{1}{2}(X - AX) \in V^-$ e $\frac{1}{2}(X + AX) \in V^+$ como queríamos.

Agora afirmamos que $V^+ = \{0\}$. Isso concluirá que $A = -Id$. Como a simetria geodésica em torno de p também tem derivada $-Id$ em p, concluiremos que s_p é a simetria geodésica, uma vez que duas isometrias iguais em um ponto e com mesma derivada nele devem ser iguais.

Para isto, suponha que existe $X \neq 0$ tal que $X \in V^+$. Considere a geodésica γ que passa por p com velocidade X. Como s_p é uma isometria, temos que a imagem de γ por s_p é também uma geodésica. Uma forma de ver isto é usando o fato de que geodésicas minimizam localmente distâncias. Tome $q = \gamma(\eta)$ perto o suficiente de p. $\xi(t) := s_p(\gamma(t))$; $0 \leq t \leq \eta$ é uma curva ligando p a $s_p(q)$. Se $L(\xi(t))$ não fosse mínimo, então tomando a geodésica que liga p a $s_p(q)$ e aplicando o inverso da isometria chegaríamos em um caminho ligando p a q de tamanho menor que γ (o caminho tracejado na figura abaixo). Mas isto contradiz o fato de γ ser uma geodésica [1]. Isso implica que s_p deixa fixa toda a geodésica γ ponto a ponto - caso contrário, teríamos duas geodésicas distintas com mesma velocidade inicial saindo de p. Mas s_p deixar fixa toda a geodésica contradiz o fato de p ser um ponto fixo isolado.



□

Lema 8.1.4. *Dada uma variedade Riemanniana globalmente simétrica M, existe uma única estrutura diferenciável em $I(M)$ (compatível com a topologia de $I(M)$) para a qual $I(M)$ é um grupo de transformação de Lie agindo em M.*

Lema 8.1.5. *Se M é uma variedade Riemanniana globalmente simétrica conexa, então $I(M)$ age transitivamente em M.*

Demonstração. Considere a seguinte relação $\sim$ em M: $x \sim y \iff$ existe uma isometria que leva x em y. Está claro que $\sim$ é uma relação de equivalência em M. Mostraremos que as classes de equivalência são conjuntos abertos e seguirá então da conexidade de M que existe uma única classe de equivalência (logo, $I(M)$ age transitivamente em M).

Seja p um ponto de uma classe de equivalência, e N_p uma vizinhança normal de p cujo domínio coordenado seja um n-bloco. Dado q ponto qualquer de N_p, considere o ponto médio x (em coordenadas normais) do segmento que liga p a q. Note que a simetria geodésica em torno de x é um mapa que leva p a q. Tomando um n-bloco V (simétrico em

[1] Aqui estamos usando o fato de estarmos suficientemente próximos de p para usarmos as propriedades de uma vizinhança normal.

relação a x) contendo x, p, q, segue do lema anterior que s_x é a simetria geodésica nessa vizinhança V. Assim, s_x leva p em q, e temos que q pertence à classe de p (uma vez que s_x é uma isometria). Assim, toda classe de equivalência é aberta. $\square$

Teorema 8.1.6. *Dada uma variedade Riemanniana globalmente simétrica M, temos que:*

1. *Sendo $G = I_0(M)$ a componente conexa da identidade do grupo de isometrias e $K < G$ subgrupo de isotropia de um ponto p_0, então G/K é difeomorfo a M através do mapa $gK \mapsto g.p_0$.*

2. *O mapa $\sigma : g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$ é um automorfismo involutivo de G tal que K está contido entre o subgrupo fechado K_σ formado por todos os pontos fixos de σ e a componente da identidade de K_σ. Ademais, K não contém subgrupos normais de G além do trivial.*

3. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ as álgebras de Lie de G e K, respectivamente. Então $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = X\}$. Além disso, se fizermos $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = -X\}$, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.*

4. *Se $\pi : G \to M$ é o mapa dado por $g \mapsto g.p_0$, então $(d\pi)_e$ mapeia $\mathfrak{k}$ em $\{0\}$ e é um isomorfismo quando restrito a $\mathfrak{p}$. Ou seja, $\mathfrak{p} \cong T_{p_0}M$.*

5. *Dado $X \in \mathfrak{p}$, a geodésica cujo ponto inicial é p_0 e cuja velocidade inicial é $(d\pi)_e X$ é dada por*
$$\gamma_{(d\pi)_e X}(t) = \exp(tX).p_0.$$
Ademais, se $Y \in T_{p_0}M$, então $(d \exp tX)_{p_0}(Y)$ é o transporte paralelo de Y ao longo da geodésica γ.

Demonstração. Omitiremos as demonstrações de alguns itens por desviarem muito de nossos propósitos. As demonstrações podem ser encontradas em [11].

1. Sendo uma variedade Riemanniana globalmente simétrica, temos que $I(M)$ age transitivamente devido ao Lema 8.1.5. Como $I(M)$ é localmente compacto e tem base contável, que o mapa $\alpha : I(M)/K' \to M$, $gK' \mapsto g.p_0'$ é um homeomorfismo pelo teorema 6.1.7. Pela proposição 6.1.10, a componente conexa da identidade $I_0(M)$ age transitivamente sobre M.

   Segue então que $\alpha : I_0(M)/K \to M$ é um homeomorfismo. Novamente, pela proposição 6.1.10, é um difeomorfismo.

2. Notamos que ser um automorfismo involutivo é imediato e omitimos o resto da demonstração.

3. Pelo item (2), $d\sigma$ é tal que $d\sigma^2 = Id$. Assim, repetindo o raciocínio do Lema 7.1.3 e fazendo $X = \frac{1}{2}(X + d\sigma X) + \frac{1}{2}(X - d\sigma X)$, temos nossa decomposição.

4. Tome $X \in \ker(d\pi)_e$. Então, dada uma função $f \in C^\infty(M)$, temos que
$$0 = ((d\pi)_e X)f = X(f \circ \pi) = f(\exp tX.p_0)'(0)$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, usamos a fórmula acima com a função $g(q) = f(\exp sX.q)$. Então

$$\begin{aligned} 0 = g(\exp tX.p_0)'(0) &= f(\exp sX.\exp tX.p_0)'(0) \\ &= f(\exp(s+t)X.p_0)'(0) \\ &= f(\exp tX.p_0)'(s). \end{aligned}$$

Logo, $f(\exp sX.p_0)$ é constante em s. Como f é uma função C^∞ arbitrária, temos que $\exp sX.p_0 = p_0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Como

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid s \mapsto \exp sX \text{ é um caminho em} I_0(M)\},$$

então temos que $X \in \mathfrak{k}$, uma vez que acabamos de provar que $\exp sX$ é sempre uma isometria que deixa p_0 fixo.

Agora, seja $X \in \mathfrak{k}$. Temos que

$$((d\pi)_e X)f = X(f \circ \pi) = f(\exp tX.p_0)'(0)$$

Como $\exp tX.p_0 = p_0$ para todo t, temos que $((d\pi)_e X)f = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$. Isto implica que $X \in \ker(d\pi)_e$. Concluímos então que $\ker(d\pi)_e = \mathfrak{k}$. Como $(d\pi)_e : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \to T_{p_0}M$, temos que $\mathfrak{p} \cong T_{p_0}M$.

5. Omitimos a demonstração.

□

Definição 8.1.7. As isometrias $\exp tX$ (onde $X \in \mathfrak{p}$) são chamadas *transvecções*. Note que elas transladam p_0 ao longo da geodésica e suas derivadas realizam transporte paralelo.

Observação 8.1.8. A álgebra $\mathfrak{g}$ pode ser vista como a álgebra dos campos de Killing. Para mais informações, veja o Apêndice, 11.4.

Corolário 8.1.9. *Dada a decomposição do teorema anterior, temos que*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Uma boa propriedade de espaços simétricos é a forma simples do tensor curvatura, a qual apresentamos sem demonstração:

Teorema 8.1.10. *Dado R o tensor curvatura em $M \cong I_0(M)/K$ um espaço globalmente simétrico temos que, em um ponto $p \in M$,*

$$R_p(X, Y, Z) = -[[X, Y], Z].$$

Definição 8.1.11. Dado um grupo de Lie compacto G, um subgrupo de Lie H é dito um *toro maximal* se é imagem através do mapa exponencial de uma subálgebra de Lie $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ abeliana e maximal.

Definição 8.1.12. O *rank* (ou *posto*) de um espaço globalmente simétrico M é definido como a maior dimensão de um toro maximal de $G/K \cong M$.

Observação 8.1.13. O rank de um espaço globalmente simétrico está bem-definido, uma vez que todos os toros maximais são conjugados (c.f. [11]).

Terminamos a seção com uma proposição que permite ver o processo de forma inversa: Dado G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado, queremos construir um espaço simétrico relacionado a esses objetos. Para isso, fazemos a seguinte definição.

Definição 8.1.14. Seja G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado. (G, H) é dito um *par simétrico* se existe um automorfismo análitico involutivo σ de G de forma que $(H_\sigma)_0 \subset H \subset H_\sigma$, onde H_σ é o grupo de isotropia de σ e $(H_\sigma)_0$ é sua componente conexa que contém a identidade. Ademais, se $\mathrm{Ad}_G(H)$ é compacto, então (G, H) é dito um *par simétrico Riemanniano.*

Teorema 8.1.15. *Seja (G, K) um par simétrico Riemanniano. Então, existem estruturas Riemannianas G-invariantes em G/K, e em todas elas a variedade G/K é um espaço Riemanniano globalmente simétrico.*

Demonstração. c.f. [11]. □

8.2 Espaços Globalmente Simétricos Compactos de Posto 1

Pela classificação de espaços simétricos (c.f. [11]), tem-se que toda CROSS é uma das seguintes variedades: S^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathrm{Ca}P^2$. Nesta seção, investigaremos a estrutura desses espaços. Não tratamos da esfera S^n uma vez que sua geometria básica é bem conhecida. Também não trataremos de $\mathrm{Ca}P^2$, por ser um caso com muitas peculiaridades e cujo tratamento desviaria muito de nossos objetivos. Assim sendo, no que diz respeito a $\mathrm{Ca}P^2$, deixamos a referência [3] (que é a referência para esta seção em geral) e a seguinte citação: "The Cayley projective plane $\mathrm{Ca}P^2$ is beautiful. In the Riemannian zoo we like to call it the panda". - Berger, M.

Primeiramente, $\mathbb{K}$ será qualquer um dos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Quando necessário, faremos uma distinção dos casos. Denotaremos como κ a dimensão de $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Veremos $\mathbb{K}^n$ como um espaço vetorial com multiplicação por escalar *à direita*, isto é, dado $x \in \mathbb{K}^n$,

$$x.\lambda = (x_1, ...x_n).\lambda = (x_1\lambda, ..., x_1\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Além disso, consideraremos o produto Hermitiano

$$\langle x, y\rangle = \sum \overline{x_i} y_i,$$

onde $\bar{\cdot}$ é a conjugação [2]. Além disso, denotaremos por $\langle x, y\rangle_\mathbb{R}$ a parte real de $\langle x, y\rangle$.

Definição 8.2.1. $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\})/\sim$, onde $x \sim y$ se existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $x = \lambda y$.

Observação 8.2.2. $\mathbb{K}P^n$ são variedades diferenciáveis. Como as cartas locais são análogas ao caso de $\mathbb{R}P^n$, omitimos a demonstração.

[2] $\overline{a + bi} = a - bi$; $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$.

Proposição 8.2.3. *Dados $u, v \in \mathbb{K}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\|\lambda\| = 1$, então*

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle u\lambda, v\lambda\rangle_{\mathbb{R}}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 2\langle u\lambda, v\lambda\rangle_{\mathbb{R}} &= \langle u\lambda, v\lambda\rangle + \langle v\lambda, u\lambda\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle u, v\rangle\lambda + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle\lambda \\ &= 2\overline{\lambda}\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}\lambda \\ &= 2\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

Observação 8.2.4. Notamos que existe uma identificação canônica entre o espaço tangente de $\pi(x)$ em $\mathbb{K}P^n$ e o conjunto

$$\{(x\lambda, u\lambda) \mid \langle x, u\rangle = 0, \|\lambda\| = 1\}.$$

Denotamos um elemento do espaço tangente em $\pi(x)$ por $\pi(x, u)$. Notamos que, devido à equivalência acima, não há ambiguidade na notação.

Devido à proposição acima, podemos definir uma métrica canônica em $\mathbb{K}P^n$.

Definição 8.2.5.

$$g(\pi(x, u), \pi(x, v)) = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Definição 8.2.6. Seja $U(n+1, \mathbb{K})$ o subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{K})$ que deixa $\langle,\rangle$ invariante. Fazemos as seguintes definições.

- o *grupo ortonormal euclidiano* $O(n+1) := U(n+1, \mathbb{R})$.
- o *grupo unitário* $U(n+1) := U(n+1, \mathbb{C})$.
- o *grupo simplético* $Sp(n+1) := U(n+1, \mathbb{H})$.

Notamos que $U(n+1, \mathbb{K})$ age transitivamente na esfera unitária de $\mathbb{K}^{n+1}$. Assim, a ação induzida de $U(n+1, \mathbb{K})$ em $\mathbb{K}P^n$ é também transitiva.

Proposição 8.2.7. *Seja H o grupo de isotropia de $\pi_{e_{n+1}}$, onde $(e_1, ..., e_{n+1})$ é a base canônica de $\mathbb{K}^{n+1}$. Então*

$$\phi : U(n+1, \mathbb{K})/H \to \mathbb{K}P^n$$

é um difeomorfismo, onde $\phi(A.H) = \pi A(e_{n+1})$.

Demonstração. Segue do Teorema 7.1.7 e da Proposição 7.1.10. □

Proposição 8.2.8. *Valem os seguintes difeomorfismos:*

- $O(n+1)/(O(n) \times \{-1, 1\}) \cong \mathbb{R}P^n$
- $U(n+1)/(U(n) \times U(1)) \cong \mathbb{C}P^n$

- $Sp(n+1)/(Sp(n) \times Sp(1)) \cong \mathbb{H}P^n$

Demonstração. Tome $A \in H$. Como H é o grupo de isotropia de $\pi(e_{n+1})$, temos que $A(\overline{e_{n+1}}) = \overline{e_{n+1}}$, o que implica em $e_{n+1} = e_{n+1}.\lambda$ para algum λ na esfera unitária de $\mathbb{K}$. Temos então que A pode ser visto como a matriz

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Note que a esfera unitária em $\mathbb{K}$ é difeomorfa canonicamente a $U(1, \mathbb{K})$. Temos então que $H \cong U(n, \mathbb{K}) \times U(1, \mathbb{K})$. Temos então que o resultado segue da proposição anterior. □

Proposição 8.2.9. *$(U(n+1, \mathbb{K}), H)$ é um par simétrico Riemanniano.*

Demonstração. Considere a função

$$\theta : U(n+1, \mathbb{K}) \to U(n+1, \mathbb{K})$$

$$A \mapsto SAS^{-1},$$

onde $S = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. θ é um automorfismo involutivo que satisfaz às condições da definição 8.1.14. □

Observação 8.2.10. Podemos fazer o push-forward da métrica de $\mathbb{K}^n$ para $U(n+1, \mathbb{K})/H$, usando o fato que $\mathbb{K}^n \cong T_p\mathbb{K}P^n \cong \mathfrak{p}$ (ver Teorema 8.1.6). Pelo Teorema 8.1.15, temos um espaço globalmente simétrico. Ademais, o mapa ϕ é uma isometria. Para mais detalhes, c.f. [3].

Observação 8.2.11. Usando a forma do automorfismo involutivo temos que, na decomposição da álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n+1, \mathbb{K}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$,

$$\mathfrak{p} = \{ \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \eta \\ -\overline{\eta}^T & 0 \end{pmatrix} \mid \eta \in \mathbb{K}^n \}.$$

Faremos agora cálculos que precisaremos no futuro. Usaremos o Teorema 8.1.10 e também a observação anterior. Além disso, precisaremos do seguinte resultado (c.f. [3]).

Lema 8.2.12. *Os espaços projetivos $\mathbb{K}P^n$ são tais que todas as geodésicas são periódicas e de mesmo período mínimo. Mais especificamente, sendo γ a geodésica com condições iniciais $\gamma(0) = \pi(x)$ e $\dot{\gamma}(0) = X = \pi(x, u)$, com $\|X\| = 1$, temos que*

$$\gamma(t) = \pi(x \cos t + u \sin t) = \exp_p tX.$$

Proposição 8.2.13. *Dado um elemento $e \in \mathfrak{p}$ de norma unitária fixado, os autovalores da aplicação*

$$\tilde{R} : T_pM \to T_pM;$$

$$X \mapsto \tilde{R}X = R(X, e)e = -[[X, e], e]$$

são:

- *No caso de $\mathbb{R}P^n$, temos todos os $n-1$ autovalores não-triviais iguais a 1.*
- *No caso de $\mathbb{C}P^n$, temos um autovalor 4 e os outros $2n-2$ autovalores não-triviais iguais a 1*
- *No caso de $\mathbb{H}P^n$, temos três autovalores 4 e os outros $4n-4$ autovalores não-triviais iguais a 1.*

Demonstração. Antes de tratar os casos separadamente, fixemos [3]

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ -1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}.$$

- O caso de $\mathbb{R}P^n$.

  Considere

$$e_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n.$$

  Note que os elementos acima formam uma base para $\mathfrak{p}$. Computando o colchete de Lie (que é apenas uma multiplicação e soma de matrizes [4], temos que $\tilde{R}(e_m) = e_m$ para todo a diferente de 1. Obviamente, e_1 é o auto-vetor correspondente ao auto-valor 0, pois $e_1 = e$.

- O caso de $\mathbb{C}P^n$.

  Considere as matrizes da forma

$$e_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n,$$

$$f_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & i \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & i & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n.$$

  Note que $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ forma uma base para $\mathfrak{p}$. Computando os colchetes, temos que $\tilde{R}(e_m) = e_m$ para todo a diferente de 1, $\tilde{R}(f_1) = 4f_1$ e $\tilde{R}(f_m) = f_m$ para todo m diferente de 1. Novamente, é claro que $\tilde{R}(e_1) = 0$.

---

[3] c.f. Observação 8.2.11.

[4] Por ser uma quantidade grande de computações a serem feitas, usamos um programa para fazer os cálculos. Veja Apêndice.

- O caso de $\mathbb{H}P^n$.

  Considere as matrizes da forma

$$e_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n,$$

$$f_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & i \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & i & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n,$$

$$g_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & j \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & j & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n,$$

$$h_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & k \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & k & ... & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq m \leq n.$$

  Analogamente, temos que $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_n\}$ forma uma base para $\mathfrak{p}$. Temos que $\tilde{R}(e_l) = e_l$ para todo l diferente de 1, $\tilde{R}(f_1) = 4f_1$, $\tilde{R}(g_1) = 4g_1$, $\tilde{R}(h_1) = 4h_1$ e $\tilde{R}(f_m) = f_m$, $\tilde{R}(g_m) = g_m$, $\tilde{R}(h_m) = h_m$ para qualquer m diferente de 1. É evidente novamente que $\tilde{R}(e_1) = 0$.

□

Note que o Lema 8.2.12 diz que todas as geodésicas com velocidade unitária tem período π. Para nossos cálculos futuros, será útil conciliar nossa notação com a de [28]. Com este fim, introduzimos o seguinte lema.

Lema 8.2.14. *Para os espaços $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$, trocamos a métrica g que definimos nesta seção por g dividida por 2 (isto é, $\tilde{g} = \frac{1}{2}g$). Assim, temos que o período das geodésicas com velocidade unitária é 2π. Ademais, temos as seguintes relações sobre os autovalores de $\tilde{R}$:*

- *Em $\mathbb{C}P^n$, temos um autovalor trivial, um autovalor $\lambda_1 = 1$ e o restante é $\lambda_2 = ... = \lambda_{2n-1} = \frac{1}{4}$.*

- *Em $\mathbb{H}P^n$, temos um autovalor trivial, três autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e o restante é $\lambda_2 = ... = \lambda_{4n-1} = \frac{1}{4}$.*

Demonstração. Note que ao dividir a métrica por dois, é óbvio que o período da geodésica com velocidade unitária é multiplicado por 2. Note também que definimos $\tilde{R}$ de forma a ser o mapa $[[X, e], e]$, onde e tem norma unitária. Logo, devemos dividir e por meio, fazendo com que $\tilde{R}$ fique multiplicado por $\frac{1}{4}$ e consequentemente os autovalores também. □

Proposição 8.2.15. *Em $\mathbb{C}P^n$, toda geodésica γ está contida em uma subvariedade totalmente geodésica isométrica a $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Em $\mathbb{H}P^n$, toda geodésica está contida em uma subvariedade totalmente geodésica isométrica a $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.*

Demonstração. Provamos o caso de $\mathbb{C}P^n$, e o caso de $\mathbb{H}P^n$ é análogo. Seja γ uma geodésica em $\mathbb{C}P^n$, gerada a partir de um ponto $(\overline{x}, \pi(x, v))$ do fibrado tangente $T^1\mathbb{C}P^n$ (veja Observação 8.2.4). Tomando o espaço gerado (como um espaço vetorial complexo) pelos vetores x, u em $\mathbb{C}^{n+1}$, temos um plano complexo, isto é, um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{C}^2$. Ao aplicar a projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$, tal plano complexo se torna $\mathbb{C}P^1$. Pelo lema 8.2.12, a geodésica γ está contida nesse $\mathbb{C}P^1$. □

8.3 Visualização de $\mathbb{R}P^n$

Nesta seção, iremos investigar $\mathbb{R}P^n$ topologicamente e desenvolver intuição sobre esse espaço.

Como vimos na seção anterior, $\mathbb{R}P^n$ pode ser definido como $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\sim$, onde $x \sim y$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $x = \lambda y$.

Proposição 8.3.1. *$\mathbb{R}P^n$ é homeomorfo a $S^n/\sim$, onde $x \sim y$ se x e y são pontos antípodas.*

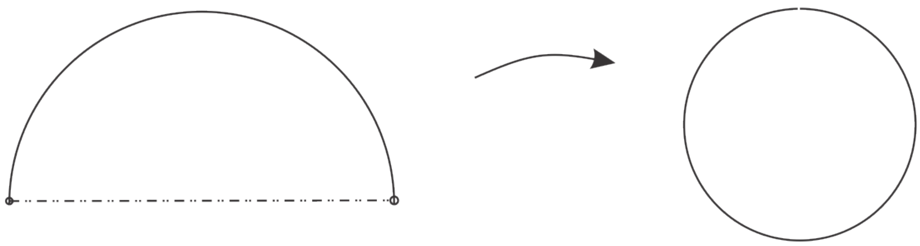
Demonstração. Defina a função $f : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$ dada por $f(\overline{x}) = \overline{x}$. É evidente que ela está bem definida e que é bijetiva. Pela propriedade universal da topologia quociente, segue que f é contínua. Mas $S^n/\sim$ é compacto. Logo, f é uma função contínua e bijetiva definida em um compacto, cujo contradomínio é Hausdorff. Portanto, é um homeomorfismo. □

Definição 8.3.2. Defina S^n_+ como o hemisfério superior (fechado) de S^n, isto é, $S^n_+ := \{(x_1, ..., x_{n+1}) \mid x_{n+1} \geq 0\}$.

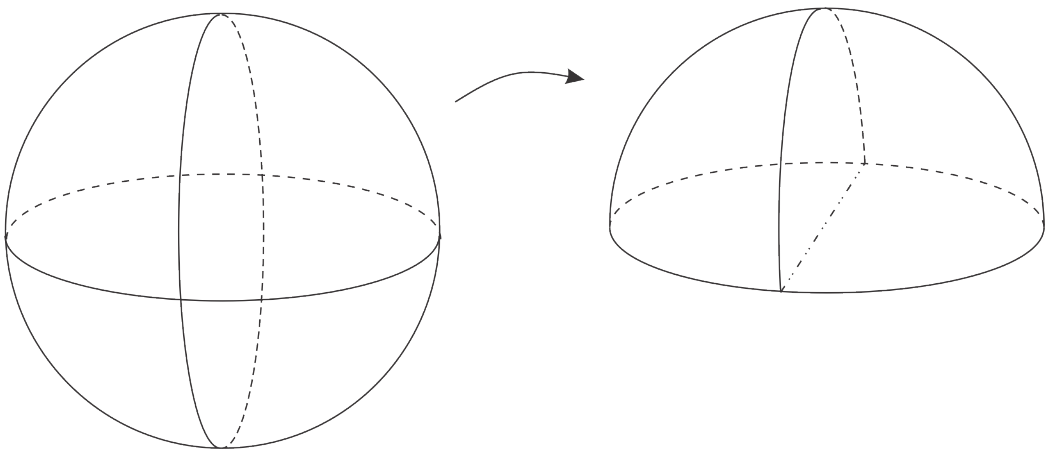
Proposição 8.3.3. *$\mathbb{R}P^n$ é homeomorfo a $S^n_+/\sim$, onde $x \sim y$ se x, y estão no bordo de S^n_+ e são antípodas.*

Demonstração. Defina a função $f : S^n_+/\sim \to S^n/\sim$ dada por $f(\overline{x}) = \overline{x}$. As mesmas considerações da Proposição 8.3.1 valem aqui e concluem o resultado. □

Esta última proposição permite uma boa forma de visualizar $\mathbb{R}P^n$. Por exemplo, ela deixa claro por que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. De fato, $\mathbb{R}P^1$ é homeomorfo a $S^1_+/\sim$, e $S^1_+/\sim$ é obviamente homeomorfo a S^1. Veja a figura abaixo.



Vejamos agora o que acontece com uma geodésica de S^n quando vemos ela em $\mathbb{R}P^n$. Considere S^2. Na figura a seguir, o grande círculo vertical é a geodésica, e o grande círculo horizontal é o bordo onde ocorre a identificação que dá origem a $\mathbb{R}P^2$.



Note que a transição para $\mathbb{R}P^n$ aniquilou o ponto antípoda, fazendo ele se identificar com o ponto inicial. Essa observação é crucial para entender por que o índice de uma geodésica simples em $\mathbb{R}P^n$ é 0, enquanto o de uma geodésica simples em S^n é $n-1$, como calcularemos no capítulo seguinte. Além disso, ela justifica porque a cada iteração de uma geodésica o índice correspondente aumenta em $2(n-1)$ em S^n e $n-1$ em $\mathbb{R}P^n$.

Capítulo 9

O Free Loop Space de Espaços Simétricos

> The essence of mathematics is its freedom.
>
> Georg Cantor

9.1 Nâo-degenerescência das Subvariedades Críticas

Definição 9.1.1. Um *campo de Jacobi* ao longo de uma geodésica $c(t)$ é um campo vetorial $Y(t)$ ao longo da mesma que satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\nabla^2 Y(t) + R\left(Y\left(t\right), \dot{c}\left(t\right), \dot{c}\left(t\right)\right) = 0$$

Observação 9.1.2. Campos de Jacobi possuem uma interpretação geométria natural: são os campos vetoriais obtidos através de variações por geodésicas. Para mais detalhes, c.f. [16].

Proposição 9.1.3. *Dado M uma espaço compacto globalmente simétrico, os campos de Jacobi ao longo de uma geodésica c fechada de período l tal que $c(0) = p$ e $\dot{c}(0) = V$ são dados por combinações lineares de:*

$$\begin{array}{lll} \cos\sqrt{\lambda_i}t.X_i, & \sin\sqrt{\lambda_i}t.X_i & \lambda_i > 0 \\ \cosh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i, & \sinh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i & \lambda_i < 0 \\ X_i, & tX_i & \lambda_i = 0, \end{array}$$

onde λ_i e X_i são os autovalores e autovetores de $\tilde{R} := R(\cdot, V)V : T_pM \to T_pM$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $\tilde{R}$ é um operador auto-adjunto. De fato, usando as propriedades da curvatura [1], temos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}X, Y\rangle &= \langle R(X,V)V, Y\rangle\\ &= \langle R(V,Y)X, V\rangle\\ &= \langle -R(Y,V)X, V\rangle\\ &= \langle R(Y,V)V, X\rangle\\ &= \langle \tilde{R}Y, X\rangle\\ &= \langle X, \tilde{R}Y\rangle.\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{R}$ é auto-adjunto. Pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal X_i de auto-vetores. Seja $X_i(t)$ o transporte paralelo de X_i ao longo da geodésica c. Como estamos em um espaço globalmente simétrico, temos que $\nabla R = 0$. Assim,

$$R\left(X_i\left(t\right), \dot{c}\left(t\right), \dot{c}\left(t\right)\right) = \lambda_i X_i(t) \quad \forall t.$$

Isto implica que os auto-valores de $\tilde{R}$ são constantes ao longo da curva, e que os auto-vetores são dados pelo transporte paralelo do auto-vetor inicial. Como um campo de Jacobi é um campo ao longo da curva que satisfaz à equação

$$\nabla^2 Y(t) + R\left(Y\left(t\right), \dot{c}\left(t\right), \dot{c}\left(t\right)\right) = 0,$$

temos então os seguintes fatos:

- Se $\lambda_i > 0$, os campos $Y_1(t) = \cos\sqrt{\lambda_i}t.X_i$ e $Y_2(t) = \sin\sqrt{\lambda_i}t.X_i$ são campos de Jacobi, uma vez que

$$\begin{gathered}\nabla^2 \cos\sqrt{\lambda_i}t.X_i = -\lambda_i\cos\sqrt{\lambda_i}t.X_i\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + \lambda_i \cos\sqrt{\lambda_i}t.X_i = 0,\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + \tilde{R}Y_1(t) = 0\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + R\left(Y_1\left(t\right), \dot{c}\left(t\right), \dot{c}\left(t\right)\right) = 0.\end{gathered}$$

  O cálculo para mostrar que Y_2 é campo de Jacobi é análogo.

- Se $\lambda_i < 0$, os campos $Y_1(t) = \cosh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i$ e $Y_2(t) = \sinh -\lambda_i t.X_i$ são campos de Jacobi, uma vez que:

$$\begin{gathered}\nabla^2 \cosh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i = -\lambda_i\cosh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + \lambda_i \cosh\sqrt{-\lambda_i}t.X_i = 0,\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + \tilde{R}Y_1(t) = 0\\ \implies \nabla^2 Y_1(t) + R\left(Y_1\left(t\right), \dot{c}\left(t\right), \dot{c}\left(t\right)\right) = 0.\end{gathered}$$

  O cálculo para mostrar que Y_2 é campo de Jacobi é análogo.

[1] Ver Apêndice

- Se $\lambda_i = 0$, os campos $Y_1(t) = X_i$ e $Y_2(t) = tX_i$ são campos de Jacobi, uma vez que:

$$\nabla^2 X_i = 0$$

$$\implies \nabla^2 Y_1(t) + \lambda_i X_i = 0,$$

$$\implies \nabla^2 Y_1(t) + \tilde{R} Y_1(t) = 0$$

$$\implies \nabla^2 Y_1(t) + R\left(Y_1(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)\right) = 0.$$

  O cálculo para mostrar que Y_2 é campo de Jacobi é análogo.

Note agora que temos então um conjunto de $2n$ soluções linearmente independentes para a equação de Jacobi. Temos então uma base para o espaço de campos de Jacobi.

□

Teorema 9.1.4. *Todo campo de Jacobi periódico ao longo de uma geodésica c é restrição de um campo de Killing.*

Demonstração. Primeiramente, introduzimos uma forma de construir campos de Jacobi.

Dado ϕ_s um subgrupo de 1 parâmetro de $I_0(M)$, temos que o campo $Y(t)$ definido como a derivada em 0 de $s \mapsto \phi_s(c(t))$ é um campo de Jacobi periódico ao longo de c. Estes campos são precisamente as restrições de campos de Killing (veja Apêndice, 11.4, onde fazemos a relação entre campos de Killing e elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$). Devemos então mostrar que estes são os únicos casos de campos de Jacobi periódicos.

Analisemos primeiramente os campos de Jacobi que obtemos a partir dos campos de Killing. Como observado no Apêndice, os campos de Killing X são relacionados de forma natural com os elementos da álgebra $\mathfrak{g}$. Denotaremos o elemento da álgebra que é associado a X também como X. Temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Se $X \in \mathfrak{p}$, temos então que $Y(0) = X(p) = X$.

Como τ_{-t} é o transporte paralelo "para trás", temos que $\tau_{-t}Y(t) = (d\exp -tV)_{p_0}(Y(t))$. Isto segue do Teorema 8.1.6. Assim,

$$\nabla Y(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_{-t}Y(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(d\exp -tV)_p(Y(t)) = [-V, X](p).$$

Como $V, X \in \mathfrak{p}$, temos que $[-V, X] \in \mathfrak{k}$. Logo, $[-V, X] = \nabla Y(0)$ deve ser zero.

Se $X \in \mathfrak{k}$, temos que $Y(0) = 0$. Como a fórmula acima não depende do fato de $X \in \mathfrak{p}$, temos que:

$$\nabla Y(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_{-t}Y(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(d\exp -tV)_{p_0}(Y(t)) = [-V, X](p) = [X, V](p).$$

Como um campo de Jacobi é determinado pelas suas condições iniciais ($Y(0)$ e $\nabla Y(0)$), as observações acima nos permitem determinar todos os campos de Jacobi satisfazendo às seguintes condições iniciais:

$$Y(0) \in T_pM, \quad \nabla Y(0) = 0 \tag{9.1}$$

$$Y(0) = 0, \quad \nabla Y(0) \in [\mathfrak{k}, V]. \tag{9.2}$$

Os campos de Jacobi do caso (8.1) são bem explícitos e já nos fornecem um espaço de dimensão $n-1$. Resta analisar os do segundo tipo. Para isto, considere X_i um autovetor de $\tilde{R}$ (ver Proposição 9.1.3). Como $X_i \in \mathfrak{p}$ e $V \in \mathfrak{p}$, temos que $Z_i := [X_i, V] \in \mathfrak{k}$ [2]. Analisando o campo de Jacobi correspondente, temos:

$$Y_i(0) = 0,$$

$$\nabla Y_i(0) = [Z_i, V] = [[X_i, V], V] = -R(X_i, v)v = -\lambda_i X_i,$$

onde nesta última igualdade usamos a fórmula para curvatura em espaços globalmente simétricos dada pelo Teorema 8.1.10.

Assim, temos que se $\lambda_i \neq 0$, então $\nabla Y_i \neq 0$ e além disso diferentes X_i nos dão ∇Y_i linearmente independentes. Concluímos então que conseguimos gerar todos os campos de Jacobi correspondente a auto-valores λ_i não-nulos como restrição de campos de Killing. Mas sabemos que se $\lambda_i = 0$, então os campos de Jacobi associados são X_i ou tX_i. Sabemos que X_i é obtido através do caso (8.1). Dessa forma, temos que todos os campos de Jacobi são obtidos como restrição de um campo de Killing, a menos de tX_i. Isto conclui nosso teorema. □

Temos a seguinte caracterização do núcleo da Hessiana.

Teorema 9.1.5. *Um campo vetorial X pertence ao núcleo do operador A associado à hessiana D^2E_c se e somente se é um campo de Jacobi periódico.*

Demonstração. Usando a fórmula para a hessiana (c.f. Teorema 9.2.1), temos que X pertence ao núcleo de A se e somente se $\nabla^2 X + R(X, \dot{c})\dot{c} = 0$. Isto vale se supusermos X diferenciável, mas também vale no sentido fraco, uma vez que obtemos a equação através de integração por partes. Note que esta equação é precisamente a equação de um campo de Jacobi. Devido à forma da equação diferencial, segue então do teorema de regularidade elíptica que um campo pertence ao núcleo se e somente se ele é de Jacobi. Como o campo está definido com parâmetros no círculo S^1, também pela regularidade elíptica segue a periodicidade. □

Precisamos agora de uma caracterização das subvariedades críticas de espaços globalmente simétricos. Como essa caracterização é obtida facilmente no caso de CROSS's (que é nosso caso de interesse) devido a caracterização das geodésicas dadas pelo Lema 8.2.12 mas usa ferramentas que desviam muito de nosso objetivo para o caso geral de espaços globalmente simétricos, enunciamos o seguinte lema sem demonstração.

Lema 9.1.6. *Toda subvariedade crítica de um espaço globalmente simétrico é igual a $I_0(M).c$ para alguma c geodésica fechada.* [3]

Com a caracterização acima e o lema a seguir, estaremos prontos para resolver a questão de não-degenerescência.

Lema 9.1.7. *Seja M um espaço globalmente simétrico. Se todo campo de Jacobi periódico ao longo de qualquer geodésica fechada c é tangente a $I_0(M).c$, então toda subvariedade crítica é não-degenerada.*

[2] Isto segue do Corolário 8.1.9.

[3] $I_0(M).c$ é o conjunto das imagens de curvas por isometrias pertencentes a $I_0(M)$.

Demonstração. Como vimos na Seção 5.3, uma subvariedade crítica ser não-degenerada significa, por definição, que o espaço nulo da hessiana é o espaço tangente à subvariedade. O resultado segue então do Teorema 9.1.5 e do Lema 9.1.6. □

Teorema 9.1.8. *Toda subvariedade crítica de um espaço globalmente simétrico M é não degenerada.*

Demonstração. Note que a condição de todo campo de Jacobi periódico ao longo de qualquer geodésica fechada c ser tangente a $I_0(M).c$ é equivalente a dizer que todos esses campos são da forma

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}\phi_s(c(t)),$$

onde ϕ_s é um subgrupo de 1 parâmetro de $I_0(M)$. Como já foi observado, se o campo de Jacobi for restrição de um campo de Killing, então ele será dessa forma. O resultado segue então ao combinarmos os resultados anteriores. □

9.2 Cálculo do Índice e Nulidade das Subvariedades Críticas

Proposição 9.2.1. *Dados X e Y campos vetoriais sobre uma geodésica c, temos que*

$$D^2E_c(X,Y) = -\int_{S_1} \langle \nabla^2 X + R(X,\dot{c})\dot{c}, Y\rangle dt.$$

Demonstração. O Lema 5.3.1 nos dá que:

$$D^2E_c(X,Y) = \int_{S_1} \langle \nabla X, \nabla Y\rangle - \langle R(X,\dot{c})\dot{c}, Y\rangle dt$$

Usando integração por partes concluímos o resultado. □

A proposição acima nos diz então que o índice de c é o número de autovalores negativos do operador

$$AX = -\nabla^2 X - R(X,\dot{c})\dot{c}$$

contados com multiplicidade.

Teorema 9.2.2. *Seja l o comprimento da geodésica de menor período com respeito à métrica Riemanniana canônica de uma CROSS dada. Então, o índice $\lambda(c)$ de uma geodésica de menor período satisfaz a equação*

$$\lambda(c) = \sum(a_i - 1),$$

onde a_i são os números naturais que satisfazem $\sqrt{\lambda_i}.l = a_i.\pi$.

Demonstração. Primeiramente, notamos que não precisávamos da ortonormalidade dos X_i da Proposição 9.1.3. Assim, realizamos uma homotetia dos X_i de forma a fazer $P(X_i) = X_i(l) = \pm X_i(0)$, onde P é o transporte paralelo retornando ao ponto. Note que podemos fazer isso devido ao fato de $\nabla R = 0$, o que faz com que P deixe os auto-espaços de $\tilde{R}$ invariantes.

Faça $X = \sum h_i X_i$ onde h_i são funcões reais. Temos então que X é um autovetor de A se e somente se $h_i'' + (\lambda_i + \mu)h_i = 0$, onde μ é o autovalor associado a X. De fato, se $AX = \mu X$, temos que:

$$\begin{aligned} \mu X &= -\nabla^2 X - R(X, \dot{c})\dot{c} \\ \Longrightarrow \sum \mu h_i X_i &= -\sum h_i'' X_i - \sum \lambda_i h_i X_i \\ \Longrightarrow h_i'' + (\lambda_i + \mu)h_i &= 0 \quad \forall i. \end{aligned} \tag{9.3}$$

A recíproca é imediata. Agora, para termos X periódico (isto é, $X(l) = X(0)$ e $\nabla X(l) = \nabla X(0)$), é necessário que:

$$h_i(l) = h_i(0) \quad \text{e} \quad h_i'(l) = h_i'(0), \quad \text{se } X_i(l) = X_i(0);$$
$$h_i(l) = -h_i(0) \quad \text{e} \quad h_i'(l) = -h_i'(0), \quad \text{se } X_i(l) = -X_i(0).$$

Observe que a equação diferencial 9.3 tem coeficientes constantes. Assim, temos as seguintes possibilidades de soluções:

- No caso de $\lambda_i + \mu < 0$, temos:
$$h_i(t) = a \sinh \sqrt{-(\lambda_i + \mu)}.t + b \cosh \sqrt{-(\lambda_i + \mu)}.t.$$
Mas isto contradiz as condições de periodicidade expostas.

- No caso de $\lambda_i + \mu = 0$, temos:
$$h_i(t) = at + b.$$
Esta solução só é possível se $a = 0, b = 1$ e $X_i(l) = X_i(0)$ pois só assim respeita as possibilidades de condição inicial e final. Assim, para todo $\lambda_i > 0$ com $X_i(l) = X_i(0)$ existe um único número negativo μ que conta para o índice de c.

- No caso de $\lambda_i + \mu > 0$, temos:
$$h_i(t) = a \sin \sqrt{\lambda_i + \mu} t + b \cos \sqrt{\lambda_i + \mu} t.$$
Se $X_i(l) = X_i(0)$, então $\sqrt{\lambda_i + \mu} l = m.2\pi$, com $m \in \mathbb{Z}$. Mas note que a Proposição 9.1.3 implica também em $\sqrt{\lambda_i + \mu} l = j$, com $j \in \mathbb{Z}$. Juntando essas duas informações, temos que:
$$\mu l^2 = (m^2 - j_i^2) 4\pi^2.$$
Assim, temos $j_i - 1$ possibilidades de μ negativos (isto segue da variação entre os possíveis $m \in \mathbb{Z}$ menores que j_i, de forma a deixar o lado esquerdo da igualdade acima negativo). Como cada um desses auto-valores negativos tem multiplicidade 2, adicionamos $2j_i - 2$ ao índice de c.

  Se $X_i(l) = -X_i(0)$, temos que $\sqrt{\lambda_i + \mu} l = (2m + 1)\pi$. Pela Proposição 9.1.3, temos também que $\sqrt{\lambda_i} l = (2k_i + 1)\pi$. Juntando essas duas informações, temos que:
$$\mu l^2 = ((2m + 1)^2 - (2k_i + 1)^2)\pi^2.$$
Assim, temos k_i possibilidades para μ, novamente com multiplicidade 2. Adicionamos então $2k_i$ ao índice de c.

Somando tudo, concluímos o teorema.

□

Corolário 9.2.3. *Seja $c^m(t) := c(mt)$. Então:*

$$\lambda(c^m) = \sum (ma_i - 1) = m \sum a_i - \#\{\lambda_i \text{ positivos}\}.$$

Assim sendo, sabemos os índices das geodésicas. A nulidade das mesmas é algo que também sabemos devido aos nossos teoremas anteriores:

Proposição 9.2.4. *A nulidade $\nu(c)$ de uma geodésica satisfaz:*

$$\nu(c) = \#\{\text{campos de Jacobi periódicos}\} = n + \#\{\lambda_i \text{ positivos}\}.$$

Demonstração. Segue automaticamente da Proposição 9.1.3 e do Teorema 9.1.5. □

Terminamos esta seção com uma tabela para os valores dos índices e nulidades das geodésicas de CROSS's com base nos cálculos realizados nesta seção e usando o Lema 8.2.14.

M	l	λ_i	$\sqrt{\lambda_i} l$	$\lambda(c)$	$\lambda(c^m)$	$\mu(c)$
S^n	2π	$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$	2π	$n-1$	$(2m-1)(n-1)$	$2n-1$
$\mathbb{R}P^n$	π	$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$	π	0	$(m-1)(n-1)$	$2n-1$
$\mathbb{C}P^n$	2π	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = ... = \lambda_{2n-1} = \frac{1}{4}$	2π π	1	$2(m-1)n+1$	$4n-1$
$\mathbb{H}P^n$	2π	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\lambda_4 = ... = \lambda_{4n-1} = \frac{1}{4}$	2π π	3	$2(m-1)(2n+1)+3$	$8n-1$
CaP^2	2π	$\lambda_1 = ... = \lambda_7 = 1$ $\lambda_8 = ... = \lambda_{15} = \frac{1}{4}$	2π π	7	$22m-15$	31

9.3 Construção de Variedades Completantes para as CROSS

Devido ao Lema 6.2.3, se contruirmos variedades completantes para as CROSS teremos a validade da equação 5.1. Como já fizemos o caso de S^n, nos restringimos a fazer os casos de $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$, lembrando que omitimos discussões sobre CaP^2.

Nas discussões a seguir, ϕ, L e Y desempenham os mesmos papéis que no Capítulo 6. Ademais, uma vez que a demonstração que ϕ satisfaz as condições necessárias em cada caso a seguir é idêntica à demonstração da Proposição 6.2.4, a omitimos.

$\mathbb{R}P^n$

Definimos Y_1 como o fibrado $T^1\mathbb{R}P^n$, $L_1 := Y_1$ e $s : L_1 \to Y_1$ a função que leva (x, v) em x^*, onde x^* é o ponto "antípoda" com respeito a $\mathbb{R}P^n$ (isto é, o ponto antípoda na identificação canônica da geodésica que sai de x com velocidade inicial v em $\mathbb{R}P^n$ com o círculo). Definimos a função

$$\phi : Y_1 \to \Lambda S^n$$

como a função que associa a cada (x, v) a geodésica correspondente em $\mathbb{R}P^n$. Assim, a primeira condição do Lema 6.2.3 é satisfeita. Em $\mathbb{R}P^n$, abdicamos de orientabilidade, de forma que a terceira condição do Lema 6.2.3 vale sem tal hipótese. Assim sendo, os resultados que aqui obteremos para o cálculo das homologias só valerão com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Note que para tal é crucial que a codimensão da variedade L é 0, uma vez que o índice da primeira subvariedade crítica de $\Lambda\mathbb{R}P^n$ é 0, como calculamos anteriormente. Mais explicitamente,

$$\dim Y_1 = 2n - 1 = i(B_1) + \nu(B_1).$$

Construímos agora nossas variedades completantes Y_k. Para tal, prosseguimos de forma semelhante a anteriormente. Temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y_1 \times_{\mathrm{ev}} Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ Y_1 \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathbb{R}P^n, \end{tikzcd}$$

que define então $Y_2 := Y_1 \times_{\mathrm{ev}} Y_1$. Y_k é definido indutivamente, fazendo

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ Y_{k-1} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathbb{R}P^n, \end{tikzcd}$$

onde vemos Y_{k-1} como um fibrado sobre $\mathbb{R}P^n$ da mesma forma que foi descrita no Capítulo 6. Temos então que

$$\dim Y_k = 2n - 1 + (k-1)(n-1) = \nu(B_k) + i(B_k).$$

Fazendo $L_k := \{(x, v), (x, v), \cdots, (x, v) : (x, v) \in T^1\mathbb{R}P^n\}$ e $\phi : Y_k \to \Lambda\mathbb{R}P^n$ ser a concatenação das k-geodésicas determinadas por um ponto de Y_k (ou seja, leva um ponto de Y_k na "geodésica quebrada" associada), temos novamente todas as propriedades requisitadas.

$\mathbb{C}P^n$

Diferentemente do caso $\mathbb{R}P^n$, onde não temos liberdade para girar geodésicas primitivas deixando um ponto fixo (formalmente falando, não existem pontos conjugados), em $\mathbb{C}P^n$ existe um grau de liberdade a mais originado da esfera totalmente geodésica contendo a geodésica, dada pela Proposição 8.2.15. Este grau de liberdade a mais fornece um ponto conjugado para uma dada geodésica de $\mathbb{C}P^n$. Com isso em mente, definimos Y_1 como o fibrado $S^1 \hookrightarrow Y_1 \to T^1\mathbb{C}P^n$, cuja fibra em (x, v) é o equador $e_{x,v}$ ortogonal a v da esfera isométrica a $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (dada pela Proposição 8.2.15). Fazemos $L_1 := \{(x, v, x^*) \mid (x, v) \in T^1\mathbb{C}P^n\}$, onde x^* é o ponto antípoda de x no equador $e_{x,v}$, e definimos $\phi : Y_1 \to \Lambda\mathbb{C}P^n$

como o mapa que leva (x, v, y) no círculo orientado que começa em x, é tangente a v e passa por y verticalmente ao equador $e_{x,v}$ (ver Seção 6.2). Temos então que a primeira condição é satisfeita, e notamos que a dimensão de Y_1 é

$$\dim Y_1 = 4n - 1 + 1 = \nu(B_1) + i(B_1).$$

A terceira condição, desta vez, também vale com a hipótese de orientabilidade. Fazendo $Y_k = Y_1 \times_{\mathrm{ev}} \cdots \times_{\mathrm{ev}} Y_1$ da mesma forma como anteriormente, definindo $L_k := \{(x, v, x^*), \cdots, (x, v, x^*) \mid (x, v) \in T^1\mathbb{C}P^n\}$ e fazendo $\phi : Y_k \to \mathbb{C}P^n$ ser a concatenação dos círculos determinados pelos pontos de cada Y_1, temos que a primeira e terceira condições ainda valem, e observamos que

$$\dim Y_k = 4n + (k-1)2n = 4n - 1 + 2(k-1)n + 1 = \nu(B_k) + i(B_k).$$

$\mathbb{H}P^n$

O caso de $\mathbb{H}P^n$ é uma generalização direta do caso de $\mathbb{C}P^n$. Mostramos as mudanças principais e, uma vez que os argumentos entre tais mudanças são exatamente os mesmos, omitimos os detalhes. Ao invés de um fibrado $S^1 \hookrightarrow Y_1 \to T^1\mathbb{C}P^n$, teremos um fibrado

$$S^3 \hookrightarrow Y_1 \to T^1\mathbb{H}P^n.$$

Note que tal fibrado terá dimensão $8n - 1 + 3$. Ou seja,

$$\dim Y_1 = 3 + 8n - 1 = i(B_1) + \nu(B_1).$$

Definindo Y_k através da k-ésima iteração do pullback, teremos um fibrado de dimensão

$$\begin{aligned}\dim Y_k &= 8n - 1 + 3 + (k-1)(4n+2)\\ &= 2(k-1)(2n+1) + 3 + 8n - 1\\ &= i(B_k) + \nu(B_k).\end{aligned}$$

Teorema 9.3.1. *Dada M um CROSS, temos que*

$$H_*(\Lambda M; G) = \bigoplus H_{*-\lambda(B_i)}(B_i; G),$$

onde $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se os fibrados negativos não são orientáveis ou se $M = \mathbb{R}P^n$.

Demonstração. Imediato dos resultados que obtivemos até agora. □

Capítulo 10

Cálculo das Homologias e Considerações Finais

The purpose of computation is insight, not numbers.

Richard Hamming

The purpose of computing is numbers. Specifically, correct numbers.

Greengard

10.1 Cálculo das Homologias de CROSS's

Lema 10.1.1. *As subvariedades críticas de uma CROSS M são difeomorfas ao fibrado tangente unitário T^1M.*

Demonstração. O argumento é análogo ao dado no Capítulo 6, porém repetimos uma vez que no dado capítulo havíamos tratado apenas no caso da esfera.

Fixe uma subvariedade crítica B de nível de energia a. Segue do Lema 8.2.12 que todas as geodésicas em uma CROSS são fechadas. Em particular, fixado um ponto $p \in M$ e um vetor tangente V de norma 1 em T_pM, temos associada uma família de geodésicas fechadas com condições inicias (p, V). Entre essas geodésicas, existe uma única γ tal que sua energia é a. Associe, então, a cada $(p, V) \in T^1M$ a geodésica γ. Este mapa é claramente uma bijeção e um homeomorfismo, uma vez que é um mapa contínuo em um conjunto compacto. Por suavidade com respeito a condições iniciais, temos que é um difeomorfismo. □

Lema 10.1.2. *Todas as subvariedades críticas B de uma CROSS $M \neq \mathbb{R}P^n, S^2, \mathbb{C}P^1$ são simplesmente conexas.*

Demonstração. Pelo lema anterior, basta verificarmos que os fibrados unitários são simplesmente conexos. Temos um fibrado $S^k \to T^1M \to M$, onde $k+1$ é a dimensão da CROSS M. Usando a sequência exata longa de grupos de homotopia (a sequência induzida pelo fibrado), temos que

$$\pi_1(S^k) \to \pi_1(T^1M) \to \pi_1(M)$$

é uma sequência exata. Agora, sendo M como nas hipóteses, temos que S^k é uma esfera de dimensão maior que 1, ou seja, $\pi_1(S^k) = 0$ e também que $\pi_1(M) = 0$. Assim, temos que $\pi_1(T^1M) = 0$.

□

Observação 10.1.3. É válido notar o por que de o argumento acima falhar para $\mathbb{R}P^n, S^2$ e $\mathbb{C}P^1$. Como $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n > 1$, não vale que $\pi(M) = 0$ na demonstração acima.

No caso de S^2 e $\mathbb{C}P^1$, a questão não é o lado direito, mas sim o lado esquerdo: temos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Logo, o argumento dado acima não vale para esses casos. Felizmente, conseguimos uma forma de incluir esses casos no nosso objetivo principal: mostrar que os fibrados negativos sobre as subvariedades críticas são orientáveis.

Lema 10.1.4. *Seja M uma CROSS diferente de $\mathbb{R}P^n$. Todas os fibrados negativos ξ sobre as subvariedades críticas de M são orientáveis.*

Demonstração. No caso das CROSS's que não são S^2 e $\mathbb{C}P^1$, o resultado segue do lema anterior, uma vez que todo fibrado sobre uma variedade simplesmente conexa é orientável.

Como $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$, basta analisarmos o caso de S^2.

Note que S^1 age em ΛS^2 por isometrias e deixa E invariante por sua ação. Assim, também deixa os fibrados negativos ξ invariantes. Assim sendo, temos que eles são induzidos por um fibrado vetorial sobre B/S^1. Como $B \cong T^1S^2 \cong SO(3)$, temos que $B/S^1 = SO(3)/S^1 = S^2$. Como S^2 é simplesmente conexo, pelo mesmo motivo do começo da demonstração, temos que ξ é orientável.

□

Corolário 10.1.5. *Dada M uma CROSS que não seja $\mathbb{R}P^n$, temos que:*

$$H_*(\Lambda M; \mathbb{Z}) = \bigoplus H_{*-\lambda(B_i)}(B_i; \mathbb{Z}).$$

Demonstração. Segue do lema anterior e do Teorema 9.3.1. □

Basta agora computar a homologia das subvariedades críticas. Assim, conseguiremos computar por completo a homologia do free loop space.

Proposição 10.1.6. *Dada M uma CROSS de dimensão n que não seja $\mathbb{R}P^k$ com k par, valem as seguintes igualdades:*

- $H_i(B, \mathbb{Z}) = H_i(M, \mathbb{Z})$ *se* $i \leq n-2$.
- $H_i(B, \mathbb{Z}) = H_{i-n+1}(M, \mathbb{Z})$ *se* $i \geq n+1$.
- $H_n(B, \mathbb{Z}) = \begin{cases} H_n(M, \mathbb{Z}) \oplus H_1(M, \mathbb{Z}) & \text{se } e(M) = 0 \\ H_1(M, \mathbb{Z}) & \text{se } e(M) \neq 0 \end{cases}$

- $H_{n-1}(B, \mathbb{Z}) = \begin{cases} H_{n-1}(M, \mathbb{Z}) \oplus H_0(M, \mathbb{Z}) & se\ e(M) = 0 \\ H_{n-1}(M, \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) & se\ |e(M)| = k, \end{cases}$

onde $e(M)$ é a característica de Euler.

Demonstração. De fato, as igualdades valem para qualquer variedade compacta sem bordo orientável. Usando a Gysin sequence (c.f. [23]) para o fibrado $S^{n-1} \to T^1M \to M$, temos a sequência exata longa

$$... \longrightarrow H^{*-n}(M) \xrightarrow{\cup e} H^*(M) \xrightarrow{p^*} H^*(T^1M) \longrightarrow H^{*-n+1}(M) \longrightarrow ...$$

Como todas as CROSS's são compactas e todas diferentes de $\mathbb{R}P^n$ (n ímpar) são orientáveis, podemos usar a dualidade de Poincaré (veja Apêndice, 11.3) junto com a sequência acima para concluir as relações da proposição, uma vez que $B \cong T^1M$.

Fazemos um cálculo explícito como exemplo. Considere a esfera S^2. Temos então que a sequência acima é da forma

$$... \longrightarrow H^{i-2}(S^2) \xrightarrow{\cup e} H^i(S^2) \xrightarrow{p^*} H^i(T^1S^2) \longrightarrow H^{i-1}(S^2) \longrightarrow ...$$

- Se $i = 0$, temos então o fragmento

$$0 \longrightarrow H^0(S^2) \longrightarrow H^0(T^1S^2) \longrightarrow 0,$$

  que implica $H^0(T^1S^2) \cong H^0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

- Se $i = 1$, consideramos o fragmento

$$0 \longrightarrow H^1(T^1S^2) \longrightarrow H^0(S^2) \xrightarrow{2\cdot} H^2(S^2) \longrightarrow ...$$

  que implica $H^1(T^1S^2) \cong 0$.

- Se $i = 2$, consideramos o fragmento

$$...H^1(T^1S^2) \longrightarrow H^0(S^2) \xrightarrow{2\cdot} H^2(S^2) \longrightarrow H^2(T^1S^2) \longrightarrow H^1(S^2)...$$

  Como $H^0(S^2) \cong H^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H^1(S^2) \cong 0$ e $H^1(T^1S^2) \cong 0$ pelo item anterior, temos que $H^2(T^1S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- Se $i = 3$, consideramos o fragmento

$$0 \longrightarrow H^3(T^1S^2) \longrightarrow H^2(S^2) \longrightarrow 0,$$

  que nos dá $H^3(T^1S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Note que nossos cálculos concordam com o fato de que $T^1S^2 \cong SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$. $\square$

Temos então a seguinte tabela, a qual contém informação completa das homologias de todas as CROSS's que não são $\mathbb{R}P^n$:

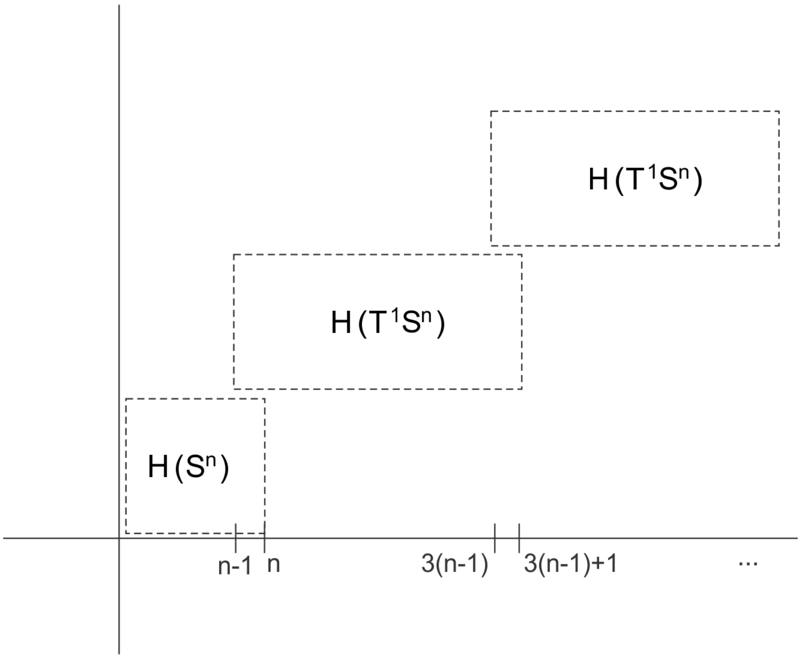
M	$H_*(\Lambda M;\mathbb{Z})$	
S^n, n ímpar	$H_* = \mathbb{Z}$	se $* = m(n-1)$ ou $* = m(n-1)+n$, $m \geq 0$
S^n, n par	$H_* = \mathbb{Z}$ $\oplus$ $H_* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	se $* = 0$, $(2m+1)(n-1)+1$, $(2m+1)(n-1), m \geq 0$ se $* = 2m(n-1), m \geq 1$
$\mathbb{C}P^n$	$H_* = \mathbb{Z}$ $\oplus$ $H_* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	se $* = 0, 1, ..., k \neq 2mn, m \geq 1$ se $* = 2mn, m \geq 1$
$\mathbb{H}P^n$	$H_* = \mathbb{Z}$ $\oplus$ $H_* = \mathbb{Z}$ $\oplus$ $H_* = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	se $* = 0, 2m(2n+1)+4l, m \geq 0, l = 1, ..., n$ se $* = 2m(2n+1)+4l-4n+1, m \geq 1$, $l = 0, ..., n-1$ se $k = 2m(2n+1)$, $m \geq 1$
CaP^2	$H_* = \mathbb{Z}$ $\oplus$ $H_* = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	se $* = 22m-7, 22m+8, 22m+16, m \geq 1$ se $* = 22m, m \geq 1$

No caso de n ímpar também temos a descrição explícita da homologia do free loop space de $\mathbb{R}P^n$, mas com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (veja diagramas das páginas seguintes).

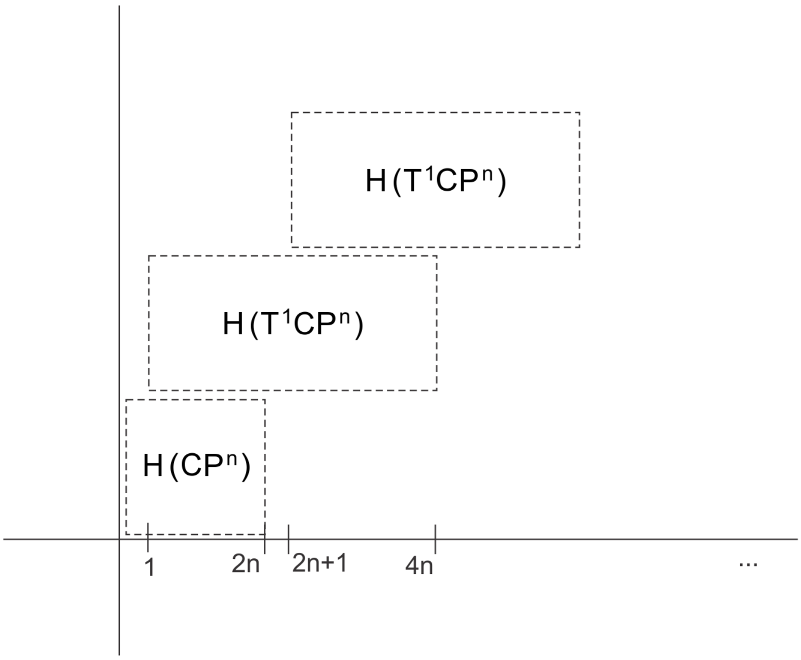
Concluímos a seção com uma exposição esquemática dos resultados acima que exibe de forma mais clara a aglutinação das homologias das subvariedades críticas.

A homologia do free loop space se dá ao tomar as retas verticais dos diagramas a seguir.

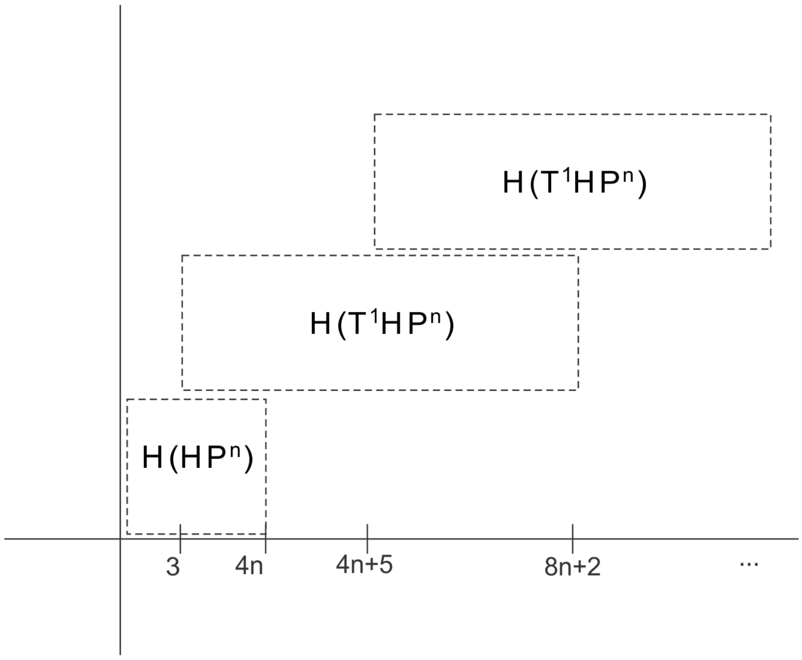
$H_*(\Lambda S^n)$:



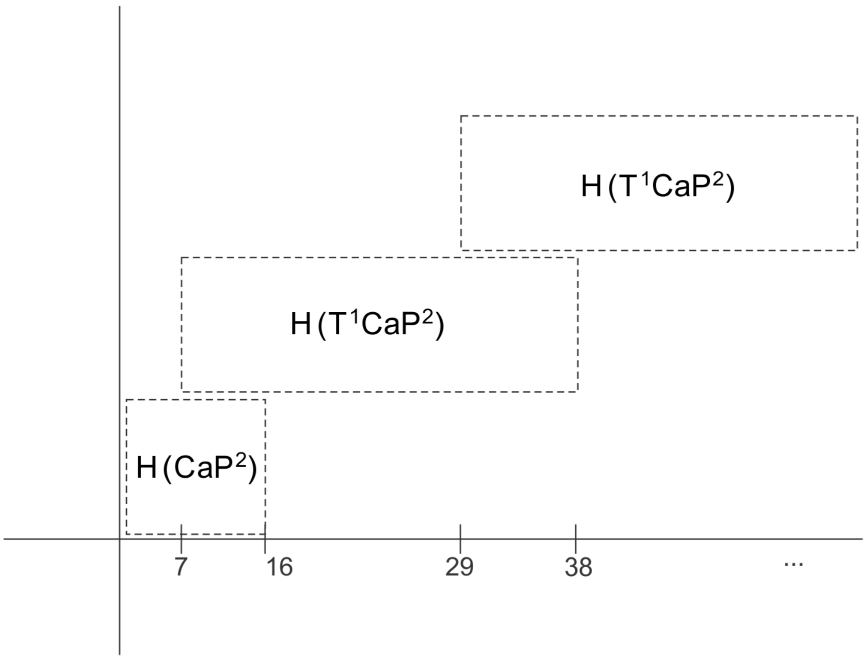
$H_*(\Lambda \mathbb{C}P^n)$:



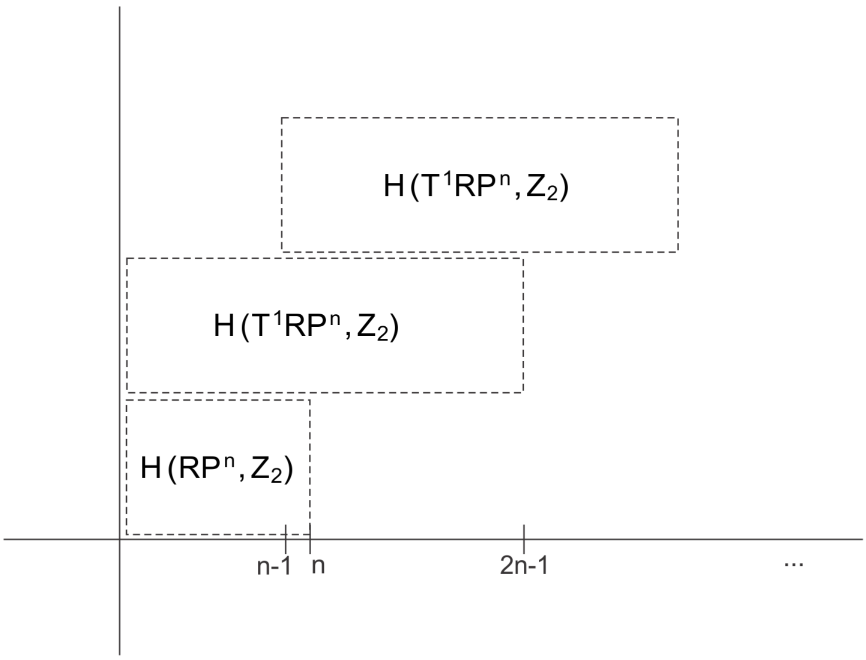
$H_*(\Lambda \mathbb{H}P^n)$:



$H_*(\Lambda CaP^2)$:



$$H_*(\Lambda\mathbb{R}P^n):$$



10.2 Considerações Finais

Grande parte da motivação do cômputo das homologias do Free Loop Space vem do problema de existência de infinitas geodésicas fechadas. A relação dada pela teoria de Morse entre pontos críticos e topologia (homologia) fornece um grande instrumento para a investigação desse problema, uma vez que os pontos críticos do funcional de energia são as geodésicas fechadas. De fato, o célebre teorema a seguir dá uma resposta bem concreta a esse problema:

Teorema 10.2.1 (Gromoll-Meyer)**.** *Seja M variedade fechada e simplesmente conexa. Se existe um número inteiro primo $p \geq 2$ tal que a sequência de números de betti $b_k(\Lambda M; \mathbb{F}_p)$ é ilimitada, então qualquer métrica Riemanniana em M possui infinitas geodésicas fechadas primitivas. [9]*

Vejamos como esse teorema se relaciona com o trabalho que desenvolvemos nesta dissertação. Primeiramente, considere o seguinte teorema (c.f. [28]).

Teorema 10.2.2 (Ziller)**.** *Se M é uma variedade compacta globalmente simétrica de tipo compacto, então existe uma progressão aritmética d_i tal que os números de betti $b_{d_i}(\Lambda M; \mathbb{Z}_2$ são limitados inferiormente por um polinômio de grau ($rankM - 1$).*

Note que como um resultado imediato temos que todo espaço com rank > 1 satisfaz às hipóteses do teorema de Gromoll-Meyer, isto é, a sequência de números de betti de seu Free Loop Space é ilimitada (onde $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_2$). Isto nos dá então que todos os espaços globalmente simétricos de rank > 1 possuem infinitas geodésicas fechadas com respeito a qualquer métrica definida neles. Mais geralmente, temos então que:

Corolário 10.2.3. *Todo espaço que é homotopicamente equivalente a um espaço globalmente simétrico compacto e simplesmente conexo de rank* > 1 *possui infinitas geodésicas fechadas com respeito a qualquer métrica definida neles.* [1]

A pergunta natural e mais relacionada com esta dissertação, que foca em CROSS's é então perguntar sobre o caso de rank $= 1$. Mas como consequência dos cálculos feitos nesse capítulo, temos que a sequência de números de betti do Free Loop Space é limitada para qualquer corpo K de coeficientes. Desta forma, o Teorema de Gromoll-Meyer não nos dá informação alguma. De fato, não se sabe a resposta do problema de existência de infinitas geodésicas fechadas sequer em S^n para $n \geq 3$ para uma métrica qualquer! Para mais informações, c.f. [19].

Por um lado, isso nos diz que os cálculos feitos nesta dissertação não nos dá informação suficiente para resolver o problema de existência de infinitas geodésicas no caso de CROSS's. Por outro, isso mostra que o problema de existência de infinitas geodésicas no nosso caso é mais sutil, e portanto o cálculo exato da homologia desses espaços pode ser útil. De fato, como exemplo de utilizações da homologia do free loop space, podemos citar o trabalho de Bangert e Long, que usam a homologia de ΛS^2 para concluir a existência de pelo menos duas geodésicas distintas em S^2 para uma métrica Finsler qualquer. Fazemos a observação que este resultado, junto com um exemplo devido a Katok de uma métrica Finsler em S^2 que possui apenas duas geodésicas distintas, permite concluir que o número mínimo de geodésicas diferentes que uma métrica Finsler em S^2 pode possuir é 2.

Observamos também que as técnicas de teoria de Morse podem ser aplicadas a diversos problemas de outras naturezas. Como a ideia principal da teoria é relacionar pontos críticos e topologia, o estudo de outros funcionais além do de energia se torna uma ferramenta poderosa em aplicações para contextos da Fìsica, por exemplo, uma vez que esta possui vários problemas cuja base é o "Princípio de Mínima Ação". Neste contexto, o estudo do Path Space [16], do Pointed Loop Space e do Free Loop Space se tornam objetos de bastante interesse.

[1] Observamos que todo espaço globalmente simétrico compacto simplesmente conexo é de tipo compacto (c.f. [28]).

Capítulo 11

Apêndice

11.1 Distribuições e Espaços de Sobolev

Iremos introduzir os conceitos e resultados mais relevantes para a dissertação. Omitimos algumas definições básicas (como por exemplo, a de um espaço vetorial topológico). Uma boa referência para este assunto é [24].

Teorema 11.1.1. *Dada $\mathcal{P}$ uma família separante de seminormas em um espaço vetorial X, a topologia inicial com respeito a essa família torna X um espaço localmente convexo. Explicitamente, os conjuntos*

$$V(p,n) = \{x \mid p(x) < \frac{1}{n}\}$$

formam uma subbase local para tal topologia.

Os Espaços $C^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{D}_K$

No resto desta seção, α sempre representará uma n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de inteiros não-negativos e $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Além disso,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Sendo f uma função complexa definida em um aberto não-vazio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $f \in C^\infty(\Omega)$ se para todo α, $D^\alpha(\Omega)$ existe e é contínua em Ω. Assim sendo, $C^\infty(\Omega)$ é o espaço de todas as funções suaves em Ω.

O espaço $\mathcal{D}_K$ é o espaço vetorial de todas as funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte dentro de K. Se $K \subset \Omega$, $\mathcal{D}_K$ é identificado de forma natural com um subespaço de $C^\infty(\Omega)$.

Introduzimos agora uma topologia em $C^\infty(\Omega)$.

Escolha uma exaustão por compactos de Ω (isto é, uma sequência de compactos K_N tal que o interior de K_{N+1} contém K_N para todo N e $\Omega = \bigcup K_i$). Defina seminormas p_N dadas por

$$p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N\}.$$

Temos então que a topologia gerada (dada pelo Teorema anterior) faz com que $C^\infty(\Omega)$ seja um espaço localmente convexo. Além disso, o fato de que tem-se enumeráveis semi-normas dá origem a uma base local contável. Mas sabe-se que um espaço vetorial topológico primeiro-contável é metrizável. Por considerações de análise (especificamente, bom-comportamento das derivadas com relação a limites caso convirjam uniformemente), temos que $C^\infty(\Omega)$ é um espaço completo. Assim,

$$C^\infty(\Omega) \text{ é um espaço de Fréchet.}$$

Além disso, é possível mostrar usando o teorema de Arzelà-Ascoli que $C^\infty(\Omega)$ possui a propriedade de Heine-Borel (todo fechado e limitado é compacto).

A topologia de $\mathcal{D}_K$ é a topologia induzida por $C^\infty(\Omega)$. Como $\mathcal{D}_K$ é interseção dos núcleos dos funcionais $f \mapsto f(x)$ com x variando sobre o complementar de K, temos que $\mathcal{D}_K$ é um subespaço fechado de $C^\infty(\Omega)$. Assim, $\mathcal{D}_K$ também é um espaço de Fréchet.

O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$

O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, também conhecido como *Test Function Space*, é definido como a união de todos os $\mathcal{D}_K$ com $K \subset \Omega$ compacto. Introduzimos agora uma topologia em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Seja β a coleção de todos os conjuntos convexos e balanceados $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tais que $\mathcal{D}_K \cap W$ são abertos em $\mathcal{D}_K$ para todo $K \subset \Omega$ compacto. A topologia em $\mathcal{D}(\Omega)$ consiste de todos os conjuntos da forma $\phi + W$, onde $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $W \in \beta$. Com esta topologia, $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, completo, com a propriedade de Heine-Borel e não-metrizável. Sua não-metrizabilidade segue do Teorema de Baire. Notamos que a topologia de $\mathcal{D}_K$ coincide com a topologia induzida de $\mathcal{D}(\Omega)$ para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Distribuições

Uma *distribuição* em Ω é um funcional linear contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Exemplo 11.1.2. Dado $x \in \Omega$, o funcional

$$\delta_x(\phi) = \phi(x)$$

é uma distribuição. Se $x = 0$, esta distribuição é frequentemente chamada *delta de Dirac*.

Exemplo 11.1.3. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ localmente integrável[1], o funcional

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi \cdot f$$

é uma distribuição. É comum identificarmos tal funcional com a função f associada. Assim, toda função localmente integrável é uma distribuição.

[1] Isto é, $\int_K |f| < \infty$ em todo compacto $K \subset \Omega$.

Cálculo com distribuições

Dada uma distribuição Λ em Ω, definimos um funcional

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \phi)$$

que é interpretado como a α-ésima derivada parcial de Λ (note que α é um multi-índice, então essa "derivada parcial" é uma multiplicidade de derivações parciais). Esta fórmula é motivada pela fórmula de integração por partes.

Como é de se esperar, $D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$ caso f seja C^n, onde $n = |\alpha|$. Notamos que isto não é necessariamente verdade se as derivadas parciais não forem contínuas. Além disso, caso f seja uma função em $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $D\Lambda_f = \Lambda_{Df}$ se e somente se f é absolutamente contínua.

O Espaço $\mathscr{S}_n$

O espaço $\mathscr{S}_n$ consiste das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para as quais

$$\sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^N |D^\alpha f(x)| < \infty$$

para qualquer N inteiro não-negativo, munido da topologia induzida pela família de semi-normas dada acima. Funções que satisfazem tal condição também são ditas "funções de rápido decrescimento". $\mathscr{S}_n$ é então um espaço de Fréchet.

A transformada de Fourier é um automorfismo contínuo em $\mathscr{S}_n$, que se estende para uma isometria de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo. A existência de tal extensão é o conteúdo do Teorema de Plancherel.

Distribuições Temperadas

É evidente que $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_n$. Temos também que $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{S}_n$ e que a inclusão de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}_n$ é contínua. Se $i : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}_n$ é a inclusão e L é um funcional linear contínuo em $\mathfrak{S}_n$, então

$$u_L = L \circ i$$

é um funcional linear contínuo em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathfrak{S}_n$, dois L distintos resultam em dois u_L também distintos. Assim, existe um isomorfismo entre o espaço dual $\mathscr{S}_n$ e um subespaço de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Tal subespaço é dito o *espaço das distribuições temperadas*. Ou seja, as distribuições temperadas são aquelas distribuições com extensão contínua para $\mathscr{S}_n$.

Dada uma distribuição temperada u, defina o funcional

$$\tilde{u}(\phi) = u(\tilde{\phi})$$

onde $\tilde{\phi}$ é a transformada de Fourier de ϕ. Tal funcional é dito a *transformada de Fourier* de u. A transformada de Fourier é também um automorfismo de $\mathscr{S}_n$.

Lema de Sobolev

Antes de enunciar o lema, definimos

- Uma função complexa f em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita ser *localmente* L^2 em Ω se $\int_K |f|^2 < \infty$ para todo $K \subset \Omega$ compacto.
- Uma distribuição u em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita ser *localmente* L^2 em Ω se existe uma função g localmente L^2 em Ω tal que $u(\phi) = \int_\Omega g\phi$ for all $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 11.1.4. *Sejam n, p, r inteiros, $n > 0$, $p \geq 0$ e*

$$r > p + \frac{n}{2}.$$

Suponha que f seja uma função no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cujas derivadas distribucionais $\frac{\partial}{\partial x_i}^k$ são localmente L^2 em Ω, com $1 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq r$.

Então existe uma função $f_0 \in C^p(\Omega)$ tal que $f_0(x) = f(x)$ em quase todo ponto de Ω.

Equações Diferenciais Parciais

Fazemos as seguintes notações:

- $m_n = (2\pi)^{-n/2}\mu$, onde μ é a medida de Lebesgue.
- A *convolução* de duas funções em $\mathbb{R}^n$ é dada por
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_n(y).$$
- Dado $t \in \mathbb{R}^n$, definimos a função
$$e_t(x) = e^{i\langle t,x\rangle}.$$
Note que, com essa notação, a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ é dada por
$$\tilde{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} fe_{-t}dm_n.$$
- Sendo α um multi-índice como antes,
$$D_\alpha := (i)^{-|\alpha|}D^\alpha.$$
Estabelecendo a notação $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}...t_n^{\alpha_n}$, note que
$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t.$$
- Sendo P polinômio em n variáveis com coeficientes complexos $P(\xi) = \sum c_\alpha \xi^\alpha$, fazemos
$$P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha, \quad P(-D) = \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha.$$
Pela observação anterior, note também que
$$P(D)e_t = P(t)e_t.$$

Notamos que com essas notações

$$(\widetilde{P(D)f}) = P\tilde{f},$$

$$\widetilde{Pf} = P(-D)\tilde{f}.$$

Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, N inteiro positivo e $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq N$ de forma que pelos menos um dos f_α com $|\alpha| = N$ seja não identicamente nulo. Então temos um operador diferencial

$$L = \sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha D_\alpha$$

associado, onde L age nas distribuições u de Ω por

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha D_\alpha u.$$

N é dita a *ordem* de L, o operador

$$\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha D_\alpha$$

é dita a *parte principal* de L e

$$p(x, y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha$$

é dito o *polinômio característico* de L. O operador L é dito *elíptico* se $p(x, y) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ e para todo $y \in \mathbb{R}^n$ (exceto para $y = 0$).

Espaços de Sobolev

Para todo real s, faça

$$\mu_s(y) = (1 + \|y\|^2)^s dm_n(y).$$

Caso $f \in L^2(\mu_s)$, tem-se que f é uma distribuição temperada. Logo, f é a transformada de fourier de uma distribuição temperada u (pelo Teorema de Plancherel extendido a $\mathscr{S}_n$). O espaço vetorial de tais u, equipado com a norma

$$\|u\|_s = \left(|\tilde{u}|^2 d\mu_s\right)^{1/2},$$

é chamado de *Espaço de Sobolev*, denotado por H^s. É imediato que H^s é isomorfo a $L^2(\mu_s)$. Assim, temos que H^s é um espaço de Hilbert para todo s.

Segue do Teorema de Plancherel que $H^0 = L^2$.

Dado um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, uma distribuição u em Ω é dita *localmente* H^s se para todo $x \in \Omega$ existe uma distribuição $v \in H^s$ tal que $u = v$ em alguma vizinhança de x.

Teorema 11.1.5. *Se $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $s \in \mathbb{N}$, são equivalentes:*

- *u é localmente H^s,*
- *$D_\alpha u$ é localmente L^2 para todo $\alpha \leq s$.*

O teorema central usado nesta dissertação é o seguinte.

Teorema 11.1.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto, $L = \sum f_\alpha D_\alpha$ um operador diferencial elíptico em Ω de ordem $N \geq 1$ com coeficientes $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ e de forma que para todo α com $|\alpha| = N$ tem-se que f_α é constante.*

Se u e v são distribuições em Ω que satisfazem

$$Lu = v$$

e v é localmente H^s, então u é localmente H^{s+N}.

Corolário 11.1.7. *Nas condições do teorema anterior, se $v \in C^\infty(\Omega)$, então toda solução u de (1) pertence a $C^\infty(\Omega)$. Em particular, toda solução da equação homogênea $Lu = 0$ pertence a $C^\infty(\Omega)$.*

Observamos que a hipótese de coeficientes de ordem N constantes não é necessária. Como não precisamos do caso geral e a demonstração para este caso específico encontra-se nas referências, deixamos o enunciado dessa forma.

Para finalizar, observamos que segue da desigualdade de Morrey (c.f. [8]) que se $u \in H^1(S^1)$, então u é representado por uma função Hölder-contínua de expoente $1/2$, uma vez que S^1 é uma variedade de dimensão 1. Segue então que u é absolutamente contínua. Assim, u é diferenciável em quase todo ponto (c.f. [24]) e, como observamos anteriormente, temos que a derivada fraca de u coincide com a derivada clássica, no sentido de representarem no mesmo funcional. Isto nos dá a caracterização usada no Capítulo 3.

11.2 Recobrimento Universal

Definição 11.2.1. Um espaço topológico X é dito ser *semilocalmente simplesmente conexo* se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U tal que todos os loops (mapas contínuos do círculo em X que estão contidos em U) são homotopicamente triviais em X.

Observação 11.2.2. Note que toda variedade é semilocalmente simplesmente conexa. De fato, todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$.

Definição 11.2.3. Um mapa $p : X \to Y$ entre espaços hausdorff, conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos é dito um *mapa de recobrimento* (com X sendo um *espaço de recobrimento*) se todo ponto $y \in Y$ possui uma vizinhança conexa por caminhos U tal que $p^{-1}(U)$ é união disjunta de abertos U_α de X, onde U_α são as componentes conexas por caminhos de $p^{-1}(U)$, de forma que $p|_{U_\alpha}$ é homeomorfismo para todo α.

Definição 11.2.4. Um espaço de recobrimento é dito um *recobrimento universal* se é simplesmente conexo.

Observação 11.2.5. Devido às propriedades de lifting para espaços de recobrimento, segue que recobrimentos universais são caracterizados por uma propriedade universal, sendo assim "únicos". Para mais informações, veja [5].

Teorema 11.2.6. *Um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos admite um recobrimento universal se e somente se é semilocalmente simplesmente conexo.*

Corolário 11.2.7. *Variedades conexas admitem um recobrimento universal.*

Observação 11.2.8. Recobrimentos universais preservam certas estruturas dos seus espaços-base. Por exemplo,

- Se o espaço é uma variedade, o recobrimento universal também o é.
- Se o espaço é um grupo de Lie, o recobrimento universal também o é (e a projeção é um homomorfismo de grupos de Lie).
- Se o espaço é uma superfície de Riemann, o recobrimento universal também o é (e a projeção é um mapa holomorfo).

Exemplo 11.2.9. Um bom exemplo de tudo isso é o caso em que Y é o círculo S^1 e $X = \mathbb{R}$. Temos que o mapa $p : t \mapsto e^{it}$ é um mapa de recobrimento e que $\mathbb{R}$ é o recobrimento universal de S^1. Uma boa forma de visualizar esta situação é imaginando a reta "espiralando" por cima do círculo.

11.3 Dualidade de Poincaré

Teorema 11.3.1 (Dualidade de Poincaré)**.** *Seja M variedade compacta orientável e sem bordo de dimensão n. Então,*

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M).$$

Se M não for orientável, o isomorfismo vale com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

11.4 Campos de Killing

Definição 11.4.1. Um *campo de Killing* em uma variedade Riemanniana compacta M é um campo vetorial $X : M \to TM$ tal que o fluxo $\phi_t : M \to M$ é uma isometria para todo t. [2]

Proposição 11.4.2. *Os campos de Killing em uma variedade Riemanniana compacta M estão em bijeção com os subgrupos de* 1 *parâmetro de $I(M)$.*

Demonstração. Seja X um campo de Killing sobre M. Como M é compacta, temos fluxo global. Seja $\phi_t : M \to M$ o fluxo associado a X. Por hipótese, ϕ_t é uma isometria. Assim, temos que $t \mapsto \phi_t$ é um subgrupo de 1 parâmetro de $I(M)$.

Reciprocamente, seja $t \mapsto s_t$ um subgrupo de 1 parâmetro de $I(M)$. Dado $p \in M$, considere o mapa $t \mapsto s_t(p)$. Este é um mapa de $\mathbb{R}$ na variedade. Tomando a derivada em 0, temos um vetor $X(p)$. Isto define um campo vetorial X na variedade. Pela forma que foi construído, os fluxos de tal campo são uma isometria. Assim, X é um campo de Killing. □

[2] A definição padrão de um campo de Killing é um campo X tal que $\mathcal{L}_X g = 0$. Para nossos fins, esta definição não é necessária.

Observação 11.4.3. Há uma bijeção canônica entre os subgrupos de 1 parâmetro de um grupo de Lie G e os elementos de sua álgebra de Lie através do mapa exponencial (c.f. [11]). Assim, através da proposição anterior, os campos de Killing tem uma interpretação canônica como elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $I(M)$. Como as álgebras de Lie de $I(M)$ e $I_0(M)$ são iguais, está estabelecida então a relação

$$\text{Campos de Killing} \leftrightarrow \mathfrak{g},$$

onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $I_0(M)$.

11.5 Isomorfismo de Thom

Como ao tratar de teoria de Morse com funções Morse-Bott nós adjuntamos disk-bundles, é útil saber computar as homologias desses fibrados. Uma ferramenta excelente para tal objetivo é o *Isomorfismo de Thom*, que enunciamos a seguir. Como referência, veja [4], [5].

Teorema 11.5.1 (Teorema do Isomorfismo de Thom)**.** *Seja $\pi : N \to B$ um disk-bundle de dimensão k sobre uma variedade conexa orientada e fechada*[3] *B de dimensão n. Então, temos que*

$$H^p(B) \to H^p(N) \to H^{p+k}(N, \partial N),$$

onde as flechas são isomorfismos.

Observação 11.5.2. Se não temos orientabilidade, os isomorfismos valem com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

11.6 Outras Observações e Detalhes

Funções λ e σ

Lema 11.6.1. *Seja $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave monótona não-crescente tal que $\lambda(x) = 1$ se $x \leq \frac{1}{2}$ e $\lambda(x) = 0$ se $x \geq 1$. Então, existe uma função satisfazendo às condições listadas na proposição* 4.3.17.

Demonstração. Considere a função

$$g(x) := 1 - \frac{3\lambda(x)}{2(1+x)}.$$

Como λ é não-crescente em $[0, 1]$, f é evidentemente crescente em $[0, 1]$. Assim, temos que g é invertível. Como a derivada de f é diferente de 0 em todo $(0, 1)$, a inversa é diferenciável. Seja σ a inversa. Temos então que

$$x = 1 - \frac{3\lambda(\sigma(x))}{2(1+\sigma(x))}.$$

Da igualdade acima, sabemos que $\sigma(0) = \frac{1}{2}$ e $\sigma(1) = 1$.

[3] Uma variedade é dita *fechada* se é compacta e sem bordo

Seja agora a função $f(u,v) := u^2 - \epsilon\sigma\left(\frac{v^2}{\epsilon+u^2}\right)$ definida na região $u^2 - v^2 \geq -\epsilon; \quad u^2 - v^2 - \frac{3\epsilon}{2}\lambda\left(\frac{u^2}{\epsilon}\right) \leq -\epsilon$.

Fixado v, temos que f só possui pontos críticos quando $u = 0$ (ponto de mínimo). Assim, f atingirá o máximo na fronteira da região.

Na curva de fronteira $u^2 - v^2 = -\epsilon$ temos que $f(u,v) = u^2 - \epsilon$. Se (u,v) não está também na outra curva de fronteira, então temos que

$$\frac{-3\epsilon}{2}\lambda\left(\frac{u^2}{\epsilon}\right) < 0 \implies \lambda(\frac{u^2}{\epsilon}) > 0$$

$$\implies u^2 < \epsilon \implies f(u,v) < 0.$$

Se (u,v) está na outra curva de fronteira, temos que

$$\frac{v^2}{\epsilon + u^2} = 1 - \frac{3}{2(1+\frac{u^2}{\epsilon})}\lambda\left(\frac{u^2}{\epsilon}\right).$$

Como, na fronteira, $\frac{u^2}{\epsilon} \geq \frac{1}{2}$ e além disso $\frac{u^2}{\epsilon} \leq 1$, temos que $\frac{u^2}{\epsilon} = \sigma(p)$ para algum $p \in [0,1]$. Assim,

$$\frac{v^2}{\epsilon + u^2} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\lambda(\sigma(p))}{1+\sigma(p)} = 1 - (1-p) = p.$$

de forma que $f(u,v) = u^2 - \epsilon\sigma\left(\frac{v^2}{\epsilon+u^2}\right) = \epsilon\sigma(p) - \epsilon\sigma(p)$.

Ou seja, temos que f é 0 nesta curva. Assim, concluímos que $f \leq 0$ na fronteira, donde conclui-se que $f \leq 0$ em toda a região. Note que isto é exatamente a terceira propriedade do que queríamos mostrar na proposição 4.3.17. $\square$

Programa para Cálculo de Autovalores de $\tilde{R}$

Por fins de completude, deixamos aqui o programa usado para calcular os autovalores de $\tilde{R}$ no caso especial de dimensão 4. Notamos que verificar os autovalores era apenas questão de variar o X adequadamente para os casos abordados na Seção 8.2. Observamos também que os cálculos são facilmente generalizáveis. Implementamos o programa em Python, usando o Pyzo.

```
import numpy
i=complex(0,1)
X=numpy.matrix([[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,-1,0]])
c=numpy.matrix([[0,0,0,1],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[-1,0,0,0]])
M=numpy.dot(X,c) - numpy.dot(c,X)
N=numpy.dot(M, c) - numpy.dot (c,M)
print(-N)
```

Fórmula de Taylor com Resto Integral

Nesta subseção, faremos a expansão de uma função em sua fórmula de Taylor com resto integral. Espera-se que esta subseção seja útil não só para a dissertação, mas também para outros objetivos do leitor, visto que não é comum essa expansão ser feita com a derivada (total) ao invés de derivadas parciais.

Sem perda de generalidade, iremos tratar o caso da série centrada no 0.

Seja $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ diferenciável, onde $\mathbb{B}$ é um espaço de Banach. Considere o segmento tx. Assim, temos a função $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(t) = f(tx)$.

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \tilde{f}'(t)dt = f(0) + \int_0^1 D_{tx}f(x)dt. \tag{11.1}$$

Demonstramos os seguintes lemas:

Lema 11.6.2. *Sejam*

$$A : \mathbb{B} \to L(\mathbb{B}, \mathbb{R})$$
$$x \mapsto A_x$$

e

$$g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

funções diferenciáveis. Então,

$$D_x(A(g)) = A_x(D_x g(\,\cdot\,)) + (D_x A(\,\cdot\,))g(x).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} A_{x+h}(g(x+h)) &= (A_x + D_x A(h) + \epsilon(h))(g(x) + D_x g(h) + \xi(h)) \\ &= A_x g(x) + A_x(D_x g(h)) + (D_x A(h))(g(x)) + \zeta(h), \end{aligned}$$

onde $\frac{\zeta(h)}{\|h\|} \to 0$

□

Corolário 11.6.3 (Integração por partes)**.** *Dada uma função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ e duas funções A, g como no lema anterior, vale que* [4]*:*

$$A_{\xi(1)}(g(\xi(1))) - A_{\xi(0)}(g(\xi(0))) = \int_0^1 A_{\xi(t)}(D_{\xi(t)}g(\xi'(t)))dt + \int_0^1 (D_{\xi(t)}A(\xi'(t)))(g(\xi(t)))dt.$$

Demonstração. Teorema Fundamental do Cálculo. □

Corolário 11.6.4. *Dadas funções diferenciáveis*

$$A : \mathbb{B} \to L(\mathbb{B}, \mathbb{R})$$
$$x \mapsto A_x$$

e

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{B},$$

vale que

$$A_{h(1)}(h(0)) - A_{h(0)}(h(1)) = \int_0^1 A_{h(t)}(-h'(t))dt + \int_0^1 (D_{h(t)}A(h'(t)))(h(1) + h(0) - h(t))dt.$$

[4] $\xi'(t) := D_t\xi(1)$

Demonstração. Use $\xi = h$ e $g(z) = h(1) + h(0) - z$ no corolário acima. $\square$

Aplicando o corolário acima com $h(t) = (1-t)x$ e $A = Df$, obtemos

$$D_0 f(x) - D_x f(0) = \int_0^1 D_{(1-t)x} f(x) dt + \int_0^1 ((D_{(1-t)x} Df)(-x))(x - (1-t)x) dt.$$

Temos então que

$$\int_0^1 D_{(1-t)x} f(x) dt = D_0 f(x) - \int_0^1 ((D_{(1-t)x} Df)(-x))(x - (1-t)x) dt.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos

$$\int_0^1 D_{tx} f(x) dt = D_0 f(x) - \int_0^1 ((D_{(tx)} Df)(-x))(x - tx) dt$$

$$\implies \int_0^1 D_{tx} f(x) dt = D_0 f(x) - \int_0^1 ((D_{(tx)} Df)(-x))((1-t)x) dt.$$

Logo, temos que

$$f(x) = f(0) + D_0 f(x) - \int_0^1 ((D_{(tx)} Df)(-x))((1-t)x) dt. \tag{11.2}$$

E então

$$f(x) = f(0) + D_0 f(x) + \int_0^1 (1-t)((D_{(tx)} Df)(x))(x) dt. \tag{11.3}$$

Observação 11.6.5. Note que em (11.2) continuamos nas mesma hipóteses do Lema 11.6.2. Assim, podemos aplicar integração por partes repetidamente, obtendo

$$f(x) = f(0) + D_0 f(x) + \frac{1}{2}(D_0 Df(x))(x) + ... + R,$$

onde R é um resto integral.

Observação 11.6.6. Usando a interpretação de $D_p Df$ como um funcional bilinear, através de (10.3) obtemos a seguinte igualdade importante para nossos propósitos:

$$f(x) = f(0) + D_0 f(x) + \int_0^1 (1-t)(D_{(tx)} Df)(x, x) dt.$$

Raiz Quadrada de Operadores Próximos da Identidade

Considere um espaço de Banach $\mathbb{B}$ e o mapa[5]

$$F : B(\mathbb{B}) \to B(\mathbb{B})$$

$$A \mapsto A^2.$$

[5] $B(\mathbb{B})$ é o espaço de operadores contínuos em $\mathbb{H}$.

É fácil ver que sua derivada é $D_A F = A.(\cdot) + (\cdot).A$. Assim sendo, sua derivada na identidade é $D_I F = 2(\cdot)$.

É fácil ver que $D_I F$ é invertível (de fato, $(D_I F)^{-1} = \frac{1}{2}(\cdot)$). Logo, pelo Teorema da Função Inversa (cf. [25] [6]), temos que F é um difeomorfismo local. Assim sendo, como $F(I) = I$, perto da identidade existe uma raiz quadrada bem-definida.

Conexões

Nesta subseção, trataremos das questões de equivalência entre o conceito de conexão apresentado no capítulo 1 e o comumente definido. Nos importaremos apenas com o caso de conexões no fibrado tangente.

Definição 11.6.7. [Definição "canônica" de conexão]

Seja M uma variedade **de dimensão finita**. Uma *conexão* em M é um mapa que associa a cada $X \in \Xi(M)$[7] um mapa ∇'_X de $\Xi(M)$ em si mesmo e que satisfaz

- $\nabla'_{fX+gY} = f\nabla'_X + g\nabla'_Y$.
- $\nabla'_X(fY) = f\nabla'_x(Y) + (Xf)Y$.

Para fins de clareza, chamaremos uma conexão neste último sentido de *d-conexão* e continuaremos chamando uma conexão no nosso sentido de conexão.

Dada uma conexão, temos uma d-conexão induzida de forma natural:

$$\nabla'_X Y := (\nabla Y).X.$$

Como $\nabla Y = K \circ TY$, é imediato que ∇' satisfaz as propriedades necessárias.

Por outro lado, dada uma d-conexão e uma carta local (ϕ, U), temos para um campo $Y = \sum y_i e_i$

$$\begin{aligned}
\nabla'_X Y &= \nabla'_{x_i e_i} y_j e_j \\
&= x_i \nabla'_{e_i} y_j e_j \\
&= x_i (y_j \nabla'_{e_i} e_j + \frac{\partial y_j}{\partial x_i} e_j) \\
&= x_i (y_j \Gamma^k_{ij} e_k + \frac{\partial y_j}{\partial x_i} e_j) \\
&= (x_i y_j \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial y_k}{\partial x_i}) e_k,
\end{aligned}$$

onde empregamos a notação de Einstein. Assim, o mapa Γ_ϕ definido como

$$\Gamma_\phi(p)(u, v) = u_i v_j \Gamma^k_{ij} e_k$$

é a conexão no nosso sentido. Note que usamos o fato de que a conexão é de dimensão finita para concluir que uma d-conexão induz de forma natural uma conexão. De fato, as definições não são equivalentes no caso de dimensão infinita, o que nos leva a considerar a definição dada neste texto.

[6] O Teorema da Função Inversa em [25] está enunciado para $\mathbb{R}^n$, mas a mesma demonstração vale *ipsis litteris* para o caso de espaços de Banach, com a observação de que usa-se o Teorema da Aplicação Aberta, já que a demonstração assume que a inversa de um mapa linear contínuo é contínua.

[7] $\Xi(M)$ é o espaço de campos vetoriais de M

Tensor de Curvatura

Definição 11.6.8. Dada uma variedade com uma conexão afim, defina

$$R(X,Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Observação 11.6.9. Aqui, tratamos uma conexão afim como uma aplicação que associa a cada campo de vetores um mapa linear que satisfaz determinadas condições de "derivação" (cf. [11]). Esse tratamento é equivalente ao dado na introdução desse texto para o caso de variedades de dimensão finita (onde reside nosso interesse ao falar de curvatura).

Note também que, durante o texto, usamos a curvatura como um operador que toma como entrada 3 vetores. O que estamos fazendo é simplesmente

$$R(X,Y,Z) := R(X,Y)Z$$

Proposição 11.6.10. *Valem as seguintes igualdades:*

- $R(X,Y) = -R(Y,X)$.
- $\langle R(X,Y)W, Z\rangle = -\langle R(X,Y)Z, W\rangle$.
- $R(X,Y)W + R(W,X)Y + R(Y,W)X = 0$.
- $\langle R(X,Y)W, Z\rangle = \langle R(W,Z)X, Y\rangle$.

Limites Diretos

Construímos o limite direto para o caso específico de um grupo graduado. Mostramos a propriedade universal que ele satisfaz e que o caracteriza no caso geral de uma categoria qualquer com um sistema dirigido de objetos e morfismos. A generalização para este caso não apresenta dificuldades para enunciar a propriedade universal, mas a construção explícita do limite direto não é necessariamente tão simples. De fato, é possível que não exista limites diretos em uma dada categoria. Notamos porém que como o limite direto satisfaz uma propriedade universal, então ele é único a menos de isomorfismo.

Definição 11.6.11. Seja G_* um grupo graduado, junto com um conjunto de morfismos $f_i : G_i \to G_{i+1}$. O *limite direto* $\lim_{\to} G_i$ é o grupo

$$\varinjlim G_i := (\bigsqcup_i G_i)/\sim,$$

onde a relação de equivalência é: dado $j > i$, $x_i \sim x_j$ se $f^n(x_i) = x_j$.

Definição 11.6.12. Chamamos de $\phi_i : G_i \to \lim_{\longrightarrow} G_i$, $g \mapsto \overline{g}$ de *morfismos canônicos.*

Proposição 11.6.13. *Seja H um grupo que contém uma família $\psi_i : G_i \to H$ de mapas indexada pelos inteiros tal que se $j > i$, então $\psi_j = \psi_i \circ f^{j-i}$. Então, o diagrama a seguir comuta.*

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& \lim_{\longrightarrow} G_i \arrow[r] & H \\
G_j \arrow[ur] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}
$$

A Conexão de Levi-Civita

O fim do capítulo 1 mostra a extensão do Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana para o caso de dimensão infinita. Fazemos nessa subseção uma demonstração no caso de dimensão finita e observamos que a demonstração no caso de dimensão infinita trata-se de definir os símbolos localmente e verificar que irão respeitar as fórmulas de transição, de forma a resultar em uma conexão bem definida globalmente. A necessidade de fazer isso se deve ao fato de que as diferentes definições de conexão afim não são equivalentes em dimensão infinita.

Teorema 11.6.14 (Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana)**.** *Dada uma variedade M com uma métrica g, existe uma única conexão Riemanniana ∇ que é livre de torsão.*

Demonstração. As hipóteses sobre a conexão são

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
- $\nabla_Z g \equiv 0$,

onde X, Y, Z são campos vetoriais arbitrários. Nossa estratégia é assumir que o campo existe e chegar em conclusões sobre ele. Dessa forma, iremos concluir existência e unicidade concomitantemente.

Considere agora o campo tensorial $X \otimes Y \otimes g$. Usando o fato que ∇ comuta com contrações e denotando por C a contração de aplicar g em X, Y, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_Z(C(X \otimes Y \otimes g)) &= C\nabla_Z(X \otimes Y \otimes g) \\
&= C\left((\nabla_Z\left(X \otimes Y\right)) \otimes g + X \otimes Y \otimes (\nabla_Z g)\right) \\
&= C\left((\nabla_Z X \otimes Y + X \otimes \nabla_Z Y) \otimes g\right) \\
&= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}
$$

Note que usamos que $\nabla_Z g \equiv 0$. Note também que $C(X \otimes Y \otimes g) = g(X, Y)$ é uma função diferenciável em M. Assim,

$$\nabla_Z(C(X \otimes Y \otimes g)) = Zg(X, Y).$$

e temos então a igualdade

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Usando o fato de que ∇ é livre de torsão, temos que

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g([Z,X],Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Permutando os campos, temos então as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
Zg(X,Y) &= g(\nabla_X Z, Y) + g([Z,X],Y) + g(X, \nabla_Z Y), \\
Yg(Z,X) &= g(\nabla_Z Y, X) + g([Y,Z],X) + g(Z, \nabla_Y X), \\
Xg(Y,Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g([X,Y],Z) + g(Y, \nabla_X Z).
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
g(X, \nabla_Z Y) &= Zg(X,Y) - g(\nabla_X Z, Y) - g([Z,X],Y), \\
g(\nabla_Z Y, X) &= Yg(Z,X) - g([Y,Z],X) - g(Z, \nabla_Y X), \\
0 &= g(\nabla_Y X, Z) + g([X,Y],Z) + g(Y, \nabla_X Z) - Xg(Y,Z).
\end{aligned}$$

Assim, usando a simetria de g, temos que

$$\begin{aligned}
2g(X, \nabla_Z Y) =& Zg(X,Y) + Yg(Z,X) - Xg(Y,Z) \\
& - g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) + g([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

Note que eliminamos os ∇ do lado direito. Como g é não-degenerada, isto mostra a unicidade de ∇. Definindo ∇ de forma a satisfazer a equação acima, é fácil ver que isso dá uma conexão Riemanniana livre de torsão. Assim, provamos o teorema. $\square$

Observação 11.6.15. O caso de dimensão infinita abordado neste texto trata-se de definir Γ_ϕ (localmente, é claro) pela fórmula

$$2g_\phi(\Gamma_\phi(x)(u,v),w) = Dg_\phi(x).u(v,w) + Dg_\phi(x).v(u,w) + Dg_\phi(x).w(u,v).$$

Observe que essa fórmula é válida na situação anterior, se vemos a equação anterior no contexto dos símbolos de Christoffel. (Observe que no nosso contexto, os símbolos de Christoffel são uma aplicação bilinear. Para traduzir o contexto canônico ao nosso caso, observe que nossos símbolos de Christoffel, em representação matricial, se tornam as matrizes com entradas iguais aos símbolos de Christoffel como são canonicamente definidos: $\nabla_{e_i} e_j$.)

Observação 11.6.16. Como curiosidade, apresentamos uma demonstração interessante de que em um anel R com unidade, se $1 - ab$ é invertível, então $1 - ba$ também é. Nosso objetivo é mostrar que existe um comportamento que é ubíquo e frutífero em matemática: assumir que um objeto existe e ver em que conclusões chegamos sobre ele. Se chegarmos em boas conclusões, verificamos se nosso percurso foi válido e, se não foi, tentamos achar rotas alternativas para chegar em nossa resposta. [8]

[8] Note que foi essencialmente isso que foi feito na demonstração do Teorema desta subseção!

Demonstração.

$$\begin{aligned}(1-ba)^{-1} &= 1 + ba + baba + bababa + ...\\ &= 1 + b(a + aba + ababa + ...)\\ &= 1 + b(1 + ab + abab + ...)a\\ &= 1 + b(1-ab)^{-1}a.\end{aligned}$$

Assumindo que $1 - ba$ tinha inverso, e que falar de séries em R fazia sentido, chegamos a um candidato para o inverso de $1 - ba$. Agora checar que $1 + b(1 - ab)^{-1}a$ é o inverso de $1 - ba$ é mera questão de um cálculo simples. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Amann, H. Escher, Joaquim. *Analysis II* Birkhäuser; 2008 edition, 2008.

[2] Bangert, V. Long, Y. *The existence of two closed geodesics on every Finsler 2-sphere* Mathematische Annalen; Volume 346, Issue 2, pp 335-366, February 2010.

[3] Besse, A. *Manifolds all of whose Geodesics are Closed* Springer; 1 edition, 1978.

[4] Bott, R. Tu, L. *Differential Forms in Algebraic Topology* Springer; 1 edition, 1995.

[5] Bredon, G. *Topology and Geometry.* Springer; Corrected edition, 1997.

[6] Bröcker, T. Jänich, K. *Introduction to Differential Topology* Cambridge University Press; 1 edition, 1982.

[7] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana.* Impa, Edição número 3.

[8] Evans, L. *Partial Differential Equations* American Mathematical Society; 2 edition, 2010.

[9] Gromoll, D. Meyer, W. *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds.* J. Differential Geometry, 3:493?510, 1969.

[10] Hatcher, A. *Algebraic Topology* Cambridge University Press, 2002.

[11] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* American Mathematical Society; Graduate Studies in Mathematics (Book 34), 2001.

[12] Hirsch, M. *Differential Topology.* Springer , 1997.

[13] Klingenberg, W. *Lectures on Closed Geodesics.* Fund. Math. 187 (2005), Springer; first edition, 1978.

[14] Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds* Springer; Graduate Texts in Mathematics, 1996.

[15] Meyer, W. *Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **170**, 45-66, 1967.

[16] Milnor, J. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[17] Milnor, J. *Topology from the Differentiable Viewpoint* Princeton University Press; Revised edition, 1997.

[18] Nicolaescu, L. *An Invitation to Morse Theory* Springer; 1 edition, 2007.

[19] Oancea, A. *Morse theory, closed geodesics, and the homology of free loop spaces* arXiv:1406.3107 , 2014.

[20] Oancea, A. *The space of Paths in Complex Projective Space with Real Boundary Conditions* arXiv:1311.7292 , 2013.

[21] Palais, R. *Morse Theory on Hilbert Manifolds* Topology **2**; 299-340, 1963.

[22] Paternain, G. *Geodesic Flows.* Birkhäuser; 1999 edition, 1999.

[23] Price, D. *The Gysin Sequence and the Hopf Invariant.* 2010.

[24] Rudin, W. *Functional Analysis.* Mcgraw Hill Higher Education, 1991.

[25] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education; 3rd edition, 1976.

[26] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition, 1986.

[27] Wasserman, A. *Morse theory for G-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 384-388, 1965. Equivariant differential topology, Topology **8**, 127-150, 1969.

[28] Ziller, W. *The Free Loop Space of Globally Symmetric Spaces.* Inventiones math. 41, 1-22 (1977).