UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Dissertação

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Co-orientador: Pedro Gamboa Romero

Estabilidade e Falta de Estabilidade Exponencial para uma Viga de Componentes Viscosa com Mecanismo Friccional.

Rio de Janeiro

10 de Novembro de 2014

Estabilidade e Falta de Estabilidade Exponencial para uma Viga de Componentes Viscosa com Mecanismo Friccional.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera
Co-orientador: Pedro Gamboa Romero

Rio de Janeiro

10 de Novembro de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Leonardo Henry Alejandro Aguilar.

Estabilidade e Falta de Estabilidade Exponencial para uma Viga de Componentes Viscosa com Mecanismo Friccional.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera
Co-orientador: Pedro Gamboa Romero

Dissertação - UFRJ / IM / Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2014.

I. Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática.

II. Título:

   1) Preliminares
   2) O Modelo Matemático
   3) Falta de Estabilidade Exponencial
   4) Estabilidade Exponencial
   5) Decaimento Polinomial e Otimalidade

III. Rio de Janeiro, UFRJ / IM - 2014

Estabilidade e Falta de Estabilidade Exponencial para uma Viga de Componentes Viscosa com Mecanismo Friccional.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Dr. JAIME EDILBERTO MUÑOZ RIVERA - UFRJ

Dr. MA TO FU - USP

Dra. MARGARETH DA SILVA ALVES - UFV

Dr. XAVIER CARVAJAL PAREDES - UFRJ

Co-orientador, Dr. PEDRO GAMBOA ROMERO - UFRJ

Rio de Janeiro

10 de Novembro de 2014

Dedicado para todos os peruanos
que mostram o seu talento, esforço
e perseverança fora do seu país.

Agradecimentos

Eu compartilhei momentos bons e agradáveis com muitas pessoas ao longo dos anos. Agradeço :

- Aos meus pais Ana e Juan que sempre lutaram pela minha educação e a meus irmãos pelo apoio e compreensão.

- À Universidade Federal do Rio de Janeiro por me dar abrigo e lições que aprendi nela. Além disso, por me dar a oportunidade e o seu voto de confiança para fazer o mestrado.

- Ao professor Jaime Muñoz, um orientador com eficiência, dedicação, confiança e amizade, mais ainda, com uma visão no futuro do seu orientando. Obrigado Jaime por compartilhar sua experiência.

- Ao professor Pedro Gamboa, um co-orientador com eficiência, dedicação e confiança.

- Aos professores Rolci Cipolatti, Nicolas Puignau, Ademir Pazoto, Cesar Niche, Walcy Santos, Hugo Fernandez por contribuir na minha formação do mestrado.

- Aos colegas da Pós-graduação, em especial a todos meus amigos peruanos.

- Aos funcionários técnicos-administrativos do IM, que sem exceção, fizeram o possível para me ajudar.

- À CAPES, pela ajuda financeira.

- Por fim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Resumo

Nesta dissertação consideramos o problema de transmissão de um material composto por três componentes: o primeiro é um material viscoelástico Kelvin-Voigt, o segundo é um material elástico não dissipativo e o terceiro é um material elástico inserido com um mecanismo de amortecimento por frição.
Estuda-se o comportamento assintótico das oscilações deste material e a conclusão é que a taxa de decaimento da oscilação do modelo depende da posicão do seus componentes. Quando o componente viscoelástico não está no meio do material, então existe estabilidade exponencial da solucão. Em vez disso, quando o componente viscoelástico está no meio do material, então não existe estabilidade exponencial da solução. Neste caso se demostra que o decaimento é polinomial como $1/t^2$ quando $t \longrightarrow \infty$. Além disso, se mostra que esta taxa de decaimento é ótima sobre o domínio do gerador infinitesimal.

Palavras chave: Problema de transmissão, material viscoelástico, comportamento assintótico, estabilidade exponencial, falta de estabilidade exponencial e estabilidade polinomial.

Abstract

In this work we consider the transmission problem of a material composed by three components, one of them is a Kelvin-Voigt viscoelastic material, the second is an elastic material (no dissipation) and the third is an elastic material inserted with a frictional damping mechanism.
We study the asymptotic behavior of the oscilations of this material and our conclusion is that the rate of decay of the oscillation will depend on the position of each component. When the viscoelastic component is not in the middle of the material, then there exists exponential stability of the solution. Instead, when the viscoelastic part is in the middle of the material, then there is not exponential stability. In this case we show that the corresponding solution decays polynomially as $1/t^2$ when $t \longrightarrow \infty$. Moreover we show that the rate of decay is optimal over the domain of the infinitesimal generator.

Keywords: Transmission problem, viscoelastic material, asymptotic behavior, exponential stability, lack of exponential stability and stability polynomial.

Introdução

A equação de onda com amortecimento por fricção localizada foi estudada por diversos autores e agora é muito bem conhecido que o semigrupo definido por esta equação é exponencialmente estável sem importar o tamanho nem a localização do subintervalo onde o mecanismo de amortecimento é eficaz. Ver por exemplo $[8, 15, 16, 20, 22, 23, 27, 28, 32]$ para citar alguns.

K. Liu e Z. Liu em $[19]$ demostraram um resultado semelhante com a equação da viga de Euler-Bernoulli com amortecimento Kelvin-Voigt localizada. Isto quer dizer que não importa o tamanho nem a posição em que o mecanismo de amortecimento é eficaz, o semigrupo definido pela solução do modelo é sempre exponencialmente estável. Sob a luz deste resultado, se pode concluir que a equação de ondas com dissipação localizada de tipo Kelvin-Voigt também é exponencialmente estável. Ou seja que o semigrupo definido pela solução da equação de onda com amortecimento Kelvin-Voigt localizada é também exponencialmente estável. Mas isso não é verdade, como provou em $[19]$. Ou seja, amortecimento Kelvin-Voigt localizada não produz estabilidade exponencial para la equação da onda.

Nesta dissertação, estudamos o problema de transmissão com viscoelasticidade localizada do tipo Kelvin-Voigt. Isto é, consideramos uma viga composta por três componentes diferentes: uma delas é de tipo viscoelástico, a outra é uma parte elástica, ou seja sem mecanismo dissipativo, e finalmente a terceiro componente é de tipo elástico com um mecanismo de amortecimento por frição. Nosso resultado consiste em mostrar que a posição dos seus componentes desempenha um papel importante no estudo da estabilização, cujo resultado principal estabelece que a solução do modelo é exponencialmente estável se e somente se a parte viscosa não está no meio da viga. Caso contrário, o modelo não é exponencialmente estável. Nesse último caso, mostrar-se-á que a solução decai polinomialmente a zero como t^{-2}. Além disso, se mostra que a taxa de decaimento é ótima.

Finalmente, mostramos que as oscilações da viga decaem polinomialmente, com taxa t^{-2}. Para isto usamos o resultado de estabilidade polinomial de Borichev e Tomilov $[3]$, que caracteriza o decaimento polinomial de semigrupos de contrações definidos sobre espaços de Hilbert. Mais ainda, mostramos que esta taxa de decaimento é ótima.

Nossa principal ferramenta para tratar este problema é a Teoria de Semigrupos. Para mostrar a boa colocação do problema, usamos os Teoremas de Hille - Yosida e Lumer Phillips. Além disso, no estudo da estabilidade exponencial e decaimento polinomial, usamos os Teoremas de Prüss e de Borichev - Tomilov .

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Análise Funcional e Espaços de Sobolev : Definições e Teoremas

Análise Funcional

Nesta seção, todos os espaços vetorias podem ser definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$.

Definição 1.1. *Sejam* X , Y *espaços de Banach e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear com domínio* $D(A)$.

1. A *é dito* **limitado** *quando existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que* $\|A\,u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$, $\forall\, u \in D(A)$. *Caso contrário,* A *é dito* **não limitado**.
2. A *é dito* **densamente definido** *quando* $\overline{D(A)} = X$.
3. A *é dito* **fechado** *quando o gráfico de* A, $G(A) = \{(u, A\,u) \in X \times Y : u \in D(A)\}$, *é um subespaço fechado de* $X \times Y$, *onde* $X \times Y$ *é um espaço de Banach com a norma* $\|\cdot\|_{X\times Y} = \left(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2\right)^{1/2}$.

Sejam X e Y espaços normados. Representa-se por $\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \longrightarrow Y \,/\, A$ é linear e limitado $\}$. $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço normado com a norma definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|A\,u\|_Y .$$

Além disso, se Y é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach. Denotar-se-á por $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam* X , Y *espaços Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *uma operador linear, limitado e sobrejetivo. Então existe* $r > 0 \,/\, B_Y(0;r) \subset A(B_X(0;1))$.

Demonstração. Ver [5]. □

Corolário 1.1. *Sejam* X , Y *espaços Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *uma operador linear, limitado e bijetivo. Então* A^{-1} *é limitado.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.2 (**Teorema do Gráfico Fechado**). *Sejam* X, Y *espaços Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *uma operador linear. Se* A *é fechado então é limitado.*

Demonstração. Ver [5]. $\square$

Teorema 1.3 (**Operador Fechado**). *Sejam* X, Y *espaços normados e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *uma operador linear limitado.*

1. *Se* $D(A)$ *é um subconjunto fechado de* X, *então* A *é fechado.*

2. *Se* A *é fechado e* Y *é um espaço de Banach, então* $D(A)$ *é um subconjunto fechado de* X.

Demonstração. Ver [18]. $\square$

Teorema 1.4 (**Teorema da Limitação Uniforme**). *Sejam* X *um espaço de Banach,* Y *um espaço normado e* $(A_i)_{i\in I}$ *uma família (não necessariamente contável) em* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Suponha que:*

$$\sup_{i\in I} \|A_i\, u\|_Y < \infty\,,\ \forall\, u \in X.$$

Então

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty\,.$$

Demonstração. Ver [13]. $\square$

Teorema 1.5. *Sejam* X *um espaço normado e* Y *um subespaço de* X. *Então:*

1. *Se* X *é reflexivo, então é completo.*

2. *Se* X *um espaço de Banach, então* [Y *é completo* $\Longleftrightarrow$ Y *é fechado em* X.]

3. *Se o espaço dual* X' *é separável, então* X *é separável.*

4. *Se* Y *tem dimensão finita, então é completo, reflexivo e fechado em* X.

Demonstração. Ver [18]. $\square$

Teorema 1.6. *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* Y *um subespaço de* H. *Então:*

1. H *é reflexivo.*

2. *Se* H *é separável, então* Y *é separável.*

3. *Se* Y *é fechado em* H, *então* $Y = \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$ *e* $H = Y \oplus Y^{\perp}$.

4. Y *é denso em* H $\Longleftrightarrow$ $Y^{\perp} = \{0\}$.

Demonstração. Ver [18]. $\square$

Proposição 1.1. *Sejam* X *um espaço de Banach,* Y *um subespaço de* X *e* $0 < r < 1$. *Se* $\overline{Y} \neq X$, *então existe um* $y_0 \in X \,/\, \|y_0\| = 1$ *e* $\|y - y_0\| \geq r\,,\ \forall\, y \in \overline{Y}$.

Demonstração. Ver [25]. $\square$

Teorema 1.7. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Se* $\|A\| < 1$, *então* $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *e* $(I - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^i$.

Demonstração. Ver [18]. □

Definição 1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*

1. *O conjunto resolvente de* A, $\varrho(A)$, *é o conjunto:*

$$\varrho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, (\lambda I - A) \text{ é invertível, } (\lambda I - A)^{-1} \text{ é limitado com domínio denso em } X \right\}.$$

   Além disso; para cada $\lambda \in \varrho(A)$, *o operador linear* $R(\lambda\,;\,A) := (\lambda I - A)^{-1}$ *é chamado resolvente de* A.

2. *O espectro de* A, $\sigma(A)$, *é o conjunto:* $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$.

Proposição 1.2 (Domínio de $R(\lambda, A)$ **).** *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A : X \longrightarrow X$ *um operador linear e* $\lambda \in \varrho(A)$. *Se* A *é limitado ou fechado, então* $D(R(\lambda, A)) = X$.

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema 1.8 (Representação do Resolvente). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Se* $\mu \in \varrho(A)$ *e* $|\lambda - \mu| = \|R(\mu, A)\|^{-1}$, *então* $\lambda \in \varrho(A)$ *e* $R(\lambda, A) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - A)^i \, R(\mu, A)^{i+1}$.

Demonstração. Ver [25]. □

Corolário 1.2 (Resolvente e Espectro). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Então:*

1. $\varrho(A)$ *é aberto em* X *e* $R(\lambda, A)$ *é uma função contínua em* $\varrho(A)$.
2. *Se* A *é limitado, então* $\sigma(A)$ *é um conjunto compacto não vazio e* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$.

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 1.9 (Equação resolvente e Commutatividade). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A, S \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\lambda, \mu \in \varrho(A)$. *Então:*

1. *Equação resolvente:* $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) \, R(\lambda, A) \, R(\mu, A)$.
2. *Se* $S\,A = A\,S \implies R(\lambda, A)\, S = S\, R(\lambda, A)$.
3. $R(\lambda, A)\, R(\mu, A) = R(\mu, A)\, R(\lambda, A)$.

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema 1.10. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\mu \in \varrho(A)$. *Então:*

1. $R(\lambda, A)$ *é analítica em* $\varrho(A)$.

2. $\|R(\mu, A)\| \geq \dfrac{1}{d(\mu)}$, *onde* $d(\mu) = dist(\mu, \varrho(A)) := \inf\limits_{\lambda \in \varrho(A)} \|\mu - \lambda\|$.
   Além disso, $\|R(\mu, A)\| \longrightarrow \infty$ *quando* $d(\mu) \longrightarrow 0$.

Definição 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *O raio espectral de* A, $R_\sigma(A)$, *é o número real:* $R_\sigma(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Proposição 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Então* $R_\sigma(A) = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema 1.11 (Teorema de Representação de Riesz). *Sejam* $(H, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_H)$ *um espaço de Hilbert e* $f \in H'$. *Então existe um único* $v_f \in H \,/\, f(u) = \langle u, v_f \rangle_H\,,\ \forall\, u \in H$ *e* $\|f\|_{H'} = \|v_f\|$.
Por outro lado; para cada $v \in H$, *a aplicação* $g_v(u) = \langle u, v \rangle_H\,,\ \forall\, u \in H$ *pertence* H' *e* $\|g_v\|_{H'} = \|v\|$.

Demonstração. Ver [34]. □

Definição 1.4. *Sejam* X *um espaço normado,* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *aplicações.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é uma* **forma sesquilinear** *quando* $\forall\, u, v, w \in X$ *e* $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *se verifica:*

   (a) $B(\alpha\, u + \beta\, w, v) = \alpha\, B(u, v) + \beta\, B(w, v)$

   (b) $B(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \overline{\alpha}\, B(u, v) + \overline{\beta}\, B(u, w)$.

2. *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $B(\cdot,\cdot)$ *é chamada* **forma bilinear**.

3. f *é dita* **antilinear** *quando* $f(\alpha\, u + v) = \overline{\alpha}\, f(u) + f(v)\,,\ \forall\, u, v \in X\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Observação: Se f é antilinear e $g \in X'$, então $\overline{f} \in X'$ e $\overline{g}$ é antilinear, onde X é um espaço normado complexo.

Definição 1.5. *Sejam* X *um espaço normado e* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma forma sesquilinear.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é dita* **contínua ou limitada** *quando existe* $M > 0 \,/\, |B(u, v)| \leq M\, \|u\|\, \|v\|\,,\ \forall\, u, v \in X$.

2. $B(\cdot,\cdot)$ *é dita* **coerciva** *quando existe* $c > 0 \,/\, B(u, u) \geq c\, \|u\|^2\,,\ \forall\, u \in X$.

Teorema 1.12 (Teorema de Lax-Milgram). *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva. Então existe um único isomorfismo de espaços de Hilbert* $T : H \longrightarrow H$, *tal que* $B(u, v) = \langle u, T\, v \rangle_H\,,\ \forall\, u, v \in H$.

Demonstração. Ver [34]. □

Corolário 1.3 (Caso real). *Sejam* H *um espaço de Hilbert real e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Se* $f \in H'$, *então existe uma única* $u \in H \,/\, B(u, v) = f(v)\,,\ \forall\, v \in H$.

Demonstração. Ver [5]. □

Corolário 1.4 (**Caso complexo**). *Sejam* H *um espaço de Hilbert complexo e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva. Se* $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma aplicação antilinear, então existe uma única* $u \in H \,/\, B(u,v) = f(v)\,,\ \forall\, v \in H.$

Demonstração. Ver [34]. ☐

Espaçõs de Sobolev : Imersões.

Notações:

$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$.

$\hookrightarrow$: imersão contínua.

$\overset{c}{\hookrightarrow}$: imersão contínua e compacta.

Teorema 1.13 (**Du - Bois - Raymond**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Se $\displaystyle\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$ *então* $u = 0$ *quase sempre em* Ω .

Demonstração. Ver [7]. ☐

Teorema 1.14 (**Desigualdade de Poincaré**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $1 \leq p < +\infty$. *Então existe uma constante* C , *que depende de* Ω *e* p , *tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla\, u\|_{L^p(\Omega)}\,,\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Demonstração. Ver [5]. ☐

Teorema 1.15 (**Regularidade Elíptica**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular,* L *um operador diferencial elíptico de ordem* $2\,m$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $f \in L^2(\Omega)$. *Se* v *é solução de* $L\,u = f$ *no sentido distribucional, então* $v \in H^{2\,m}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1]. ☐

Corolário 1.5. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular e* $f \in L^2(\Omega)$. *Se* v *é solução de*
$\begin{cases} -\Delta\, u = f & \textit{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$, *então* $v \in H^2(\Omega)$ *e* $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$, *onde* $C \leq 0$.

Demonstração. Ver [1]. ☐

Teorema 1.16 (**Imersão Contínua**). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam:*
   (a) *Se* $m\,p < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.
   (b) *Se* $m\,p = n$ *e* $p \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.
   (c) *Se* $m\,p > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *é um enteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *onde*
      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,
      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam:*

   (a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.

   (b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [24]. □

Teorema 1.17 (Imersão Contínua). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Se verificam:*

   (a) *Se* $m\,p < n$ *e* $1 \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   (b) *Se* $m\,p = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   (c) *Se* $m\,p > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *é um enteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *onde*

      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto limitado. Se verificam:*

   (a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$.

   (b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [24]. □

Corolário 1.6. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $m \in \mathbb{N}$. *Então:*
$W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [24]. □

Definição 1.6. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $M \subset \mathbb{R}^n$. *Diz-se que* M *está* **fortemente incluído,** *denotado* $M \subset\subset \Omega$, *quando* $\overline{M} \subset \Omega$ *e* $\overline{M}$ *é compacto.*

Teorema 1.18 (Fréchet - Kolmogorov). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ *limitado, onde* $1 \leq p < +\infty$. *Suponha-se que:*

1. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \Lambda \subset\subset \Omega \,:\, \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\Lambda)} < \epsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

2. $\forall \epsilon > 0$ *e* $\forall \Lambda \subset\subset \Omega$, *existe* $\delta > 0$ *com* $\delta < dist(\Lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \,:\, \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega\setminus\Lambda)} < \epsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$ *e* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *com* $|h| < \delta$.

Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, i.e $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto em $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.19 (Rellich - Kondrachov). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 . Se verificam:*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n-p}$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver [5] □

Corolário 1.7. *Sejam $n\,,\,m\, \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m . Se verificam:*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n-p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver [24] □

Corolário 1.8. *Sejam $n\,,\,m\, \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se verificam:*

1. *Se Ω é de classe C^{m+1} , então $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega)$.*
2. *$W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [24] □

Teorema 1.20 (Imersão Compacta). *Sejam $n\,,\,m\, \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m . Se verificam:*

1. *Se $m\,p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n-m\,p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
2. *Se $m\,p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
3. *Se $m\,p > n$ e $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$, k é um enteiro não negativo, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver [24] □

1.2 Semigrupos : Definições e Teoremas.

Nesta seção, todos os espaços vetorias são definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$.

Definição 1.7. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma familia de operadores lineares e limitados* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *é dito um* **semigrupo** *em* X *, quando:*

1. $S(0) = I$ *, onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$.
2. $S(t+s) = S(t)\,S(s)\,,\,\forall\, t, s \geq 0.$

Definição 1.8. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. *O operador linear* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}$
2. $A\,u = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t}\,,\,\forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,$

é chamado **gerador infinitesimal** *do semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observações:

1. $\mathcal{D}(A) = \{u \in X : A\,u \in X\}$.
2. $S(t) = e^{t\,A}\,,\,\forall\, t \geq 0$ é um semigrupo em X com gerador infinitesimal A, onde $A \in \mathcal{L}(X)$.

Semigrupos Uniformemente Contínuos.

Definição 1.9. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **uniformemente contínuo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Proposição 1.4. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é uniformemente contínuo se e somente se* $\lim\limits_{t\longrightarrow r} \|S(t) - S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Demonstração. Ver [30]. □

Teorema 1.21. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupos em* X. *Se* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{T(t) - I}{t} = A = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t) - I}{t}$, *então* $T(t) = S(t)\,,\,\forall\, t \geq 0.$

Teorema 1.22. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. $S(t)$ *é uniformemente contínuo se e somente se* $S(t) = e^{t\,A}\,,\,\forall\, t \geq 0\,,$ *para algum* $A \in \mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Ver [25]. □

Corolário 1.9. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo uniformemente contínuo. Então:*

1. *Existe uma* $\omega \geq 0 \,/\, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega\, t}\,,\,\forall\, t \geq 0.$
2. *A aplicação* $t \longmapsto S(t)$ *é diferenciável em* $[0, +\infty[$ *e* $\dfrac{d}{dt}\,S(t) = A\,S(t) = S(t)\,A.$

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Semigrupos de classe C_0 ou C_0- Semigrupos.

Definição 1.10. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo em X.*

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **de classe** C_0 *ou* C_0- **semigrupo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)\,u = u\,,\,\forall\,u\in X.$

2. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **fortemente contínuo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow r} S(t)\,u = S(r)\,u\,,\,\forall\,u\in X.$

Proposição 1.5. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo em X.*

1. *$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0- semigrupo se e somente se é fortemente contínuo.*

2. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformemente contínuo, então é um C_0- semigrupo.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.23. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo. Então:*

1. $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} = \inf\limits_{t>0} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} := \omega_0.$

2. *Para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M\geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M\,e^{\omega\,t}\,,\,\forall\,t\geq 0.$*

Demonstração. Ver [25]. $\square$

Corolário 1.10. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo. Então existem constantes $\omega\geq 0$ e $M\geq 1$ tal que $\|S(t)\|\leq M\,e^{\omega\,t}\,,\,\forall\,t\geq 0.$*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Corolário 1.11. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo. Então para cada $u\in X$, a aplicação $t\longmapsto S(t)\,u$ é contínua em $[0,+\infty[$.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Definição 1.11. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo.*
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito **uniformemente limitado** *quando existe uma $M\geq 1$ tal que $\|S(t)\|\leq M\,,\,\forall\,t\geq 0.$*
Se $M = 1\,,$ é dito um C_0- **semigrupo de contrações***.*

Teorema 1.24. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*

1. *$\forall\,u\in X$, tem-se:* $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} S(r)\,u\,dr = S(t)\,u.$

2. *$\forall\,u\in X$, tem-se:* $\displaystyle\int_0^t S(r)\,u\,dr \in \mathcal{D}(A)$ *e* $A\left(\displaystyle\int_0^t S(r)\,u\,dr\right) = S(t)\,u - u.$

3. *$\forall\,u\in\mathcal{D}(A)$, tem-se:* $S(t)\,u\in\mathcal{D}(A)\,,\,\forall\,t\geq 0$ *e* $\dfrac{d}{dt}\,S(t)\,u = A\,S(t)\,u = S(t)\,A\,u.$

4. *$\forall\,u\in\mathcal{D}(A)$, tem-se:* $S(t)\,u - S(s)\,u = \displaystyle\int_s^t S(r)\,A\,u\,dr = \int_s^t A\,S(r)\,u\,dr.$

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Corolário 1.12. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então* $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* X *e* A *é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.25. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ C_0- *semigrupos com geradores infinitesimais* $A\,,\,B$ *respectivamente. Se* $A = B$, *então* $S(t) = T(t)\,,\,\forall\, t \geq 0.$

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Definição 1.12. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Denota-se por:* $A^0 = I\,,\, A^1 = A$. *Supondo que* A^{n-1} *esteja definido, se define* A^n *como:*

$$(\bullet)\, \mathcal{D}(A^n) = \big\{u \in X : u \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \quad e \quad A^{n-1}\, u \in \mathcal{D}(A)\big\}\,,$$
$$(\bullet)\, A^n\, u = A\,(A^{n-1}\, u)\,,\,\forall\, u \in \mathcal{D}(A^n).$$

Proposição 1.6. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*

1. $\mathcal{D}(A^n)$ *é um subespaço de* X *e* A^n *é um operador linear.*
2. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A^n)$, *tem-se:* $S(t)\, u \in \mathcal{D}(A^n)\,,\,\forall\, t \geq 0$ *e* $\dfrac{d^n}{dt^n}\, S(t)\, u = A^n\, S(t)\, u = S(t)\, A^n\, u.$
3. *Fórmula de Taylor: se* $u \in \mathcal{D}(A^n)$, *então*
$$S(t)\, u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\, S^k\, S(t_0)\, u + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-r)^{n-1}\, A^n\, S(r)\, u\, dr.$$
4. $\cap_{n=1}^{\infty}\, \mathcal{D}(A^n)$ *é denso em* X.

Demonstração. Ver [25]. $\square$

Proposição 1.7. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Se* $\|S(t)\| \leq M\,,\,\forall\, t \geq 0$ *então* $\|A\, u\|^2 \leq 4\, M^2\, \|A^2\, u\|\, \|u\|\,,\,\forall u \in \mathcal{D}(A^2)$.

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Proposição 1.8. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear fechado. O funcional* $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}\,/\,\|u\|_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \|A^k\, u\|$ *é uma norma sobre* $\mathcal{D}(A^n)$ *munido da qual* $\mathcal{D}(A^n)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [25]. $\square$

Definição 1.13. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear fechado. A norma* $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}\,/\,\|u\|_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \|A^k\, u\|$ *é chamada* **norma do gráfico**.

Proposição 1.9. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então, para cada* $u \in \mathcal{D}(A^n)$ *tem-se:* $S(t)\,u \in C^{n-k}([0,+\infty[\,;\,\mathcal{D}(A^k))\,,\,\forall\,k = 0,1,...,n\,,$ *com a norma do gráfico.*

Demonstração. Ver [25]. □

O Teorema de Hille - Yosida

Definição 1.14. *Sejam* X *um espaço de Banach ,* X^* *seu dual e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
Denota-se o valor de $u^* \in X^*$ *em* $u \in X$ *por* $\langle u, u^* \rangle_{X \times X^*}$. *Para cada* $u \in X$ *, define-se o conjunto dualidade* $F(u) \subset X^*$ *como:* $F(u) = \left\{u^* \in X^* : \langle u, u^* \rangle_{X \times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\right\}$.
A *é chamado* **dissipativo** *quando* $Re\,\langle A\,u, u^* \rangle_{X \times X^*} \leq 0\,,\,\forall\,u \in \mathcal{D}(A)$ *com* $u^* \in F(u)$.

Observação: Se $X = H$ é um espaço de Hilbert , então usando-se o teorema de Representação de Riesz , tem-se:
A é **dissipativo** quando $Re\,\langle A\,u, u \rangle_H \leq 0\,,\,\forall\,u \in \mathcal{D}(A)$.

Teorema 1.26. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
A *é dissipativo se e somente se* $\|(\lambda\,I - A)\,u\| \geq \lambda\,\|u\|\,,\,\forall\,u \in \mathcal{D}(A)\,,\,\forall\,\lambda > 0$.

Demonstração. Ver [30]. □

Teorema 1.27. *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A .
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0- *semigrupo de contrações, se e somente se* A *é dissipativo.*

Demonstração. Ver [26]. □

Lema 1.1. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Se existe uma seqüência* $\{A_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{L}(X)$ *tais que:*

1. $A_m\,u \longrightarrow A\,u$ *em* X , $\forall\,u \in \mathcal{D}(A)$.
2. $\left\{e^{t\,A_m}\right\}_{m\geq 1} \longrightarrow S(t)$ *em* $\mathcal{L}(X)\,,\,\forall\,t > 0$.

Então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A .

Demonstração. Ver [26]. □

Lema 1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz:*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ *e* $\|R(\lambda\,;\,A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}\,,\,\forall\,\lambda > 0\,,$ *onde* $R(\lambda\,;\,A) = (\lambda\,I - A)^{-1}$.

Então $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda\,R(\lambda\,;\,A)\,u = u\,,\,\forall\,u \in X$.

Demonstração. Ver [30]. □

Definição 1.15. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Para cada* $\lambda > 0$, *define-se* **a Aproximação de Yosida de** A, *como a aplicação linear* $A_\lambda : X \longrightarrow X \,/\, A_\lambda := \lambda\, A\, R(\lambda\,; A) = \lambda^2\, R(\lambda\,; A) - \lambda\, I$.

Observação: A_λ é limitado.

Lema 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz as condições do lema anterior, então* $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda\, u = A\, u\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)$.

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 1.4. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz as condições do lema anterior, então* $e^{t\, A_\lambda}$, $t \geq 0$ *é um semigrupo de contrações, uniformemente contínuo tal que:*

$$\|e^{t\, A_\lambda}\, u - e^{t\, A_\mu}\, u\| \leq t\, \|A_\lambda\, u - A_\mu\, u\|\,,\ \forall\, \lambda\,,\ \mu > 0\,.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Teorema 1.28 (Hille - Yosida). *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear não limitado.*
A *é o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações, se e somente se*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A) \quad e \quad \|R(\lambda\,;\, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}\,,\ \forall\, \lambda > 0\,.$

Demonstração. Ver [30]. □

Corolário 1.13. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A. *Então:*

$$S(t)\, u = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{t\, A_\lambda}\, u\,,\ \forall\, u \in X\,.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Corolário 1.14. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A. *Então:*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda > 0\} \subset \varrho(A) \quad \textit{e para tal} \quad \lambda \quad \textit{tem-se} \quad \|R(\lambda\,;\, A)\| \leq \frac{1}{Re\,\lambda}\,.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Corolário 1.15. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
A *é o gerador infinitesimal de um* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ C_0- *semigrupo satisfazendo* $\|S(t)\| \leq e^{\omega\, t}\,,\ \forall\, t \geq 0\,;$ *se e somente se*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\{\lambda \in \mathbb{C} : Im\,\lambda = 0\,,\ \lambda > \omega\} \subset \varrho(A) \quad$ *e para tal* $\quad \lambda \quad$ *tem-se* $\quad \|R(\lambda\,;\, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}\,.$

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Proposição 1.10. *Sejam* X *um espaço de Banach ,* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear ,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo.*
Se A *é o gerador infinitesimal de* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *e* $A\,B = B\,A$ *, então* $(A + B)$ *é o gerador infinitesimal do* $\left\{S(t)\,e^{B\,t}\right\}_{t \geq 0}$ C_0- *semigrupo.*

Demonstração. Ver [26]. $\square$

O Teorema de Lumer - Phillips

Teorema 1.29 (Lumer - Phillips). *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear densamente definido.*

1. *Se* A *é dissipativo e existe uma* $\lambda_0 > 0$ *tal que* $Im\,(\lambda_0\,I - A) = X$ *, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*

2. *Se* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações, então* A *é dissipativo e* $Im\,(\lambda\,I - A) = X\ ,\ \forall\,\lambda > 0\,.$

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Corolário 1.16. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear fechado e densamente definido.*
Se A *e* A^* *são dissipativos, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Lema 1.5. *Sejam* X *um espaço de Banach ,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e* $A \in \mathcal{L}(X)$ *com inversa limitada.*
Se $\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ *então* $(A + B)$ *é linear, limitado e inversível.*

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Teorema 1.30. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear, densamente definido e dissipativo.*
Se $0 \in \varrho(A)$ *, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Teorema 1.31. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear, dissipativo com* $Im\,(I - A) = X$ *.*
Se X *é reflexivo, então* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

O Teorema de Stone

Definição 1.16. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(X)$ *uma familia de operadores lineares e limitados.*

1. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é dito um* **grupo** *em* X , *quando:*

   (a) $S(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$ *.*

   (b) $S(t+s) = S(t)\,S(s)\,,\ \forall\, t\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$

2. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é dito um* C_0- **grupo** *ou um* **grupo de classe** C_0 , *quando é um grupo em* X *e* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)\,u = u\,,\ \forall\, u \in X\,.$

Definição 1.17. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *um grupo em* X *. O operador linear* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}\,,$

2. $A\,u = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t}\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,$

é chamado **gerador infinitesimal** *do grupo* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *.*

Observações. Seja $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ um C_0- grupo com gerador infinitesimal A . Define-se:

$$S_-(t) = S(-t) \quad \text{e} \quad S_+(t) = S(t)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$$

Proposição 1.11. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*

1. *Se* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é um* C_0- *grupo com gerador infinitesimal* A , *então* $\{S_-(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S_+(t)\}_{t\geq 0}$ *são* C_0- *semigrupos com geradores infinitesimais* $-A$ *e* A *respectivamente.*

2. *Recíprocamente; se* $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ *são* C_0- *semigrupos com geradores infinitesimais* $-A$ *e* A *respectivamente, então* $S_1(t) = S_2(t)^{-1}\,,\ \forall\, t \geq 0$ *e* $S(t) = \begin{cases} S_1(-t)\,, & t < 0 \\ S_2(t)\,, & t \geq 0 \end{cases}$ *é um* C_0- *grupo com gerador infinitesimal* A *.*

Demonstração. Ver [25]. □

Proposição 1.12. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *. Então:*

1. *Se existe um* $t_0 > 0 \,/\, S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, *então* $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$

2. $\left\{T(t) := S(t)^{-1}\right\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* $-A$ *.*

3. $Z(t) = \begin{cases} S(-t)^{-1}\,, & t < 0 \\ S(t) \quad , & t \geq 0 \end{cases}$ *é um* C_0- *grupo com gerador infinitesimal* A *.*

Demonstração. Ver [25]. □

Definição 1.18. *Sejam* H *um espaço de Hilbert ,* $B \in \mathcal{L}(H)$ *,* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *um grupo em* H *e* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ *um operador linear.*

1. $A \subset A^*$ *quando* $\langle A\,u, v\rangle_H = \langle u, A\,v\rangle_H$, $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$.
2. A *é dito* **simétrico** *quando* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ *e* $A \subset A^*$.
3. A *é dito* **autoadjunto** *quando* $A = A^*$.
4. B *é dito* **unitário** *quando* $B^* = B^{-1}$.
5. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é dito um* **grupo unitário** *em* H *quando* $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.32 (Stone). *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ *um operador linear.* A *é o gerador infinitesimal de um* C_0- *grupo unitário, se e somente se* $i\,A$ *é autoadjunto.*

Demonstração. Ver [26]. □

1.3 Problema de Cauchy Abstrato.

Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, $f : [0, T\rangle \longrightarrow X$ uma aplicação e $x_0 \in X$.

Definição 1.19. *O problema de Cauchy abstrato é uma equação de evolução abstrata do tipo*

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + f(t)\,, \quad t > 0 \\ u(0) = x_0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definição 1.20. *Uma aplicação* $u : [0, T\rangle \longrightarrow X$ *é uma solução clássica de* (1.1) *sobre* $[0, T\rangle$ *, se* u *é contínua sobre* $[0, T\rangle$ *, continuamente diferenciável sobre* $\langle 0, T\rangle$ *,* $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para* $\langle 0, T\rangle$ *e* u *satisfaz* (1.1) *em* $[0, T\rangle$.

Definição 1.21. *Sejam* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *,* $f \in L^1(0, T; X)$ *e* x_0 *. A aplicação* $u \in C([0, T]; X)$ *dada por*

$$u(t) = S(t)\,x_0 + \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de solução integral do problema (1.1) *sobre* $[0, T]$.

Teorema 1.33. *Sejam* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *,* $f \in L^1(0, T; X)$ *contínua em* $\langle 0, T]$ *e*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0 \leq t \leq T\,.$$

Então o problema (1.1) *possui uma solução* u *sobre* $[0, T\rangle$ *para cada* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *, se uma das seguintes condições é satisfeita*

1. v *é contínuamente diferenciável sobre* $\langle 0, T\rangle$.
2. $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para* $0 < t < T$ *e* $A\,v(t)$ *é contínua sobre* $\langle 0, T\rangle$.

Recíprocamente, se (1.1) *possui uma solução* u *sobre* $[0, T\rangle$ *para algum* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *, então* v *satisfaz* 1. *e* 2.*.*

Demonstração. Ver [30]. □

1.4 Estabilidade Exponencial.

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados que lidam com estabilidade exponencial e que geram decaimento do tipo polinomial de C_0- semigrupos definidos sobre espaços de Hilbert.

Definição 1.22. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A .
Diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é* **exponencialmente estável** *quando existem constantes* $\mu > 0$ *e* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{-\mu\, t}\,, \forall\, t \geq 0\,.$

Definição 1.23. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
A **cota superior do espectro** *de* T , $\omega_\sigma(T)$, *é o valor*

$$\omega_\sigma(T) := \sup\{Re\, \lambda : \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Definição 1.24. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *. O* **tipo do semigrupo gerado por** A , $\omega_0(A)$, *é o valor*

$$\omega_0(A) := \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{ln\, \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\, \|S(t)\|}{t}\,.$$

Proposição 1.13. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *. Então:*

1. $\omega_0(t\, A) = t\, \omega_0(A)\,, \forall\, t > 0\,.$
2. $\forall\, \epsilon > 0\,,$ *existe* $M_\epsilon \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\, e^{(\omega_0(A)+\epsilon)\, t}\,, \forall\, t > 0\,.$

Demonstração. Ver [26]. □

Proposição 1.14. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A .
Se $\omega_0(A) = 0\,,$ *então* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1\,, \forall\, t > 0\,.$

Demonstração. Ver [26]. □

Lema 1.6. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *. Então:*

1. $\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A)\,.$
2. $R_\sigma(S(t)) = e^{\omega_0(A)\, t}\,, \forall\, t > 0\,.$

Demonstração. Ver [26]. □

Teorema 1.34. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $f \in C([0,1];X)$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A *. A equação*

$$\begin{cases} u'(t) = A\, u(t) + f(t) \quad \textit{em} \quad [0,1] \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

possui uma única solução periódica de período 1 , *se e somente se,* $1 \in \varrho(S(1))$.

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Teorema 1.35. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*

$1 \in \varrho(S(1))$, *se e somente se,* $\begin{cases} 2\,k\,\pi\,i \in \varrho(A)\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|(2\,k\,\pi\,i\,I - A)^{-1}\| < \infty\,. \end{cases}$

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Corolário 1.17. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*

$e^{\lambda\,t} \in \varrho(S(t))$, *se e somente se,* $\begin{cases} \left(\lambda + \dfrac{2\,k\,\pi\,i}{t}\right) \in \varrho(A) \\ \left\| \left(\left(\lambda + \dfrac{2\,k\,\pi\,i}{t}\right) I - A \right)^{-1} \right\| < \infty\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Lema 1.7. *Sejam* X *um espaço de Banach,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A.
Se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < e^{\lambda\,t}\,, \forall\, t \geq N$, *então* $e^{\lambda} \in \varrho(S(1))$.

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Teorema 1.36. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*
$\omega_0(A) = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,, \forall\, Re\,\lambda \geq \mu\right\}$.

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Corolário 1.18. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A.
Se $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ *e* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,, \forall\, Re\,\lambda \geq 0$, *então:*
existe $\epsilon > 0$ *tal que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq -\epsilon\} \subset \varrho(A)$ *e* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,, \forall\, Re\,\lambda \geq -\epsilon$.

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Corolário 1.19. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A.
Se $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ *e* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,, \forall\, Re\,\lambda \geq 0$, *então o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Ver [26]. $\square$

Definição 1.25. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Diz-se que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *tem a* **propriedade do crescimento determinada pelo espectro,** *quando* $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$.

Proposição 1.15. *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*
$\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$, *se e somente se,* $\forall\, \epsilon > 0$, *existe* $M_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\,,\; \forall\, Re\,\lambda \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon\,.$$

Demonstração. Ver [26]. □

Teorema 1.37 (Gearhart). *Seja* $(\mathcal{S}(t))_{t\,\geq\,0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$, *gerado por* $\mathcal{A}$. *O semigrupo* $(\mathcal{S}(t))_{t\,\geq\,0}$ *é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$i\,\mathbb{R}\,\subset\,\varrho(\mathcal{A}) \quad e \quad \limsup_{|\alpha|\longrightarrow+\infty}\left\|(i\,\alpha\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty\,.$$

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.38 (Prüss - Huang - Renardy). *Seja* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$, *gerado por* $\mathcal{A}$. *O semigrupo* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad e \quad \left\|(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\,, \quad \forall\,\lambda\,\in\,\mathbb{R}\,.$$

Demonstração. Ver [31]. □

Observação : Observa-se que existem duas maneiras equivalentes de se obter estabilidade exponencial para C_0- semigrupos de contrações em espaços de Hilbert, e uma prova dessa equivalência pode ser encontrada em Liu - Zheng [22] .
Nem sempre um semigrupo é exponencialmente estável. Neste caso, devemos procurar outra forma de estabilizar o sistema, como por exemplo determinar decaimento polinomial de soluções.

1.5 Estabilidade Polinomial

Os primeiros autores em obter resultados sobre estabilidade polinonial para C_0- semigrupos de contrações foram Liu - Rao e J. Pruess. Eles deram condições suficientes sobre o operador resolvente para obter decaimento polinomial de soluções.

Teorema 1.39 (**Liu - Rao).** *Seja* $\mathcal{A}$ *o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo uniformemente limitado* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $i\,\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$ *.*
Suponha que $\dfrac{1}{|\lambda|^{\alpha}}\left\|(i\,\lambda\,I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq C\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,,$ *onde* α *é um número real positivo. Então para cada* $k\in\mathbb{N}\,,$ *existe uma constante* $C_k>0$ *tal que*

$$\|S(t)\,w\|_{\mathcal{H}}\leq C_k\left(\frac{ln(t)}{t}\right)^{k/\alpha}ln(t)\,\|w\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)}\,.$$

Observação :
No teorema de **Liu - Rao**, a presença do logaritmo ln no numerador atrasa o decaimento polinomial. Essa deficiência foi superada no seguinte teorema :

Teorema 1.40 (**Borichev - Tomilov).** *Seja* $\mathcal{A}$ *o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo limitado* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $i\,\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$ *. Então*

$$\frac{1}{|\lambda|^{\alpha}}\left\|(i\,\lambda\,I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq C\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\quad\Longleftrightarrow\quad\left\|\mathcal{S}(t)\,\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\leq\frac{C}{t^{1/\alpha}}\,,$$

onde α *é um número real positivo.*

Demonstração. Ver [3]. □

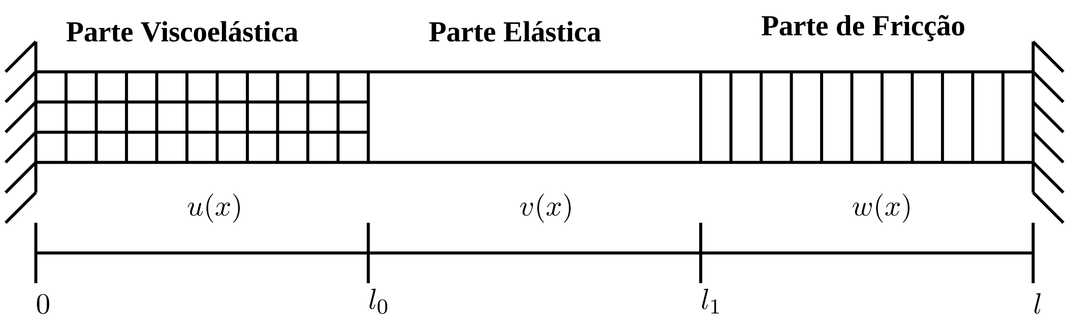
Capítulo 2

O Modelo Matemático

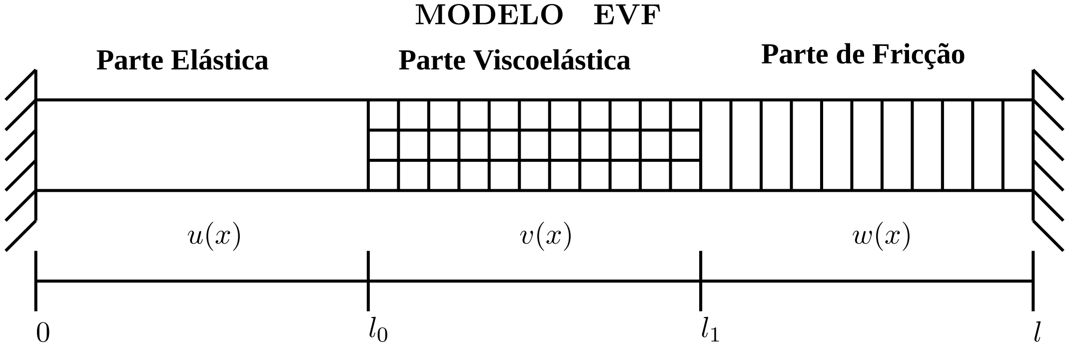
Introdução

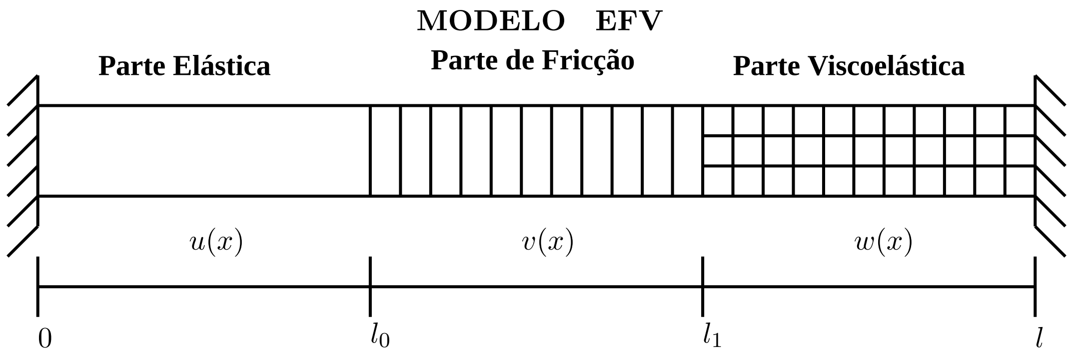
Considera-se os seguintes modelos:

MODELO VEF



MODELO EVF





O deslocamento longitudinal ν é dividido em três partes:

$$\nu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in \,]0, l_0[\\ \\ v(x) & \text{se} \quad x \in \,]l_0, l_1[\\ \\ w(x) & \text{se} \quad x \in \,]l_1, l[\,, \end{cases}$$

onde cada componente u, v e w representa o deslocamento do primeiro, segundo e terceiro componente da viga respectivamente. Existem seis combinações possíveis do material: Duas possibilidades ocorrer quando a parte elástica está no meio da viga **(VEF , FEV)**, outras duas possibilidades quando a parte viscosa está no meio da viga **(EVF , FVE)**, e finalmente quando a parte elástica com mecânica de frição está no meio da viga **(VFE , EFV)**.

Observe que, realizando a mudança de variável $s = l - x$, **estas seis possibilidades podem ser reduzido a três.** Com efeito, sem perda de generalidade, assuma que $l_0 = l_1 - l_0 = l - l_1$. Logo, basta ver que o intervalo $(0, l_0)$ é transformado no intervalo (l_1, l) , o intervalo (l_0, l_1) fica fixo e o intervalo (l_1, l) é transformado no intervalo $(0, l_0)$.
Assim, é suficiente estudar os seguintes modelos : **VEF , EVF** e **EFV**.

O modelo VEF é dado por:

$$\rho_1\, u_{tt} - \kappa_1\, u_{xx} - \kappa_0\, u_{xxt} \;=\; 0 \quad em \quad]0, l_0[\, \times\,]0, +\infty[\tag{2.1}$$
$$\rho_2\, v_{tt} - \kappa_2\, v_{xx} \;=\; 0 \quad em \quad]l_0, l_1[\, \times\,]0, +\infty[\tag{2.2}$$
$$\rho_3\, w_{tt} - \kappa_3\, w_{xx} + \gamma\, w_t \;=\; 0 \quad em \quad]l_1, l[\, \times\,]0, +\infty[\;, \tag{2.3}$$

onde κ_0 , κ_1 , κ_2 e κ_3 são as constantes positivas elásticas, $\gamma > 0$ e ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representam as funções de densidade de massa.

As condições de transmissão são dadas por:

$$\begin{aligned} & u(l_0,t) = v(l_0,t)\,, \quad \kappa_1\, u_x(l_0,t) + \kappa_0\, u_{xt}(l_0,t) = \kappa_2\, v_x(l_0,t)\,, && t \geq 0\,, \\ & v(l_1,t) = w(l_1,t)\,, \quad \kappa_2\, v_x(l_1,t) = \kappa_3\, w_x(l_1,t)\,, && t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

As condições de contorno:

$$u(0,t)=0\,,\quad w(l,t)=0\,,\quad t\geq 0\,. \tag{2.5}$$

As condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x,0)=u_0(x)\quad &,\quad u_t(x,0)=u_1(x)\quad em\quad]0,l_0[\ ,\\ v(x,0)=v_0(x)\quad &,\quad v_t(x,0)=v_1(x)\quad em\quad]l_0,l_1[\ ,\\ w(x,0)=w_0(x)\quad &,\quad w_t(x,0)=w_1(x)\quad em\quad]l_1,l[\ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

O modelo EVF é dado por:

$$\rho_1\,u_{tt}-\kappa_1\,u_{xx}\;=\;0\quad em\quad]0,l_0[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.7}$$

$$\rho_2\,v_{tt}-\kappa_2\,v_{xx}-\kappa_0\,v_{xxt}\;=\;0\quad em\quad]l_0,l_1[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.8}$$

$$\rho_3\,w_{tt}-\kappa_3\,w_{xx}+\gamma\,w_t\;=\;0\quad em\quad]l_1,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.9}$$

onde κ_0 , κ_1 , κ_2 e κ_3 são as constantes positivas elásticas, $\gamma>0$ e ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representam as funções de densidade de massa.

As condições de transmissão são dadas por:

$$\begin{aligned} &u(l_0,t)=v(l_0,t)\,,\quad \kappa_1\,u_x(l_0,t)=\kappa_2\,v_x(l_0,t)+\kappa_0\,v_{xt}(l_0,t)\,, && t\geq 0\,,\\ &v(l_1,t)=w(l_1,t)\,,\quad \kappa_2\,v_x(l_1,t)+\kappa_0\,v_{xt}(l_1,t)=\kappa_3\,w_x(l_1,t)\,, && t\geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

As condições de contorno:

$$u(0,t)=0\,,\quad w(l,t)=0\,,\quad t\geq 0\,. \tag{2.11}$$

As condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x,0)=u_0(x)\quad &,\quad u_t(x,0)=u_1(x)\quad em\quad]0,l_0[\ ,\\ v(x,0)=v_0(x)\quad &,\quad v_t(x,0)=v_1(x)\quad em\quad]l_0,l_1[\ ,\\ w(x,0)=w_0(x)\quad &,\quad w_t(x,0)=w_1(x)\quad em\quad]l_1,l[\ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

O modelo EFV é dado por:

$$\rho_1\,u_{tt}-\kappa_1\,u_{xx}\;=\;0\quad em\quad]0,l_0[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.13}$$

$$\rho_2\,v_{tt}-\kappa_2\,v_{xx}+\gamma\,v_t\;=\;0\quad em\quad]l_0,l_1[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.14}$$

$$\rho_3\,w_{tt}-\kappa_3\,w_{xx}-\kappa_0\,w_{xxt}\;=\;0\quad em\quad]l_1,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.15}$$

onde κ_0 , κ_1 , κ_2 e κ_3 são as constantes positivas elásticas, $\gamma>0$ e ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representam as funções de densidade de massa.

As condições de transmissão são dadas por:

$$\begin{aligned} &u(l_0,t)=v(l_0,t)\,,\quad \kappa_1\,u_x(l_0,t)=\kappa_2\,v_x(l_0,t)\,, && t\geq 0\,,\\ &v(l_1,t)=w(l_1,t)\,,\quad \kappa_2\,v_x(l_1,t)=\kappa_3\,w_x(l_1,t)+\kappa_0\,w_{xt}(l_1,t)\,, && t\geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

As condições de contorno:

$$u(0,t)=0\,,\quad w(l,t)=0\,,\quad t\geq 0\,. \tag{2.17}$$

As condições iniciais:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x,0)=u_0(x) & , & u_t(x,0)=u_1(x) & em &]0,l_0[\ , \\ v(x,0)=v_0(x) & , & v_t(x,0)=v_1(x) & em &]l_0,l_1[\ , \\ w(x,0)=w_0(x) & , & w_t(x,0)=w_1(x) & em &]l_1,l[\ . \end{array} \tag{2.18}$$

O objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de soluções para os modelos $\mathbf{VEF}$, $\mathbf{EVF}$, $\mathbf{EFV}$ usando a Teoría de Semigrupos.

2.1 O Espaço de Fase.

Nesta seção escolher-se-á o espaço de fase apropriado onde atuará o semigrupo.
Para estudar os problemas de valor inicial e fronteira $(2.1)-(2.6)\,,\ (2.7)-(2.12)$ e $(2.13)-(2.18)$ usando a teoria de semigrupos, se introduz as seguintes variáveis novas:

$$U:=u_t\,,\ V:=v_t\,,\ W:=w_t\,.$$

Agora, vamos transformar cada sistema $\mathbf{VEF}\,,\ \mathbf{EVF}$ e $\mathbf{EFV}\,,$ numa equação de evolução de primeira ordem na variável temporal.
Se $\Phi=(u,v,w,U,V,W)^t\,,$ então os sistemas acoplados podem ser reescritos como:

O Sistema VEF:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= (U,V,W,u_{tt},v_{tt},w_{tt})^t \\ &= \left(U,V,W,\frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}+\frac{\kappa_0}{\rho_1}u_{xxt},\frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx},\frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx}-\frac{\gamma}{\rho_3}w_t\right)^t \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{\kappa_1}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(.)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3}I \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}_1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, define-se o operador linear $\mathcal{A}_1:\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\subset\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ tais que, para cada $\Phi=(u,v,w,U,V,W)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,,$ tem-se:

$$\mathcal{A}_1\,\Phi=\left(U,V,W,\frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}+\frac{\kappa_0}{\rho_1}\,U_{xx},\frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx},\frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx}-\frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right)\,, \tag{2.19}$$

onde o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ e o espaço de fase $\mathcal{H}$ serão definidos de forma apropriada depois.

O Sistema EVF:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= (U, V, W, u_{tt}, v_{tt}, w_{tt})^t \\
&= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}v_{xxt}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}w_t\right)^t \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
\frac{\kappa_1}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(.)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3}I
\end{pmatrix}}_{\mathcal{A}_2} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, define-se o operador linear $\mathcal{A}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tais que, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, tem-se:

$$
\mathcal{A}_2\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}\,V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right), \tag{2.20}
$$

onde o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ e o espaço de fase $\mathcal{H}$ serão definidos de forma apropriada depois.

O Sistema EFV:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= (U, V, W, u_{tt}, v_{tt}, w_{tt})^t \\
&= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2}v_t, \frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3}w_{xxt}\right)^t \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
\frac{\kappa_1}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2}I & 0 \\
0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(.)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_3}(.)_{xx}
\end{pmatrix}}_{\mathcal{A}_3} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, define-se o operador linear $\mathcal{A}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_3) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tais que, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$, tem-se:

$$
\mathcal{A}_3\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2}\,V, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3}\,W_{xx}\right), \tag{2.21}
$$

onde o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$ e o espaço de fase $\mathcal{H}$, serão definidos de forma apropriada a seguir.

Observe-se que, a fim de escolher o espaço de fase certo, calcular-se-á a energia total dos sistemas **VEF , EVF , EFV** e escolher-se-á o maior espaço onde a energia total dos três sistemas estão bem definidas.
Fazendo-se integração por partes, tem-se que a energia associada para cada sistema está dada por:
Para VEF :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\Big(\frac{\rho_1}{2}\,\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\kappa_1}{2}\,\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\rho_2}{2}\,\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\kappa_2}{2}\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\rho_3}{2}\,\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)}+\frac{\kappa_3}{2}\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big)}_{E_1(t)}$$
$$=[(\kappa_1\,u_x(l_0)+\kappa_0\,u_{xt}(l_0))\,u_t(l_0)-\kappa_2\,v_x(l_0)\,v_t(l_0)]+[-\,(\kappa_1\,u_x(0)+\kappa_0\,u_{xt}(0))\,u_t(0)+\kappa_3\,w_x(l)\,w_t(l)]+$$
$$[\kappa_2\,v_x(l_1)\,v_t(l_1)-\kappa_3\,w_x(l_1)\,w_t(l_1)]-\kappa_0\int_0^{l_0}|u_{xt}|^2\,dx-\gamma\int_{l_1}^{l}|w_t|^2\,dx$$

Para EVF :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\Big(\frac{\rho_1}{2}\,\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\kappa_1}{2}\,\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\rho_2}{2}\,\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\kappa_2}{2}\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\rho_3}{2}\,\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)}+\frac{\kappa_3}{2}\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big)}_{E_2(t)}$$
$$=[-\,(\kappa_2\,v_x(l_0)+\kappa_0\,v_{xt}(l_0))\,v_t(l_0)+\kappa_1\,u_x(l_0)\,u_t(l_0)]+[(\kappa_2\,v_x(l_1)+\kappa_0\,v_{xt}(l_1))\,v_t(l_1)-\kappa_3\,w_x(l_1)\,w_t(l_1)]+$$
$$[-\kappa_1\,u_x(0)\,u_t(0)+\kappa_3\,w_x(l)\,w_t(l)]-\kappa_0\int_{l_0}^{l_1}|v_{xt}|^2\,dx-\gamma\int_{l_1}^{l}|w_t|^2\,dx$$

Para EFV :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\Big(\frac{\rho_1}{2}\,\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\kappa_1}{2}\,\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+\frac{\rho_2}{2}\,\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\kappa_2}{2}\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\rho_3}{2}\,\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)}+\frac{\kappa_3}{2}\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big)}_{E_3(t)}$$
$$=[-\,(\kappa_3\,w_x(l_1)+\kappa_0\,w_{xt}(l_1))\,w_t(l_1)+\kappa_2\,v_x(l_1)\,v_t(l_1)]+[(\kappa_3\,w_x(l)+\kappa_0\,w_{xt}(l))\,w_t(l)-\kappa_1\,u_x(0)\,u_t(0)]+$$
$$[\kappa_1\,u_x(l_0)\,u_t(l_0)-\kappa_2\,v_x(l_0)\,v_t(l_0)]-\kappa_0\int_{l_1}^{l}|w_{xt}|^2\,dx-\gamma\int_{l_0}^{l_1}|v_t|^2\,dx$$

Da observação anterior, vê-se que as energias estão bem definidas se: $u\in H^1(0,l_0)$, $v\in H^1(l_0,l_1)$, $w\in H^1(l_1,l)$, $U=u_t\in L^2(0,l_0)$, $V=v_t\in L^2(l_0,l_1)$, $W=w_t\in L^2(l_1,l)$.

Antes de definir o Espaço de Fase, **introduz-se as seguintes notações:**

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^m&=H^m(0,l_0)\times H^m(l_0,l_1)\times H^m(l_1,l)\quad,\quad m=1,2\\ \mathbb{L}^2&=L^2(0,l_0)\times L^2(l_0,l_1)\times L^2(l_1,l)\\ \mathbb{H}^1_l&=\{(u,v,w)\in\mathbb{H}^1\,:\,u(0)=0=w(l),\,u(l_0)=v(l_0),\,v(l_1)=w(l_1)\}.\end{aligned}$$

Logo, se define o Espaço de Fase como: $\mathcal{H}:=\mathbb{H}^1_l\times\mathbb{L}^2$.
No decorrer dos capítulos, ver-se-á que o espaço de fase é o apropriado.

Por outro lado, tendo-se definido o espaço de fase, pode-se definir com precisão os dominios dos operadores lineares.

De (2.19)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) &= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_1\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0), \\
&\qquad \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\} \\
&= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,U_{xx}, v_{xx}, w_{xx}) \in \mathcal{H}\,, \\
&\qquad \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0),\ \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\} \\
&= \{\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (\kappa_1\,u + \kappa_0\,U, v, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \\
&\qquad \kappa_2\,v_x(l_0)\,,\ \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}\,.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

De (2.20)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) &= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_2\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0), \\
&\qquad \kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}\,. \\
&= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,u_{xx}, \kappa_2\,v_{xx} + \kappa_0\,V_{xx}, w_{xx}) \in \mathcal{H}\,, \\
&\qquad \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0),\ \kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\} \\
&= \{\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (u, \kappa_2\,v + \kappa_0\,V, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \\
&\qquad \kappa_0\,V_x(l_0),\ \kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}\,.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

De (2.21)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_3) &= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_3\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \\
&\qquad \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1) + \kappa_0\,W_x(l_1)\} \\
&= \{\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,u_{xx}, v_{xx}, \kappa_3\,w_{xx} + \kappa_0\,W_{xx}) \in \mathcal{H}\,, \\
&\qquad \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0),\ \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1) + \kappa_0\,W_x(l_1)\} \\
&= \{\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (u, v, \kappa_3\,w + \kappa_0\,W) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \\
&\qquad \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1) + \kappa_0\,W_x(l_1)\}\,.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Em resumo, os sistemas $(2.1) - (2.6)\,,\ (2.7) - (2.12)$ e $(2.13) - (2.18)$ podem ser reduzidos aos seguintes problemas de valor inicial:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{VEF :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_1\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0 \\
&\textbf{EVF :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_2\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0 \\
&\textbf{EFV :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_3\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0\,,
\end{aligned}
$$

onde $\Phi(t) = (u,v,w,U,V,W)$ e $\Phi(0) = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}$.

Agora, equipar-se-á o espaço de fase $\mathcal{H}$ de uma estrutura de **Espaço de Hilbert**. Antes dar-se-á um lema importante.

Lema 2.1. *Se* $(u,v,w) \in \mathbb{H}^1_l$, *então existe uma constante* $C > 0$, *que não depende de* u, v *e* w, *tal que:*

$$
\|u\|_{L^2(0,l_0)} \le C\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|w\|_{L^2(l_1,l)} \le C\,\|w_x\|_{L^2(l_1,l)} \quad e \quad \|v\|_{L^2(l_0,l_1)} \le C\left(\|u_x\|_{L^2(0,l_0)} + \|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)}\right)\,.
$$

Demonstração. Se $(u,v,w)\in\mathbb{H}_l^1$, então $u\in H^1(0,l_0)$, $v\in H^1(l_0,l_1)$, $w\in H^1(l_1,l)$ e $u(0)=0=w(l)$, $u(l_0)=v(l_0)$, $v(l_1)=w(l_1)$.
Pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante $C_1>0$ tal que: $\|u\|_{L^2(0,l_0)}\leq C_1\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}$ e $\|w\|_{L^2(l_1,l)}\leq C_1\|w_x\|_{L^2(l_1,l)}$.
Além disso,usando-se as imersões contínuas $H^1(l_0,l_1)\hookrightarrow C([l_0,l_1])$ e $L^2(l_0,l_1)\hookrightarrow L^1(l_0,l_1)$, tem-se:

$$\begin{aligned}|v(x)|^2&=\left|v(l_0)+\int_{l_0}^x v_x(s)\,dx\right|^2\leq 2\left(|u(l_0)|^2+\left(\int_{l_0}^{l_1}|v_x|\,dx\right)^2\right)\leq 2\left(\|u\|^2_{C([l_0,l_1])}+\left(\int_{l_0}^{l_1}|v_x|\,dx\right)^2\right)\\&\leq C_2\left(\|u\|^2_{H^1(l_0,l_1)}+\int_{l_0}^{l_1}|v_x|^2\,dx\right)\leq C_3\left(\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\right).\end{aligned}$$

Assim, pode-se escolher uma constante $C>0$ tal que:

$$\|u\|_{L^2(0,l_0)}\leq C\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|w\|_{L^2(l_1,l)}\leq C\,\|w_x\|_{L^2(l_1,l)}\quad\text{e}\quad\|v\|_{L^2(l_0,l_1)}\leq C\left(\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}+\|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)}\right)$$

$\square$

Teorema 2.1. *A aplicação* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ *tal que* $\langle Z_1,Z_2\rangle_{\mathcal{H}}:=\int_0^{l_0}\left(\kappa_1(u_1)_x(\overline{u}_2)_x+\rho_1\,U_1\,\overline{U}_2\right)dx$ $+\int_{l_0}^{l_1}\left(\kappa_2(v_1)_x(\overline{v}_2)_x+\rho_2\,V_1\,\overline{V}_2\right)dx+\int_{l_1}^{l}\left(\kappa_3(w_1)_x(\overline{w}_2)_x+\rho_3\,W_1\,\overline{W}_2\right)dx$, $\forall\, Z_1=(u_1,v_1,w_1,U_1,V_1,W_1)$, $Z_2=(u_2,v_2,w_2,U_2,V_2,W_2)\in\mathcal{H}$ *é um produto interno sobre* $\mathcal{H}$.
Além disso, $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ *é um espaço de Banach, onde* $\|Z\|^2_{\mathcal{H}}:=\langle Z,Z\rangle_{\mathcal{H}}$.

Demonstração. **Mostrar-se-á que é um produto interno:**

Sejam $Z_1=(u_1,v_1,w_1,U_1,V_1,W_1)$, $Z_2=(u_2,v_2,w_2,U_2,V_2,W_2)$, $Z_3=(u_3,v_3,w_3,U_3,V_3,W_3)\in\mathcal{H}$ e $\alpha\in\mathbb{C}$.

1. Observe-se que:

$$\begin{aligned}\langle Z_1,Z_1\rangle_{\mathcal{H}}&=\int_0^{l_0}\left(\kappa_1\,(u_1)_x\,(\overline{u}_1)_x+\rho_1\,U_1\,\overline{U}_1\right)\,dx+\int_{l_0}^{l_1}\left(\kappa_2\,(v_1)_x\,(\overline{v}_1)_x+\rho_2\,V_1\,\overline{V}_1\right)\,dx+\\&\quad\int_{l_1}^{l}\left(\kappa_3\,(w_1)_x\,(\overline{w}_1)_x+\rho_3\,W_1\,\overline{W}_1\right)\,dx\\&=\kappa_1\,\|u_1\|^2_{L^2(0,l_0)}+\rho_1\,\|U_1\|^2_{L^2(0,l_0)}+\kappa_2\,\|v_1\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\rho_2\,\|V_1\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\kappa_3\,\|w_1\|^2_{L^2(l_1,l)}\\&\quad+\rho_3\,\|W_1\|^2_{L^2(l_1,l)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$0=\langle Z_1,Z_1\rangle_{\mathcal{H}}\quad\Longleftrightarrow\quad Z_1=0\quad em\quad\mathcal{H}\quad e\quad\langle Z_1,Z_1\rangle_{\mathcal{H}}\geq 0\,.$$

2. Claramente: $\langle\alpha\,Z_1+Z_2,Z_3\rangle_{\mathcal{H}}=\alpha\,\langle Z_1,Z_3\rangle_{\mathcal{H}}+\langle Z_2,Z_3\rangle_{\mathcal{H}}$.

3. Operando-se tem-se:

$$
\begin{aligned}
\langle Z_1, Z_2\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^{l_0} \left(\kappa_1\ (u_1)_x\ (\overline{u}_2)_x + \rho_1\, U_1\, \overline{U}_2\right)\, dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2\ (v_1)_x\ (\overline{v}_2)_x + \rho_2\, V_1\, \overline{V}_2\right)\, dx + \\
&\quad \int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3\ (w_1)_x\ (\overline{w}_2)_x + \rho_3\, W_1\, \overline{W}_2\right)\, dx \\
&= \int_0^{l_0} \overline{\left(\kappa_1\ (\overline{u}_1)_x\ (u_2)_x + \rho_1\, \overline{U}_1\, U_2\right)}\, dx + \int_{l_0}^{l_1} \overline{\left(\kappa_2\ (\overline{v}_1)_x\ (v_2)_x + \rho_2\, \overline{V}_1\, V_2\right)}\, dx + \\
&\quad \int_{l_1}^{l} \overline{\left(\kappa_3\ (\overline{w}_1)_x\ (w_2)_x + \rho_3\, \overline{W}_1\, W_2\right)}\, dx \\
&= \overline{\int_0^{l_0} \left(\kappa_1\ (\overline{u}_1)_x\ (u_2)_x + \rho_1\, \overline{U}_1\, U_2\right)\, dx} + \overline{\int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2\ (\overline{v}_1)_x\ (v_2)_x + \rho_2\, \overline{V}_1\, V_2\right)\, dx} + \\
&\quad \overline{\int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3\ (\overline{w}_1)_x\ (w_2)_x + \rho_3\, \overline{W}_1\, W_2\right)\, dx} \\
&= \overline{\langle Z_2, Z_1\rangle}_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Mostrar-se-á que $(\mathcal{H}\,,\, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um Espaço de Banach:

Seja $\{Z_m = (u_m, v_m, w_m, U_m, V_m, W_m)\}_{m\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{H}\,,\, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$. Então $u_m \in H^1(0,l_0)$, $v_m \in H^1(l_0,l_1)$, $w_m \in H^1(l_1,l)$, $U_m \in L^2(0,l_0)$, $V_m \in L^2(l_0,l_1)$, $W_m \in L^2(l_1,l)$, $\forall m \geq 1$ tais que

$$
u_m(0) = 0 = w_m(l)\,,\ u_m(l_0) = v_m(l_0)\,,\ v_m(l_1) = w_m(l_1)\,,\ \forall m \geq 1\,. \tag{2.25}
$$

Observe que:

$$
\rho_1\, \|U_m\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,,\ \rho_2\, \|V_m\|^2_{L^2(l_0,l_1)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,,\ \rho_3\, \|W_m\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,. \tag{2.26}
$$

Além disso, pelo lema anterior, pode-se escolher uma constante $C > 0$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\|u_m\|^2_{H^1(0,l_0)} &= \|u_m\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|(u_m)_x\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}} \\
\|v_m\|^2_{H^1(l_0,l_1)} &= \|v_m\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|(v_m)_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}} \\
\|w_m\|^2_{H^1(l_1,l)} &= \|w_m\|^2_{L^2(l_1,l)} + \|(w_m)_x\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Por (2.26) e (2.27), as sequências $\{u_m\}_{m\geq 1}$, $\{v_m\}_{m\geq 1}$, $\{w_m\}_{m\geq 1}$, $\{U_m\}_{m\geq 1}$, $\{V_m\}_{m\geq 1}$, $\{W_m\}_{m\geq 1}$ são sequências de Cauchy em $H^1(0,l_0)$, $H^1(l_0,l_1)$, $H^1(l_1,l)$, $L^2(0,l_0)$, $L^2(l_0,l_1)$, $L^2(l_1,l)$ respectivamente.

Então, existem $\widehat{u} \in H^1(0,l_0)$, $\widehat{v} \in H^1(l_0,l_1)$, $\widehat{w} \in H^1(l_1,l)$, $\widehat{U} \in L^2(0,l_0)$, $\widehat{V} \in L^2(l_0,l_1)$, $\widehat{W} \in L^2(l_1,l)$ tais que $u_m \longrightarrow \widehat{u}$ em $H^1(0,l_0)$, $v_m \longrightarrow \widehat{v}$ em $H^1(l_0,l_1)$, $w_m \longrightarrow \widehat{w}$ em $H^1(l_1,l)$, $U_m \longrightarrow \widehat{U}$ em $L^2(0,l_0)$, $V_m \longrightarrow \widehat{V}$ em $L^2(l_0,l_1)$, $W_m \longrightarrow \widehat{W}$ em $L^2(l_1,l)$.
Além disso, por (2.25) e pela imersão de Sobolev (1.17), tem-se: $\widehat{u}(0) = 0 = \widehat{w}(l)$, $\widehat{u}(l_0) = \widehat{v}(l_0)$, $\widehat{v}(l_1) = \widehat{w}(l_1)$.

Então $\widehat{Z} := (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}) \in \mathcal{H}$. Logo,

$$\begin{aligned}\|Z_m - \widehat{Z}\|^2_{\mathcal{H}} = \kappa_1 \, \| \, (u_m - \widehat{u})_x \, \|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_2 \, \| \, (v_m - \widehat{v})_x \, \|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3 \, \| \, (w_m - \widehat{w})_x \, \|^2_{L^2(l_1,l)} + \\ \rho_1 \, \|U_m - \widehat{U}\|^2_{L^2(0,l_0)} + \rho_2 \, \|V_m - \widehat{V}\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3 \, \|W_m - \widehat{W}\|^2_{L^2(l_1,l)} \\ \leq \widehat{C} \, (\|u_m - \widehat{u}\|^2_{H^1(0,l_0)} + \|v_m - \widehat{v}\|^2_{H^1(l_0,l_1)} + \|w_m - \widehat{w}\|^2_{H^1(l_1,l)} + \\ \|U_m - \widehat{U}\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|V_m - \widehat{V}\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|W_m - \widehat{W}\|^2_{L^2(l_1,l)}) \, ,\end{aligned}$$

onde $\widehat{C} = max \, \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$.
Fazendo-se $m \longrightarrow +\infty$ tem-se $Z_m \longrightarrow \widehat{Z}$ em $(\mathcal{H} \, , \, \| \cdot \|_{\mathcal{H}})$. □

Observe que, a prova do teorema anterior também mostra que a aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^1_l} : \mathbb{H}^1_l \times \mathbb{H}^1_l \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{H}^1_l} := \kappa_1 \int_0^{l_0} (u_1)_x \, (\overline{u}_2)_x \, dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} (v_1)_x \, (\overline{v}_2)_x \, dx + \\ \kappa_3 \int_{l_1}^{l} (w_1)_x \, (\overline{w}_2)_x \, dx \, , \, \forall \, Y_1 = (u_1, v_1, w_1) \, , \, Y_2 = (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{H}^1_l \tag{2.28}$$

é um produto interno sobre $\mathbb{H}^1_l$. Além disso, $\left(\mathbb{H}^1_l \, , \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^1_l}\right)$ é um espaço de Hilbert.
Denotar-se-á por: $\|Y\|^2_{\mathbb{H}^1_l} = \langle Y, Y \rangle_{\mathbb{H}^1_l}$ a norma induzida pelo produto interno.

2.2 A Boa Colocação do Problema: Existência e Unicidade

O objetivo desta seção é mostrar o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para os modelos **VEF , EVF** e **EFV**, usando a teoria de semigrupos.

De $(2.19) - (2.24)$, para cada $i = 1, 2, 3$, o operador linear $\mathcal{A}_i : \mathcal{D}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_i)$, por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 \, \Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1} \, u_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_1} \, U_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2} \, v_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3} \, w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3} \, W\right) \\ \mathcal{A}_2 \, \Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1} \, u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2} \, v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2} \, V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3} \, w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3} \, W\right) \\ \mathcal{A}_3 \, \Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1} \, u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2} \, v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2} \, V, \frac{\kappa_3}{\rho_3} \, w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3} \, W_{xx}\right) \, ,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) =& \{\Phi \in \mathcal{H} : \, (U, V, W) \in \mathbb{H}^1_l, \, (\kappa_1 \, u + \kappa_0 \, U, v, w) \in \mathbb{H}^2, \, \kappa_1 \, u_x(l_0) + \kappa_0 \, U_x(l_0) = \kappa_2 \, v_x(l_0) \, , \\ & \kappa_2 \, v_x(l_1) = \kappa_3 \, w_x(l_1)\} \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) =& \{\Phi \in \mathcal{H} : \, (U, V, W) \in \mathbb{H}^1_l, \, (u, \kappa_2 \, v + \kappa_0 \, V, w) \in \mathbb{H}^2, \, \kappa_1 \, u_x(l_0) = \kappa_2 \, v_x(l_0) + \kappa_0 \, V_x(l_0) \, , \\ & \kappa_2 \, v_x(l_1) + \kappa_0 \, V_x(l_1) = \kappa_3 \, w_x(l_1)\} \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_3) =& \{\Phi \in \mathcal{H} : \, (U, V, W) \in \mathbb{H}^1_l, \, (u, v, \kappa_3 \, w + \kappa_0 \, W) \in \mathbb{H}^2, \, \kappa_1 \, u_x(l_0) = \kappa_2 \, v_x(l_0) \, , \\ & \kappa_2 \, v_x(l_1) = \kappa_3 \, w_x(l_1) + \kappa_0 \, W_x(l_1)\} \, .\end{aligned}$$

Lema 2.2. *Para cada* $i = 1, 2, 3$; $\mathcal{D}(\mathcal{A}_i)$ *é denso em* $\mathcal{H}$.

Demonstração. **Para** $i = 1$
Para mostrar a densidade, mostrar-se-á que seu complemento ortogonal contem apenas zero. Isto é, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp} = \{0\}$. Lembre-se que: $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp} \iff \langle f \,,\, h\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \,,\, \forall\, h \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.

É claro que $\{0\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp}$.

Seja $\widehat{\Phi} = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp}$. Então,

$$0 = \langle \widehat{\Phi} \,,\, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \Big(\kappa_1\, \widehat{u}_x\, \overline{u}_x + \rho_1\, \widehat{U}\, \overline{U}\Big)\, dx + \int_{l_0}^{l_1} \Big(\kappa_2\, \widehat{v}_x\, \overline{v}_x + \rho_2\, \widehat{V}\, \overline{V}\Big)\, dx + \int_{l_1}^{l} \Big(\kappa_3\, \widehat{w}_x\, \overline{w}_x + \rho_3\, \widehat{W}\, \overline{W}\Big)\, dx \,,\, \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,. \tag{2.29}$$

1. Observe-se que:

   $$\Phi_1 = (0, 0, 0, U, 0, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, U \in C_0^{\infty}(0, l_0) \Longrightarrow 0 = \langle \widehat{\Phi} \,,\, \Phi_1\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \widehat{U}\, \overline{U}\, dx \,,\, \forall\, U \in C_0^{\infty}(0, l_0)\,.$$

   Pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se: $\widehat{U} = 0$ em $L^2(0, l_0)$.

2. De modo semelhante, observa-se que

   $$(\bullet)\, \Phi_2 = (0, 0, 0, 0, V, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, V \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$$
   $$(\bullet)\, \Phi_3 = (0, 0, 0, 0, 0, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, W \in C_0^{\infty}(l_1, l)\,,$$

   então $0 = \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{V}\, \overline{V}\, dx \,,\, \forall\, V \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$ e $0 = \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{W}\, \overline{W}\, dx \,,\, \forall\, W \in C_0^{\infty}(l_1, l)\,.$
   Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se: $\widehat{V} = 0$ em $L^2(l_0, l_1)$ e $\widehat{W} = 0$ em $L^2(l_1, l)$.

3. Por outro lado,

   $$\Phi_4 = (u, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, u \in C_0^{\infty}(0, l_0) \Longrightarrow 0 = \langle \widehat{\Phi} \,,\, \Phi_4\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \widehat{u}_x\, \overline{u}_x\, dx \,,\, \forall\, u \in C_0^{\infty}(0, l_0)\,.$$

   Seja $u_1 \in C_0^{\infty}(0, l_0)$ qualquer, e tome $u \in C_0^{\infty}(0, l_0)$ tal que $u_x = u_1$. Então $0 = \displaystyle\int_0^{l_0} \widehat{u}_x\, \overline{u_1}\, dx \,,\, \forall\, u_1 \in C_0^{\infty}(0, l_0)$. Pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se: $\widehat{u} = 0$ em $H^1(0, l_0)$.

4. De modo semelhante,

   $$(\bullet)\, \Phi_5 = (0, v, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, v \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$$
   $$(\bullet)\, \Phi_6 = (0, 0, w, 0, 0, 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \,,\, \forall\, w \in C_0^{\infty}(l_1, l)\,,$$

   então $0 = \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{v}\, \overline{v_1}\, dx \,,\, \forall\, v_1 \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$ e $0 = \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{w}\, \overline{w_1}\, dx \,,\, \forall\, w_1 \in C_0^{\infty}(l_1, l)\,.$
   Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond tem-se: $\widehat{v} = 0$ em $H^1(l_0, l_1)$ e $\widehat{w} = 0$ em $H^1(l_1, l)$.

Portanto, de (2.29) tem-se: $\widehat{\Phi} = 0$.
Procedendo de modo semelhante, obtém-se que $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$ são densos em $\mathcal{H}$. $\square$

Lema 2.3. *Para cada* $i = 1, 2, 3$, *o operador linear* $\mathcal{A}_i$ *é dissipativo.*

Demonstração. **Para** $\mathcal{A}_1$.
Seja $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, então

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^{l_0} \left(\kappa_1 U_x \overline{u}_x + (\kappa_1 u_{xx} + \kappa_0 U_{xx}) \overline{U} \right) dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2 V_x \overline{v}_x + \kappa_2 v_{xx} \overline{V} \right) dx + \\
&\quad \int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3 W_x \overline{w}_x + (\kappa_3 w_{xx} - \gamma W) \overline{W} \right) dx \\
&= \int_0^{l_0} \kappa_1 U_x \overline{u}_x \, dx + \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 V_x \overline{v}_x \, dx + \int_{l_1}^{l} \kappa_3 W_x \overline{w}_x \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx + \\
&\quad \underbrace{\int_0^{l_0} (\kappa_1 u_{xx} + \kappa_0 U_{xx}) \overline{U} \, dx}_{(\oplus)} + \underbrace{\int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 v_{xx} \overline{V} \, dx}_{(\ominus)} + \underbrace{\int_{l_1}^{l} \kappa_3 w_{xx} \overline{W} \, dx}_{(\otimes)} .
\end{aligned}
$$

Integrando-se por partes em $(\oplus)$, $(\ominus)$, $(\odot)$ e usando a condição $u(0) = 0 = w(l)$, $V(l_0) = U(l_0)$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^{l_0} \kappa_1 U_x \overline{u}_x \, dx + \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 V_x \overline{v}_x \, dx + \int_{l_1}^{l} \kappa_3 W_x \overline{w}_x \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx + \\
&\quad \left[\kappa_1 u_x(l_0) \overline{U}(l_0) - \int_0^{l_0} \kappa_1 u_x \overline{U}_x \, dx + \kappa_0 U_x(l_0) \overline{U}(l_0) - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx \right] + \\
&\quad \left[\kappa_2 v_x(l_1) \overline{V}(l_1) - \kappa_2 v_x(l_0) \overline{V}(l_0) - \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 v_x \overline{V}_x \, dx \right] - \kappa_3 w_x(l_1) \overline{W}(l_1) - \int_{l_1}^{l} \kappa_3 w_x \overline{W}_x \, dx \\
&= \underbrace{[\kappa_1 u_x(l_0) + \kappa_0 U_x(l_0) - \kappa_2 v_x(l_0)]}_{(I)} \overline{U}(l_0) + \underbrace{[\kappa_2 v_x(l_1) - \kappa_3 w_x(l_1)]}_{(II)} \overline{V}(l_1) - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx \\
&\quad + \kappa_1 \int_0^{l_0} \left(U_x \overline{u}_x - \overline{U}_x u_x \right) dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} \left(V_x \overline{v}_x - \overline{V}_x v_x \right) dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} \left(W_x \overline{w}_x - \overline{W}_x w_x \right) dx \\
&\quad - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx .
\end{aligned}
$$

Usando-se as condições de transmissão (2.4), tem-se: $(I) = (II) = 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= 2 \kappa_1 i \int_0^{l_0} Im \, (U_x \overline{u}_x) \, dx + 2 \kappa_2 i \int_{l_0}^{l_1} Im \, (V_x \overline{v}_x) \, dx + 2 \kappa_3 i \int_{l_1}^{l} Im \, (W_x \overline{w}_x) \, dx \\
&\quad - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx .
\end{aligned}
$$

Tomando-se a parte real, obtém-se:

$$
Re \, \langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx \leq 0 , \quad \forall \, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) . \tag{2.30}
$$

Procedendo de modo semelhante para $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$, tem-se:

$$Re\,\langle \mathcal{A}_2\,\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_{l_0}^{l_1} |V_x|^2\,dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_2)\,, \tag{2.31}$$

$$Re\,\langle \mathcal{A}_3\,\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_{l_0}^{l_1} |V|^2\,dx - \kappa_0 \int_{l_1}^{l} |W_x|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_3)\,. \tag{2.32}$$

Portanto, os operadores são dissipativos. □

Lema 2.4. *Para cada* $i = 1, 2, 3$, *tem-se* $0 \in \varrho(\mathcal{A}_i)$.

Demonstração. **Para** $i = 1$: Mostrar-se-á que $\mathcal{A}_1^{-1}$ existe e pertence $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Afirmação 1 : Para cada $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, existe um único $\tilde{\Phi} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_1)$ tal que $\mathcal{A}_1\,\tilde{\Phi} = F$. Em efeito,
Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$.
Então

$$(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{H}_l^1 \quad \text{e} \quad (f_4, f_5, f_6) \in \mathbb{L}^2\,. \tag{2.33}$$

A equação $\mathcal{A}_1\,\Phi = F$ em termos do seus componentes está dada por

$$U = f_1 \in H^1(0, l_0) \tag{2.34}$$
$$V = f_2 \in H^1(l_0, l_1) \tag{2.35}$$
$$W = f_3 \in H^1(l_1, l) \tag{2.36}$$
$$\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,U_{xx} = \rho_1\,f_4 \in L^2(0, l_0) \tag{2.37}$$
$$\kappa_2\,v_{xx} = \rho_2\,f_5 \in L^2(l_0, l_1) \tag{2.38}$$
$$\kappa_3\,w_{xx} - \gamma\,W = \rho_3\,f_6 \in L^2(l_1, l)\,, \tag{2.39}$$

onde $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \{\Phi \in \mathcal{H} : (U, V, W) \in \mathbb{H}_l^1\,, (\kappa_1\,u + \kappa_0\,U, v, w) \in \mathbb{H}^2\,, \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}$.
Substituindo-se (2.34) , (2.36) em (2.37) , (2.39) respectivamente, obtém-se:

$$\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,(f_1)_{xx} = \rho_1\,f_4 := g_1 \in L^2(0, l_0) \tag{2.40}$$
$$\kappa_2\,v_{xx} = \rho_2\,f_5 := g_2 \in L^2(l_0, l_1) \tag{2.41}$$
$$\kappa_3\,w_{xx} = \rho_3\,f_6 + \gamma\,f_3 := g_3 \in L^2(l_1, l)\,. \tag{2.42}$$

Agora, o objetivo é mostrar que o sistema acima possui uma única solução $(u, v, w) \in \mathbb{H}_l^1$ tal que $(\kappa_1\,u + \kappa_0\,f_1, v, w) \in \mathbb{H}^2$. Para isso, usar-se-á o Teorema de Lax-Milgram.
Define-se a aplicação

$$B(.\,,\,.) : \mathbb{H}_l^1 \times \mathbb{H}_l^1 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } B(Y_1, Y_2) := \langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathbb{H}_l^1} = \kappa_1 \int_0^{l_0} (u_1)_x\,(\overline{u}_2)_x\,dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} (v_1)_x\,(\overline{v}_2)_x\,dx$$
$$+\kappa_3 \int_{l_1}^{l} (w_1)_x\,(\overline{w}_2)_x\,dx\,,\ \forall\,Y_1 = (u_1, v_1, w_1), Y_2 = (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{H}_l^1\,.$$

(•) É claro que $B(.\,,\,.)$ é uma **forma sesquilinear**.
(•) **Continuidade de** $B(.\,,\,.)$: $|B(Y_1, Y_2)| = |\langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathbb{H}_l^1}| \leq \|Y_1\|_{\mathbb{H}_l^1}\,\|Y_2\|_{\mathbb{H}_l^1}\,,\ \forall\,Y_1, Y_2 \in \mathbb{H}_l^1$.

$(\bullet)$ **Coercividade de** $B(.\,,.):\ B(Y,Y) = \langle Y,Y\rangle_{\mathbb{H}_l^1} = \|Y\|^2_{\mathbb{H}_l^1}\,,\ \forall\, Y \in \mathbb{H}_l^1\,.$
Por outro lado, define-se a aplicação

$$\varphi : \mathbb{H}_l^1 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi(Y) = -\int_0^{l_0} g_1\,\overline{u}\,dx - \int_{l_0}^{l_1} g_2\,\overline{v}\,dx - \int_{l_1}^{l} g_3\,\overline{w}\,dx\,,\ \forall\, Y = (u,v,w) \in \mathbb{H}_l^1\,.$$

É claro que φ é antilinear. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe uma única $\widehat{Y} = (\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) \in \mathbb{H}_l^1$ tal que $B(\widehat{Y},Y) = \varphi(Y)\,,\ \forall\, Y = (u,v,w) \in \mathbb{H}_l^1\,.$
Em particular,

$$\begin{cases} \kappa_1 \displaystyle\int_0^{l_0} \widehat{u}_x\,\overline{u}_x\,dx = -\int_0^{l_0} g_1\,\overline{u}\,dx\,, & \text{para} \quad u \in H^1(0,l_0),\ v = w = 0 \\ \kappa_2 \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{v}_x\,\overline{v}_x\,dx = -\int_{l_0}^{l_1} g_2\,\overline{v}\,dx\,, & \text{para} \quad v \in H^1(l_0,l_1),\ u = w = 0 \\ \kappa_3 \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{w}_x\,\overline{w}_x\,dx = -\int_{l_1}^{l} g_3\,\overline{w}\,dx\,, & \text{para} \quad w \in H^1(l_1,l),\ u = v = 0\,. \end{cases} \tag{2.43}$$

Considerando-se $u \in \mathcal{C}_0^\infty(0,l_0)\,,\ v \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0,l_1)\,,\ w \in \mathcal{C}_0^\infty(l_1,l)$ em $(2.43)\,,$ e pela definição de derivada fraca, tem-se:

$$\begin{cases} \kappa_1\,\widehat{u}_{xx} = g_1 \in L^2(0,l_0) \\ \kappa_2\,\widehat{v}_{xx} = g_2 \in L^2(l_0,l_1) \\ \kappa_3\,\widehat{w}_{xx} = g_3 \in L^2(l_1,l)\,. \end{cases} \tag{2.44}$$

Logo, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) := \left(\widehat{u} - \dfrac{\kappa_0}{\kappa_1}\,f_1, \widehat{v}, \widehat{w}\right) \in \mathbb{H}_l^1$ com $(\kappa_1\,\tilde{u} + \kappa_0\,f_1, \tilde{v}, \tilde{w}) = (\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) \in \mathbb{H}^2\,.$
Portanto, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ é a única solução do sistema $(2.40) - (2.42)\,.$
Assim, existe uma única $\tilde{\Phi} := (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}) \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_1)$ tal que $\mathcal{A}_1\,\tilde{\Phi} = F\,.$

Observação :
Aplicando-se o teorema (1.15) (Principio da Regularidade Elítica) em $(2.44)\,,$ tem-se:

$$\begin{aligned} \|\kappa_1\,\tilde{u} + \kappa_0\,f_1\|_{H^2(0,l_0)} &= \|\kappa_1\,\widehat{u}\|_{H^2(0,l_0)} \le N\,\|g_1\|_{L^2(0,l_0)} \\ \|\kappa_2\,\tilde{v}\|_{H^2(l_0,l_1)} &= \|\kappa_2\,\widehat{v}\|_{H^2(l_0,l_1)} \le N\,\|g_2\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ \|\kappa_3\,\tilde{w}\|_{H^2(l_1,l)} &= \|\kappa_3\,\widehat{w}\|_{H^2(l_1,l)} \le N\,\|g_3\|_{L^2(l_1,l)}\,, \end{aligned} \tag{2.45}$$

onde $N \ge 0$ é uma constante que não depende de Φ e $F\,.$

Afirmação $2\ :\ \mathcal{A}_1^{-1}$ é limitado.
Observe-se que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1^{-1}\,F\|^2_{\mathcal{H}} = \|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} = \underbrace{\kappa_1\,\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_2\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}}_{(I)} + \\ \underbrace{\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)}}_{(II)} \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$
\begin{aligned}
(\bullet)\ (I) &= \frac{1}{\kappa_1}\,\|\kappa_1\,u_x+\kappa_0\,(f_1)_x-\kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}+\kappa_2\,\|\widehat{v}_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\kappa_3\,\|\widehat{w}_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\\
&\le \frac{2}{\kappa_1}\left(\|\kappa_1\,u_x+\kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|\kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}\right)+\frac{1}{\kappa_2}\,\|\kappa_2\,\widehat{v}_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{1}{\kappa_3}\,\|\kappa_3\,\widehat{w}_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\\
&\le N_1\left(\|\kappa_1\,\widehat{u}\|^2_{H^1(0,l_0)}+\|\kappa_2\,\widehat{v}\|^2_{H^1(l_0,l_1)}+\|\kappa_3\,\widehat{w}\|^2_{H^1(l_1,l)}\right)+\frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}\\
&\underbrace{\le}_{(2.45)} N_1\,N^2\,\left(\|g_1\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|g_2\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\|g_3\|^2_{L^2(l_1,l)}\right)+\frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}\\
&= N_1\,N^2\left(\|\rho_1\,f_4\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|\rho_2\,f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\|\rho_3\,f_6+\gamma\,f_3\|^2_{L^2(l_1,l)}\right)+\frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}\\
&\le N_2\left(\|f_4\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\|f_6\|^2_{L^2(l_1,l)}+\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|(f_3)_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\right)\ ,\ N_2>0\\
&\le M_1\,\|F\|^2_{\mathcal{H}}\,, \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

onde $M_1>0$ é uma constante que não depende de Φ e F.
Por outro lado, aplicando-se o Lema 2.1 em (II), tem-se:

$$
\begin{aligned}
(\bullet\bullet)\ (II) &= \rho_1\,\|f_1\|^2_{L^2(0,l_0)}+\rho_2\,\|f_2\|^2_{L^2(l_0,l_1)}+\rho_3\,\|f_3\|^2_{L^2(l_1,l)}\\
&\le \rho_1\,C^2\,\|(f_1)_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+2\,\rho_2\,C^2\left(\|(f_1)_x\|^2_{L^2(0,l_0)}+\|(f_2)_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\right)+\rho_3\,\|(f_3)_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\\
&\le M_2\,\|F\|^2_{\mathcal{H}}\,, \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

onde $M_2>0$ é uma constante que não depende de Φ e F.
De $(2.46)-(2.48)$ se conclui que $\mathcal{A}_1^{-1}$ é limitado.
Logo, das afirmações 1 e 2, tem-se que $\mathcal{A}_1^{-1}\in\mathcal{L}\,(\mathcal{H})$. Assim, $0\in\varrho(\mathcal{A}_1)$.
Procedendo de modo semelhante para $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$, obtém-se: $0\in\varrho(\mathcal{A}_2)$ e $0\in\varrho(\mathcal{A}_3)$. □

Teorema 2.2. *Para cada* $i=1,2,3$, *o operador* $\mathcal{A}_i$ *gera um* C_0- *semigrupo* $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t))_{t\ge0}$ *de contrações sobre o espaço* $\mathcal{H}$.

Demonstração. Basta aplicar o teorema 1.30.

□

Teorema 2.3. *Para qualquer* $\Phi_0=(u_0,v_0,w_0,u_1,v_1,w_1)\in\mathcal{H}=\mathbb{H}^1_l\times\mathbb{L}^2$ *existe uma única solução* $\Phi=(u,v,w,u_t,v_t,w_t)$ *dos modelos* **VEF, EVF** *e* **EFV**, *satisfazendo*

$$\Phi\in C\,([0,+\infty[:\mathcal{H})\ .$$

Além disso, se $\Phi_0\in\mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i)$, *então* $\Phi\in C^1\,([0,+\infty[:\mathcal{H})\cap C\,([0,+\infty[:\mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i))$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, para cada $i=1,2,3$, $\mathcal{A}_i$ gera um C_0- semigrupo $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t))_{t\ge0}$ de contrações sobre $\mathcal{H}$. Então pelo Teorema de Existência e Unicidade, a aplicação

$$\Phi_i:[0,+\infty[\longrightarrow\mathcal{H}\quad\text{tal que}\quad\Phi_i(t)=\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t)\,\Phi_0$$

é a única solução do problema de valor inicial $\begin{cases}U_t=\mathcal{A}_i\,U\\ U(0)=\Phi_0\end{cases}$ com a condição $\Phi_i\in C\,([0,+\infty[:\mathcal{H})$.
Além disso, se $\Phi_0\in\mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i)$ então $\Phi_i\in C^1\,([0,+\infty[:\mathcal{H})\cap C\,([0,+\infty[:\mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i))$. □

Observe que, desde que usamos o Semigrupo associado ao problema para pesquisar a solubilidade dos problemas $(2.1) - (2.18)$, temos que relacionar entre a solução do semigrupo dado por $\Phi_i(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t)\,\Phi_0$ e solução do problema em estudo.

Faremos o análise para o modelo VEF .

Se $\Phi_0 \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}_1\right)$, ou seja $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{H}_l^1$, $(u_1, v_1, w_1) \in \mathbb{H}_l^1$ e $(\kappa_1\, u_0 + \kappa_0\, u_1, v_0, w_0) \in \mathbb{H}^2$, então $\Phi_1 \in C^1\left([0, +\infty[: \mathcal{H}\right) \cap C\left([0, +\infty[: \mathcal{D}\left(\mathcal{A}_1\right)\right)$ satisfaz em $\mathcal{H}$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_1\, U(t) \\ U(0) = \Phi_0 \end{cases} \tag{2.49}$$

Assim, $(u, v, w) \in C^1\left([0, +\infty[: \mathbb{H}_l^1\right) \cap C^2\left([0, +\infty[: \mathbb{L}^2\right)$ tais que verifica as condições de transmissão (2.4) e $(\kappa_1\, u + \kappa_0\, u_t, v, w) \in \mathbb{H}^2$, é solução do problema **VEF** em $\mathbb{L}^2$.
Além disso, as condições iniciais são satisfeitas no sentido forte e as condições de contorno são satisfeitas no sentido do traço.

Se $\Phi_0 \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}_1^2\right)$, então (u, v, w) é uma solução clássica do problema **VEF**.

Se $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ então $\Phi_1(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_1}(t)\,\Phi_0$ é uma solução integral do problema (2.49). Assim, (u, v, w) são soluções fracas do problema **VEF**.

Capítulo 3

Falta de Estabilidade Exponencial nos Modelos EVF e FVE

Neste capítulo se mostra que os semigrupos associados aos modelos **EVF** e **FVE** não são exponencialmente estáveis.
Mostrar que um sistema não possui decaimento exponencial quer dizer, que existem dados iniciais para os quais a solução pode ser arbitrariamente lenta. Mas também podem existir outros dados iniciais para os quais exista decaimento exponencial.

A prova da falta de estabilidade exponencial será baseado no teorema 1.38 (**Prüss - Huang - Renardy**).

Assim, para mostrar a falta de estabilidade exponencial, basta ver que o operador resolvente não é uniformemente limitado. Ou seja, é suficiente verificar o seguinte:

($\bullet$) Existem sequências $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $\{\Phi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ e $\{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}$ limitada, tais que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = +\infty\,,\ (i\,\lambda_n\, I - \mathcal{A}_2)\,\Phi_n = F_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\Phi_n\|_{\mathcal{H}} = +\infty\,.$$

No resto do capítulo se desenvolve as técnicas para atingir o objetivo.

O sistema resolvente associado ao modelo **EVF** é dado por:

$$i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_2\,\Phi = F\,, \tag{3.1}$$

onde $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$.
Lembre-se que $\mathcal{A}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é tal que, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ tem-se:

$$\mathcal{A}_2\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}\,V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W \right)\,.$$

Então o sistema (3.1) pode ser reescrita como

$$i\,\lambda\,u - U = f_1 \qquad em \qquad]0,l_0[\tag{3.2}$$
$$i\,\lambda\,v - V = f_2 \qquad em \qquad]l_0,l_1[\tag{3.3}$$
$$i\,\lambda\,w - W = f_3 \qquad em \qquad]l_1,l[\tag{3.4}$$
$$i\,\lambda\,\rho_1\,U - \kappa_1\,u_{xx} = \rho_1\,f_4 \qquad em \qquad]0,l_0[\tag{3.5}$$
$$i\,\lambda\,\rho_2\,V - \kappa_2\,v_{xx} - \kappa_0\,V_{xx} = \rho_2\,f_5 \qquad em \qquad]l_0,l_1[\tag{3.6}$$
$$i\,\lambda\,\rho_3\,W - \kappa_3\,w_{xx} + \gamma\,W = \rho_3\,f_6 \qquad em \qquad]l_1,l[\ , \tag{3.7}$$

com condições de transmissão

$$\begin{aligned} u(l_0) = v(l_0)\,, &\quad \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0)\,,\\ v(l_1) = w(l_1)\,, &\quad \kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

e condições de contorno $u(0) = 0$, $w(l) = 0$.

Considera-se uma solução particular, definida por $f_1 = f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = 0$ e $\rho_1\,f_4 = \kappa_1\,q$, onde q escolher-se-á depois.
Então o sistema $(3.2) - (3.7)$ pode ser escrita como:

$$\left\{\begin{aligned} U &= i\,\lambda\,u\\ V &= i\,\lambda\,v\\ W &= i\,\lambda\,w\\ i\,\lambda\,\rho_1\,U - \kappa_1\,u_{xx} &= \kappa_1\,q\\ i\,\lambda\,\rho_2\,V - \kappa_2\,v_{xx} - \kappa_0\,V_{xx} &= 0\\ i\,\lambda\,\rho_3\,W - \kappa_3\,w_{xx} + \gamma\,W &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \kappa_1\,u_{xx} + \lambda^2\,\rho_1\,u &= -\kappa_1\,q\\ (\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)v_{xx} + \lambda^2\,\rho_2\,v &= 0\\ \kappa_3\,w_{xx} + (\lambda^2\,\rho_3 - i\,\lambda\,\gamma)w &= 0\,. \end{aligned}\right.$$

Portanto,

$$u_{xx} + \alpha^2\,u = -q \tag{3.9}$$
$$v_{xx} + \beta^2\,v = 0 \tag{3.10}$$
$$w_{xx} + \sigma^2\,w = 0\,, \tag{3.11}$$

onde $\alpha^2 = \dfrac{\rho_1\,\lambda^2}{\kappa_1}$, $\beta^2 = \dfrac{\rho_2\,\lambda^2}{\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0}$, $\sigma^2 = \dfrac{\rho_3\,\lambda^2 - i\,\lambda\,\gamma}{\kappa_3}$.

Observação : Soluções das equações (3.9), (3.10) **e** (3.11).

1. Sejam $a_1\,,\,a_2 \in \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $b : I \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Denota-se por $L(y) := y'' + a_1\,y' + a_2\,y$, onde $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

   (a) **Teorema** (ver [11]). Se $r_1\,,\,r_2$ são raízes distintas do polinômio característico $p(r) = r^2 + a_1\,r + a_2$, então as funções

   $$\phi_1(x) = e^{r_1\,x} \quad e \quad \phi_2(x) = e^{r_2\,x}$$

são soluções de $L(y) = 0$, linearmente independentes em I .
Por outro lado, se r_1 , r_2 são raízes iguais, então as funções

$$\phi_1(x) = e^{r_1 x} \quad e \quad \phi_2(x) = x\, e^{r_1 x}$$

são soluções de $L(y) = 0$, linearmente independentes em I .

(b) **Teorema**(ver [11]). Sejam ϕ_1 , ϕ_2 soluções linearmente independentes de $L(y) = 0$.
Se ϕ é uma solução de $L(y) = 0$, então existem únicas constantes c_1 , $c_2 \in \mathbb{C}$ /
$\phi = c_1\, \phi_1 + c_2\, \phi_2$. Reciprocamente; $(c_1\, \phi_1 + c_2\, \phi_2)$ é solução de $L(y) = 0$, $\forall\, c_1$, $c_2 \in \mathbb{C}$.

(c) **Teorema** (ver [11]). Cada solução ψ de $L(y) = b$ sobre I , tem a forma

$$\psi = \psi_p + c_1\, \phi_1 + c_2\, \phi_2\, ,$$

onde ψ_p é uma solução particular, ϕ_1 e ϕ_2 são soluções linearmente independentes de $L(y) = 0$, e c_1 , $c_2 \in \mathbb{C}$. Uma solução particular ψ_p está dado por

$$\psi_p(x) = A(x)\, \phi_1(x) + B(x)\, \phi_2(x)\, ,$$

onde

$$A(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, \phi_2(t)}{\phi_1(t)\, \phi_2'(t) - \phi_1'(t)\, \phi_2(t)}\, dx\, ,\ B(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)\, \phi_1(t)}{\phi_1(t)\, \phi_2'(t) - \phi_1'(t)\, \phi_2(t)}\, dx\, .$$

Reciprocamente, cada ψ da forma (3.14) é uma solução de $L(y) = b$.

2. **Para a equação** (3.9) , **tem-se:**

$$u_{xx} + \alpha^2\, u = -q \tag{3.12}$$

$$u(0) = 0\, ,\ u(l_0) = v(l_0)\, . \tag{3.13}$$

(•) O polinômio característico $p(r) = r^2 + \alpha^2$ tem raízes distintas: $r_1 = i\, \alpha\, ,\, r_2 = -i\, \alpha$. Assim; $\phi_1(x) = e^{i\, \alpha\, x}$ e $\phi_2(x) = e^{-i\, \alpha\, x}$ são soluções de $u_{xx} + \alpha^2\, u = 0$, linearmente independentes em $[0, l_0]$.
(•) A solução geral de (3.12) é da forma: $u(x) = u_p(x) + c_1\, e^{i\, \alpha\, x} + c_2\, e^{-i\, \alpha\, x}, \forall\, x \in [0, l_0]$.
(•) Uma solução particular é $u_p(x) = A(x)\, e^{i\, \alpha\, x} + B(x)\, e^{-i\, \alpha\, x}$, onde:

$$A(x) = -\int_0^x \frac{-q(s)\, \phi_2(s)}{\phi_1(s)\, \phi_2'(s) - \phi_1'(s)\, \phi_2(s)}\, dx = \frac{i}{2\, \alpha} \int_0^x q(s)\, e^{-i\, \alpha\, s}\, ds\, .$$

$$B(x) = \int_0^x \frac{b(t)\, \phi_1(t)}{\phi_1(t)\, \phi_2'(t) - \phi_1'(t)\, \phi_2(t)}\, dx = \frac{-i}{2\, \alpha} \int_0^x q(s)\, e^{i\, \alpha\, s}\, ds\, .$$

Então, $$\begin{aligned} u_p(x) &= \left(\frac{i}{2\, \alpha} \int_0^x q(s)\, e^{-i\, \alpha\, s}\, ds \right) e^{i\, \alpha\, x} + \left(\frac{-i}{2\, \alpha} \int_0^x q(s)\, e^{i\, \alpha\, s}\, ds \right) e^{-i\, \alpha\, x} \\ &= \frac{i}{2\, \alpha} \int_0^x q(s) \left(e^{i\, \alpha\, (x-s)} - e^{-i\, \alpha\, (x-s)} \right) ds \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\, (x-s))\, ds\, . \end{aligned}$$

(•) Logo, $u(x) = c_1\, e^{i\,\alpha\,x} + c_2\, e^{-i\,\alpha\,x} - \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds\,.$

(•) Usando-se as condições de contorno (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1\, e^{i\,\alpha\, l_0} + c_2\, e^{-i\,\alpha\, l_0} &= \underbrace{u(l_0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^{l_0} q(s)\, \sin(\alpha\,(l_0 - s))\, ds}_{\mu}\,. \end{aligned}$$

Operando-se tem-se: $c_1 = \dfrac{\mu}{2\,\sinh(i\,\alpha\, l_0)}$ e $c_2 = -\dfrac{\mu}{2\,\sinh(i\,\alpha\, l_0)}$.

(•) Assim,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\mu}{2\,\sinh(i\,\alpha\, l_0)}\, e^{i\,\alpha\,x} - \frac{\mu}{2\,\sinh(i\,\alpha\, l_0)}\, e^{-i\,\alpha\,x} - \frac{1}{\alpha} \int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds \\ &= \frac{\mu}{2\,\sinh(i\,\alpha\, l_0)} \left(e^{i\,\alpha\,x} - e^{-i\,\alpha\,x}\right) - \frac{1}{\alpha} \int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds \\ &= \frac{\sin(\alpha\,x)}{\sin(\alpha\, l_0)}\, \mu - \frac{1}{\alpha} \int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds \\ &= u(l_0)\, \frac{\sin(\alpha\,x)}{\sin(\alpha\, l_0)} + \frac{\sin(\alpha\,x)}{\alpha\, \sin(\alpha\, l_0)} \int_0^{l_0} q(s)\, \sin(\alpha\,(l_0 - s))\, ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^x q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds\,. \end{aligned}$$

3. **Para a equação** (3.10), **tem-se:**

$$v_{xx} + \beta^2\, v = 0 \tag{3.14}$$

$$v(l_0) = u(l_0),\; v(l_1) = w(l_1)\,. \tag{3.15}$$

(•) As funções $\phi_1(x) = e^{i\,\beta\,x}$ e $\phi_2(x) = e^{-i\,\beta\,x}$ são soluções de (3.14), linearmente independentes em $[l_0, l_1]$.
(•) A solução geral de (3.14) é da forma: $v(x) = c_1\, e^{i\,\beta\,x} + c_2\, e^{-i\,\beta\,x}$, $\forall\, x \in [l_0, l_1]$.
(•) Usando-se as condições de contorno (3.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} c_1\, e^{i\,\beta\, l_0} + c_2\, e^{-i\,\beta\, l_0} &= u(l_0) \\ c_1\, e^{i\,\beta\, l_1} + c_2\, e^{-i\,\beta\, l_1} &= v(l_1)\,. \end{aligned}$$

Operando-se tem-se: $c_1 = \dfrac{v(l_1)\, e^{-i\,\beta\, l_0} - u(l_0)\, e^{-i\,\beta\, l_1}}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))}$ e $c_2 = \dfrac{u(l_0)\, e^{i\,\beta\, l_1} - v(l_1)\, e^{i\,\beta\, l_0}}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))}$.

(•) Assim,

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{v(l_1)\, e^{-i\,\beta\, l_0} - u(l_0)\, e^{-i\,\beta\, l_1}}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))}\, e^{i\,\beta\,x} + \frac{u(l_0)\, e^{i\,\beta\, l_1} - v(l_1)\, e^{i\,\beta\, l_0}}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))}\, e^{-i\,\beta\,x} \\ &= \frac{v(l_1)\left(e^{i\,\beta\,(x - l_0)} - e^{-i\,\beta\,(x - l_0)}\right)}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))} - \frac{u(l_0)\left(e^{i\,\beta\,(x - l_1)} - e^{-i\,\beta\,(x - l_1)}\right)}{2\,\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))} \\ &= v(l_1)\, \frac{\sinh(i\,\beta\,(x - l_0))}{\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))} + u(l_0)\, \frac{\sinh(i\,\beta\,(l_1 - x))}{\sinh(i\,\beta\,(l_1 - l_0))} \\ &= v(l_1)\, \frac{\sin(\beta\,(x - l_0))}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))} + u(l_0)\, \frac{\sin(\beta\,(l_1 - x))}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\,. \end{aligned}$$

4. **Para a equação** (3.11) , **tem-se:**

$$w_{xx} + \sigma^2 w = 0 \tag{3.16}$$

$$w(l_1) = v(l_1),\; w(l) = 0\,. \tag{3.17}$$

($\bullet$) As funções $\phi_1(x) = e^{i\,\sigma\,x}$ e $\phi_2(x) = e^{-i\,\sigma\,x}$ são soluções de (3.16) , linearmente independentes em $[l_1, l]$.
($\bullet$) A solução geral de (3.16) é da forma: $w(x) = c_1\, e^{i\,\sigma\,x} + c_2\, e^{-i\,\sigma\,x}$, $\forall\, x \in [l_1, l]$.
($\bullet$) Usando-se as condições de contorno (3.17) , obtém-se:

$$\begin{aligned} c_1\, e^{i\,\sigma\,l_1} + c_2\, e^{-i\,\sigma\,l_1} &= v(l_1) \\ c_1\, e^{i\,\sigma\,l} + c_2\, e^{-i\,\sigma\,l} &= 0\,. \end{aligned}$$

Operando-se tem-se: $c_1 = -\dfrac{v(l_1)\, e^{-i\,\sigma\,l}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))}$ e $c_2 = \dfrac{v(l_1)\, e^{i\,\sigma\,l}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))}$.
($\bullet$) Assim,

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{v(l_1)\, e^{-i\,\sigma\,l}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))}\, e^{i\,\sigma\,x} + \frac{v(l_1)\, e^{i\,\sigma\,l}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))}\, e^{-i\,\sigma\,x} \\ &= -\frac{v(l_1)\, e^{-i\,\sigma\,(l-x)}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))} + \frac{v(l_1)\, e^{i\,\sigma\,(l-x)}}{2\,\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))} \\ &= v(l_1)\, \frac{\sinh(i\,\sigma\,(l-x))}{\sinh(i\,\sigma\,(l-l_1))} \\ &= v(l_1)\, \frac{\sin(\sigma\,(l-x))}{\sin(\sigma\,(l-l_1))}\,. \end{aligned}$$

Em resumo, as soluções das equações $(3.9) - (3.11)$ são:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(l_0)\, \frac{\sin(\alpha\, x)}{\sin(\alpha\, l_0)} + \frac{\sin(\alpha\, x)}{\alpha\, \sin(\alpha\, l_0)} \int_0^{l_0} q(s)\, \sin(\alpha\,(l_0 - s))\, ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^{x} q(s)\, \sin(\alpha\,(x-s))\, ds \\ v(x) &= v(l_1)\, \frac{\sin(\beta\,(x-l_0))}{\sin(\beta\,(l_1-l_0))} + u(l_0)\, \frac{\sin(\beta\,(l_1-x))}{\sin(\beta\,(l_1-l_0))} \\ w(x) &= v(l_1)\, \frac{\sin(\sigma\,(l-x))}{\sin(\sigma\,(l-l_1))}\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, para determinar o sistema de soluções (3.18) , tem-se que calcular os valores de $u(l_0)$ e $v(l_1)$. Desenvolve-se isso no próximo lema.

Lema 3.1. *Sob as condições acima, tem-se*

$$u(l_0) = -\frac{\kappa_1}{G(\lambda) + j(\lambda)} \int_0^{l_0} q(s)\, \sin(\alpha\, s))\, ds\,,$$

onde $G(\lambda) = -\beta(\kappa_2 + i\,\kappa_0\,\lambda)\, \sin(\alpha\, l_0)\, \cot(\beta\,(l_1 - l_0)) - \kappa_1\, \alpha\, \cos(\alpha\, l_0)$ *e* j *é tal que* $j(\lambda) \longrightarrow 0$ *quando* $\lambda \longrightarrow \infty$. *Além disso,* $u(l_0) = h(\lambda)\, v(l_1)$, *onde*

$$h(\lambda) = [\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)\cot(\beta\,(l_1 - l_0)) + \kappa_3\,\sigma\, \cot(\sigma\,(l-l_1))] \left[\frac{\sin(\beta\,(l_1-l_0))}{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)}\right]\,.$$

Demonstração. Observe-se que:

$$(\bullet)\ \text{De} \quad (3.3) \quad \text{quando} \quad f_2 = 0 \quad : \quad V_x = i\,\lambda\, v_x \tag{3.19}$$

$$(\bullet)\ v_x = \frac{\beta\, v(l_1)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\ \cos(\beta\,(x - l_0)) - \frac{\beta\, u(l_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\ \cos(\beta\,(l_1 - x)) \tag{3.20}$$

$$(\bullet)\ w_x = \frac{-\sigma\, v(l_1)}{\sin(\sigma\,(l - l_1))}\ \cos(\sigma\,(l - x)) \tag{3.21}$$

$$(\bullet)\ u_x = \frac{\alpha\, u(l_0)}{\sin(\alpha\, l_0)}\ \cos(\alpha\, x) + \frac{\cos(\alpha\, x)}{\sin(\alpha\, l_0)} \int_0^{l_0} q(s)\ \sin(\alpha\,(l_0 - s))\, ds - \int_0^{x} q(s)\ \cos(\alpha\,(x - s))\, ds\,. \tag{3.22}$$

Usando-se $(3.19) - (3.21)$ na condição de transmissão $\kappa_2\, v_x(l_1) + \kappa_0\, V_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1) \\
\Longleftrightarrow\ & (\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0) \left[\beta\, v(l_1)\ \cot(\beta\,(l_1 - l_0)) - \frac{\beta\, u(l_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\right] = -\kappa_3\, \sigma\, v(l_1)\ \cot(\sigma\,(l - l_1)) \\
\Longleftrightarrow\ & [\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0) \cot(\beta\,(l_1 - l_0)) + \kappa_3\, \sigma\ \cot(\sigma\,(l - l_1))]\, v(l_1) = \left[\frac{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\right] u(l_0)\,.
\end{aligned}$$

Logo

$$u(l_0) = h(\lambda)\, v(l_1)\,, \tag{3.23}$$

onde $\quad h(\lambda) = [\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0) \cot(\beta\,(l_1 - l_0)) + \kappa_3\, \sigma\ \cot(\sigma\,(l - l_1))] \left[\dfrac{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)}\right]$.

Note-se que $|h(\lambda)| \longrightarrow +\infty$ quando $|\beta| \longrightarrow +\infty$.
Por outro lado, usando-se $(3.19) - (3.22)$ na condição de transmissão $\kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0) + \kappa_0\, V_x(l_0)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\kappa_1\, u_x(l_0) = (\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)\, v_x(l_0) \\
\Longleftrightarrow\ & \kappa_1\, \alpha\, u(l_0)\, \frac{\cos(\alpha\, l_0)}{\sin(\alpha\, l_0)} + \kappa_1\, \frac{\cos(\alpha\, l_0)}{\sin(\alpha\, l_0)} \int_0^{l_0} q(s)\ \sin(\alpha(l_0 - s))\, ds - \kappa_1 \int_0^{l_0} q(s)\ \cos(\alpha(l_0 - s))\, ds = \\
&(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0) \left[\frac{\beta\, v(l_1)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))} - \frac{\beta\, u(l_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\ \cos(\beta\,(l_1 - l_0))\right] \\
\Longleftrightarrow\ & \kappa_1\, \alpha\, u(l_0)\ \cot(\alpha\, l_0) + \kappa_1 \int_0^{l_0} q(s)\, [\cot(\alpha\, l_0) \sin(\alpha(l_0 - s)) - \cos(\alpha(l_0 - s))]\ ds = \\
&\left[\frac{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\right] \left[\frac{1}{h(\lambda)} - \cos(\beta\,(l_1 - l_0))\right] u(l_0) \\
\Longleftrightarrow\ & \kappa_1\, \alpha\, u(l_0)\ \cot(\alpha\, l_0) - \frac{\kappa_1}{\sin(\alpha\, l_0)} \int_0^{l_0} q(s)\ \sin(\alpha\, s)\, ds = \left[\frac{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\right] \left[\frac{1}{h(\lambda)} - \cos(\beta\,(l_1 - l_0))\right] u(l_0) \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\left[\frac{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0) \sin(\alpha\, l_0)}{\sin(\beta\,(l_1 - l_0))}\right] \left[\frac{1}{h(\lambda)} - \cos(\beta\,(l_1 - l_0))\right] - \kappa_1\, \alpha\ \cos(\alpha\, l_0)\right) u(l_0) = \\
&- \kappa_1 \int_0^{l_0} q(s)\ \sin(\alpha\, s)\, ds
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\underbrace{\left[\frac{\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)\sin(\alpha\,l_0)}{h(\lambda)\,\sin(\beta\,(l_1 - l_0))} \right]}_{j(\lambda)} + \underbrace{[-\beta\,(\kappa_2 + i\,\lambda\,\kappa_0)\sin(\alpha\,l_0)\,\cot(\beta\,(l_1 - l_0)) - \kappa_1\,\alpha\,\cos(\alpha\,l_0)]}_{G(\lambda)} \right) u(l_0)$$

$$= -\kappa_1 \int_0^{l_0} q(s)\,\sin(\alpha\,s)\,ds\,.$$

Note-se que $j(\lambda) \longrightarrow 0$ quando $\lambda \longrightarrow \infty$, onde a conclusão segue. $\square$

Agora se está en condições de mostrar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.1. *O modelo* $\mathbf{EVF}$ *não é exponencialmente estável. Além disso, existe uma sequêcia* $\lambda_n \geq C_0\,n$ *e uma sequência de soluções* Φ_n *do sistema resolvente tal que:*

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_0\,n\,.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se

$$\lambda_n = \frac{1}{l_0}\sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}}\left(2\,n\,\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ F_n = (0,0,0,\frac{\kappa_1}{\rho_1}\,q_n,0,0) \in \mathcal{H}\,, \quad q_n(s) = \sin(\alpha_n\,s)\,,\ s \in (0,l_0)$$
$$\Phi_n = (u_n, v_n, w_n, U_n, V_n, W_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) \quad \text{onde,}$$

u_n , v_n , w_n estão definidas em (3.18) e $U_n = i\,\lambda_n\,u_n$, $V_n = i\,\lambda_n\,v_n$, $W_n = i\,\lambda_n\,w_n$.
Lembre-se que: $\alpha_n = \sqrt{\dfrac{\rho_1}{\kappa_1}}\,\lambda_n$ e $\beta_n^2 = \dfrac{\rho_2}{\kappa_2 + i\,\lambda_n\,\kappa_0}\,\lambda_n^2$.
Então $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, $\alpha_n \longrightarrow +\infty$ e por construção $i\,\lambda_n\,\Phi_n - \mathcal{A}_2\,\Phi_n = F_n$.
Por outro lado,

$$\alpha_n\,l_0 = 2\,n\,\pi_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ \sin(\alpha_n\,l_0) = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\,,\ \cos(\alpha_n\,l_0) = \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\,,\ \tan(\alpha_n\,l_0) = \tan(\frac{1}{\sqrt{n}})\,.$$

Além disso, para n grande o suficiente tem-se

$$\alpha_n\,l_0 \approx 2\,n\,\pi\,,\ \sin(\alpha_n\,l_0) \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\ \cos(\alpha_n\,l_0) \approx 1\,,\ \tan(\alpha_n\,l_0) \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Logo,

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \left(\frac{\kappa_1}{\rho_1}\right)^2 \|q_n\|_{L^2(0,l_0)}^2 = \left(\frac{\kappa_1}{\rho_1}\right)^2 \left(\frac{l_0}{2} - \frac{\sin(2\,\alpha_n\,l_0)}{4\alpha_n}\right) \leq \left(\frac{\kappa_1}{\rho_1}\right)^2 \left(\frac{l_0}{2} + \frac{1}{4\alpha_n}\right) \longrightarrow \frac{l_0}{2}\left(\frac{\kappa_1}{\rho_1}\right)^2 ,$$

ou seja é limitada.
Por outro lado,

$$\|\Phi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1\,\|U_n\|_{L^2(0,l_0)}^2 = \rho_1\,\|\lambda_n\,u_n\|_{L^2(0,l_0)}^2 = \kappa_1\,\|\alpha_n\,u_n\|_{L^2(0,l_0)}^2\,, \tag{3.24}$$

onde

$$\alpha_n\,u_n(x) = \alpha_n\,u_n(l_0)\,\frac{\sin(\alpha_n\,x)}{\sin(\alpha_n\,l_0)} + \frac{\sin(\alpha_n\,x)}{\sin(\alpha_n\,l_0)}\int_0^{l_0} q_n(s)\,\sin(\alpha_n(l_0 - s))\,ds - \int_0^{x} q_n(s)\,\sin(\alpha_n(x - s))\,ds \tag{3.25}$$

Pelo Lema 3.1 tem-se

$$u_n(l_0) = -\frac{\kappa_1}{G(\lambda_n)+j(\lambda_n)}\int_0^{l_0} q_n(s)\,\sin(\alpha_n\, s))\,ds\,. \tag{3.26}$$

Observe que

$$\frac{G(\lambda_n)+j(\lambda_n)}{\lambda_n} = \left[\frac{-\beta_n(\kappa_2+i\,\kappa_0\,\lambda_n)\,\sin(\alpha_n\,l_0)\,\cot(\beta_n(l_1-l_0))}{\lambda_n} + \frac{-\kappa_1\,\alpha_n\,\cos(\alpha_n\,l_0)+j(\lambda_n)}{\lambda_n}\right] \tag{3.27}$$

Como

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\beta_n(\kappa_2+i\,\kappa_0\,\lambda_n)\,\sin(\alpha_n\,l_0)\,\cot(\beta_n(l_1-l_0))}{\lambda_n} = c\,\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{-\kappa_1\,\alpha_n\,\cos(\alpha_n\,l_0)+j(\lambda_n)}{\lambda_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} -\sqrt{\rho_1\,\kappa_1}\,\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})+j(\lambda_n) = -\sqrt{\rho_1\,\kappa_1}$$

Então de (3.27) obtém-se

$$\frac{-\kappa_1}{G(\lambda_n)+j(\lambda_n)} = \frac{-\kappa_1}{-\beta_n(\kappa_2+i\,\kappa_0\,\lambda_n)\,\sin(\alpha_n\,l_0)\,\cot(\beta_n(l_1-l_0))-\kappa_1\,\alpha_n\,\cos(\alpha_n\,l_0)+j(\lambda_n)} \approx \frac{c_1}{\lambda_n}$$

para λ_n grande o suficiente, onde $c_1\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Logo, de (3.26) tem-se

$$u_n(l_0) = \frac{c_1}{\lambda_n}\int_0^{l_0} q_n(s)\,\sin(\alpha_n\,s)ds = \frac{c_1}{\lambda_n}\int_0^{l_0} q_n(s)\,\sin(\alpha_n(l_0-s))\,ds \tag{3.28}$$

Substituindo-se (3.28) em (3.25) obtém-se

$$\alpha_n\,u_n(x) = (c_2+1)\,\frac{\sin(\alpha_n\,x)}{\sin(\alpha_n\,l_0)}\,Q_n(l_0)-Q_n(x)\,, \tag{3.29}$$

onde $Q_n(x) := \displaystyle\int_0^x q_n(s)\,\sin(\alpha_n(x-s))ds$ e $c_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Observe que

$$Q_n(x) = \int_0^x \sin(\alpha_n\,x)\,\sin(\alpha_n(x-s))ds = \frac{\sin^3(\alpha_n\,x)}{2\,\alpha_n} - \frac{x\,\cos(\alpha_n\,x)}{2} + \frac{\cos(\alpha_n\,x)\,\sin(2\,\alpha_n\,x)}{4\,\alpha_n} \quad \text{e}$$

$$Q_n(l_0) = \frac{\pi}{n^{5/2}} - \frac{l_0\,\cos(\alpha_n)}{2} + \frac{\cos(\alpha_n\,l_0)}{n^{3/2}} \approx -\frac{l}{2}$$

Além disso,

$$\int_0^{l_0}|Q(x)|^2\,dx \geq \int_0^{l_0}\frac{x^2\,\cos^2(\alpha_n\,x)}{8}\,dx - \frac{C}{\alpha_n^2} \geq \frac{l_0^3}{48} - \frac{C}{|\alpha_n|} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{l_0}\left|c_2\,\cos(\alpha_n\,x)-(c_2\,\cos(\alpha_n\,l_0)+1)\,\frac{\sin(\alpha_n\,x)}{\sin(\alpha_n\,l_0)}\right|^2 ds &\geq \frac{|c_2\,\cos(\alpha_n\,l_0)+1)|}{2\,\sin^2(\alpha_n\,l_0)}\int_0^{l_0}\sin^2(\alpha_n\,x)dx - C\\ &\approx C\,n - C\end{aligned} \tag{3.31}$$

Usando-se as desigualdades (3.29), (3.30) e (3.31) em (3.24) para n grande o suficiente, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|\Phi_n\|^2_{\mathcal{H}} \geq \kappa_1\,\|\alpha_n\,u_n\|^2_{L^2(0,l_0)} \geq C\,n - C\,,$$

onde a conclusão segue. $\square$

Capítulo 4

Estabilidade Exponencial nos Modelos VEF, EFV, VFE, FEV

Neste capítulo se mostra a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao problema de transmissão desde que a parte viscosa não está no meio da viga.

Consideremos o modelo VEF.

Lembre-se que, o semigrupo associado ao problema de transmissão **VEF** é dado por $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_1}(t))_{t\geq 0}$, onde

$$\mathcal{A}_1\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_1}\,U_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right)\,,\ \forall\,\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,,$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \{\Phi \in \mathcal{H} :\ (U, V, W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (\kappa_1\,u + \kappa_0\,U, v, w) \in \mathbb{H}^2\,,\ \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,,$$
$$\kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}\,.$$

O objetivo é mostrar o **Teorema 4.1**, que diz: o semigrupo associado ao problema de transmissão **VEF**, é exponencialmente estável.
A prova deste teorema está baseado em verificar as condições necessárias e suficientes do teorema 1.38 (**Prüss - Huang - Renardy**).

Antes provar-se-á uns lemas úteis que irão desempenhar um papel importante.

Lema 4.1. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ *e* $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$. *Se* $(i\,\lambda\,I - \mathcal{A}_1)\,\Phi = F$, *então*

$$\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{4.1}$$

Demonstração. Hipóteses,

$$i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_1\,\Phi = F\,. \tag{4.2}$$

A equação espectral (4.2) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
i\,\lambda\,u - U &= f_1 && em &&]0, l_0[&& (4.3)\\
i\,\lambda\,\rho_1\,U - \kappa_1\,u_{xx} - \kappa_0\,U_{xx} &= \rho_1\,f_4 && em &&]0, l_0[&& (4.4)\\
i\,\lambda\,v - V &= f_2 && em &&]l_0, l_1[&& (4.5)\\
i\,\lambda\,\rho_2\,V - \kappa_2\,v_{xx} &= \rho_2\,f_5 && em &&]l_0, l_1[&& (4.6)\\
i\,\lambda\,w - W &= f_3 && em &&]l_1, l[&& (4.7)\\
i\,\lambda\,\rho_3\,W - \kappa_3\,w_{xx} + \gamma\,W &= \rho_3\,f_6 && em &&]l_1, l[\ , && (4.8)
\end{aligned}
$$

com condições de transmissão

$$
\begin{aligned}
&u(l_0) = v(l_0)\,, \quad \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,,\\
&v(l_1) = w(l_1)\,, \quad \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\,,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

e condições de contorno

$$
u(0) = 0\,,\ w(l) = 0\,.
$$

Por outro lado, lembre-se que $\mathcal{A}_1$ é um operador dissipativo e

$$
Re\,\langle \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \le 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_1)\ . \tag{4.10}
$$

Então, multiplicando-se a equação (4.2) por Φ, obtém-se:

$$
\langle F\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = i\,\lambda\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}}\,.
$$

Tomando-se a parte real e usando (4.10), tem-se:

$$
\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx = -Re\,\langle \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = Re\,\langle F\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} \le |\langle F\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}}| \le \|F\|_{\mathcal{H}}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,.
$$

Assim,

$$
\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \le \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.
$$

□

Lema 4.2. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \kappa > 0\,,\ \gamma \ge 0$ *e* $F = (f\,,\,g) \in H^1(a,b) \times L^2(a,b)\,.$
Para qualquer solução forte $Z = (\psi\,,\,\Psi) \in H^1(a,b) \times L^2(a,b)$ *do sistema*

$$
\begin{aligned}
i\,\lambda\,\psi - \Psi &= f \quad em \quad]a, b[&& (4.11)\\
i\,\lambda\,\rho\,\Psi - \kappa\,\psi_{xx} + \gamma\,\Psi &= g \quad em \quad]a, b[\ , && (4.12)
\end{aligned}
$$

existe uma constante $C > 0$, *que não depende de* Z , F *e* λ, *tal que*

$$
|\psi_x(a)|^2 + |\Psi(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2 + |\Psi(b)|^2 \le C \int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\,dx + C\,\|Z\|\,\|F\|\,, \tag{4.13}
$$

onde $\|Z\| = \left(\|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)} + \|\Psi\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$ *e* $\|F\| = \left(\|f_x\|^2_{L^2(a,b)} + \|g\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$.
Além disso, para $\gamma = 0$, *tem-se:*

$$\int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\, dx \leq C\,(|\psi_x(a)|^2 + |\Psi(a)|^2) + C\,\|Z\|\,\|F\|\,, \tag{4.14}$$

$$\int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\, dx \leq C\,(|\psi_x(b)|^2 + |\Psi(b)|^2) + C\,\|Z\|\,\|F\|\,. \tag{4.15}$$

Demonstração. De (4.11) , tem-se:

$$\overline{i\,\lambda\,\psi_x} = \overline{\Psi}_x + \overline{f}_x\,. \tag{4.16}$$

1. **Mostrar-se-á a desigualdade** (4.13) **.**

Multiplicando-se (4.12) por $\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x$ e usando (4.16) , obtém-se:

$$-\rho\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(\overline{i\,\lambda\,\psi_x}\right)\Psi - \kappa\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} + \gamma\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\psi}_x = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g\,\overline{\psi}_x$$

$$\Longleftrightarrow -\rho\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\Psi}_x - \kappa\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g\,\overline{\psi}_x + \rho\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{f}_x - \gamma\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\psi}_x$$

Integrando-se e tomando a parte real:

$$-\rho\,Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx - \kappa\,Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g\,\overline{\psi}_x\,dx + \rho\,Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{f}_x\,dx - \gamma\,Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\psi}_x\,dx \tag{4.17}$$

Observe-se que:

$$(\bullet)\ \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)|\Psi|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\Psi|^2\,dx - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\Psi}\,\Psi_x\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\ Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx = \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_a^b |\Psi|^2\,dx \tag{4.18}$$

$$(\bullet\bullet)\ \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)|\psi_x|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\psi_x|^2\,dx - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\psi_x\,\overline{\psi}_{xx}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\ Re\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\,dx \tag{4.19}$$

Substituindo-se (4.18) e (4.19) em (4.17) , e tomando módulo, obtém-se:

$$\rho\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2\right) + \kappa\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) \leq \frac{\rho}{2}\int_a^b |\Psi|^2\,dx + \frac{\kappa}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\,dx + \int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right||g|\,|\psi_x|\,dx + \rho\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right||\Psi|\,|f_x|\,dx + \gamma\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right||\Psi|\,|\psi_x|\,dx\,. \tag{4.20}$$

Sejam $C_1 = \left(\dfrac{b-a}{4}\right)\min\{\rho\,,\,\kappa\}$ e $C_2 = \max\{1\,,\,\rho\,,\,\kappa\,,\,\gamma\}$.
Como $\left|x - \dfrac{a+b}{2}\right| \leq \dfrac{b-a}{2}$, $\forall\, x \in [a,b]$, então em (4.20) , tem-se:

$$C_1\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2 + |\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) \leq C_2 \int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + C_2\left(\frac{b-a}{2}\right)\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x| + |\Psi|\,|\psi_x|)dx\,. \tag{4.21}$$

Observe-se que:

$$\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x| + |\Psi|\,|\psi_x|)\,dx \leq \|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} + \|g\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} + \|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|f_x\|_{L^2(a,b)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right) + \left(\|g\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + \|Z\|\,\|F\|\,. \tag{4.22}$$

Logo, usando-se a desigualdade (4.22) em (4.21) , obtém-se:

$$\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2 + |\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) \leq \frac{C_2}{C_1}\left(1 + \frac{b-a}{4}\right)\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + \frac{C_2\,(b-a)}{2\,C_1}\,\|Z\|\,\|F\|$$
$$\leq \widehat{C}_1 \int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + \widehat{C}_1\,\|Z\|\,\|F\|\,,$$

onde $\widehat{C}_1 = \max\left\{\dfrac{C_2}{C_1}\left(1 + \dfrac{b-a}{4}\right)\,,\,\dfrac{C_2\,(b-a)}{2\,C_1}\right\}$ é uma constante que não depende de $Z\,, F$ e λ .

2. **Mostrar-se-á a desigualdade** (4.14) .
Multplicando-se (4.12) por $(x-b)\,\overline{\psi}_x$ e usando (4.16) , obtém-se:

$$-\rho\,(x-b)\,\left(\overline{i\,\lambda\,\psi_x}\right)\,\Psi - \kappa\,(x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} = (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x$$
$$\Longleftrightarrow -\rho\,(x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x - \kappa\,(x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} = (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x + \rho\,(x-b)\,\Psi\,\overline{f}_x\,.$$

Integrando-se e tomando a parte real:

$$-\rho\,Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx - \kappa\,Re\int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = Re\int_a^b (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x\,dx + \rho\,Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{f}_x\,dx\,. \tag{4.23}$$

Observe-se que:

$$(\bullet)\quad \int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx = (x-b)\,|\Psi|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\Psi|^2\,dx - \int_a^b (x-b)\,\overline{\Psi}\,\Psi_x\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \quad Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\Psi(a)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\Psi|^2\,dx \tag{4.24}$$

$$(\bullet\bullet) \quad \int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = (x-b)\,|\psi_x|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\psi_x|^2\,dx - \int_a^b (x-b)\,\psi_x\,\overline{\psi}_{xx}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad Re\int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\psi_x(a)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\,dx \qquad (4.25)$$

Substituindo-se (4.25) e (4.24) em (4.23), e tomando módulo, obtém-se:

$$\frac{\rho}{2}\int_a^b |\Psi|^2\,dx + \frac{\kappa}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\,dx \le \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\rho\,|\Psi(a)|^2 + \kappa\,|\psi_x(a)|^2\right) + \int_a^b \left(|x-b|\,|g|\,|\psi_x| + \rho\,|x-b|\,|\Psi|\,|f_x|\right)dx\,. \qquad (4.26)$$

Sejam $C_3 = \dfrac{1}{2}\min\{\rho\,,\,\kappa\}$ e $C_4 = (b-a)\,C_2$.
Como $|x-b| \le b-a\,, \forall\, x \in [a,b]$, então em (4.26), tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right)dx &\le \frac{C_4}{C_3}\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \frac{C_2}{C_3}\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x|)dx\\
&\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\,\|g\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} + \|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|f_x\|_{L^2(a,b)}\\
&\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\left(\|g\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}\\
&\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\,\|Z\|\,\|F\|\,,
\end{aligned}$$

onde $\widehat{C}_2 = \max\left\{\dfrac{C_4}{C_3}\,,\,\dfrac{C_2}{C_3}\right\}$ é uma constante que não depende de $Z\,, F$ e λ.

3. **Mostrar-se-á a desigualdade** (4.15).
Multplicando-se (4.12) por $(x-a)\,\overline{\psi}_x$, usando (4.16), integrando e tomando a parte real, obtém-se:

$$-\rho\,Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx - \kappa\,Re\int_a^b (x-a)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = Re\int_a^b (x-a)\,g\,\overline{\psi}_x\,dx + \rho\,Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{f}_x\,dx\,. \qquad (4.27)$$

Observe-se que:

$$(\bullet) \quad Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\Psi(b)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\Psi|^2\,dx \qquad (4.28)$$

$$(\bullet\bullet) \quad Re\int_a^b (x-a)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\psi_x(b)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\,dx\,. \qquad (4.29)$$

Substituindo-se (4.29) e (4.28) em (4.27), e operando de modo semelhante ao caso anterior, tem-se:

$$\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right)dx \le \widehat{C}_3\left(|\Psi(b)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) + \widehat{C}_3\,\|Z\|\,\|F\|\,,$$

onde $\widehat{C}_3$ é uma constante que não depende de $Z\,, F$ e λ.
Logo, baseando-se nos casos anteriores, basta tomar $C = \max\left\{\widehat{C}_1\,,\,\widehat{C}_2\,,\,\widehat{C}_3\right\}$. □

Agora mostrar-se-á o teorema central do capítulo.

Teorema 4.1. *O semigrupo associado ao problema de transmissão decai exponencialmente, quando o tempo vai para infinito, se e somente se, a componente viscosa não está no meio da viga.*

Demonstração. **Condição necessária.**
Se a parte viscosa está no meio da viga, do **Teorema** 3.1 segue que o modelo não é exponencialmemte estável.

Condição suficiente.
Suponhamos que a componente viscosa não está no meio da viga.
Consideremos o modelo VEF .
Baseados no **Teorema** 1.38, tem-se que provar que o eixo imaginário está contido em $\varrho(\mathcal{A}_1)$ e que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário.

Mostrar-se-á : $i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Desde que $\mathcal{A}_1$ é um operador fechado e $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ tem mergulho compacto sobre o espaço fase $\mathcal{H}$, então o espectro $\sigma(\mathcal{A}_1)$, só contém valores próprios. Assim, é suficiente provar que $\sigma(\mathcal{A}_1)$ não contém valor próprio imaginário nenhum.
Ver-se-á isso raciocinando por contradição : Suponha que existe um valor próprio imaginário $i\,\lambda_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Isto é

$$i\,\lambda_0\,\Phi_0 - \mathcal{A}_1\,\Phi_0 = 0\,, \tag{4.30}$$

onde $0 \neq \Phi_0 = (u_0, v_0, w_0, U_0, V_0, W_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.
Reescrevendo (4.30) :

$$i\,\lambda_0\,u_0 - U_0 = 0 \tag{4.31}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_1\,U_0 - \kappa_1\,(u_0)_{xx} - \kappa_0\,(U_0)_{xx} = 0 \tag{4.32}$$
$$i\,\lambda_0\,v_0 - V_0 = 0 \tag{4.33}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_2\,V_0 - \kappa_2\,(v_0)_{xx} = 0 \tag{4.34}$$
$$i\,\lambda_0\,w_0 - W_0 = 0 \tag{4.35}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_3\,W_0 - \kappa_3\,(w_0)_{xx} + \gamma\,W_0 = 0\,. \tag{4.36}$$

Usando-se o Lema 4.1 e as relações (4.31) e (4.35), obtém-se:

$$W_0 = U_0 = 0 = u_0 = w_0\,. \tag{4.37}$$

Por outro lado, das relações (4.33) e (4.34), tem-se:

$$-\lambda_0^2\,\rho_2\,v_0 - \kappa_2\,(v_0)_{xx} = 0\,. \tag{4.38}$$

Além disso, usando-se (4.37) nas condições de transmissão (4.9), obtém-se:

$$v_0(l_0) = v_0(l_1) = 0 \quad \text{e} \quad (v_0)_x(l_0) = (v_0)_x(l_1) = 0\,. \tag{4.39}$$

Logo, considerando-se as relações (4.38) e (4.39) como um problema de valor inicial em $x = l_0$, tem-se $v_0 = 0$. Mais ainda, de (4.33) obtém-se $V_0 = 0$.

Portanto $\Phi_0 = 0\,,$ mas isso é uma contradição.
Assim, $i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)\,.$

Mostrar-se-á : O operador resolvente está uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Desde que o operador resolvente é analítica, mostrar-se-á que é uniformemente limitado em valores de λ sobre o eixo imaginário e fora de uma bola fechada cujo raio não depende de Φ , F e λ .

Sejam $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ e $i\,\lambda \in i\,\mathbb{R}\,,\ \lambda \neq 0\,.$
Denote-se por: $(i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)^{-1}\, F := \Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,.$
Basta provar que : $\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} \leq M\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}$ para λ grande o suficiente , onde $M > 0$ é uma constante que não depende de Φ , F e λ .

Primeiro : Mostrar-se-á que $\displaystyle\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \leq M_1\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}$ para λ grande o suficiente, onde $M_1 > 0$ é uma constante que não depende de Φ , F e λ .
De (4.7) :

$$\overline{i\,\lambda\, w} = \overline{f_3} + \overline{W} \tag{4.40}$$

Multiplicando-se a equação (4.8) por $\overline{w}$ e usando (4.40) , obtém-se:

$$\begin{aligned} -\rho_3\, W(\overline{i\,\lambda\, w}) - \kappa_3\, w_{xx}\, \overline{w} + \frac{i\,\gamma}{\lambda}\, W(\overline{i\,\lambda\, w}) &= \rho_3\, f_6\, \overline{w} \\ \Longleftrightarrow -\rho_3\, |W|^2 - \rho_3\, W\, \overline{f}_3 - \kappa_3\, w_{xx}\, \overline{w} + \frac{i\,\gamma}{\lambda}\, |W|^2 + \frac{i\,\gamma}{\lambda}\, W\, \overline{f}_3 &= \rho_3\, f_6\, \overline{w} \end{aligned}$$

Integrando-se,

$$\begin{aligned} -\kappa_3 \int_{l_1}^{l} w_{xx}\, \overline{w}\, dx = \rho_3 \int_{l_1}^{l} f_6\, \overline{w}\, dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3\, dx - \frac{i\,\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx - \\ \frac{i\,\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3\, dx \end{aligned} \tag{4.41}$$

Note-se que:

$$\int_{l_1}^{l} w_{xx}\, \overline{w}\, dx = -w_x(l_1)\, \overline{w}(l_1) - \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx\,. \tag{4.42}$$

Substituindo-se (4.42) em (4.41) e tomando a parte real, tem-se:

$$\begin{aligned} \kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx = -\kappa_3\, Re\, w_x(l_1)\, \overline{w}(l_1) + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx + \rho_3\, Re \int_{l_1}^{l} f_6\, \overline{w}\, dx + \rho_3\, Re \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3\, dx \\ -Re\, \frac{i\,\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3\, dx \end{aligned}$$

Tomando-se módulo e usando a desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\begin{aligned} \kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx \leq \kappa_3\, |w_x(l_1)|\, |w(l_1)| + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |f_6|\, |w|\, dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|\, |f_3|\, dx + \\ \frac{\gamma}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} |W|\, |f_3|\, dx \end{aligned}$$

$$\le \underbrace{\left(\rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx + \rho_3 \|f_6\|_{L^2(l_1,l)} \|w\|_{L^2(l_1,l)} + \rho_3 \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \|W\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(I)} +$$

$$\kappa_3 |w_x(l_1)|\, |w(l_1)| + \underbrace{\frac{\gamma}{|\lambda|} \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \|W\|_{L^2(l_1,l)}}_{(II)} . \tag{4.43}$$

Observe que

1. Desde que (u, v, w), $(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{H}_l^1$, pelo Lema 2.1, existe uma constante $C > 0$ que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|v\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \|w\|_{L^2(l_1,l)} \le C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \\ \text{e} \quad &\|f_1\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \le C \|F\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned} \tag{4.44}$$

   Além disso,

$$\begin{aligned} &\rho_1 \|U\|^2_{L^2(0,l_0)}\,,\ \rho_2 \|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \rho_3 \|W\|^2_{L^2(l_1,l)} \le \|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} \\ \text{e} \quad &\rho_1 \|f_4\|^2_{L^2(0,l_0)}\,,\ \rho_2 \|f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \rho_3 \|f_6\|^2_{L^2(l_1,l)} \le \|F\|^2_{\mathcal{H}} . \end{aligned} \tag{4.45}$$

   Logo, do Lema 4.1 e das desigualdades (4.44) e (4.45), obtém-se:

$$\begin{aligned} &(I) \le \widehat{C}_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ \text{e} \quad &(II) \le \frac{\widehat{C}_1}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned} \tag{4.46}$$

   onde $\widehat{C}_1$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

2. Usando-se o Lema 4.2 para w e W, e a imersão de Sobolev $H^1(l_1, l) \hookrightarrow C([l_1, l])$, pode-se escolher uma constante $\widehat{C}_2 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\begin{aligned} |w_x(l_1)\, w(l_1)| &= \frac{1}{|\lambda|} |w_x(l_1)|\, |i\,\lambda\, w(l_1)| \underbrace{=}_{(4.7)} \frac{1}{|\lambda|} |w_x(l_1)|\, |f_3(l_1) + W(l_1)| \\ &\le \frac{1}{|\lambda|} |w_x(l_1)|\, |W(l_1)| + \frac{1}{|\lambda|} |w_x(l_1)|\, |f_3(l_1)| \\ &\le \frac{1}{2\,|\lambda|} \left(|w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2\right) + \frac{1}{|\lambda|} \|w\|_{C([l_1,l])} \|f_3\|_{C([l_1,l])} \\ &\le \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \|w\|_{H^1(l_1,l)} \|f_3\|_{H^1(l_1,l)} \\ &\underbrace{\le}_{(4.44)} \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\underbrace{\le}_{(4.1)} \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Logo, usando-se as desigualdades (4.46) e (4.47) em (4.43), tem-se:

$$\int_{l_1}^{l} |w_x|^2\,dx \leq \frac{\widehat{C}_3}{|\lambda|}\int_{l_1}^{l} |w_x|^2\,dx + \frac{\widehat{C}_3}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \widehat{C}_3\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{4.48}$$

onde $\widehat{C}_3 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.
Seja $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \widehat{C}_3)$. Então usando-se a desigualdade (4.48) e o Lema 4.1, obtém-se:

$$\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \leq M_1\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \tag{4.49}$$

onde $M_1 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Segundo : Mostrar-se-á que $\displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx \leq M_2\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$ para $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \widehat{C}_3)$, onde $M_2 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Usando-se o Lema 4.2 no caso $\gamma = 0$ para v e V, existe uma constante $\tilde{C} > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx &\leq \tilde{C}\left(|v_x(l_1)|^2 + |V(l_1)|^2\right) + \tilde{C}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\underbrace{=}_{(4.9)} \tilde{C}\left(\frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^2}\,|w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2\right) + \tilde{C}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq\ \tilde{C}_1\left(|w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2\right) + \tilde{C}_1\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \quad \tilde{C}_1 = \tilde{C}\,\max\{1\,,\,\kappa_3^2/\kappa_2^2\} \\
&\underbrace{\leq}_{(4.13)} \tilde{C}_2\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx + \tilde{C}_2\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\underbrace{\leq}_{(4.49)} M_2\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

onde $M_2 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Terceiro : Mostrar-se-á que $\displaystyle\int_{0}^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq M_3\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$ para λ grande o suficiente, onde $M_3 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Das relações (4.3), (4.5) e (4.7), tem-se:

$$\overline{i\,\lambda\,u} = \overline{f}_1 + \overline{U} \quad , \quad \overline{i\,\lambda\,v} = \overline{f}_2 + \overline{V} \quad \text{e} \quad \overline{i\,\lambda\,w} = \overline{f}_3 + \overline{W}\,. \tag{4.51}$$

Multiplicando-se as equações (4.4), (4.6), (4.8) por $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ respectivamente, e usando (4.51), obtém-se:

1. $-\,\rho_1\,U\,\overline{(i\,\lambda\,u)} - \kappa_1\,u_{xx}\,\overline{u} - \kappa_0\,U_{xx}\,\overline{u} = \rho_1\,f_4\,\overline{u} \iff -\rho_1\,|U|^2 - \rho_1\,U\,\overline{f}_1 - \overline{u}\,(\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,U_{xx}) = \rho_1\,f_4\,\overline{u}$
2. $-\,\rho_2\,V\,\overline{(i\,\lambda\,v)} - \kappa_2\,v_{xx}\,\overline{v} = \rho_2\,f_5\,\overline{v} \iff -\rho_2\,|V|^2 - \rho_2\,V\,\overline{f}_2 - \kappa_2\,v_{xx}\,\overline{v} = \rho_2\,f_5\,\overline{v}$
3. $\left(\dfrac{i\,\gamma}{\lambda} - \rho_3\right) W\,\overline{(i\,\lambda\,w)} - \kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w} = \rho_3\,f_6\,\overline{w} \iff \left(\dfrac{i\,\gamma}{\lambda} - \rho_3\right) W\left(\overline{W} + \overline{f}_3\right) - \kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w} = \rho_3\,f_6\,\overline{w}$

Integrando-se por partes:

1. $\kappa_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2\,dx + \kappa_0 \int_0^{l_0} \overline{u}_x\,U_x\,dx = \rho_1 \int_0^{l_0} f_4\,\overline{u}\,dx + \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2\,dx + \rho_1 \int_0^{l_0} U\,\overline{f}_1\,dx +$
   $\overline{u}(l_0)(\kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0))\,.$ Como $U_x = i\,\lambda\,u_x - (f_1)_x$, então :
   $(\kappa_1 + i\,\lambda\,\kappa_0) \int_0^{l_0} |u_x|^2\,dx = \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2\,dx + \rho_1 \int_0^{l_0} f_4\,\overline{u}\,dx + \rho_1 \int_0^{l_0} U\,\overline{f}_1\,dx + \kappa_0 \int_0^{l_0} \overline{u}_x\,(f_1)_x\,dx +$
   $\overline{u}(l_0)(\kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0))$
2. $\kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} |v_x|^2\,dx = \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} |V|^2\,dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} f_5\,\overline{v}\,dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} V\,\overline{f}_2\,dx + \kappa_2\,v_x(l_1)\,\overline{v}(l_1) - \kappa_2\,v_x(l_0)\,\overline{v}(l_0)$
3. $\kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\,dx = \left(\rho_3 - \frac{i\,\gamma}{\lambda}\right) \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} f_6\,\overline{w}\,dx + \left(\rho_3 - \frac{i\,\gamma}{\lambda}\right) \int_{l_1}^{l} W\,\overline{f}_3\,dx - \kappa_3\,w_x(l_1)\,\overline{w}(l_1)$

Somando-se as igualdades e considerando as condições de transmissão (4.9), depois tomando a parte real, tem-se:

$$\kappa_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2\,dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} |v_x|^2\,dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\,dx = \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2\,dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} |V|^2\,dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx +$$
$$Re\,(\rho_1 \int_{l_1}^{l} f_4\,\overline{u}\,dx + \rho_2 \int_{l_1}^{l} f_5\,\overline{v}\,dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} f_6\,\overline{w}\,dx + \rho_1 \int_{l_0}^{l_1} U\,\overline{f}_1\,dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} V\,\overline{f}_2\,dx + \rho_3 \int_{l_0}^{l_1} W\,\overline{f}_3\,dx$$
$$+\,\kappa_0 \int_0^{l_0} \overline{u}_x\,(f_1)_x\,dx - \frac{i\,\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} W\,\overline{f}_3\,dx\,)\,.$$

Tomando-se módulo e usando a desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\begin{aligned}\kappa_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2\,dx \le\ & \underbrace{\left(\kappa_2\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)} + \rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\odot)} + \\ & \underbrace{\left(\rho_1\,\|f_4\|_{L^2(0,l_0)}\,\|u\|_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|v\|_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|f_6\|_{L^2(l_1,l)}\,\|w\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\ominus)} + \\ & \underbrace{\left(\rho_1\,\|U\|_{L^2(0,l_0)}\,\|f_1\|_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|V\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\otimes)} \\ & + \underbrace{\left(\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_0\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,\|(f_1)_x\|_{L^2(0,l_0)} + \frac{\gamma}{|\lambda|}\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\oplus)}\,.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Observe que

1. Usando-se (4.49) e (4.50) :

$$(\odot) \le \underbrace{(\kappa_2\,M_2 + \kappa_3\,M_1 + \rho_2\,M_2 + \rho_3\,M_1)}_{N_1}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \tag{4.53}$$

   onde $N_1 > 0$ é uma constante que não depende de Φ , F e λ .

2. Usando-se (4.44) e (4.45), tem-se:

$$\rho_1 \|U\|_{L^2(0,l_0)} \|f_1\|_{L^2(0,l_0)} \,,\ \rho_1 \|f_4\|_{L^2(0,l_0)} \|u\|_{L^2(0,l_0)} \leq \sqrt{\rho_1}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$
$$\rho_2 \|V\|_{L^2(l_0,l_1)} \|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)} \,,\ \rho_2 \|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \|v\|_{L^2(l_0,l_1)} \leq \sqrt{\rho_2}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$
$$\rho_3 \|W\|_{L^2(l_1,l)} \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \,,\ \rho_3 \|f_6\|_{L^2(l_1,l)} \|w\|_{L^2(l_1,l)} \leq \sqrt{\rho_3}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,.$$

Então, pode-se escolher uma constante $N_2 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que

$$(\ominus) + (\otimes) \leq N_2 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \tag{4.54}$$

3. Pela desigualdade de Poincaré e o Lema 4.1, existe uma constante $\tilde{C}_3 > 0$ que não depende de Φ, F e λ, tal que: $\rho_1 \|U\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \tilde{C}_3 \|U_x\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \dfrac{\tilde{C}_3}{\kappa_0} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$.
Por outro lado,

$$\kappa_0 \|u_x\|_{L^2(0,l_0)} \|(f_1)_x\|_{L^2(0,l_0)} \leq \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$
$$\frac{\gamma}{|\lambda|} \|W\|_{L^2(l_1,l)} \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \leq \frac{\gamma\, C}{\sqrt{\rho_3}\, |\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,.$$

Então, pode-se escolher uma constante $N_3 > 0$ que não depende de Φ, F e λ, tal que

$$(\oplus) \leq N_3 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{N_3}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,. \tag{4.55}$$

Logo, a partir das desigualdades $(4.52) - (4.55)$, obtém-se:

$$\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq N \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{N}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \tag{4.56}$$

onde $N > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.
Seja $R = \max\{\widehat{C}_3 \,, N\}$.
Se $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,R)$, então das desigualdades (4.49), (4.50) e (4.56), tem-se:

$$\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq M_3 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,,\ \int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx \leq M_2 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$
$$\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \leq M_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$

onde M_1, M_2, $M_3 > 0$ são constantes que não dependem de Φ, F e λ.
Então,

$$\begin{aligned} \|\,(i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)^{-1} F = \Phi\|^2_{\mathcal{H}} &\leq \kappa \left(\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx + \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \right) \\ &\leq \underbrace{\kappa\,(M_1 + M_2 + M_3)}_{M} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \end{aligned}$$

onde $\kappa = \max\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ e $M > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.
Assim,

$$\|\,(i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}} \,,\ \forall\, F \in \mathcal{H} \,,\ \forall\, |\lambda| > R \,.$$

□

Procedendo da mesma maneira que o caso anterior, pode-se mostrar-se que o semigrupo associado ao problema de transmissão **EFV** decai exponencialmente, quando o tempo vai para infinito.

Capítulo 5

Decaimento Polinomial e Otimalidade nos Modelos EVF e FVE

Neste capítulo, o objetivo é mostrar o **Teorema 5.1**, que diz: A solução do modelo **EVF** decai polinomialmente para zero como t^{-2} . Além disso, a taxa de decaimento é ótima para qualquer dado inicial no domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
A prova deste teorema está baseado em verificar as condições necessárias e suficientes do teorema 1.40 (**Borichev - Tomilov**).

Lembre-se que, o semigrupo associado ao problema de transmissão **EVF** é dado por $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t))_{t\geq 0}$, onde

$$\mathcal{A}_2\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}\,V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right)\,,\ \forall\,\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)\,,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = \{\Phi \in \mathcal{H} :\ &(U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l,\ (u, \kappa_2\,v + \kappa_0\,V, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0)\,,\\ &\kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado, o sistema resolvente associado ao modelo **EVF** é dado por

$$i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_2\,\Phi = F\,. \tag{5.2}$$

Reescrevendo-se (5.2) , tem-se:

$$i\,\lambda\,u - U = f_1 \qquad em \qquad]0, l_0[\tag{5.3}$$

$$i\,\lambda\,v - V = f_2 \qquad em \qquad]l_0, l_1[\tag{5.4}$$

$$i\,\lambda\,w - W = f_3 \qquad em \qquad]l_1, l[\tag{5.5}$$

$$i\,\lambda\,\rho_1\,U - \kappa_1\,u_{xx} = \rho_1\,f_4 \qquad em \qquad]0, l_0[\tag{5.6}$$

$$i\,\lambda\,\rho_2\,V - \kappa_2\,v_{xx} - \kappa_0\,V_{xx} = \rho_2\,f_5 \qquad em \qquad]l_0, l_1[\tag{5.7}$$

$$i\,\lambda\,\rho_3\,W - \kappa_3\,w_{xx} + \gamma\,W = \rho_3\,f_6 \qquad em \qquad]l_1, l[\ , \tag{5.8}$$

com condições de transmissão

$$\begin{aligned}u(l_0) = v(l_0)\,, &\quad \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0)\,,\\ v(l_1) = w(l_1)\,, &\quad \kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\,,\end{aligned} \tag{5.9}$$

e condições de contorno $u(0) = 0\,,\ w(l) = 0\,.$

Teorema 5.1. *A solução do modelo* $\mathbf{EVF}$ *decai polinomialmente como* t^{-2}. *Além disso, a taxa de decaimento é ótima sobre* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ *e*

$$\|\Phi_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^{2\,k}}\,\|\Phi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^k)}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{5.10}$$

Demonstração. **Mostrar-se-á :** $i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Desde que $\mathcal{A}_2$ é um operador fechado e $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ tem mergulho compacto sobre o espaço fase $\mathcal{H}$, então o espectro $\sigma(\mathcal{A}_2)$, só contém valores próprios. Assim, é suficiente provar que $\sigma(\mathcal{A}_2)$ não contém valor próprio nenhum. Ver-se-á isso raciocinando por contradição.
Suponha-se que existe um valor próprio imaginário $i\,\lambda_0$ com $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$i\,\lambda_0\,\Phi_0 - \mathcal{A}_2\,\Phi_0 = 0\,, \tag{5.11}$$

onde $\quad 0 \neq \Phi_0 = (u_0, v_0, w_0, U_0, V_0, W_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
Reescrevendo-se a equação espectral (5.11), tem-se:

$$\begin{aligned}
i\,\lambda_0\,u_0 - U_0 &= 0 \qquad em \qquad]0, l_0[&& (5.12)\\
i\,\lambda_0\,\rho_1\,U_0 - \kappa_1\,(u_0)_{xx} &= 0 \qquad em \qquad]0, l_0[&& (5.13)\\
i\,\lambda_0\,v_0 - V_0 &= 0 \qquad em \qquad]l_0, l_1[&& (5.14)\\
i\,\lambda_0\,\rho_2\,V_0 - \kappa_2\,(v_0)_{xx} - \kappa_0\,(V_0)_{xx} &= 0 \qquad em \qquad]l_0, l_1[&& (5.15)\\
i\,\lambda_0\,w_0 - W_0 &= 0 \qquad em \qquad]l_1, l[&& (5.16)\\
i\,\lambda_0\,\rho_3\,W_0 - \kappa_3\,(w_0)_{xx} + \gamma\,W_0 &= 0 \qquad em \qquad]l_1, l[\ , && (5.17)
\end{aligned}$$

com condições de transmissão

$$\begin{aligned}
&u_0(l_0) = v_0(l_0)\,, \quad \kappa_1\,(u_0)_x(l_0) = \kappa_2\,(v_0)_x(l_0) + \kappa_0\,(V_0)_x(l_0)\,,\\
&v_0(l_1) = w_0(l_1)\,, \quad \kappa_2\,(v_0)_x(l_1) + \kappa_0\,(V_0)_x(l_1) = \kappa_3\,(w_0)_x(l_1)\,,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

e condições de contorno $\quad u_0(0) = 0\,,\ w_0(l) = 0\,.$
Por outro lado, $\mathcal{A}_2$ é um operador dissipativo e

$$Re\,\langle \mathcal{A}_2\,\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_{l_0}^{l_1} |V_x|^2\,dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}_2\right)\,. \tag{5.19}$$

Logo, multiplicando-se a equação (5.11) por Φ_0, tomando a parte real e usando (5.19), obtém-se:

$$\kappa_0 \int_0^{l_0} |(V_0)_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W_0|^2\,dx = 0\,.$$

Então,

$$V_0 = W_0 = 0\,. \tag{5.20}$$

Além disso, das relações (5.14) e (5.16), tem-se:

$$v_0 = w_0 = 0\,. \tag{5.21}$$

Das relações (5.12) e (5.13), obtém-se:

$$-\lambda_0^2\,\rho_1\,u_0 - \kappa_1\,(u_0)_{xx} = 0\,. \tag{5.22}$$

Mais ainda, usando-se (5.20) e (5.21) na condição de transmissão (5.18), tem-se:

$$u_0(0) = u_0(l_0) = 0 \quad \text{e} \quad (u_0)_x(l_0) = 0\,. \tag{5.23}$$

Logo, considerando-se as relações (5.22) e (5.23) como um problema de valor inicial em $x = l_0$, obtém-se $u_0 = 0$. Além disso, de (5.12) tem-se $U_0 = 0$.
Portanto $\Phi_0 = 0$, mas isso é uma contradição.
Assim, $i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.

Mostrar-se-á : O operador resolvente é uniformemente limitado por $C\,|\lambda|^{1/2}$ sobre o eixo imaginário.

Multiplicando-se a equação (5.2) por Φ, tomando a parte real e usando (5.19), obtém-se:

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} \geq Re\,\langle F\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} &= Re\,\langle i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_2\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\,\langle \mathcal{A}_2\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \kappa_0 \int_{l_0}^{l_1} |V_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Observe que

1. Desde que (u,v,w), $(f_1,f_2,f_3) \in \mathbb{H}^1_l$, pelo Lema 2.1, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^2(0,l_0)}\,,\,\|v\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\,\|w\|_{L^2(l_1,l)} \leq \tilde{C}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \\ \text{e}\quad &\|f_1\|_{L^2(0,l_0)}\,,\,\|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \leq \tilde{C}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.\end{aligned} \tag{5.25}$$

   Além disso,

$$\begin{aligned} &\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)}\,,\,\rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\,,\,\rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq \|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} \\ \text{e}\quad &\rho_1\,\|f_4\|^2_{L^2(0,l_0)}\,,\,\rho_2\,\|f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\,,\,\rho_3\,\|f_6\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq \|F\|^2_{\mathcal{H}}\,.\end{aligned} \tag{5.26}$$

A partir da imersão contínua $L^2(l_0,l_1) \cong \big(L^2(l_0,l_1)\big)' \hookrightarrow H^{-1}(l_0,l_1)$, existe uma constante $C_1 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\begin{aligned}|\lambda|\,\|V\|_{H^{-1}(l_0,l_1)} \leq C_1\,|\lambda|\,\|V\|_{L^2(l_0,l_1)} &\underbrace{\leq}_{(5.7)} \frac{C_1}{\rho_2}\,\|\kappa_2\,v_{xx} + \kappa_0\,V_{xx}\|_{L^2(l_0,l_1)} + C_1\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ &\leq \frac{C_1}{\rho_2}\,\|\kappa_2\,v_x + \kappa_0\,V_x\|_{H^1(l_0,l_1)} + C_1\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ &\underbrace{=}_{Riesz} \frac{C_1}{\rho_2}\,\|\kappa_2\,v_x + \kappa_0\,V_x\|_{H^{-1}(l_0,l_1)} + C_1\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ &\leq \frac{C_1^2}{\rho_2}\,\|\kappa_2\,v_x + \kappa_0\,V_x\|_{L^2(l_0,l_1)} + C_1\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ &\leq \frac{C_1^2\,\kappa_2}{\rho_2}\,\|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{C_1^2\,\kappa_0}{\rho_2}\,\|V_x\|_{L^2(l_0,l_1)} + C_1\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ &\leq C_2\,\|\Phi\|^{1/2}_{\mathcal{H}}\,\|F\|^{1/2}_{\mathcal{H}} + C_2\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned} \tag{5.27}$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.
Usando-se interpolação e as desigualdades (5.24) e (5.27), obtém-se:

$$\begin{aligned}\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)} &\leq C_3\,\|V\|_{H^{-1}(l_0,l_1)}\,\|V\|_{H^1(l_0,l_1)}\\ &\leq \frac{C_3\,C_2}{|\lambda|}\left[\|\Phi\|^{1/2}_{\mathcal{H}}\,\|F\|^{1/2}_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\right]\|V\|_{H^1(l_0,l_1)}\\ &\leq \frac{M_1}{|\lambda|}\left[\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi\|^{1/2}_{\mathcal{H}}\,\|F\|^{3/2}_{\mathcal{H}}\right], \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde $M_1 > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Por outro lado, multiplicando-se a equação (5.7) por $(l_1 - x)\,(\overline{\kappa_2\,v_x + \kappa_0\,V_x})$, tem-se:

$$\begin{aligned}&i\,\lambda\,\rho_2\,(l_1-x)\,V\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x}) - \kappa_2\,(l_1-x)\,v_{xx}\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x}) - \kappa_0\,(l_1-x)\,V_{xx}\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x}) =\\ &\qquad\qquad \rho_2\,(l_1-x)\,f_5\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})\\ &\Longleftrightarrow i\,\lambda\,\rho_2\,(l_1-x)\,V\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x}) - (l_1-x)(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})(\kappa_2\,v_{xx}+\kappa_0\,V_{xx}) =\\ &\qquad\qquad \rho_2\,(l_1-x)\,f_5\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})\end{aligned}$$

Integrando-se e tomando a parte real, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\underbrace{Re\int_{l_0}^{l_1}\lambda\,\rho_2\,i\,(l_1-x)\,V\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})\,dx}_{(\oplus)} - \underbrace{Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})(\kappa_2\,v_{xx}+\kappa_0\,V_{xx})\,dx}_{(\ominus)} =\\ &\qquad\qquad \rho_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,f_5\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Observe-se que:

$$\begin{aligned}(\bullet)\qquad Re\,(\oplus) &= -\rho_2\,\kappa_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,(\overline{i\,\lambda\,v_x})\,dx + \rho_2\,\kappa_0\,Re\,i\,\lambda\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,\overline{V}_x\,dx\\ &\underbrace{=}_{(5.4)} -\rho_2\,\kappa_2\,Re\underbrace{\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,\overline{V}_x\,dx}_{(I)} - \rho_2\,\kappa_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,(\overline{f}_2)_x\,dx +\\ &\qquad \rho_2\,\kappa_0\,Re\,i\,\lambda\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,\overline{V}_x\,dx\,.\end{aligned}$$

Além disso, $(I) = \left[(l_1-x)\,|V|^2\right]\Big|_{l_0}^{l_1} + \displaystyle\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx - \int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,\overline{V}\,V_x\,dx\,.$ Então,

$$Re\,(I) = -\frac{(l_1-l_0)}{2}\,|V(l_0)|^2 + \frac{1}{2}\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx\,.$$

Logo,

$$Re\,(\oplus) = \frac{\rho_2\,\kappa_2\,(l_1-l_0)}{2}\,|V(l_0)|^2 - \frac{\rho_2\,\kappa_2}{2}\,\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx - \rho_2\,\kappa_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,(\overline{f}_2)_x\,dx + \rho_2\,\kappa_0\,Re\,i\,\lambda\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,\overline{V}_x\,dx\,. \tag{5.30}$$

$$(\bullet\bullet)\qquad (\ominus) = \left[(l_1-x)|\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x|^2\right]\Big|_{l_0}^{l_1} + \int_{l_0}^{l_1}|\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x|^2\,dx - \int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)(\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x)(\overline{\kappa_2\,v_{xx}+\kappa_0\,V_{xx}})\,dx\,.$$

Então, $$Re\,(\ominus) = -\frac{(l_1-l_0)}{2}\,|\kappa_2\,v_x(l_0)+\kappa_0\,V_x(l_0)|^2 + \frac{1}{2}\int_{l_0}^{l_1}|\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x|^2\,dx\,. \tag{5.31}$$

Define-se o funcional $I_u := \frac{1}{2}\left[|V(l_0)|^2 + |\kappa_2\,v_x(l_0)+\kappa_0\,V_x(l_0)|^2\right]$. Além disso, denote-se por $\nu_0 = (l_1-l_0)\min\{\rho_2\,\kappa_2\,,\,1\}$.
Substituindo-se (5.30) e (5.31) em (5.29) , tem-se:

$$\nu_0\,I_u \le -\rho_2\,\kappa_0\,Re\,i\,\lambda\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,\overline{V}_x\,dx + \frac{\rho_2\,\kappa_2}{2}\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{l_0}^{l_1}|\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x|^2\,dx + \rho_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,(\overline{\kappa_2\,v_x+\kappa_0\,V_x})\,f_5\,dx + \rho_2\,\kappa_2\,Re\int_{l_0}^{l_1}(l_1-x)\,V\,(\overline{f}_2)_x\,dx \tag{5.32}$$

Usando-se a desigualdade de Hölder e as relações (5.25) , (5.26) em (5.32) , tem-se:

$$\begin{aligned}\nu_0\,I_u &\le C_4\,\int_{l_0}^{l_1}(|\lambda|\,|V_x|\,|V| + |V_x|^2 + |v_x|^2)\,dx + C\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\le C_4\,|\lambda|^{1/2}\,\int_{l_0}^{l_1}|V_x|\,\left(|\lambda|^{1/2}\,|V|\right)\,dx + C\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $C_4>0$ é uma constante que não depende de Φ , F e λ .
Além disso, usando-se (5.28) em (5.33) , obtém-se:

$$I_u \le C\,|\lambda|^{1/2}\,\left(\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\,\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right)\,, \tag{5.34}$$

para $i\,\lambda\in\mathbb{C}\backslash\overline{B}(0;R_1)$, onde R_1 é uma constante que não depende de Φ , F e λ .

Por outro lado, multiplicando-se a equação (5.6) por $x\,\overline{u}_x$ e usando (5.3) , tem-se:

$$-\rho_1\,x\,U\,\left(\overline{i\,\lambda\,u_x}\right) - \kappa_1\,x\,\overline{u}_x\,u_{xx} = \rho_1\,x\,f_4\,\overline{u}_x \Longleftrightarrow -\rho_1\,x\,U\,\overline{U}_x - \kappa_1\,x\,\overline{u}_x\,u_{xx} = \rho_1\,x\,f_4\,\overline{u}_x + \rho_1\,x\,U\,(\overline{f}_1)_x\,.$$

Integrando-se e tomando a parte real, obtém-se:

$$-\rho_1\,Re\int_0^{l_0}x\,U\,\overline{U}_x\,dx - \kappa_1\,Re\int_0^{l_0}x\,\overline{u}_x\,u_{xx}\,dx = \rho_1\,Re\int_0^{l_0}x\,f_4\,\overline{u}_x\,dx + \rho_1\,Re\int_0^{l_0}x\,U\,(\overline{f}_1)_x\,dx\,. \tag{5.35}$$

Observe-se que:

$$
\begin{aligned}
(\bullet) \quad & \int_0^{l_0} x\, U\, \overline{U}_x\, dx = \left[x\, |U|^2\right]\Big|_0^{l_0} - \int_0^{l_0} |U|^2\, dx - \int_0^{l_0} x\, \overline{U}\, U_x\, dx \\
& \iff \quad Re \int_0^{l_0} x\, U\, \overline{U}_x\, dx = \frac{l_0}{2}\, |U(l_0)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_0} |U|^2\, dx\,.
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bullet\bullet) \quad & \int_0^{l_0} x\, \overline{u}_x\, u_{xx}\, dx = \left[x\, |u_x|^2\right]\Big|_0^{l_0} - \int_0^{l_0} |u_x|^2\, dx - \int_0^{l_0} x\, u_x\, \overline{u}_{xx}\, dx \\
& \iff \quad Re \int_0^{l_0} x\, \overline{u}_x\, u_{xx}\, dx = \frac{l_0}{2}\, |u_x(l_0)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_0} |u_x|^2\, dx\,.
\end{aligned} \tag{5.37}
$$

Substituindo-se (5.36) e (5.37) em (5.35), tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left(\rho_1\, |U|^2 + \kappa_1\, |u_x|^2\right) dx &= \frac{l_0}{2} \left(\rho_1\, |U(l_0)|^2 + \kappa_1\, |u_x(l_0)|^2\right) + \rho_1\, Re \int_0^{l_0} x\, f_4\, \overline{u}_x\, dx + \\
& \qquad \rho_1\, Re \int_0^{l_0} x\, (\overline{f}_1)_x\, U\, dx \\
& \underbrace{=}_{(5.9)} \frac{l_0}{2} \left(\rho_1\, |V(l_0)|^2 + \frac{1}{\kappa_1}\, |\kappa_2\, v_x(l_0) + \kappa_0\, V_x(l_0)|^2\right) + \\
& \qquad \rho_1\, Re \int_0^{l_0} x\, f_4\, \overline{u}_x\, dx + \rho_1\, Re \int_0^{l_0} x\, (\overline{f}_1)_x\, U\, dx\,.
\end{aligned}
$$

Tomando-se módulo, usando a desigualdade de Hölder e realizando estimativas, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{l_0} (\rho_1\, |U|^2 + \kappa_1\, |u_x|^2)\, dx &\leq \frac{l_0\, \widehat{C}_1}{2}\, I_u + \rho_1\, l_0 \int_0^{l_0} |f_4|\, |u_x|\, dx + \rho_1\, l_0 \int_0^{l_0} |(f_1)_x|\, |U|\, dx \\
& \leq \frac{l_0\, \widehat{C}_1}{2}\, I_u + \rho_1\, l_0 \left(\|f_4\|_{L^2(0,l_0)}\, \|u_x\|_{L^2(0,l_0)} + \|(f_1)_x\|_{L^2(0,l_0)}\, \|U\|_{L^2(0,l_0)}\right) \\
& \underbrace{\leq}_{(5.25),(5.26)} \frac{l_0\, \widehat{C}_1}{2}\, I_u + \widehat{C}_2\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

onde $\widehat{C}_1 = \max\{\rho_1\,,\, 1/\kappa_1\}$ e $\widehat{C}_2$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Considere-se $i\,\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{B}(0; R)$, onde $R = \max\{R_1\,,\, 1\}$.
Seja $m_0 = \dfrac{1}{2} \min\{\rho_1\,,\, \kappa_1\}$. Então, usando-se a desigualdade (5.34), tem-se:

$$
m_0 \int_0^{l_0} \left(|U|^2 + |u_x|^2\right) dx \leq \frac{l_0\, \widehat{C}_1\, C}{2}\, |\lambda|^{1/2} \left(\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\, \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right) + \widehat{C}_2\, |\lambda|^{1/2}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\,.
$$

Assim,

$$
\int_0^{l_0} \left(|U|^2 + |u_x|^2\right) dx \leq M_2\, |\lambda|^{1/2} \left(\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} + \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\, \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right)\,, \tag{5.39}
$$

onde M_2 é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Por outro lado; das relações $(5.3)-(5.5)$, obtém-se:

$$\overline{i\,\lambda\,u}=\overline{f}_1+\overline{U}\quad,\quad \overline{i\,\lambda\,v}=\overline{f}_2+\overline{V}\quad \text{e}\quad \overline{i\,\lambda\,w}=\overline{f}_3+\overline{W}\,. \tag{5.40}$$

Multiplicando-se as equações (5.6), (5.7), (4.8) por $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ respectivamente, e usando (5.40), tem-se:

1. $-\rho_1\,U\,\overline{(i\,\lambda\,u)}-\kappa_1\,u_{xx}\,\overline{u}=\rho_1\,f_4\,\overline{u}\Longleftrightarrow -\rho_1\,|U|^2-\rho_1\,U\,\overline{f}_1-\kappa_1\,u_{xx}\,\overline{u}=\rho_1\,f_4\,\overline{u}$
2. $-\rho_2\,V\,\overline{(i\,\lambda\,v)}-\kappa_2\,v_{xx}\,\overline{v}-\kappa_0\,V_{xx}\,\overline{v}=\rho_2\,f_5\,\overline{v}\Longleftrightarrow -\rho_2\,|V|^2-\rho_2\,V\,\overline{f}_2-\overline{v}\,(\kappa_2\,v_{xx}+\kappa_0\,V_{xx})=\rho_2\,f_5\,\overline{v}$
3. $\left(\dfrac{i\,\gamma}{\lambda}-\rho_3\right)W\,\overline{(i\,\lambda\,w)}-\kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w}=\rho_3\,f_6\,\overline{w}\Longleftrightarrow \left(\dfrac{i\,\gamma}{\lambda}-\rho_3\right)W\,\left(\overline{W}+\overline{f}_3\right)-\kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w}=\rho_3\,f_6\,\overline{w}$

Integrando-se por partes:

1. $\kappa_1\displaystyle\int_0^{l_0}|u_x|^2\,dx=\rho_1\int_0^{l_0}|U|^2\,dx+\rho_1\int_0^{l_0}f_4\,\overline{u}\,dx+\rho_1\int_0^{l_0}U\,\overline{f}_1\,dx+\kappa_1\,u_x(l_0)\,\overline{u}(l_0)$
2. $\kappa_2\displaystyle\int_{l_0}^{l_1}|v_x|^2\,dx+\kappa_0\int_{l_0}^{l_1}\overline{v}_x\,V_x\,dx=\rho_2\int_{l_0}^{l_1}f_5\,\overline{v}\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}V\,\overline{f}_2\,dx+$
   $\overline{v}(l_1)(\kappa_2\,v_x(l_1)+\kappa_0\,V_x(l_1))-\overline{v}(l_0)(\kappa_2\,v_x(l_0)+\kappa_0\,V_x(l_0))$. Como $V_x=i\,\lambda\,v_x-(f_2)_x$, então :
   $(\kappa_2+i\,\lambda\,\kappa_0)\displaystyle\int_{l_0}^{l_1}|v_x|^2\,dx=\rho_2\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}f_5\,\overline{v}\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}V\,\overline{f}_2\,dx+\kappa_0\int_{l_0}^{l_1}\overline{v}_x\,(f_2)_x\,dx+$
   $\overline{v}(l_1)(\kappa_2\,v_x(l_1)+\kappa_0\,V_x(l_1))-\overline{v}(l_0)(\kappa_2\,v_x(l_0)+\kappa_0\,V_x(l_0))$
3. $\kappa_3\displaystyle\int_{l_1}^{l}|w_x|^2\,dx=\left(\rho_3-\frac{i\,\gamma}{\lambda}\right)\int_{l_1}^{l}|W|^2\,dx+\rho_3\int_{l_1}^{l}f_6\,\overline{w}\,dx+\left(\rho_3-\frac{i\,\gamma}{\lambda}\right)\int_{l_1}^{l}W\,\overline{f}_3\,dx-\kappa_3\,w_x(l_1)\,\overline{w}(l_1)$

Somando-se as igualdades e considerando as condições de transmissão (5.9), depois tomando a parte real, tem-se:

$$\kappa_1\int_0^{l_0}|u_x|^2\,dx+\kappa_2\int_{l_0}^{l_1}|v_x|^2\,dx+\kappa_3\int_{l_1}^{l}|w_x|^2\,dx=\rho_1\int_0^{l_0}|U|^2\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}|V|^2\,dx+\rho_3\int_{l_1}^{l}|W|^2\,dx+$$
$$Re\,(\rho_1\int_{l_1}^{l}f_4\,\overline{u}\,dx+\rho_2\int_{l_1}^{l}f_5\,\overline{v}\,dx+\rho_3\int_{l_1}^{l}f_6\,\overline{w}\,dx+\rho_1\int_{l_0}^{l_1}U\,\overline{f}_1\,dx+\rho_2\int_{l_0}^{l_1}V\,\overline{f}_2\,dx+\rho_3\int_{l_0}^{l_1}W\,\overline{f}_3\,dx$$
$$+\,\kappa_0\int_{l_0}^{l_1}\overline{v}_x\,(f_2)_x\,dx-\frac{i\,\gamma}{\lambda}\int_{l_1}^{l}W\,\overline{f}_3\,dx\,)\,.$$

Tomando-se módulo e usando a desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}}\le\underbrace{\left(2\,\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)}+2\,\rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\right)}_{(\odot)}+$$
$$\underbrace{\left(\rho_1\,\|f_4\|_{L^2(0,l_0)}\,\|u\|_{L^2(0,l_0)}+\rho_2\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|v\|_{L^2(l_0,l_1)}+\rho_3\,\|f_6\|_{L^2(l_1,l)}\,\|w\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\ominus)}+$$
$$\underbrace{\left(\rho_1\,\|U\|_{L^2(0,l_0)}\,\|f_1\|_{L^2(0,l_0)}+\rho_2\,\|V\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)}+\rho_3\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\otimes)}+$$
$$\underbrace{\left(2\,\rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)}+\kappa_0\,\|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|(f_2)_x\|_{L^2(l_0,l_1)}+\frac{\gamma}{|\lambda|}\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(\oplus)}\,. \tag{5.41}$$

Observe que

1. Apartir do fato $|\lambda| > 1$ e das relações (5.28) e (5.39), pode-se escolher uma constante $N_1 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que :

$$(\odot) \leq N_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + N_1 |\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + N_1 |\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4} . \tag{5.42}$$

2. Usando-se o fato que $|\lambda| > 1$ e as relações (5.25) e (5.26), tem-se:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \|U\|_{L^2(0,l_0)} \|f_1\|_{L^2(0,l_0)} \,,\, \rho_1 \|f_4\|_{L^2(0,l_0)} \|u\|_{L^2(0,l_0)} &\leq \sqrt{\rho_1}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \\
\rho_2 \|V\|_{L^2(l_0,l_1)} \|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)} \,,\, \rho_2 \|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)} \|v\|_{L^2(l_0,l_1)} &\leq \sqrt{\rho_2}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \\
\rho_3 \|W\|_{L^2(l_1,l)} \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \,,\, \rho_3 \|f_6\|_{L^2(l_1,l)} \|w\|_{L^2(l_1,l)} &\leq \sqrt{\rho_3}\, C \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \\
\kappa_2 \|(f_2)_x\|_{L^2(l_0,l_1)} \|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)} &\leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \,.
\end{aligned}$$

   Então, pode-se escolher uma constante $N_2 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que :

$$(\ominus) + (\otimes) + (\oplus) \leq N_2 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \leq N_2 |\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} . \tag{5.43}$$

Usando-se as desigualdades (5.42) e (5.43) em (5.41), pode-se escolher uma constante $N_3 > 0$, que não depende de Φ, F e λ, tal que:

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq N_3 \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + N_3 |\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + N_3 |\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4} , \tag{5.44}$$

onde $|\lambda| > R \geq 1$.
Seja $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\epsilon < 1/3\, N_3$.
Agora, aplicando-se a desigualdade de Young nos seguintes casos, tem-se:

1. Para $p = 4/3$ e $q = 4$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} = \left(\epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/2}\right) \left(\frac{1}{\epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\right) &\leq \left(\frac{3\,\epsilon^{4/3}}{4}\right) \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{1}{4\,\epsilon^4}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{|\lambda|}{\epsilon^4}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned} \tag{5.45}$$

2. Para $p = 2$ e $q = 2$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
|\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} = (\epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}) \left(\frac{|\lambda|^{1/2}}{\epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}\right) &\leq \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{|\lambda|}{2\,\epsilon^2}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{|\lambda|}{\epsilon^2}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned} \tag{5.46}$$

3. Para $p = 8/3$ e $q = 8/5$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
|\lambda|^{1/2} \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4} = \left(\epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\right) \left(\frac{|\lambda|^{1/2}}{\epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\right) &\leq \left(\frac{3\,\epsilon^{8/3}}{8}\right) \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{5\,|\lambda|^{4/5}}{8\,\epsilon^{8/5}}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{|\lambda|}{\epsilon^2}\right) \|F\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Agora, substituindo-se as relações (5.45), (5.46) e (5.47) em (5.44), tem-se:

$$(1 - 3\,N_3\,\epsilon)\,\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} \leq 3\,N_3 \left(\frac{|\lambda|}{\epsilon^2}\right) \|F\|^2_{\mathcal{H}}\,.$$

Assim, $\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \leq M\,|\lambda|^{1/2}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$ para λ grande o suficiente, onde $M > 0$ é uma constante que não depende de Φ, F e λ.

Portanto, pelo teorema 1.40 (**Borichev - Tomilov**) tem-se $\left\|\mathcal{S}(t)\,\mathcal{A}_2^{-1}\right\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)} \leq \dfrac{C}{t^2}$.

Além disso,

$$\|\Phi_2(t)\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t)\,\Phi_0\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t)\,\mathcal{A}_2^{-1}\,F_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^2}\,\|F_0\|_{\mathcal{H}} = \frac{C}{t^2}\,\|\mathcal{A}_2\,\Phi_0\|_{\mathcal{H}} = \frac{C}{t^2}\,\|\Phi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}\,,$$

ou seja, a solução do modelo **EVF** decai polinomialmente para zero como t^{-2}, com uma taxa de $\alpha = 1/2$.

Por outro lado, usando-se indução segue que $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\Phi_2(t)\|_{\mathcal{H}} &= \|\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t)\,\Phi_0\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t)\,\mathcal{A}_2^{-k}\,F_0\|_{\mathcal{H}} = \|\left(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_2}(t/k)\,\mathcal{A}_2^{-1}\right)^k F_0\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\frac{C\,k^2}{t^2}\right)^k \|F_0\|_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{C_k}{t^{2\,k}}\,\|\mathcal{A}_2^k\,\Phi_0\|_{\mathcal{H}} = \frac{C_k}{t^{2\,k}}\,\|\Phi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^k)}\,.\end{aligned}$$

Finalmente; suponha que a taxa de decaimento pode ser melhorada sobre o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. Por exemplo, como

$$\|\Phi_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/(\alpha-\epsilon)}}\,\|\Phi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)} = \frac{C}{t^{2/(1-2\epsilon)}}\,\|\Phi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}\,,$$

para $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente.

Então, usando-se o teorema 1.40 (**Borichev - Tomilov**), tem-se que a expressão $\dfrac{1}{|\lambda|^{(1-2\,\epsilon)/2}}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}$ deve ser limitado. Então $\dfrac{1}{|\lambda|^{1-2\,\epsilon}}\,\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}}$ é limitado.

Por outro lado, do Teorema 3.1 e do fato de que $|\lambda| \approx c_1\,n$, obtém-se:

$$\frac{1}{|\lambda|^{1-2\,\epsilon}}\,\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} \geq \int_{l_0}^{l_1} |\alpha\,u(x)|^2\,dx \geq C_0\,n \longrightarrow +\infty\,,$$

mas isso é uma contradição.

Assim, a taxa de decaimento não pode ser melhorada sobre o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. $\square$

Conclusões

Deste trabalho podemos concluir que na presença de diferentes mecanismos dissipativos atuando sobre uma viga ou uma barra, a ordem destas componentes é muito importante para a estabilidade exponencial. Este resultado se aplica para o problema de Optimal design. Que consiste em encontrar a posição em que um mecanismo dissipativo deve ser eficaz para maximizar a taxa de decaimento.

Finalmente outra conclusão importante, é que a presença de diversos mecanismos dissipativos não melhora o decaimento do modelo. É importante considerar a posição, dentro da viga, deste mecanismo.

Bibliografia

[1] **S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg,** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[2] **M. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, O. Vera Villagrán and M. Zegarra,** The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity, Math. Nachr. In Press (2013). doi: 10.1002/mana.201200319

[3] **A. Borichev and Y. Tomilov,** Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, Math. Ann., 347 (2009), pp. 455-478.

[4] **S. C. Brenner and L. R. Scott,** The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] **H. Brezis,** Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[6] **F. Brezzi and M. Fortin,** Mixed and hybrid finite element methods, Springer, 1991.

[7] **M. Cavalcanti and V. Cavalcanti,** Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, UEM / DMA, 2010.

[8] **G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun,** Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping, SIAM J. Appl. Math., 51 (1991), pp. 266-301.

[9] **P. G. Ciarlet,** The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[10] **P. Clement,** Approximation by finite element functions using local regularization, RAIRO Anal. Numer. R-2 (1975), pp. 77-84.

[11] **E. A. Coddington,** An Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc (1961). New York.

[12] **L. Gearhart,** Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces, Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[13] **C. W. Groetsch,** Elements of Applicable Functional Analysis, Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[14] **F. L. Huang,** Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. Differential Equations, 1 (1985), pp. 43-56.

[15] **V. Komornik and E. Zuazua,** A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Comput. Appl. Math., 69 (1990), pp. 33-54.

[16] **V. Komornik,** Rapid boundary stabilization of the wave equation, SIAM J. Control Optim., 29 (1991), pp. 197-208.

[17] **S. Krenk,** Energy conservation in Newmark based time integration algorithms, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (2006), pp. 6110-6124.

[18] **E. Kreyszig** Introductory Functional Analysis with Applications, Jhon Wiley e Sons, 1978.

[19] **K. Liu and Z. Liu,** Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping, SIAM J. Control Optim., 36 (1998), pp. 1086-1098.

[20] **W. Liu and G. Williams,** The exponential stability of the problem of transmission of the wave equation, Bull. Aust. Math. Soc., 57 (1998), pp. 305-327.

[21] **Z. Liu and B. Rao,** Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, Z. Angew Math. Phys., 56 (2005), pp. 630-644.

[22] **Z. Liu and S. Zheng,** Semigroups associated with dissipative systems, In CRC Reseach Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[23] **L. F. Ho,** Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), pp. 733-748.

[24] **A. Medeiros and M. Miranda,** Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos), UFRJ / IM, 2011.

[25] **A. Moreira Gomes,** Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, UFRJ / IM, 2012.

[26] **J. Muñoz Rivera,** Estabilização de Semigrupos e Aplicações, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.

[27] **M. Nakao,** Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, Israel J. Math., 95 (1996), pp. 25-42.

[28] **M. Nakao,** Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, Math. Ann., 305 (1996), pp. 403-417.

[29] **N.M. Newmark,** A method of computation for structural dynamics, J. Engrg. Mech. Div., ASCE 85 (1959).

[30] **A. Pazy,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag (1983). New York.

[31] **J. Prüss,** On the spectrum of C_0-semigroups, Trans. AMS. 284 (1984), pp. 847-857.

[32] **R. Quintanilla,** Exponential decay in mixtures with localized dissipative term, Appl. Math. Lett., 18 (2005), pp. 1381-1388.

[33] **M. Renardy,** On the type of certain C_0-semigroups, Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993), pp. 1299-1309.

[34] **K. Yosida,** Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.