Sobre a Continuidade Absoluta de Medidas Invariantes

Daniel Reis de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Rio de Janeiro
22 Março de 2012

Sobre a continuidade absoluta de medidas invariantes

Daniel Reis de Oliveira

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Profª. Katrin Grit Gelfert - IM/UFRJ

Prof. Samuel Anton Senti - IM/UFRJ

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira - IMPA

Rio de Janeiro

Março de 2012

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida. A meus pais, Jacinto e Maria Madalena, que sempre me apoiaram e me incentivaram a estudar. A todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até aqui: parentes, amigos e em especial Cristiane. À minha orientadora, Katrin, pela paciência e dedicação. Ao meu orientador da graduação, André, pelo incentivo a prosseguir nos estudos. Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Discutimos sobre a existência e unicidade de medidas e conjuntos invariantes por um sistema finito de contrações. Estudamos a convolução de Bernoulli e, utilizando o método de transversalidade de Peres-Solomyak, mostramos sua continuidade absoluta para certos parâmetros. Aplicamos esse método em alguns exemplos de sistemas mais gerais, denominados produtos tortos. Para esse tipo de sistemas nós investigamos medidas invariantes, sua continuidade absoluta e propriedade SRB.

Palavras Chaves: Sistema iterado de funções contrativas, Medidas invariantes, Continuidade absoluta de medidas, Produtos tortos.

Abstract

We discuss the existence and uniqueness of measures and sets invariant under a finite system of contractions. We study the Bernoulli convolution and, using the method of transversality by Peres-Solomyak, we show its absolute continuity for certain parameters. We apply this method to some examples of more general systems, called skew products. For this type of systems we investigate invariant measures, their absolute continuity and SRB property.

Key words: Iterated function system of contractions, Invariant measures, Absolute continuity of measures, Skew products.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal a discussão sobre medidas invariantes por determinados tipos de transformações e a continuidade absoluta de tais medidas. Medidas invariantes absolutamente contínuas são importantes porque podem ser "vistas", uma vez que possuem distribuição uniforme. Além disso, a medida de Lebesgue corresponde à maneira intuitiva de se medir. Como muitas vezes ela não é invariante por uma aplicação, o fato da medida invariante ser absolutamente contínua a torna de certo modo também natural, possibilitando que ideias intuitivas apareçam. Resultados válidos para um conjunto cuja medida invariante é positiva de fato irão valer para um conjunto de medida de Lebesgue positiva.

Sobre pré-requisitos, alguns resultados, especialmente de Análise e Teoria da Medida, serão admitidos, enquanto outros, considerados importantes para uma boa leitura do texto, serão apresentados no primeiro capítulo, denominado Preliminares.

No segundo capítulo são apresentados dois métodos de verificar a continuidade absoluta (em relação a Lebesgue) de uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$. Esses métodos serão utilizados em alguns capítulos posteriores.

No Capítulo 3 são tratados sistemas iterados de contrações em $\mathbb{R}^n$. Seguindo as ideias de um famoso artigo de Hutchinson [7], mostramos que, para um sistema finito, existe uma única probabilidade de Borel μ invariante satisfazendo $\int \|x\| \, d\mu(x) < \infty$. Em seu artigo, Hutchinson considerou um sistema finito de contrações atuando em um espaço métrico (X, d) completo e separável. Ele afirmou que existia uma única uma probabilidade de Borel com suporte limitado invariante por um tal sistema. Sua demonstração utilizava o Teorema do Ponto Fixo de Banach nesse espaço de medidas munido da chamada distância de Hutchinson, a qual indicaremos por d_H. Porém, ele omitiu a prova que tal espaço é completo, e, de fato, tal espaço não o é se X for ilimitado (conforme pode ser verificado em [9]). Assim, a prova de Hutchinson não vale para o caso particular $X = \mathbb{R}^n$. Åkerlund-Biström [2] mostrou então que o espaço $\mathcal{M}_1^1$ das probabilidades de Borel μ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $\int \|x\| \, d\mu(x) < \infty$ é completo com a distância de Hutchinson. Repetindo a demonstração feita em [7] para o espaço $(\mathcal{M}_1^1, d_H)$, é possível garantir a existência de uma única medida em $\mathcal{M}_1^1$ invariante por um sistema finito de contrações em $\mathbb{R}^n$. Seguindo as ideias de Hutchinson, mostramos também a existência de um único conjunto compacto não vazio invariante por esse sistema. Ao final do capítulo, apresentamos uma relação entre tal conjunto e o suporte da medida invariante.

Os resultados obtidos nos capítulos anteriores são fortemente usados no Capítulo 4, que trata da chamada convolução infinita de Bernoulli. Esta é uma medida invariante por um determinado sistema de contrações reais, que depende de um parâmetro $\lambda \in (0,1)$. A continuidade absoluta de tal medida para $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ foi um problema que chamou a atenção de muitos matemáticos ao longo do século XX. Em 1995, Solomyak [19] provou uma conjectura de Garsia (ver também [19] para mais referências): a convolução infinita de Bernoulli é absolutamente contínua para quase todo parâmetro $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$. Em [14], Peres e Solomyak apresentaram uma prova simplificada desse resultado, substituindo métodos de transformada de Fourier por métodos de diferenciação de medidas. Essa prova será detalhada, e para tal serão apresentados também resultados sobre convoluções de medidas.

Por fim, no Capítulo 5, são tratadas transformações do tipo produto torto, que atuam em $S^1 \times \mathbb{R}$. Elas são o "produto" de uma expansão em S^1 com contrações em $\mathbb{R}$, que dependem de S^1. Essa dependência gera um sistema de contrações reais. As medidas invariantes pelo produto torto são assim naturalmente relacionadas com a medida invariante pela expansão e a medida invariante pelo sistema de contrações. Também é feita uma discussão sobre a chamada medida SRB, que é construída a partir de uma transformação contínua atuando em espaço métrico e é automaticamente invariante pela mesma. Por fim, são tratados três exemplos específicos de produto torto: a transformação generalizada do padeiro de Alexander e Yorke [3], e generalizações de Tsujii [20] e Rams [17].

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo abordaremos, sem entrar em detalhes, alguns conceitos e resultados importantes para uma boa leitura do texto. Em geral, fatos básicos vistos em cursos como Análise serão assumidos, enquanto resultados de Medida e Integração serão revistos, dada a importância que terão neste trabalho. Quase sempre estaremos considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (muitas vezes para $n = 1$), mas alguns conceitos serão apresentados em um contexto mais geral.

1.1 Notações Básicas e Resultados de Medida

Convém fixar de uma vez por todas algumas notações. Dados um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, indicaremos por

$$U(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \|x - a\| < r\}\,,$$

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \|x - a\| \leq r\}\,.$$

Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjuntos dos inteiros positivos, isto é, o conjunto dos inteiros maiores ou iguais que 1, e por $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. As seguintes notações clássicas serão mantidas:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon f \text{ é contínua}\}\,,$$

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon f \text{ é contínua e limitada}\}\,,$$

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon f \text{ é contínua e tem suporte compacto}\}\,.$$

Vamos a partir de agora fazer uma revisão sobre alguns fatos importantes de Teoria da Medida e Integração. Inicialmente, vamos explicitar o que chamaremos de medida ao longo deste trabalho. Fixemos de uma vez por todas um espaço mensurável $(X, \mathcal{O})$. Diremos que $\mu : \mathcal{O} \to [0, \infty]$ é uma *medida* em $(X, \mathcal{O})$ se

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, sempre que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

Nesse caso, $(X, \mathcal{O}, \mu)$ será chamado um *espaço de medida*. Se X for um espaço topológico, a σ-álgebra dos boreleanos de X será denotada por $\mathcal{B}_X$, e uma medida μ em $(X, \mathcal{B}_X)$ será chamada, como de costume, uma *medida de Borel*. No caso particular em que $X = \mathbb{R}^n$, denotaremos sua σ-álgebra de Borel apenas por $\mathcal{B}$. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ será denotada por m. Também como de costume, uma medida μ será chamada *finita* se $\mu(X) < \infty$, e será chamada uma *probabilidade* se $\mu(X) = 1$. Se X puder ser escrito como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $\mu(A_n) < \infty$ para todo n, diremos que μ é *σ-finita* e que $(X, \mathcal{O}, \mu)$ é um *espaço de medida σ-finito*.

Agora, se $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é uma função tal que

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;

2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ sempre que $A \subset B$;

3. $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$,

diremos que μ^* é uma *medida exterior em X*. Um conjunto $A \subset X$ será dito *μ^*-mensurável* se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{para todo}\, E \subset X.$$

Medidas e medidas exteriores se relacionam através do Teorema de Carathéodory (ver [6, 1.11 Carathéodory's Theorem]) e do Teorema de Extensão de Carathéodory (ver [6, 1.14 Theorem]). O primeiro afirma que dada uma medida exterior μ^* em X, a classe $\mathcal{O}_{\mu^*}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra em X e a restrição $\mu^*|_{\mathcal{O}_{\mu^*}}$ é uma medida. Já o segundo garante que se μ é uma medida em um espaço mensurável $(X, \mathcal{O})$, então μ pode ser estendida a uma medida exterior μ^* em X no sentido que todos os conjuntos em $\mathcal{O}$ são μ^* mensuráveis e além disso $\mu^*|_{\mathcal{O}} = \mu$. Dessa forma, se chamarmos uma medida exterior de medida, estaremos pensando na sua restrição aos conjuntos mensuráveis. Quando X é um espaço topológico, uma medida exterior μ^* pode ser naturalmente chamada uma medida de Borel se $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{O}_{\mu^*}$. Nesse caso, estaremos considerando a restrição $\mu^*|_{\mathcal{B}_X}$.

Uma medida de Borel μ definida sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é dita uma *medida de Radon* se satisfaz as seguintes condições:

1. $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto;

2. $\mu(E) = \inf \{\mu(A) \colon E \subset A,\ A \text{ aberto}\}$ para todo $E \in \mathcal{B}$;

3. $\mu(A) = \sup \{\mu(K) \colon K \subset A,\ K \text{ compacto}\}$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

O seguinte resultado nos será bastante útil e sua demonstração pode ser encontrada em [18, 2.18 Theorem].

Proposição 1.1. *Se μ é medida de Borel finita em $\mathbb{R}^n$ então μ é medida de Radon. Mais ainda, para todo $E \in \mathcal{B}$, vale que*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F)\colon F \subset E,\ F\,\textit{fechado}\}.$$

Se $(X, \mathcal{O})$ e $(Y, \mathcal{G})$ são espaços mensuráveis, uma função $f : X \to Y$ que satisfaz $f^{-1}(E) \in \mathcal{O}$ sempre que $E \in \mathcal{G}$ será chamada, como de costume, uma *função $(\mathcal{O}, \mathcal{G})$-mensurável* (ou apenas função mensurável se as σ-álgebras estiverem claras no contexto). Se X e Y forem espaços topológicos e f for $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mensurável, então f será chamada uma *função de Borel*. Quando $Y = \mathbb{R}$ e f for $(\mathcal{O}, \mathcal{B})$-mensurável, f será dita apenas uma *função mensurável real*. Vamos, a partir de agora e até o final da seção, revisar alguns resultados clássicos relativos à integração em espaços de medida. As suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [6].

Teorema 1.2 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida. Se uma sequência (f_n) de funções mensuráveis reais positivas em X é tal que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, então $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$.*

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{O}, \mu)$, diremos que uma propriedade P vale para *μ-quase todo ponto* em X se existe $F \in \mathcal{O}$ tal que $\{x \in X\colon x\,\text{não satisfaz}\,P\} \subset F$ e $\mu(F) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida. Se uma sequência (f_n) de funções integráveis é tal que (f_n) converge para f em μ-quase todo ponto, e existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ também em μ-quase todo ponto, então f é integrável e $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$.*

Consideremos agora μ e ν medidas definidas em um espaço mensurável $(X, \mathcal{O})$. Diremos que μ é *absolutamente contínua em relação a ν*, e escreveremos $\mu \ll \nu$, se $\mu(E) = 0$ sempre que $E \in \mathcal{O}$ e $\nu(E) = 0$. No caso particular em que μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ e ν é a medida de Lebesgue (em $\mathbb{R}^n$), diremos apenas que μ é *absolutamente contínua*. Se existirem conjuntos $E, F \in \mathcal{O}$ tais que $E \cup F = X$, $\mu(E) = 0$ e $\nu(F) = 0$, então μ e ν serão ditas *mutuamente singulares*. Novamente, no caso particular em que μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ e ν é a medida de Lebesgue (em $\mathbb{R}^n$), diremos apenas que μ é *singular*. Quando μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$, definimos o *suporte* de μ como o conjunto

$$\operatorname{supp}(\mu) := \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n\colon \exists r > 0\,\text{tal que}\,\mu(U(x,r)) = 0\}.$$

O seguinte resultado é bastante conhecido e diz respeito à decomposição de uma medida.

Teorema 1.4 (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sejam μ e ν medidas σ-finitas definidas em $(X, \mathcal{O})$. Então existem únicas medidas σ-finitas ν_1, ν_2 tais que $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \ll \mu$ e $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Além disso, existe uma função μ-integrável f tal que*

$$\nu_2(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathcal{O}. \tag{1.1}$$

Mais ainda, qualquer outra função que satisfaça (1.1) *coincide com f em μ-quase todo ponto.*

A função f que satisfaz (1.1) é chamada a *derivada de Radon-Nikodym* de ν_2 com respeito a μ (ou ainda a *densidade* de ν_2 com respeito a μ) e é muitas vezes indicadas por $\frac{d\nu_2}{d\mu}$. Observe que no caso particular em que μ e ν são medidas σ-finitas tais que $\nu \ll \mu$, o Teorema 1.4 garante a existência de uma função μ-integrável f tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{O}.$$

Fecharemos a seção com um resultado que diz respeito à integração em um espaço produto. Dados dois espaços de medida $(X, \mathcal{O}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$, denotaremos, como de costume, por $\mu \times \nu$ a medida produto na σ-álgebra produto $\mathcal{O} \otimes \mathcal{G}$.

Teorema 1.5 (Teorema de Fubini). *Sejam $(X, \mathcal{O}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos. Para toda função $(\mu \times \nu)$-integrável f definida em $X \times Y$, vale que*

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \; d(\mu(x) \times \nu(y)) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \; d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

1.2 Os espaços L^p e demais resultados

Vamos nesta seção fazer uma breve revisão sobre os espaços L^p e citar alguns resultados que serão utilizados neste trabalho. Fixemos de uma vez por todas $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável real. Para cada $p > 0$, definimos

$$\|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando μ for a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, escreveremos $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$, e quando estiver claro no contexto com qual medida estamos trabalhando, escreveremos apenas $\|f\|_{L^p}$. Definimos ainda

$$L^p(\mu) := \left\{ f \text{ função mensurável real: } \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty \right\}.$$

Novamente, no caso particular em que $X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue, escreveremos $L^p(\mu) =: L^p(\mathbb{R})$.

Vamos apresentar alguns resultados clássicos sobre os espaços $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$. Exceto quando for indicado, suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [18].

Proposição 1.6 (Desigualdade de Hölder)**.** *Assuma que p e q, $1 < p < \infty$, são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, então $f \cdot g \in L^1(\mu)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

Proposição 1.7 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\mu)$. Então $f + g \in L^p(\mu)$ e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

A prova da seguinte desigualdade pode ser encontrada em [6, 6.12 Proposition].

Proposição 1.8. *Suponha $\mu(X) < \infty$ e $0 < p < q < \infty$. Se $f \in L^q(\mu)$ então $f \in L^p(\mu)$ e*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Para $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ não define uma norma em $L^p(\mu)$ porque podemos ter $\|f\|_{L^p} = 0$ com $f \neq 0$. A fim de obter uma norma em $L^p(\mu)$, definimos uma relação de equivalência nesse espaço da seguinte maneira:

$$f \sim g \text{ se } f(x) = g(x) \text{ para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in X.$$

Considerando o espaço das classes de funções em $L^p(\mu)$ definidas por essa relação de equivalência, podemos definir para uma classe F,

$$\|F\|_{L^p} := \|f\|_{L^p} , \quad f \in F.$$

Então, por conveniência, vamos considerar daqui em diante $L^p(\mu)$ como um espaço cujos elementos são classes de equivalência, e não mais funções. Dessa forma, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ será um espaço normado e teremos o seguinte resultado.

Proposição 1.9. *$(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ é espaço de Banach para $1 \leq p < \infty$.*

Considerando o caso $X = \mathbb{R}$ e μ a medida de Lebesgue, temos o seguinte fato, que é bastante conhecido.

Proposição 1.10. *$(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$.*

Para $1 \leq p < \infty$, temos ainda que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ e vale o seguinte resultado.

Proposição 1.11. *$\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ é denso em $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$.*

Agora, se $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, definimos

$$\|\Phi\| := \sup \{|\Phi(x)| : \|x\|_X \leq 1\} .$$

Se $\|\Phi\| < \infty$, Φ é dito um *funcional limitado.* O seguinte resultado nos será útil.

Teorema 1.12. *Suponha que*

1. $(X, \|\cdot\|_X)$ *é espaço de Banach separável;*

2. (Φ_n) *é uma sequência de funcionais lineares em* X*;*

3. $\sup_n \|\Phi_n\| =: M < \infty$.

Então existe uma subsequência (Φ_{n_k}) *de* (Φ_n) *tal que o limite*

$$\Phi(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{n_k}(x)$$

existe para cada $x \in X$*. Mais ainda,* Φ *é linear e* $\|\Phi\| \leq M$*.*

Dizemos que Φ *é o limite fraco de* (Φ_{n_k})*, ou ainda, que* (Φ_{n_k}) *converge para* Φ *fracamente.*

Para fechar a seção, vamos relembrar dois resultados que dizem respeito à representação de funcionais lineares em espaços de funções. Considere p e q expoentes conjugados, e $g \in L^q(\mu)$. Definimos a aplicação

$$\Phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{R} \quad : \quad h \to \int hg \; d\mu,$$

que é claramente um funcional linear em $L^p(\mu)$. A desigualdade de Hölder (Proposição 1.6) nos garante que

$$\Phi_g \text{ é limitado} \quad \text{e} \quad \|\Phi_g\| \leq \|g\|_{L^q}. \tag{1.2}$$

O resultado abaixo nos diz que no caso em que μ é σ-finita, sempre é possível escrever um funcional linear limitado em $L^p(\mu)$ dessa maneira.

Teorema 1.13. *Suponha* $1 \leq p < \infty$*,* μ *uma medida* σ*-finita em* X *e* Φ *um funcional linear limitado em* $L^p(\mu)$*. Então existe uma única função* $g \in L^q(\mu)$*, onde* q *é o expoente conjugado a* p*, tal que*

$$\Phi(h) = \int hg \; d\mu, \quad h \in L^p(\mu).$$

Mais ainda, $\|\Phi\| = \|g\|_{L^q}$*.*

Por fim, enunciaremos o seguinte resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontrada em [6, 7.2 The Riesz Representation Theorem].

Teorema 1.14 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja* Φ *um funcional linear positivo em* $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$*. Então existe uma única medida de Radon* μ *tal que*

$$\Phi(h) = \int h \, d\mu, \quad h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}).$$

Capítulo 2

Continuidade absoluta de medidas

Neste capítulo vamos discutir duas formas de verificar a continuidade absoluta de uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$. Nós sempre vamos considerar continuidade absoluta com respeito à medida de Lebesgue.

2.1 Derivada local de medidas

Vamos primeiro apresentar um método fundamental para verificar a continuidade absoluta estudando propriedades locais da medida. Para mais referências e detalhes veja também [12, 2].

Seja ν uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos as *derivadas inferior* e *superior* de ν em x (com respeito a Lebesgue) por

$$\underline{D}(\nu, x) := \liminf_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \nu(B(x, r)),$$

$$\overline{D}(\nu, x) := \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \nu(B(x, r)),$$

respectivamente. No ponto x onde o limite existe, nós definimos a *derivada* de ν em x (com respeito a Lebesgue) como $D(\nu, x) := \underline{D}(\nu, x) = \overline{D}(\nu, x)$.

Teorema 2.1. *Seja ν uma medida de Borel finita em $\mathbb{R}$. Então ν é absolutamente contínua se, e somente se, $\underline{D}(\nu, x) < \infty$ para ν-quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.*

Para provar esse teorema, usaremos o seguinte fato, cuja demonstração pode ser encontrada em [12, 2.8 Theorem].

Teorema 2.2 (Teorema do Recobrimento de Vitali)**.** *Seja ν uma medida de Radon em $\mathbb{R}$. Sejam ainda $A \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas tais que cada ponto de A é o centro de* *bolas arbitrariamente pequenas de $\mathcal{F}$, isto é,* $\inf\{r > 0\colon B(x,r) \in \mathcal{F}\} = 0$ *para todo* $x \in A$. *Então existe uma família no máximo enumerável de bolas disjuntas* $\{B_i\}$, $B_i \in \mathcal{F}$ *tais que* $\nu\left(A \setminus \bigcup B_i\right) = 0$.

Vamos também utilizar o seguinte lema.

Lema 2.3. *Sejam* ν *uma medida de Radon em* $\mathbb{R}$, $0 < t < \infty$ *e* $A \in \mathcal{B}$.

a) Se $\underline{D}(\nu, x) \leq t$ *para todo* $x \in A$, *então* $\nu(A) \leq t\, m(A)$.

b) Se $\overline{D}(\nu, x) \geq t$ *para todo* $x \in A$, *então* $\nu(A) \geq t\, m(A)$.

Demonstração. Vamos mostrar o ítem a). O ítem b) se prova de maneira análoga. Seja $\epsilon > 0$. Como m é medida de Radon, existe um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $A \subset U$ e $m(A) \leq m(U) < m(A) + \epsilon$. Dado $x \in A$, como $\underline{D}(\nu, x) \leq t$, existe uma sequência $(r_k(x))$ tal que $r_k(x) \to 0$ e

$$\nu(B(x, r_k(x))) < (t + \epsilon)2r_k(x) = (t + \epsilon)\, m(B(x, r_k(x)) \tag{2.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in A \subset U$ e U é aberto, existe ainda um índice $k_0(x)$ tal que $B(x, r_k(x)) \subset U$ para todo $k \geq k_0(x)$. Sejam então

$$B_x := \{B(x, r_k(x))\colon k \geq k_0(x)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} := \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Como A, $\mathcal{F}$ e ν satisfazem as condições do Teorema 2.2, segue que existe uma família no máximo enumerável $\{B_i\}$ tal que $B_i \in \mathcal{F}$ para todo i, $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e $\nu\left(A \setminus \bigcup B_i\right) = 0$. Daí, vem que $\nu(A) \leq \sum \nu(B_i)$. De fato, como ν é finita temos que $\nu\left(A \setminus \bigcup B_i\right) = 0$ implica

$$\nu(A) - \nu\left(A \cap \bigcup B_i\right) = 0,$$

e como os conjuntos B_i são disjuntos,

$$\nu(A) = \nu\left(A \cap \bigcup B_i\right) = \nu\left(\bigcup (A \cap B_i)\right) = \sum \nu(A \cap B_i) \leq \sum \nu(B_i). \tag{2.2}$$

Utilizando (2.1), (2.2) e o fato que todos os conjuntos B_i são disjuntos e satisfazem $\bigcup B_i \subset U$, temos que

$$\nu(A) \leq (t + \epsilon) \sum m(B_i) = (t + \epsilon) m\left(\bigcup B_i\right) \leq (t + \epsilon) m(U) < (t + \epsilon)(m(A) + \epsilon),$$

pela escolha de U. Como ϵ é arbitrário, temos que $\nu(A) \leq t\, m(A)$. □

Vamos agora demonstrar o Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1. Vamos supor que $\nu \ll m$. Definindo

$$E := \left\{x \in \mathbb{R} \colon \overline{D}(\nu, x) = \infty\right\},$$

temos que $E \supset \{x \in \mathbb{R} \colon \underline{D}(\nu, x) = \infty\}$. Assim, basta mostrar que $m(E) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$E_n := \left\{x \in \mathbb{R} \colon \overline{D}(\nu, x) \geq n\right\}.$$

Então

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \quad \text{e} \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{2.3}$$

Vamos mostrar que os conjuntos E_n são boreleanos.

Afirmação 1. *Para cada $r > 0$, a função $x \mapsto \nu(B(x, r))$ é função de Borel.*

Demonstração. Note inicialmente que $\nu(B(\cdot, r))$ é semicontínua superiormente. De fato, se (x_i) é uma sequência de números reais tal que $\lim_{i \to \infty} x_i = x$, então definamos para cada i uma medida ν_i, pondo $\nu_i(A) := \nu(A + (x - x_i))$ para cada conjunto $A \in \mathcal{B}$. Observe que $\nu_i \to \nu$ fracamente, isto é, para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ temos

$$\int f(y)\, d\nu_i(y) = \int f(y - (x - x_i))\, d\nu(y) \to \int f(y)\, d\nu(y).$$

De fato, como cada medida ν_i é medida de Radon, segue de [12, 14.13 Lemma] que basta verificar que para cada $r > 0$, a sequência cujos termos são

$$\sup\left\{\left|\int \left(f(y - (x - x_i)) - f(y)\right)\, d\nu(y)\right| : f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\, \operatorname{supp} f \subset B(0, r) \text{ e } \operatorname{Lip} f \leq 1\right\}$$ [1]

converge para 0. Se $r > 0$ é tal que $\nu(B(0, r + 1)) = 0$, isso claramente ocorre. Suponha então que $\nu(B(0, r + 1)) \neq 0$ e seja $\epsilon > 0$. Escolha $i_0(r) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0(r)$ vale que $|x - x_i| < \min\left\{1, \frac{\epsilon}{\nu(B(0, r+1))}\right\}$. Para cada $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que $\operatorname{Lip} f \leq 1$ e $\operatorname{supp} f \subset B(0, r)$ temos

$$\left|\int \left(f(y - (x - x_i)) - f(y)\right)\, d\nu(y)\right| \leq \int \left|f(y - (x - x_i)) - f(y)\right|\, d\nu(y),$$

donde segue que

$$\left|\int f(y - (x - x_i))\, d\nu(y) - \int f(y)\, d\nu(y)\right| \leq \int_{B(0, r+1)} |x - x_i|\, d\nu(y),$$

e assim,

$$\left|\int f(y - (x - x_i))\, d\nu(y) - \int f(y)\, d\nu(y)\right| \leq \frac{\epsilon}{\nu(B(0, r + 1))} \nu(B(0, r + 1)) \leq \epsilon.$$

[1] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então $\operatorname{Lip} f := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$.

Agora, usando [12, 1.24 Theorem (1)], temos

$$\limsup_{i\to\infty} \nu(B(x_i, r)) \le \nu(B(x, r)).$$

Assim, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\nu(B(\cdot, r))^{-1}((-\infty, a))$ é aberto, donde segue que $\nu(B(\cdot, r))$ é função de Borel. $\square$

Afirmação 2. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, a derivada superior de ν em x não muda se considerarmos o limite superior com r restrito ao conjunto dos racionais, isto é,*

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)) = \limsup_{r\to 0^+,\ r\in\mathbb{Q}} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)).$$

Demonstração. Basta mostrar que

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)) \le \limsup_{r\to 0^+,\ r\in\mathbb{Q}} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)).$$

Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos, por definição, que existe uma sequência (r_i) tal que $r_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\lim_{i\to\infty} \frac{1}{2r_i}\nu(B(x, r_i)) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r))$. Para cada i, sejam p_i e q_i racionais tais que $0 < p_i \le r_i \le q_i$, $|q_i - r_i| < \frac{r_i}{i}$ e $|r_i - p_i| < \frac{r_i}{i}$. Pela monotonicidade de ν,

$$\frac{1}{2q_i}\nu(B(x, p_i)) \le \frac{1}{2r_i}\nu(B(x, r_i)) \le \frac{1}{2p_i}\nu(B(x, q_i)). \tag{2.4}$$

Note agora que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{r_i}\frac{r_i}{q_i} = 1, \tag{2.5}$$

já que pela escolha de p_i e q_i temos $0 \le \left|\frac{q_i}{r_i} - 1\right| < \frac{1}{i}$ e $0 \le \left|1 - \frac{p_i}{r_i}\right| < \frac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Temos ainda que

$$\limsup_{r\to 0^+,\ r\in\mathbb{Q}} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)) \ge \limsup_{i\to\infty} \frac{\nu(B(x, q_i))}{2q_i} = \limsup_{i\to\infty} \left(\frac{\nu(B(x, q_i))}{2p_i}\frac{p_i}{q_i}\right),$$

e assim, combinando (2.4) com (2.5),

$$\limsup_{r\to 0^+,\ r\in\mathbb{Q}} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)) \ge \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\nu(B(x, r)),$$

o que prova a afirmação. $\square$

Juntando as Afirmações 1 e 2, temos que $\overline{D}(\nu, \cdot)$ é o limite superior de uma família enumerável de funções de Borel, sendo, por [6, 2.7 Proposition], também uma função de Borel. Como $E_n = \overline{D}(\nu, \cdot)^{-1}([n, \infty))$, segue que os conjuntos E_n são boreleanos, e assim, pelo Lema 2.3, $m(E_n) \le \frac{1}{n}\nu(E_n) \le \frac{1}{n}\nu(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, como ν é finita, $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$. Como além disso $m(E_1) < \infty$, segue, por (2.3), que $m(E) = 0$.

Supondo agora que a derivada inferior de ν seja finita para ν-quase todo ponto em $\mathbb{R}$, vamos mostrar que $\nu \ll m$. Dado $A \in \mathcal{B}$ tal que $m(A) = 0$, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n := \{x \in A \colon \underline{D}(\nu, x) \leq n\}.$$

Seja ainda

$$A_\infty := \{x \in A \colon \underline{D}(\nu, x) = \infty\}.$$

Pela Afirmação 1 e por outra análoga à Afirmação 2, podemos concluir que os conjuntos A_n e A_∞ são boreleanos. Temos, por hipótese, que $\nu(A_\infty) = 0$. Além disso, pelo Lema 2.3 e por $A_n \subset A$, temos que

$$\nu(A_n) \leq n \cdot m(A_n) \leq n \cdot m(A) = 0.$$

Assim, como $A = A_\infty \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue que

$$\nu(A) = \nu\left(A_\infty \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \nu(A_\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = 0.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. $\square$

2.2 Um método de Tsujii

Vamos agora discutir um outro método para verificar a continuidade absoluta de uma medida, seguindo as ideias de Tsujii em [20]. Vamos primeiro definir um produto interno no espaço $\mathcal{M}$ das medidas com sinal, de Borel e finitas em $\mathbb{R}$. Dadas medidas $\nu, \mu \in \mathcal{M}$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ e um número $r > 0$, seja

$$(\nu, \mu)_r := \int \nu(U(x, r))\mu(U(x, r))\, dm. \tag{2.6}$$

Lema 2.4. $(\cdot, \cdot)_r$ *define um produto interno em* $\mathcal{M}$.

Demonstração. Segue diretamente da definição que $(\cdot, \cdot)_r$ é bilinear, simétrico e além disso satisfaz $(\nu, \nu)_r \geq 0$ para toda $\nu \in \mathcal{M}$. Basta mostrar que $(\nu, \nu)_r = 0$ implica $\nu = 0$.

Se $(\nu, \nu)_r = 0$, então $\nu(U(x, r)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, suponhamos por absurdo que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\nu(U(x_0, r)) > 0$. Disso vem que $\nu((x_0 - r, x_0]) > 0$ ou $\nu((x_0, x_0 + r)) > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\nu((x_0, x_0 + r)) =: c > 0$. Então para todo $x \in (x_0, x_0 + r)$ vale que $\nu(U(x, r)) \geq c > 0$, e assim

$$\int \nu(U(x, r))\nu(U(x, r))dm \geq \int_{x_0}^{x_0 + r} \nu(U(x, r))\nu(U(x, r))dm \geq c^2\, |x_0 + r - x_0| = c^2 r > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\nu(U(x,r)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e se $\{q_n\}$ é uma enumeração de $\mathbb{Q}$, então

$$\nu(\mathbb{R}) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U(q_n, r)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu\left(U(q_n, r)\right) = 0.$$

Isso conclui a prova do lema. $\square$

Assim, $(\cdot,\cdot)_r$ induz uma norma em $\mathcal{M}$, a saber,

$$\|\nu\|_r := \sqrt{(\nu,\nu)_r}. \tag{2.7}$$

Teorema 2.5. *Seja ν uma probabilidade de Borel em $\mathbb{R}$. Se $\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{r}\|\nu\|_r < \infty$, então ν é absolutamente contínua. Além disso, a sua densidade (com respeito a Lebesgue) está em $L^2(\mathbb{R})$ e satisfaz*

$$\left\|\frac{d\nu}{dm}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\|\nu\|_r.$$

Demonstração. Considere $c := \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{r}\|\nu\|_r$. Para cada $r > 0$, nós definimos a função $g_r(x) := \frac{1}{r}\nu(U(x,r))$. Então vale que

$$\|g_r\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{r}\|\nu\|_r,$$

donde segue que $\liminf_{r\to 0^+}\|g_r\|_{L^2(\mathbb{R})} = c$. Seja (r_k) uma sequência convergindo para 0 tal que

$$\lim_{k\to\infty}\|g_{r_k}\|_{L^2(\mathbb{R})} = c. \tag{2.8}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\|g_{r_k}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ para todo k, podemos considerar o funcional

$$\Phi_k : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad : \quad h \mapsto \int h g_{r_k} dm, \tag{2.9}$$

o qual já vimos em (1.2) que é limitado e satisfaz $\|\Phi_k\| \leq \|g_{r_k}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Note que como $g_{r_k}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cada funcional Φ_k é positivo, isto é, $h \geq 0$ implica $\Phi_k(h) \geq 0$. Temos que $\sup_k \|\Phi_k\| < \infty$, e como $L^2(\mathbb{R})$ é separável e Banach, segue, do Teorema 1.12, que existem um funcional $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e uma subsequência (r_{k_i}) de (r_k), a qual por simplicidade vamos supor a própria sequência, tal que

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_k(h) = \Phi(h) \quad \text{para toda } h \in L^2(\mathbb{R}). \tag{2.10}$$

Note que o funcional Φ também é positivo. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um índice $k_0 = k_0(n)$ tal que $\|\Phi_k\| < c + \frac{1}{n}$, para todo $k \geq k_0$, temos, também pelo Teorema 1.12, que $\|\Phi\| \leq c + \frac{1}{n}$. Como isto vale para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\Phi\| \leq c. \tag{2.11}$$

Além disso, pelo Teorema 1.13, existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\Phi(h) = \int hg \; dm \quad \text{e} \quad \|\Phi\| = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \,. \tag{2.12}$$

Observe que o fato do funcional Φ ser positivo junto com a primeira igualdade de (2.12) garante que

$$\int_E g \, dm \geq 0 \quad \text{para todo}\, E \in \mathcal{B}. \tag{2.13}$$

Além disso, combinando (2.9), (2.10) e (2.12), temos que

$$\int hg \; dm = \lim_{k\to\infty} \int hg_{r_k} dm \quad \text{para toda } h \in L^2(\mathbb{R}). \tag{2.14}$$

Vamos mostrar agora que $\frac{g}{2} = \frac{d\nu}{dm}$, isto é, que

$$\int_E g \; dm = 2\nu(E) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}. \tag{2.15}$$

Como cada boreleano em $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união no máximo enumerável de boreleanos limitados disjuntos, basta mostrar (2.15) para $E \in \mathcal{B}$ limitado. Sendo ν medida de Radon, temos para cada $E \in \mathcal{B}$ que

$$\nu(E) = \inf \left\{ \nu(A) \colon E \subset A, A \text{ aberto} \right\}, \tag{2.16}$$

donde basta mostrarmos (2.15) para os abertos $A \subset \mathbb{R}$. De fato, nesse caso temos, por (2.16), que

$$\begin{aligned} 2\nu(E) &= \inf \left\{ \int_A g \; dm \colon E \subset A, A \text{ aberto} \right\} \\ &= \int_E g \; dm + \inf \left\{ \int_{A\setminus E} g \; dm \colon E \subset A, A \text{ aberto} \right\}, \end{aligned}$$

e combinando (2.11), (2.12), (2.13), a Proposição 1.8 e o fato de E ser limitado,

$$2\nu(E) = \int_E g \; dm.$$

Como cada conjunto aberto em $\mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união no máximo enumerável de intervalos abertos disjuntos, segue que basta mostrarmos (2.15) nos intervalos abertos.

Observe agora que

$$\nu(\{a\}) = 0 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

De fato, suponha por absurdo que existe um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $\nu(\{a\}) > 0$. Fixado $r > 0$, como para todo $x \in U(a, \frac{r}{2})$ vale que $\nu(U(x,r)) \geq \nu(\{a\})$, temos que

$$\|\nu\|_r \geq \Big(\int_{U(a,\frac{r}{2})} \nu(U(x,r))\nu(U(x,r)) \, dm \Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(m\big(U\big(a, \frac{r}{2}\big)\big)\nu(\{a\})^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Disso segue que
$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{r}\left\|\nu\right\|_r \geq \liminf_{r\to 0} \frac{\nu(\{a\})}{r^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$
o que contraria a hipótese do Teorema.

Pelos comentários anteriores e por (2.17), basta mostrar (2.15) nos intervalos da forma $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a definição de g_{r_k} nos dá
$$\int_I g_{r_k}\, dm = \int_I \int \frac{1}{r_k}\, \mathbb{I}_{U(x,r_k)}(y)\, d\nu(y)dm(x) = \int \int \frac{1}{r_k}\, \mathbb{I}_I(x)\mathbb{I}_{U(x,r_k)}(y)\, d\nu(y)dm(x).$$
Pelo Teorema 1.5,
$$\int_I g_{r_k}\, dm = \int \int \frac{1}{r_k}\mathbb{I}_{(I\cap U(y,r_k))}(x)\, dm(x)d\nu(y) = \int \frac{1}{r_k} m(I \cap U(y,r_k))\, d\nu(y).$$
Dessa forma, para k suficientemente pequeno,
$$\int_I g_{r_k}\, dm = \int_{[a-r_k,a+r_k]} \Big(\frac{y-a}{r_k} + 1\Big)\, d\nu(y) + \int_{(a+r_k,b-r_k)} 2\, d\nu + \int_{[b-r_k,b+r_k]} \Big(\frac{b-y}{r_k} + 1\Big)\, d\nu.$$
Por (2.17) e pelo Teorema 1.3,
$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a-r_k,a+r_k]} \Big(\frac{y-a}{r_k} + 1\Big)\, d\nu(y) = \lim_{k\to\infty} \int \mathbb{I}_{[a-r_k,a+r_k]}\Big(\frac{y-a}{r_k} + 1\Big)\, d\nu(y) = 0,$$
e de forma análoga,
$$\lim_{k\to\infty} \int_{[b-r_k,b+r_k]} \Big(\frac{b-y}{r_k} + 1\Big)\, d\nu = 0.$$
Por fim, também por (2.17) e pelo Teorema 1.3,
$$\lim_{k\to\infty} \int_{(a+r_k,b-r_k)} 2\, d\nu = 2\nu((a,b)) = 2\nu(I).$$
Por (2.14),
$$\int_I g\, dm = 2\nu(I),$$
e portanto a igualdade vale para todo boreleano em $\mathbb{R}$, conforme comentado anteriormente. Segue que $\nu \ll m$ e além disso, pela unicidade da derivada de Radon-Nikodym, temos que $\frac{g}{2} = \frac{d\nu}{dm}$. Por (2.11) e (2.12) concluímos a desigualdade do enunciado. $\square$

Capítulo 3

Sistema de contrações

Vamos neste capítulo tratar de medidas e conjuntos invariantes por um sistema iterado de contrações no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os dois principais resultados apresentados garantem, para um sistema finito, a existência de uma única medida e de um único conjunto invariante satisfazendo determinadas condições. Tais resultados são independentes, de forma que a Seção 3.1 e a Seção 3.2 também o são. Porém, na Seção 3.3, relacionaremos o conjunto com o suporte da medida invariante. Nossa principal referência será o artigo [7] de John E. Hutchinson.

Vamos introduzir algumas notações. Dada $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos a *constante de Lipschitz* de F por

$$\operatorname{Lip} F := \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|}.$$

Se $\operatorname{Lip} F = \lambda$, então $\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $\operatorname{Lip} F$ é o menor tal λ. A aplicação F é dita *Lipschitz* se $\operatorname{Lip} F < \infty$. Se $\operatorname{Lip} F < 1$, F é dita uma *contração*.

Considere agora $N \geq 2$ um inteiro. Vamos neste capítulo considerar $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ um conjunto de contrações em $\mathbb{R}^n$ e $\rho = \{\rho_1, ..., \rho_N\}$ um conjunto de números reais com $0 < \rho_i < 1$ para todo $i = 1, ..., N$, e $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$. Estudaremos medidas e conjuntos invariantes com respeito desse sistema de contrações $\mathcal{S}$.

Considere $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ o espaço das probabilidades de Borel em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}^1_1(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto de $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ formado pelas medidas ν que satisfazem $\int \|x - x_0\| \, d\nu(x) < \infty$ para algum ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Observe que se uma medida $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int \|x - x_0\| \, d\nu(x) < \infty$ para algum ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então $\int \|x - x_1\| \, d\nu(x) < \infty$ para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$, uma vez que ν é finita. Dessa forma, o ponto x_0 na definição de $\mathcal{M}^1_1(\mathbb{R}^n)$ pode ser qualquer e assim, pode ser o mesmo para toda medida $\nu \in \mathcal{M}^1_1(\mathbb{R}^n)$. Por simplicidade, escreveremos apenas $\mathcal{M}^1$ e $\mathcal{M}^1_1$ sempre que estiver claro qual espaço estamos considerando. O seguinte lema nos será útil mais adiante.

Lema 3.1. *O espaço $\mathcal{M}^1_1(\mathbb{R}^n)$ coincide com o espaço das medidas $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ tais que $\int \phi \, d\nu < \infty$ para toda função Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, temos que

$$\int (\phi - \phi(0))\, d\nu \leq \mathrm{Lip}\,\phi \int \|x\|\; d\nu(x) < \infty$$

e assim

$$\int \phi\, d\nu = \int (\phi - \phi(0))\, d\nu + \int \phi(0)\, d\nu < \infty.$$

Suponha agora que $\nu \in \mathcal{M}^1$ é tal que $\int \phi\; d\nu < \infty$ para toda função Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Como $x \mapsto \|x\|$ é Lipschitz, temos que $\int \|x\|\; d\nu(x) < \infty$, o que conclui a prova do lema. $\square$

3.1 Medidas invariantes

Vamos agora tratar de medidas invariantes por contrações. O principal resultado desta seção é o seguinte.

Teorema 3.2. *Sejam $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ um conjunto de contrações em $\mathbb{R}^n$ e $\rho = \{\rho_1, ..., \rho_N\}$ um conjunto de números reais tais que $0 < \rho_i < 1$ para todo $i = 1, ..., N$, e $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$. Então existe uma única medida $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ $(\mathcal{S}, \rho)$-invariante.*

Abaixo vamos explicar o que significa uma medida ser $(\mathcal{S}, \rho)$-invariante. Hutchinson tentou provar uma primeira versão do Teorema 3.2 em [7]. Em sua versão, ele queria mostrar a existência de uma única probabilidade de Borel com suporte limitado invariante por $(\mathcal{S}, \rho)$, e não se restringia ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, mas sim considerava um espaço métrico completo e separável qualquer. Ocorre que sua demonstração continha uma falha (ver, por exemplo, [2] ou [9]), que será melhor explicada ao longo do texto. Em [2] se encontra a prova do Teorema 3.2 na versão que apresentamos. Uma extensão do Teorema 3.2 para o caso em que o espaço considerado é um espaço métrico completo e separável qualquer, digamos (X, d), foi feita por Kravchenko em [9]. Essa extensão torna verdadeiro o resultado de Hutchinson, uma vez que o espaço das probabilidades de Borel com suporte limitado em X está contido no espaço $\mathcal{M}_1^1(X)$, [1] e a única medida em $\mathcal{M}_1^1(X)$ invariante por $(\mathcal{S}, \rho)$ possui suporte limitado, conforme veremos adiante. Kravchenko também obteve uma extensão do Teorema 3.2 para o caso em que o conjunto de contrações $\mathcal{S}$ e o conjunto ρ são enumeráveis, utilizando a hipótese adicional que $\sum_{i=1}^\infty \rho_i d(x_1, x_i) < \infty$, onde x_i é o ponto fixo da contração S_i. Aqui, provaremos apenas o Teorema 3.2 na forma enunciada, usando as ideias de Hutchinson [7] e de Åkerlund-Biström [2]. Antes de começar a prova, vamos definir a invariância de uma medida por um sistema $(\mathcal{S}, \rho)$.

[1] $M_1^1(X)$ definido de maneira natural, como o espaço das probabilidades de Borel μ em X satisfazendo $\int d(x, x_0)\, d\mu(x) < \infty$.

Se $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de Borel, definimos a medida *push-forward* $f_*\nu$, colocando para cada $E \in \mathcal{B}$

$$f_*\nu(E) := \nu(f^{-1}(E)). \tag{3.1}$$

Segue diretamente da definição que $f_*\nu \in \mathcal{M}^1$.

Lema 3.3. *Se $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma contração e $\nu \in \mathcal{M}_1^1$, então $S_*\nu \in \mathcal{M}_1^1$.*

Demonstração. Basta mostrar que se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz então $\int \phi \, dS_*\nu < \infty$.

Afirmação 1. $\displaystyle\int \phi \, dS_*\nu = \int (\phi \circ S) \, d\nu.$

Demonstração. O resultado é válido quando colocamos funções características no lugar da aplicação ϕ, pois se $E \in \mathcal{B}$, então

$$\int \mathbb{I}_E \, dS_*\nu = \nu(S^{-1}(E)) = \int \mathbb{I}_{S^{-1}(E)} \, d\nu = \int (\mathbb{I}_E \circ S) \, d\nu.$$

Daí o resultado vale para funções simples, uma vez que se f é função simples em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, então $f = \sum_{j=1}^m c_j \mathbb{I}_{E_j}$ para algum $m \in \mathbb{N}$, com $E_j \in \mathcal{B}$ para todo $j = 1, ..., m$, e

$$\int f \, dS_*\nu = \sum_{j=1}^m c_j \int \mathbb{I}_{E_j} \, dS_*\nu = \sum_{j=1}^m c_j \int (\mathbb{I}_{E_j} \circ S) \, d\nu = \int \sum_{j=1}^m (c_j \mathbb{I}_{E_j} \circ S) \, d\nu,$$

donde segue que

$$\int f \, dS_*\nu = \int (f \circ S) \, d\nu.$$

Então o resultado vale para f função de Borel positiva, pois nesse caso existe uma sequência (f_i) de funções simples em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ tais que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f$ e f_i converge para f pontualmente (ver [6, 2.10 Theorem]). Assim, pelo Teorema 1.2,

$$\int f \, dS_*\nu = \lim_{i \to \infty} \int f_i \, dS_*\nu = \lim_{i \to \infty} \int f_i \circ S \, d\nu = \int f \circ S \, d\nu,$$

pois $0 \leq f_1 \circ S \leq f_2 \circ S \leq ... \leq f \circ S$ e $f_i \circ S$ converge para $f \circ S$ pontualmente. Por fim, o resultado vale para qualquer função de Borel f, pois nesse caso podemos escrever $f = f^+ - f^-$ com f^+ e f^- funções de Borel positivas, donde segue que

$$\int f \, dS_*\nu = \int f^+ \, dS_*\nu - \int f^- \, dS_*\nu = \int (f^+ \circ S) \, d\nu - \int (f^- \circ S) \, d\nu = \int (f \circ S) \, d\nu.$$

$\square$

Como a aplicação $\phi \circ S$ é Lipschitz e $\nu \in \mathcal{M}_1^1$, segue, da Afirmação 1 e do Lema 3.1, que $\int \phi \, dS_*\nu < \infty$. Também pelo Lema 3.1, $S_*\nu \in \mathcal{M}_1^1$. $\square$

Vamos, a partir de agora, considerar a seguinte transformação no espaço $\mathcal{M}_1^1$:

$$(\mathcal{S}, \rho) : \mathcal{M}_1^1 \to \mathcal{M}_1^1 \quad : \quad \nu \mapsto \sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*}\nu. \tag{3.2}$$

O lema a seguir garante a boa definição dessa aplicação.

Lema 3.4. *Se $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ então $(\mathcal{S}, \rho)(\nu) \in \mathcal{M}_1^1$.*

Demonstração. Como cada medida $S_{i*}\nu$ é medida de Borel, segue que $(\mathcal{S}, \rho)(\nu)$ é medida de Borel. Pelo Lema 3.3, se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, então $\int \phi \, dS_{i*}\nu < \infty$ para todo $i = 1, ..., N$, e usando a linearidade da integral, concluímos que $\int \phi \, d(\mathcal{S}, \rho)(\nu) < \infty$. Por fim, para ver que $(\mathcal{S}, \rho)(\nu)$ é probabilidade, note que por definição

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu)(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \nu(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Logo, $(\mathcal{S}, \rho)(\nu) \in \mathcal{M}_1^1$. $\square$

Estamos então em condições de dar a seguinte definição.

Definição 3.5. *Uma medida $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ é* $(\mathcal{S}, \rho)$-invariante *se $(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \nu$.*

Passaremos agora à demonstração do Teorema 3.2. Ela será baseada no seguinte resultado clássico.

Teorema 3.6 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $S : X \to X$ é uma contração então S possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $x \in X$ tal que $S(x) = x$. Mais ainda, $\lim_{i\to\infty} S^i(y) = x$ para todo $y \in X$.*

Para provar o Teorema 3.2, vamos definir uma métrica $\mathcal{W}_1$ em $\mathcal{M}_1^1$ de forma que $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$ seja um espaço métrico completo e $(\mathcal{S}, \rho)$ seja uma contração em $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$. Então o Teorema 3.2 seguirá imediatamente do Teorema 3.6. Definamos então

$$\mathcal{W}_1 : \mathcal{M}_1^1 \times \mathcal{M}_1^1 \to [0, \infty) \quad : \quad (\mu, \nu) \mapsto \sup \left\{ \int \phi \, d\mu - \int \phi \, d\nu \colon \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ e } \operatorname{Lip} \phi \le 1 \right\}.$$

Tal métrica, conhecida como distância de Hutchinson ou ainda distância de Wasserstein-Kantorovich, foi introduzida na década de 1950 por L. V. Kantorovich e G. Sh. Rubinshteĭn (para mais referências, veja [9]).

Em [7], Hutchinson considerou, para um espaço métrico completo e separável (X, d), uma métrica definida de maneira análoga à métrica $\mathcal{W}_1$, porém sobre o espaço das probabilidades de Borel em X com suporte limitado. Ocorre que com essa métrica, tal espaço pode não ser completo, conforme mostra exemplo encontrado em [9, Assertion 1.1]. Uma alternativa para a prova da versão original do Teorema 3.2, enunciada por Hutchinson em [7], seria considerar uma métrica definida de maneira semelhante à métrica $\mathcal{W}_1$, mas tomando o supremo sobre as funções $\phi : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{x\in X} |\phi(x)| + \operatorname{Lip}\phi \leq 1.$$ [2]

Essa métrica aparece em [5, Lecture 8], onde ela é melhor explicada. Em [5, 8.3. Theorem], é provado que sobre um espaço métrico separável, uma sequência de probabilidades de Borel (μ_i) converge para um probabilidade de Borel μ nessa nova métrica se, e somente se,

$$\lim_{i\to\infty} \int \varphi\, d\mu_i = \int \varphi\, d\mu \quad \text{para toda}\, \varphi \in \mathcal{C}_b(X).$$ [3]

Porém, para essa nova métrica, a demonstração de Hutchinson já falharia pelo fato que com ela $(\mathcal{S}, \rho)$ deixa de ser uma contração.

Observe agora que a métrica $\mathcal{W}_1$ em $\mathcal{M}_1^1$ poderia ter sido definida de uma maneira equivalente, como mostra o lema a seguir.

Lema 3.7. *Sejam x_0 um ponto de $\mathbb{R}^n$ e c uma constante real. Então*

$$\mathcal{W}_1(\mu,\nu) = \sup\left\{\int \phi\ d\mu - \int \phi\ d\nu \colon \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \operatorname{Lip}\phi \leq 1 \ \text{e}\ \phi(x_0) = c\right\}.$$

Demonstração. Seja $s := \sup\left\{\int \phi\ d\mu - \int \phi\ d\nu \colon \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \operatorname{Lip}\phi \leq 1 \text{ e } \phi(x_0) = c\right\}$. É imediato que $s \leq \mathcal{W}_1(\mu,\nu)$. Considere então $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Lip}\phi \leq 1$. Para provar que $s = \mathcal{W}_1(\mu,\nu)$, basta obter $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Lip}\psi \leq 1$, $\psi(x_0) = c$, e

$$\int \phi\ d\mu - \int \phi\ d\nu = \int \psi\ d\mu - \int \psi\ d\nu.$$

Defina $\psi := \phi - \phi(x_0) + c$. Então claramente $\psi(x_0) = c$ e $\operatorname{Lip}\psi \leq 1$. Além disso, como $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1$, a definição de ψ e o Lema 3.1 implicam que

$$\int \psi\ d\mu - \int \psi\ d\nu = \int \phi\, d\mu + \int (c - \phi(x_0))\, d\mu - \left(\int \phi\, d\nu + \int (c - \phi(x_0))\, d\nu\right),$$

e assim

$$\int \psi\ d\mu - \int \psi\ d\nu = \int \phi\, d\mu - \int \phi\, d\nu,$$

já que $\int (c - \phi(x_0))\, d\mu = (c - \phi(x_0))\, \mu(\mathbb{R}^n) = (c - \phi(x_0))\, \nu(\mathbb{R}^n) = \int (c - \phi(x_0))\, d\nu$. □

Para simplificar as notações, vamos, a partir de agora e até o final da seção, quase sempre omitir a variável de integração, ainda que esta apareça na função que está sendo integrada.

[2] Se (X, d) é um espaço métrico e $\phi : X \to \mathbb{R}$ é uma função, então $\operatorname{Lip}\phi := \sup_{x\neq y} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{d(x,y)}$.

[3] $\mathcal{C}_b(X) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} \colon \varphi \text{ é contínua e limitada}\}$

Proposição 3.8. $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$ *é um espaço métrico.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em etapas.

Afirmação 1. $\mathcal{W}_1(\mu,\nu) < \infty$ *para todas* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1$.

Demonstração. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tais que $\int \|x - x_0\|\, d\mu \leq R$ e $\int \|x - x_0\|\, d\nu \leq R$. Dada $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz com $\operatorname{Lip}\phi \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int \phi\, d\mu - \int \phi\, d\nu &= \int (\phi - \phi(x_0))\, d\mu + \int \phi(x_0)\, d\mu - \int \phi(x_0)\, d\nu + \int (\phi(x_0) - \phi)\, d\nu \\
&\leq \int |\phi - \phi(x_0)|\, d\mu + \int \phi(x_0)\, d\mu - \int \phi(x_0)\, d\nu + \int |\phi(x_0) - \phi|\, d\nu \\
&\leq \int \|x - x_0\|\, d\mu + \int \phi(x_0)\, d\mu - \int \phi(x_0)\, d\nu + \int \|x_0 - x\|\, d\nu \\
&\leq 2R,
\end{aligned}$$

uma vez que $\int \phi(x_0)\, d\mu = \phi(x_0)\, \mu(\mathbb{R}^n) = \phi(x_0)\, \nu(\mathbb{R}^n) = \int \phi(x_0)\, d\nu$. □

Afirmação 2. $\mathcal{W}_1(\mu,\nu) \geq 0$ *para todas* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1$.

Demonstração. Suponha que uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz $\operatorname{Lip}\phi \leq 1$ e $\int \phi\, d\mu - \int \phi\, d\nu < 0$. Então $-\phi$ é tal que $\operatorname{Lip}(-\phi) \leq 1$ e $\int (-\phi) d\mu - \int (-\phi) d\nu > 0$. □

Afirmação 3. *Se* $\mathcal{W}_1(\mu,\nu) = 0$ *então* $\mu = \nu$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{W}_1(\mu,\nu) = 0$. Então

$$\int \phi\, d\mu - \int \phi\, d\nu = 0 \quad \text{para toda } \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ com } \operatorname{Lip}\phi \leq 1. \tag{3.3}$$

Queremos mostrar que $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$, mas como μ, ν são medidas de Radon, segue, de (2.16), que basta provar a igualdade das duas medidas nos conjuntos abertos. Além disso, como μ e ν são finitas, basta mostrar a igualdade para os conjuntos fechados. Seja então $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$\phi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad \phi_m(x) := \begin{cases} 1, & \text{se}\, x \in F; \\ 1 - m d(x,F), & \text{se}\, 0 < d(x,F) < \frac{1}{m}; \\ 0, & \text{se}\, d(x,F) \geq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

É possível verificar que ϕ_m é Lipschtiz para todo $m \in \mathbb{N}$, com $\operatorname{Lip}\phi_m \leq m$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{\phi_m}{m}\, d\mu = \int \frac{\phi_m}{m}\, d\nu,$$

o que implica

$$\int \phi_m \, d\mu = \int \phi_m \, d\nu.$$

Como a sequência (ϕ_m) converge pontualmente para $\mathbb{I}_F$ e $\phi_m(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, segue, do Teorema 1.3, que

$$\int \mathbb{I}_F \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \phi_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \phi_m \, d\nu = \int \mathbb{I}_F \, d\nu,$$

o que prova a afirmação. □

Os dois fatos seguintes são consequência direta da definição de $\mathcal{W}_1$.

Afirmação 4. $\mathcal{W}_1(\mu,\nu) = \mathcal{W}_1(\nu,\mu)$ *para todas* $\mu,\nu \in \mathcal{M}_1^1$.
$\mathcal{W}_1(\mu,\nu) \leq \mathcal{W}_1(\mu,\lambda) + \mathcal{W}_1(\lambda,\nu)$ *para todas* $\mu,\lambda,\nu \in \mathcal{M}_1^1$.

Com isso concluímos a demonstração da proposição.

□

Proposição 3.9. $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$ *é um espaço métrico completo.*

Faremos aqui a mesma demonstração dada por Åkerlund-Biström em [2]. Precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.10. *Se* (μ_m) *é uma sequência de Cauchy em* $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$ *então para cada* $\epsilon > 0$ *existe um conjunto compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\int_{K^c} \|x\| \, d\mu_m < \epsilon \quad \text{para todo}\, m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_1(\mu_m,\mu_l) < \frac{\epsilon}{3}$ sempre que $m, l \geq m_0$.

Afirmação 1. *Existe um conjunto compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *da forma* $K := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq M\}$ *para algum* $M \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\int_{\left(\frac{K}{2}\right)^c} \|x\| \, d\mu_m < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } m = 1, ..., m_0, \tag{3.4}$$

onde $\frac{K}{2} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq \frac{M}{2}\right\}$.

Demonstração. Fixe $m \in \mathbb{N}$ e considere $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) := \|x\|$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_i(x) := \|x\| \cdot \mathbb{I}_{B(0,i)}$. Então $\phi_1 \leq \phi_2 \leq ... \leq \phi$ e ϕ_i converge para ϕ pontualmente. Assim, pelo Teorema 1.2, temos que

$$\lim_{i\to\infty} \int \phi_i \, d\mu_m = \int \phi \, d\mu_m,$$

e como $\int \|x\| \, d\mu_m < \infty$, já que $\mu_m \in \mathcal{M}_1^1$, segue que existe $i_0 = i_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int \|x\| \, d\mu_m - \frac{\epsilon}{3} < \int \phi_{i_0} \, d\mu_m \leq \int \|x\| \, d\mu_m.$$

Assim,

$$\int_{B(0,i_0)^c} \|x\| \, d\mu_m < \frac{\epsilon}{3}.$$

Basta então escolher $M = \max\{2(i_0(m))) \colon 1 \leq m \leq m_0\}$. □

Definamos agora a função

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) := \begin{cases} \|x\|, & \text{se}\, x \in \frac{K}{2}; \\ M - \|x\|, & \text{se}\, x \in K \setminus \frac{K}{2}; \\ 0, & \text{se}\, x \in \mathbb{R}^n \setminus K. \end{cases}$$

Afirmação 2. *A função f é Lipschitz e* $\operatorname{Lip} f \leq 1$.

Demonstração. Se $x \in \frac{K}{2}$ e $y \in K \setminus \frac{K}{2}$, escolhemos z no segmento de reta que liga x a y de forma que $\|z\| = \frac{M}{2}$. Então

$$\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\| \geq \left(\|x\| - \frac{M}{2} \right) + \left(\|y\| - \frac{M}{2} \right) = \|x\| + \|y\| - M.$$

De maneira análoga, $\|x - y\| \geq M - (\|x\| + \|y\|)$, e assim

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - (M - \|y\|)| = |f(x) - f(y)|.$$

Também se $x \in \frac{K}{2}$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$, temos

$$|f(x) - f(y)| = \|x\| \leq \frac{M}{2} \leq \|x - y\|.$$

Agora, se $x \in K \setminus \frac{K}{2}$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$, temos

$$|f(x) - f(y)| = M - \|x\| \leq M - \|x\| + \|y\| - M = \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Como cada uma das funções usadas na definição de f é Lipschitz com constante de Lipschitz menor ou igual que 1, a afirmação está provada. □

Observe agora que $f(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, basta notar que para $x \in K \setminus \frac{K}{2}$ temos $\frac{M}{2} < \|x\| \leq M$, e assim, $0 \leq f(x) = M - \|x\| < \frac{M}{2} < \|x\|$. Segue dessa observação e do fato que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, que

$$\int f \, d\mu_m \leq \int_K \|x\| \, d\mu_m \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Da definição de f e de (3.4) vem que

$$\int (\|x\| - f(x))\, d\mu_{m_0} = \int_{\left(\frac{K}{2}\right)^c} (\|x\| - f(x))\, d\mu_{m_0} \leq \int_{\left(\frac{K}{2}\right)^c} \|x\|\, d\mu_{m_0} < \frac{\epsilon}{3},$$

o que implica

$$\int f\, d\mu_{m_0} > \int \|x\|\, d\mu_{m_0} - \frac{\epsilon}{3}, \tag{3.6}$$

já que as duas integrais acima são finitas. Pela Afirmação 2 e pelo fato de $x \mapsto \|x\|$ ser Lipschitz com constante de Lipschitz menor ou igual que 1, segue, da escolha de m_0, que

$$\left| \int f\, d\mu_m - \int f\, d\mu_{m_0} \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo}\, m \geq m_0 \tag{3.7}$$

e

$$\left| \int \|x\|\, d\mu_m - \int \|x\|\, d\mu_{m_0} \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo}\, m \geq m_0. \tag{3.8}$$

Juntando (3.5) e (3.7), temos, para $m \geq m_0$, que

$$\int_K \|x\|\, d\mu_m > \int f\, d\mu_{m_0} - \frac{\epsilon}{3},$$

o que agregado com (3.6) nos dá

$$\int_K \|x\|\, d\mu_m > \int \|x\|\, d\mu_{m_0} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3},$$

e agora juntando com (3.8),

$$\int_K \|x\|\, d\mu_m > \int \|x\|\, d\mu_m - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, temos que

$$\int_{K^c} \|x\|\, d\mu_m < \epsilon \quad \text{para todo}\, m \geq m_0.$$

Juntando isso com (3.4), temos que

$$\int_{K^c} \|x\|\, d\mu_m < \epsilon \quad \text{para todo}\, m \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Demonstração da Proposição 3.9. Dividiremos a demonstração em etapas. Seja (μ_m) uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$

Afirmação 1. *Existem uma subsequência (μ_{m_i}) de (μ_m) e uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ tal que*

$$\lim_{i \to \infty} \int \varphi\, d\mu_{m_i} = \int \varphi\, d\mu \quad \textit{para toda}\ \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Fixado $\epsilon > 0$, seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_l) < \frac{\epsilon}{2}$ para todos $m, l \geq m_0$. Como cada medida μ_m é medida de Radon, para $m = 1, ..., m_0$ existe um conjunto compacto K_m tal que

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < \mu_m(K_m) \leq 1. \tag{3.9}$$

Escolhamos então números reais $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ de forma que

$$\bigcup_{m=1}^{m_0} K_m \subset K' := [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n],$$

e consideremos $K := [a_1 - 1, b_1 + 1] \times ... \times [a_n - 1, b_n + 1]$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$d(x, K') := \inf \{\|x - y\| : y \in K'\} \tag{3.10}$$

a distância do ponto x até o conjunto K'. Definamos ainda uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pondo

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } d(x, K') = 0; \\ 1 - d(x, K'), & \text{se } 0 < d(x, K') < 1; \\ 0, & \text{se } d(x, K') \geq 1. \end{cases}$$

Segue diretamente das definições de g e de K que

$$\int g \, d\mu_m \leq \int \mathbb{I}_K \, d\mu_m = \mu_m(K) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

e

$$\int g \, d\mu_{m_0} \geq \int \mathbb{I}_{K'} \, d\mu_{m_0} = \mu_{m_0}(K'),$$

o que junto com (3.9) e o fato que $K' \supset K_{m_0}$, nos dá

$$\int g \, d\mu_{m_0} \geq \mu_{m_0}(K_{m_0}) > 1 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.12}$$

É possível mostrar que $\operatorname{Lip} g \leq 1$, e isso implica que

$$\left| \int g \, d\mu_m - \int g \, d\mu_{m_0} \right| \leq \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_{m_0}) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

o que junto com (3.11) nos dá

$$\mu_m(K) \geq \int g \, d\mu_{m_0} - \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_{m_0}),$$

e assim, por (3.12) e pela escolha de m_0,

$$\mu_m(K) > 1 - \epsilon \quad \text{para todo } m \geq m_0.$$

Agora, se $m = 1, ..., m_0$, temos, por (3.9), que

$$\mu_m(K) \geq \mu_m(K') \geq \mu_m(K_m) > 1 - \frac{\epsilon}{2} > 1 - \epsilon.$$

Logo, $1 - \epsilon < \mu_m(K) \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue, de [5, 10.4. Theorem], que existem uma subsequência (μ_{m_i}) de (μ_m) e uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ satisfazendo as condições da Afirmação 1. $\square$

Afirmação 2. $\mu \in \mathcal{M}_1^1$.

Demonstração. Basta mostrar que $\int \|x\| \, d\mu < \infty$. Definamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) := \|x\|$, e para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad f_k(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } \|x\| \leq k; \\ f\left(\frac{k}{\|x\|}x\right), & \text{se } \|x\| > k. \end{cases} \tag{3.13}$$

Então para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que f_k é limitada e $\operatorname{Lip} f_k \leq 1$. Além disso, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f$ e $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Fixemos $\epsilon > 0$ e escolhamos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_l) < \epsilon$ para todos $m, l \geq m_0$. Se $c := \int f \, d\mu_{m_0}$, então para todo $m \geq m_0$ vale que

$$\int f \, d\mu_m = \int f \, d\mu_{m_0} + \int f \, d\mu_m - \int f \, d\mu_{m_0} \leq c + \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_{m_0}) < c + \epsilon,$$

o que junto com o fato que $f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$, nos dá

$$\int f_k \, d\mu_m < c + \epsilon \quad \text{para todo}\, k \text{ e para todo}\, m \geq m_0. \tag{3.14}$$

Agora, se (μ_{m_i}) é uma subsequência de (μ_m) tal como na Afirmação 1, então juntando (3.14) com o Teorema 1.2, temos que

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \lim_{i\to\infty} \int f_k \, d\mu_{m_i} \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{i\to\infty} (c + \epsilon) = c + \epsilon < \infty.$$

□

Afirmação 3. $\lim_{m\to\infty} \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu) = 0$.

Demonstração. Fixemos $\epsilon > 0$ e escolhamos $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_l) < \frac{\epsilon}{4}$ para todos $m, l \geq m_0$. Pelo Lema 3.10, existe um conjunto compacto $K = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq M\}$ tal que

$$\int_{K^c} \|x\| \, d\mu_m < \frac{\epsilon}{8} \quad \text{para todo}\, m \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz tal que $f(0) = 0$ e $\operatorname{Lip} f \leq 1$. Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$, funções f_k como em (3.13), com a tal função f assumindo o lugar da aplicação $x \mapsto \|x\|$. Então f_k é limitada, $\operatorname{Lip} f_k \leq 1$ e $f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e além disso (f_k) converge para f pontualmente. Segue, do Teorema 1.3, que $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu$. Assim, é possível escolher $k_0 \geq M$ de forma que

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_{k_0} \, d\mu \right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.16}$$

Escolhamos agora $m_{i_0} \geq m_0$ de forma que $\mu_{m_{i_0}}$ pertence à subsequência de (μ_m) que satisfaz a condição da Afirmação 1 e

$$\left| \int f_{k_0} \, d\mu_{m_{i_0}} - \int f_{k_0} \, d\mu \right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.17}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int f\ d\mu_m - \int f\ d\mu\right| \leq & \left|\int f\ d\mu_m - \int f\ d\mu_{m_{i_0}}\right| + \left|\int f\ d\mu_{m_{i_0}} - \int f_{k_0}\ d\mu_{m_{i_0}}\right| \\ & + \left|\int f_{k_0}\ d\mu_{m_{i_0}} - \int f_{k_0}\ d\mu\right| + \left|\int f_{k_0}\ d\mu - \int f\ d\mu\right|.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Como $k_0 \geq M$, temos que $f_{k_0}(x) = f(x)$ para todo $x \in K$. Juntando isso com (3.16) e (3.17), a equação (3.18) nos dá que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\left|\int f\ d\mu_m - \int f\ d\mu\right| < \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu_{m_{i_0}}) + \int_{K^c} |f - f_{k_0}|\ d\mu_{m_{i_0}} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}. \tag{3.19}$$

Agora, $|f(x) - f_{k_0}(x)| \leq |f(x)| + |f_{k_0}(x)| \leq 2\|x\|$, já que $f(0) = 0 = f_{k_0}(0)$, $\operatorname{Lip} f \leq 1$ e $\operatorname{Lip} f_{k_0} \leq 1$. Juntando isso com o fato que $m_{i_0} \geq m_0$, a equação (3.19) nos dá para todo $m \geq m_0$

$$\left|\int f\ d\mu_m - \int f\ d\mu\right| < \frac{\epsilon}{4} + \int_{K^c} 2\|x\|\ d\mu_{m_{i_0}} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4},$$

e por (3.15)

$$\left|\int f\ d\mu_m - \int f\ d\mu\right| < \epsilon.$$

Como m_0 não depende de f, segue, do Lema 3.7, que $\mathcal{W}_1(\mu_m, \mu) \leq \epsilon$ para todo $m \geq m_0$ e portanto $\lim_{m\to\infty} \mathcal{W}_1(\mu_m, \mu) = 0$, o que conclui a prova dessa afirmação e também da proposição. □

Isso conclui a demonstração da proposição. □

Proposição 3.11. *A aplicação $(\mathcal{S}, \rho)$ é uma contração em $(\mathcal{M}_1^1, \mathcal{W}_1)$.*

Demonstração. Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação tal que $\operatorname{Lip} \phi \leq 1$. Pela Afirmação 1 do Lema 3.3,

$$\begin{aligned}\int \phi\ d(\mathcal{S}, \rho)(\mu) - \int \phi\ d(\mathcal{S}, \rho)(\nu) &= \sum_{i=1}^N \rho_i \int \phi\ dS_{i*}\mu - \sum_{i=1}^N \rho_i \int \phi\ dS_{i*}\nu \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_i \left(\int \phi\ dS_{i*}\mu - \int \phi\ dS_{i*}\nu\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_i \left(\int (\phi \circ S_i)\ d\mu - \int (\phi \circ S_i)\ d\nu\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \rho_i r \left(\int (r^{-1}\phi \circ S_i)\ d\mu - \int (r^{-1}\phi \circ S_i)\ d\nu\right),\end{aligned}$$

onde $r := \max_i \{r_i\}$ e $r_i := \operatorname{Lip} S_i$. Como $\operatorname{Lip}(r^{-1}\phi \circ S_i) \leq 1$, segue que

$$\int \phi \; d(\mathcal{S},\rho)(\mu) - \int \phi \; d(\mathcal{S},\rho)(\nu) \leq \sum_{i=1}^{N} \rho_i r \mathcal{W}_1(\mu,\nu) = r\mathcal{W}_1(\mu,\nu).$$

Daí,

$$\mathcal{W}_1((\mathcal{S},\rho)(\mu),(\mathcal{S},\rho)(\nu)) \leq r\mathcal{W}_1(\mu,\nu), \text{ com } r < 1,$$

o que prova a proposição. □

Observação. *Poderia ocorrer $r = 0$ na demonstração da Proposição 3.11. Porém, esse é o caso em que cada contração S_i é constante, e assim* $\operatorname{Lip}(\phi \circ S_i) = 0$ *para todo $i = 1, ..., N$. Dessa forma, poderíamos substituir a constante r por qualquer número $0 < r' < 1$, uma vez que teríamos* $\operatorname{Lip}(\frac{1}{r'}\phi \circ S_i) = 0 \leq 1$.

Observação. *Além de garantir existência de uma única medida $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ invariante por $(\mathcal{S},\rho)$, conforme queríamos, o Teorema 3.6 garante que uma tal medida é atratora, isto é,* $\lim_{i\to\infty}(\mathcal{S},\rho)^i(\mu) = \nu$ *(na métrica $\mathcal{W}_1$) para toda $\mu \in \mathcal{M}_1^1$.*

Definição 3.12. *A única medida em $\mathcal{M}_1^1$ $(\mathcal{S},\rho)$-invariante será denotada por $\|\mathcal{S},\rho\|$.*

Na última seção deste capítulo explicitaremos a medida $\|\mathcal{S},\rho\|$. No momento, enunciaremos como corolário do Teorema 3.2 a seguinte propriedade dessa medida.

Corolário 3.13. *Sejam $\mathcal{S}$ e ρ como anteriormente e suponha que $\mathcal{S}$ satisfaz $S_{i*}m \ll m$ para todo $i = 1, ..., N$. Então a única medida em $\mathcal{M}_1^1$ $(\mathcal{S},\rho)$-invariante ou é absolutamente contínua ou é singular.*

Uma aplicação de Borel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz a condição $f_*m \ll m$ é dita *não singular*. A condição que $S_{i*}m \ll m$ para todo $i = 1, ..., N$ evita casos extremos, em que a imagem inversa de um conjunto de medida (de Lebesgue) nula não tem medida nula, por exemplo, o caso em que uma das aplicações S_i é constante. As contrações lineares satisfazem trivialmente essa condição. Mais geralmente, toda contração localmente injetiva satisfaz essa condição.

Demonstração do Corolário 3.13. Seja ν a única medida em $\mathcal{M}_1^1$ $(\mathcal{S},\rho)$-invariante. Pelo Teorema 1.4, podemos decompor ν de maneira única como uma soma de medidas

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \text{onde } \nu_1 \ll m \;\text{ e }\; \nu_2 \perp m. \tag{3.20}$$

Queremos mostrar que $\nu_1 \equiv 0$ ou $\nu_2 \equiv 0$. Suponha, por absurdo, que $\nu_1(\mathbb{R}^n) = \alpha$, com $0 < \alpha < 1$. Uma generalização do Teorema 3.2 garante a existência de uma única medida $(\mathcal{S},\rho)$-invariante em $\mathcal{M}_1^\alpha$ (espaço das medidas de Borel μ em $\mathbb{R}^n$ tais que $\mu(\mathbb{R}^n) = \alpha$ e $\int \|x - x_0\| \; d\mu(x) < \infty$ para algum ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Pela linearidade de $(\mathcal{S},\rho)$, tal medida é exatamente $\alpha\nu$. Também pela linearidade de $(\mathcal{S},\rho)$, $(\mathcal{S},\rho)(\nu) = (\mathcal{S},\rho)(\nu_1) + (\mathcal{S},\rho)(\nu_2)$.

Afirmação 1. $(\mathcal{S},\rho)(\nu_1) \ll m$ *e* $(\mathcal{S},\rho)(\nu_2) \perp m$.

Demonstração. Seja E boreleano tal que $m(E) = 0$. Para cada $i = 1, ..., N$, $S_{i*}m \ll m$ implica que $m(S_i^{-1}(E)) = 0$, e assim $(\mathcal{S},\rho)(\nu_1) \ll m$, pela continuidade absoluta de ν_1. Agora, pela finitude de ν_1 e ν_2, temos que

$$\nu_1 - (\mathcal{S},\rho)(\nu_1) = (\mathcal{S},\rho)(\nu_2) - \nu_2. \tag{3.21}$$

Sejam $\beta = 1 - \alpha$ e $B \in \mathcal{B}$ tais que $m(B) = 0$ e $\nu_2(B) = \beta$. Usando (3.21) e a continuidade absoluta de ν_1 e $(\mathcal{S},\rho)(\nu_1)$, temos que

$$(\mathcal{S},\rho)(\nu_2)(B) = \nu_2(B) = \beta,$$

o que conclui a prova da afirmação. □

Pela unicidade na decomposição de ν em (3.20), temos que $(\mathcal{S},\rho)(\nu_1) = \nu_1$ e $(\mathcal{S},\rho)(\nu_2) = \nu_2$, e pela unicidade da medida invariante por $(\mathcal{S},\rho)$ em $\mathcal{M}_1^\alpha$ e em $\mathcal{M}_1^\beta$, temos que $\nu_1 = \alpha\nu$ e $\nu_2 = \beta\nu$. Assim $\nu \ll m$ e $\nu \perp m$, o que implica $\nu \equiv 0$ (contradição). Logo, ou $\nu_1 \equiv 0$ ou $\nu_2 \equiv 0$, e o corolário fica provado. □

3.2 Conjuntos invariantes

Vamos tratar nesta seção de conjuntos invariantes por contrações. Consideremos

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) := \{K \subset \mathbb{R}^n \colon K \text{ compacto e } K \neq \varnothing\}.$$

Para $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ conjunto de contrações em $\mathbb{R}^n$, nós definimos a aplicação

$$\mathcal{S} : \mathcal{K} \to \mathcal{K} \quad : \quad K \mapsto \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K).$$

Definição 3.14. *Um conjunto $K \in \mathcal{K}$ é dito invariante por $\mathcal{S}$ se $\mathcal{S}(K) = K$.*

O principal resultado desta seção é o Teorema 3.15, que garante a existência de um único conjunto $K \in \mathcal{K}$ invariante por $\mathcal{S}$.

Teorema 3.15. *Dado um conjunto $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ de contrações em $\mathbb{R}^n$, existe um único conjunto compacto não-vazio $K \subset \mathbb{R}^n$ invariante por $\mathcal{S}$.*

Para provar o Teorema 3.15 vamos novamente seguir as ideias de Hutchinson em [7]. Assim como na demonstração da existência de uma única medida invariante feita na Seção 3.1, vamos definir uma métrica d_H em $\mathcal{K}$, mostrar que $(\mathcal{K}, d_H)$ é um espaço métrico completo e que $\mathcal{S}$ é uma contração em $(\mathcal{K}, d_H)$. Para $a \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathcal{K}$, considere $d(a, B)$ a distância entre o ponto a e o conjunto B definida como em (3.10). Definimos então

$$d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to [0, \infty) \quad : \quad (A, B) \mapsto \sup \{d(a, B), d(b, A) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Proposição 3.16. *$(\mathcal{K}, d_H)$ é espaço métrico completo.*

Demonstração. Observe inicialmente se $A, B \in \mathcal{K}$, então $d_H(A, B) < \infty$. De fato, como A e B são em particular conjuntos limitados, existem um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e uma constante $R > 0$ tais que $\|a - x\| \leq R$ e $\|b - x\| \leq R$ para todos os pontos $a \in A$ e $b \in B$. Assim, fixado $a \in A$, temos que $\|a - b\| \leq \|a - x\| + \|x - b\| \leq 2R$ para todo $b \in B$, donde segue que $d(a, B) \leq 2R$. Como isto vale para todo $a \in A$, e um argumento análogo pode ser usado para cada ponto $b \in B$, temos que $d_H(A, B) \leq 2R$.

Afirmação 1. *$d_H(A, B) \geq 0$ e se $d_H(A, B) = 0$ então $A = B$.*

Demonstração. A primeira parte segue diretamente da definição. Suponhamos então que $A, B \in \mathcal{K}$ são tais que $d_H(A, B) = 0$. Dado $a \in A$, pela definição de d_H, existe uma sequência (b_i) tal que $b_i \in B$ para todo i e (b_i) converge para a. Sendo B um conjunto fechado, temos que $a \in B$ e assim $A \subset B$. Por um argumento análogo $B \subset A$, donde segue o resultado. $\square$

Afirmação 2. *$d_H(A, B) = d_H(B, A)$ para todos $A, B \in \mathcal{K}$.*

Segue diretamente da definição de d_H.

Afirmação 3. *$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$ para todos $A, B, C \in \mathcal{K}$.*

Dado um ponto $a \in A$, temos que $\|a - c\| \leq \|a - b\| + \|b - c\|$ para todos os pontos $b \in B$ e $c \in C$, donde, fixando b, temos que $d(a, C) \leq \|a - b\| + d(b, C) \leq \|a - b\| + d_H(B, C)$. Como isso vale para todo $b \in B$, temos que $d(a, C) \leq d(a, B) + d_H(B, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$. Novamente, como isso vale para todo $a \in A$ e um argumento análogo pode ser usado para cada ponto $c \in C$, temos o resultado.

Afirmação 4. *$(\mathcal{K}, d_H)$ é completo.*

Demonstração. Seja (K_m) uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{K}, d_H)$ e defina K como o conjunto dos valores de aderência de todas as sequências (x_m) possíveis tais que $x_m \in K_m$ para todo m. Vamos mostrar que $K \in \mathcal{K}$ e $\lim_{m \to \infty} K_m = K$ na métrica d_H.

Vejamos que K é não-vazio e limitado. De fato, escolha $m' \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(K_m, K_l) < 1$ para todos $m, l \geq m'$, e sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tais que $\|y - x\| < R$ para todo $y \in K_{m'}$. Se $z \in K_m$ para algum $m \geq m'$, então existe $y = y(z) \in K_{m'}$ tal que $\|z - y\| < 1$, do contrário $d(z, K_{m'}) \geq 1$. Então $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < 1 + R$. Como cada K_m é não vazio, segue que é possível obter uma sequência limitada (x_m) de pontos em $\mathbb{R}^n$, de forma que $x_m \in K_m$

para todo m. Tal sequência possui ao menos um valor de aderência, que, por definição, deve estar em K. Portanto, K é não-vazio. Além disso, se $w \in K$ então existem um índice m_w, o qual podemos supor maior que m', e um ponto $y_{m_w} \in K_{m_w}$ tais que $\|w - y_{m_w}\| < 1$. Então $\|w - x\| \leq \|w - y_{m_w}\| + \|y_{m_w} - x\| < 2 + R$, donde segue que K é limitado.

Vejamos agora que K é fechado. De fato, dado $y \in \operatorname{cl} K$, seja (y_i) uma sequência em K tal que (y_i) converge para y. Para cada i escolhamos um índice m_i e um ponto $x_i \in K_{m_i}$ de forma que $\|x_i - y_i\| < \frac{1}{i}$, e que os índices m_i sejam crescentes em i. Então (x_i) converge para y, pois dado $\epsilon > 0$ basta escolher i_0 de forma que $\frac{1}{i_0} < \frac{\epsilon}{2}$ e $\|y - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $i \geq i_0$, e assim teremos $\|x_i - y\| \leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - y\| < \epsilon$ para todo $i \geq i_0$. Como (x_i) é subsequência de alguma sequência (x_m) tal que $x_m \in K_m$ para todo m, segue, da definição de K, que $y \in K$.

Finalmente, vejamos que (K_m) converge para K na métrica d_H. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, escolha $M \in \mathbb{N}$ de forma que

$$d_H(K_m, K_l) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todos } m, l \geq M.$$

Fixado $x \in K$, existem $m_0 \geq M$ e $x_{m_0} \in K_{m_0}$ tais que $\|x_{m_0} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $m \geq M$, temos que existe $x_m \in K_m$ tal que $\|x_m - x_{m_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$ (do contrário $d(x_{m_0}, K_m) \geq \frac{\epsilon}{2}$), donde segue que $\|x - x_m\| \leq \|x - x_{m_0}\| + \|x_{m_0} - x_m\| < \epsilon$, e portanto

$$d(x, K_m) < \epsilon \quad \text{para todo } m \geq M \text{ e para todo } x \in K. \tag{3.22}$$

Fixemos agora $m_1 \geq M$ e $x_{m_1} \in K_{m_1}$. Escolhamos $M_2 \geq M_1 := M$ de tal maneira que $d_H(K_m, K_l) < \frac{\epsilon}{4}$ para todos $m, l \geq M_2$, e consideremos $m_2 > \max\{m_1, M_2\}$ e $x_{m_2} \in K_{m_2}$ tais que $\|x_{m_2} - x_{m_1}\| < \frac{\epsilon}{2}$ (é possível escolher porque $M_2 \geq M$). Supondo obtidos um índice $m_i > \max\{m_{i-1}, M_i\}$, onde M_i é tal que $d_H(K_m, K_l) < \frac{\epsilon}{2^i}$ para todos $m, l \geq M_i$, e um ponto $x_{m_i} \in K_{m_i}$ tal que $\left\|x_{m_i} - x_{m_{i-1}}\right\| < \frac{\epsilon}{2^{i-1}}$, seja $M_{i+1} \geq M_i$ tal que $d_H(K_m, K_l) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ para todos $m, l \geq M_{i+1}$, e sejam $m_{i+1} > \max\{m_i, M_{i+1}\}$ e $x_{m_{i+1}} \in K_{m_{i+1}}$ tais que $\left\|x_{m_{i+1}} - x_{m_i}\right\| < \frac{\epsilon}{2^i}$. A sequência (x_{m_i}), construída indutivamente, é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\gamma > 0$, como a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ converge, é possível escolher i_0 de forma que $\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \gamma$. Assim, se $j > k \geq i_0$ então $\left\|x_{m_j} - x_{m_k}\right\| \leq \sum_{p=k+1}^{j} \left\|x_{m_p} - x_{m_{p-1}}\right\| < \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \gamma$. Sendo (x_{m_i}) sequência de Cauchy, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que (x_{m_i}) converge para x. Por definição, $x \in K$, e além disso, tomando $I \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{m_I} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$, temos que $\|x_{m_1} - x\| \leq \|x_{m_1} - x_{m_I}\| + \|x_{m_I} - x\|$ e assim, $\|x_{m_1} - x\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Logo,

$$d(x_{m_1}, K) < \epsilon \quad \text{para todo } x_{m_1} \in K_{m_1} \text{ e para todo } m_1 \geq M.$$

Juntando esse último fato com (3.22), temos que $d_H(K_m, K) < \epsilon$ para todo $m \geq M$, donde segue que (K_m) converge para K, o que prova a última afirmação e conclui a prova da proposição. $\square$

$\square$

Proposição 3.17. *A aplicação $\mathcal{S}$ é uma contração em $(\mathcal{K}, d_H)$.*

Demonstração. Para cada $i = 1, ..., N$, seja $r_i := \mathrm{Lip}\, S_i$.

Afirmação 1. *Se $A, B \in \mathcal{K}$ então $d_H(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)) \leq \max\limits_{i \leq i \leq N} d_H(S_i(A), S_i(B))$.*

Demonstração. Com efeito, para cada $x \in \mathcal{S}(A)$, seja $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tal que $x \in S_{i_0}(A)$. Então por definição, $d(x, \mathcal{S}(B)) \leq d(x, S_{i_0}(B)) \leq d_H(S_{i_0}(A), S_{i_0}(B)) \leq \max_{i \leq i \leq N} d_H(S_i(A), S_i(B))$. Como isso vale para todo $x \in \mathcal{S}(A)$ e um argumento análogo pode ser usado para $y \in \mathcal{S}(B)$, a afirmação está provada. □

Afirmação 2. $\max\limits_{i \leq i \leq N} d_H(S_i(A), S_i(B)) \leq \max\limits_{i \leq i \leq N} r_i\, d_H(A, B)$.

Demonstração. De fato, fixados $i \in \{1, ..., N\}$ e $x = S_i(a) \in S_i(A)$ temos, para cada $y \in S_i(B)$, que $\|x - y\| \leq r_i \|a - b\|$, para todo $b \in B$ tal que $S_i(b) = y$. Assim, $d(x, S_i(B)) \leq r_i d(a, B)$, donde segue que $d(x, S_i(B)) \leq r_i d_H(A, B) \leq \max_{i \leq i \leq N} r_i d_H(A, B)$. Novamente, como isso vale para todo $x \in S_i(A)$ e um argumento análogo pode ser usado para cada $y \in S_i(B)$, segue que $d_H(S_i(A), S_i(B)) \leq \max_{i \leq i \leq N} r_i\, d_H(A, B)$, e como isto vale para todo $i = 1, ..., N$, a afirmação está provada. □

Juntando as duas afirmações, temos que

$$d_H(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)) \leq \max_{i \leq i \leq N} r_i\, d_H(A, B),$$

e como $\max_{i \leq i \leq N} r_i < 1$, concluímos a prova da proposição. □

Definição 3.18. *Denotaremos por $|\mathcal{S}|$ o único conjunto compacto não-vazio invariante por $\mathcal{S}$.*

Vamos agora explicitar o conjunto $|\mathcal{S}|$. Para simplificar as notações, escrevamos $K := |\mathcal{S}|$, $K_i := S_i(K)$, e para cada $p \in \mathbb{N}$, $S_{i_1 \ldots i_p} := S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_p}$ e $K_{i_1 \ldots i_p} := S_{i_1 \ldots i_p}(K)$.

Proposição 3.19. *K é o fecho do conjunto dos pontos fixos de todas as contrações da forma $S_{i_1 \ldots i_p}$, onde $1 \leq i_j \leq N$ e $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos fazer a prova em etapas.

Afirmação 1. $K_{i_1 \ldots i_p} = \bigcup\limits_{i_{p+1}=1}^{N} K_{i_1 \ldots i_p i_{p+1}}$ *para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela definição de K, temos $K_{i_1 \ldots i_p} = S_{i_1 \ldots i_p}(\bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} S_{i_{p+1}}(K))$, e assim

$$K_{i_1 \ldots i_p} = \bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} S_{i_1 \ldots i_p} \circ S_{i_{p+1}}(K) = \bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} K_{i_1 \ldots i_p i_{p+1}}.$$

□

Afirmação 2. *$K \supset K_{i_1} \supset ... \supset K_{i_1...i_p} \supset ...$ e $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1...i_p}$ é um conjunto unitário, cujo único elemento será denotado por $k_{i_1...i_p...}$. K é a união desses conjuntos unitários.*

Demonstração. O primeiro fato dessa afirmação segue diretamente da definição de K e da Afirmação 1. Para ver o segundo fato, fixe $p \in \mathbb{N}$ e denote por $r_i := \operatorname{Lip} S_i$ e respectivamente $r_{i_j} := \operatorname{Lip} S_{i_j}$. Para todos $x, y \in K$ temos que

$$\left\|S_{i_1...i_p}(x) - S_{i_1...i_p}(y)\right\| \leq r_{i_1}...r_{i_p} \|x - y\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} \{r_i\}\right)^p \|x - y\|,$$

e assim

$$\left\|S_{i_1...i_p}(x) - S_{i_1...i_p}(y)\right\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} \{r_i\}\right)^p \operatorname{diam} K,$$

onde $\operatorname{diam} K := \sup\{\|a - b\| : a, b \in K\}$. Como isso vale para todos $x, y \in K$ segue que

$$\operatorname{diam} K_{i_1...i_p} \leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} \{r_i\}\right)^p \operatorname{diam} K, \tag{3.23}$$

e como K é limitado e $\max_{1 \leq i \leq N} \{r_i\} < 1$, temos que

$$\lim_{p \to \infty} \operatorname{diam} K_{i_1...i_p} = 0.$$

Juntando isso com a primeira parte da afirmação e com o fato dos conjuntos $K_{i_1...i_p}$ serem compactos, concluímos que a intersecção $\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1...i_p}$ é composta por um único elemento. Por fim, vamos mostrar que K é união desses conjuntos unitários. Pelo que já foi provado nessa afirmação, fica claro que para qualquer sequência $(i_1, ..., i_p, ...)$ temos que $k_{i_1...i_p...} \in K$. Por outro lado, dado $x \in K$, temos, por definição, que existe $i_1 \in \{1, ..., N\}$ tal que $x \in K_{i_1}$. Supondo obtido i_p tal que $x \in K_{i_1...i_p}$, temos, pela Afirmação 1, que existe $i_{p+1} \in \{1, ..., N\}$ tal que $x \in K_{i_1...i_p i_{p+1}}$. Assim, por indução, podemos obter uma sequência $(i_1, ..., i_p, ...)$ de forma que $x \in K_{i_1...i_p}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, donde segue que $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1...i_p}$. □

Afirmação 3. *$S_{j_1...j_q}(K_{i_1...i_p}) = K_{j_1...j_q i_1...i_p}$ e $S_{j_1...j_q}(k_{i_1...i_p...}) = k_{j_1...j_q i_1...i_p...}$.*

Demonstração. Basta provar o segundo fato. Note que $S_{j_1...j_q}(k_{i_1...i_p...}) \in \bigcap_{p=1}^{\infty} S_{j_1...j_q}(K_{i_1...i_p})$, donde segue, do primeiro fato, que $S_{j_1...j_q}(k_{i_1...i_p...}) \in \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{j_1...j_q i_1...i_p}$. Pela Afirmação 2, essa intersecção é composta de um único elemento, que denotamos por $k_{j_1...j_q i_1...i_p...}$. □

Afirmação 4. *$k_{i_1...i_p i_1...i_p...} = s_{i_1...i_p}$, o único ponto fixo da contração $S_{i_1...i_p}$ (em particular $s_{i_1...i_p} \in K$), e $k_{i_1...i_p...} = \lim_{p \to \infty} s_{i_1...i_p}$ (em particular esse limite existe).*

Demonstração. Pela Afirmação 3, $S_{i_1...i_p}(k_{i_1...i_p i_1...i_p...}) = k_{i_1...i_p i_1...i_p...}$, de forma que a unicidade do ponto fixo da contração $S_{i_1...i_p}$ nos dá o primeiro fato. Além disso, como $s_{i_1...i_p} \in K$, temos que $s_{i_1...i_p} = S_{i_1...i_p}(s_{i_1...i_p}) \in K_{i_1...i_p}$ para todo p, donde segue, da Afirmação 2, que $k_{i_1...i_p...} = \lim_{p \to \infty} s_{i_1...i_p}$. □

Uma vez provadas as quatro afirmações, suponha que o ponto x é limite de uma sequência (s_m) de pontos fixos de contrações da forma $S_{i_1 \dots i_p}$. Pela Afirmação 4, $s_m \in K$ para todo m e como K é fechado temos que $x \in K$. Como a outra inclusão segue diretamente das Afirmações 2 e 4, a proposição está provada. $\square$

Observação. *Observe que na demonstração da Proposição 3.19, não utilizamos o fato do conjunto $|\mathcal{S}|$ ser único, de forma que essa caracterização de $|\mathcal{S}|$ é uma outra maneira de provar a unicidade do conjunto compacto não-vazio invariante por $\mathcal{S}$.*

3.3 Relação entre a medida e o conjunto invariante

Vamos agora explicitar a medida invariante $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$. Ao fazermos isso, estaremos relacionando $\|\mathcal{S}, \rho\|$ com o conjunto invariante $|\mathcal{S}|$.

Seja Σ_N^+ o espaço das sequências em N elementos, isto é, $\Sigma_N^+ = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$, munido da topologia produto induzida pela topologia discreta em cada fator $\{1, \dots, N\}$. Uma base enumerável de abertos para essa topologia é a coleção de todos os conjuntos da forma

$$C_{i_1 \dots i_p} := \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \Sigma_N^+ \colon \xi_1 = i_1, \dots, \xi_p = i_p \right\}, \tag{3.24}$$

onde $i_j \in \{1, \dots, N\}$ e $p \in \mathbb{N}$. Tais conjuntos são chamados de *cilindros*. Seja agora τ a *medida de Bernoulli* em Σ_N^+, que nada mais é do que a medida produto induzida pela medida $\mu(i) = \rho_i$ em cada fator $\{1, \dots, N\}$. A medida τ é obtida da seguinte maneira. Para um cilindro $C_{i_1 \dots i_p}$, nós definimos

$$\tau(C_{i_1 \dots i_p}) := \prod_{j=1}^{p} \rho_{i_j}.$$

A classe de todos os cilindros em Σ_N^+ é uma semi-álgebra (algumas vezes chamada também de classe elementar) nesse espaço. A coleção $\mathcal{A}$ formada por todas as uniões finitas de cilindros disjuntos forma uma álgebra em Σ_N^+. Assim, se $A \in \mathcal{A}$, nós podemos definir, de forma natural, $\tau(A)$ como a soma das imagens por τ de cada um dos cilindros disjuntos cuja união é igual a A. Essa função de conjuntos definida na álgebra $\mathcal{A}$ pode ser estendida a uma medida, a qual indicaremos também por τ, na σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ (para mais detalhes ver [21]). Observe que o fato da coleção de todos os cilindros formar uma base enumerável de abertos para a topologia produto em Σ_N^+, faz com que todos os boreleanos sejam τ-mensuráveis. Consideraremos então a restrição de τ aos boreleanos de Σ_N^+.

Usando a mesma notação da demonstração da Proposição 3.19, vamos associar, de forma natural, uma sequência em Σ_N^+ com um elemento em $|\mathcal{S}|$, definindo a aplicação

$$\pi : \Sigma_N^+ \to \mathbb{R}^n \quad : \quad (i_1, \dots, i_p, \dots) \mapsto k_{i_1 \dots i_p \dots}. \tag{3.25}$$

Lema 3.20. *A aplicação π é contínua.*

Demonstração. Seja A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e suponha que $\pi^{-1}(A) \neq \varnothing$. Dado $\xi = (i_1, i_2, ...) \in \pi^{-1}(A)$, seja $\epsilon > 0$ tal que $U(\pi(\xi), \epsilon) \subset A$. Por (3.23), nós podemos escolher $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam} K_{i_1 \dots i_{p_0}} < \epsilon$. Assim, se $\eta \in C_{i_1 \dots i_{p_0}}$, temos que $\|\pi(\eta) - \pi(\xi)\| < \epsilon$, pois $\pi(\eta) \in K_{i_1 \dots i_{p_0}}$, e assim $\pi(\eta) \in A$. Logo, $C_{i_1 \dots i_{p_0}} \subset \pi^{-1}(A)$, donde segue que $\pi^{-1}(A)$ é aberto e π é contínua. □

Proposição 3.21. *a)* $\|\mathcal{S}, \rho\| = \pi_* \tau$, *onde* $\pi_* \tau(E) = \tau(\pi^{-1}(E))$ *para todo* $E \in \mathcal{B}$.

b) $\operatorname{supp}(\|\mathcal{S}, \rho\|) \subset |\mathcal{S}|$, *e os dois conjuntos são iguais se, e somente se,* $\rho_i \neq 0$ *para todo* $i = 1, ..., N$.

Observação. *Observe que a continuidade da aplicação π junto com o fato de τ ser uma probabilidade de Borel em Σ_N^+ nos dá que $\pi_* \tau \in \mathcal{M}^1$. É possível mostrar que de fato $\pi_* \tau \in \mathcal{M}_1^1$.*

Demonstração da Proposição 3.21. *a)* Vamos mostrar que $\pi_* \tau$ é $(\mathcal{S}, \rho)$-invariante. Da unicidade, seguirá a igualdade. Para cada $i \in \{1, ..., N\}$, consideremos o operador

$$\sigma_i : \Sigma_N^+ \to \Sigma_N^+ \quad : \quad (i_1, i_2, ...) \mapsto (i, i_1, i_2, ...).$$

Afirmação 1. $S_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$.

Demonstração. Segue diretamente da Afirmação 3 da demonstração da Proposição 3.19. □

Afirmação 2. *τ é $(\{\sigma_1, ..., \sigma_N\}, \rho)$-invariante.*[4]

Demonstração. Para $A \in \mathcal{B}_{\Sigma_N^+}$, temos

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^{N} \tau(A_i), \tag{3.26}$$

onde $A_i = C_i \cap A = \{(i_1, i_2, ...) \in A \colon i_1 = i\}$. Como τ é medida produto, temos que

$$\tau(A_i) = \rho_i \tau(\{(i_1, i_2, ...) \in \Sigma_N^+ \colon (i, i_1, i_2, ...) \in A_i\}),$$

donde segue que

$$\tau(A_i) = \rho_i \tau(\{(i_1, i_2, ...) \in \Sigma_N^+ \colon (i, i_1, i_2, ...) \in A\}),$$

e portanto

$$\tau(A_i) = \rho_i \tau(\sigma_i^{-1}(A)) \quad \text{para todo } i = 1, ..., N.$$

Por (3.26),

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tau(\sigma_i^{-1}(A)).$$

□

[4] $(\{\sigma_1, ..., \sigma_N\}, \rho)$ definida pela mesma lei da definição de $(\mathcal{S}, \rho)$ em (3.2).

Note agora que para cada $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, vale que

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*}(\pi_* \tau)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \pi_* \tau(S_i^{-1}(E)) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tau(\pi^{-1}(S_i^{-1}(E))) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tau(S_i \circ \pi)^{-1}(E),$$

donde segue, da Afirmação 1, que

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*}(\pi_* \tau)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tau(\sigma_i^{-1}(\pi^{-1}(E))) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \sigma_{i*} \tau(\pi^{-1}(E)),$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*}(\pi_* \tau)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \pi_*(\sigma_{i*} \tau)(E).$$

Daí, vem que

$$(\mathcal{S}, \rho)(\pi_* \tau) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \pi_*(\sigma_{i*} \tau). \tag{3.27}$$

Além disso, para todo $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$,

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i \pi_*(\sigma_{i*} \tau)(E) = \left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i \sigma_{i*} \tau \right) (\pi^{-1}(E)) = \pi_* \left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i \sigma_{i*} \tau \right) (E),$$

o que junto com (3.27) e com a Afirmação 2 nos dá

$$(\mathcal{S}, \rho)(\pi_* \tau) = \pi_* \tau.$$

Isso conclui a prova da parte *a*).

b) Como $\pi^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{S}|) = \varnothing$, temos que $\tau(\pi^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{S}|)) = 0$, e assim $\|\mathcal{S}, \rho\| (\mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{S}|) = 0$ pela parte *a*). Como além disso $\mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{S}|$ é um conjunto aberto, fica provada a primeira parte do resultado em *b*).

Suponhamos agora que $\rho_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., N$. Seja $x \in |\mathcal{S}|$ e V um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in V$. Então $\pi^{-1}(x) \subset \pi^{-1}(V)$, conjunto não-vazio e aberto em Σ_N^+ pelo Lema 3.20. Assim, podemos escolher um cilindro $C_{i_1 \ldots i_p}$ em Σ_N^+ tal que $C_{i_1 \ldots i_p} \subset \pi^{-1}(V)$. Como $\rho_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., N$, temos que $\tau(C_{i_1 \ldots i_p}) > 0$, e assim $\tau(\pi^{-1}(V)) > 0$, donde segue que $\|\mathcal{S}, \rho\| (V) > 0$, o que conclui a prova da proposição. $\square$

Capítulo 4

Continuidade Absoluta da Convolução de Bernoulli

Neste capítulo vamos estudar a convolução infinita de Bernoulli, uma medida invariante por um sistema de contrações lineares em $\mathbb{R}$. Vamos provar sua continuidade absoluta para um determinado conjunto de parâmetros.

4.1 Resultado de Solomyak

Fixado $\lambda \in (0,1)$, consideremos a série aleatória

$$Y_\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \pm\lambda^n,$$

onde os sinais $+$ e $-$ são escolhidos de forma independente com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja ν_λ a distribuição de Y_λ, isto é, para cada subconjunto $E \subset \mathbb{R}$,

$$\nu_\lambda(E) := \text{Prob}\,\{Y_\lambda \in E\}.$$

A medida ν_λ é chamada *convolução infinita de Bernoulli* (na seção 4.2 vamos falar sobre convoluções com mais detalhes). Ela vem sendo estudada desde a década de 1930 e suas aplicações em sistemas dinâmicos e em estimativas para dimensões de Hausdorff têm sido verificadas por diversos autores (ver por exemplo [3]). O problema de verificar sua continuidade absoluta chamou a atenção de muitos matemáticos ao longo do século XX, conforme relataremos brevemente a seguir. Todas as referências citadas podem ser encontradas em [14].

A medida ν_λ pode ser vista de outra maneira, que não a apresentada acima. Ela é a medida invariante pelo sistema de contrações que descreveremos a seguir. Sejam S_1 e S_2 contrações em $\mathbb{R}$ dadas por $S_1(x) = 1 + \lambda x$ e $S_2(x) = -1 + \lambda x$, e seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$. Seja ainda $\rho = \{\rho_1, \rho_2\}$, com $\rho_i = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2$. Segue diretamente da definição, que ν_λ é invariante por $(\mathcal{S}, \rho)$. Pelo Teorema 3.2, ν_λ é a única medida em $\mathcal{M}_1^1$ com essa característica e pelo Corolário 3.13, ou ν_λ é absolutamente contínua ou ν_λ é singular. Esse último fato foi observado já em 1935 por Jessen-Wintner. Também em 1935, Kershner-Wintner verificaram que para o caso em que $\lambda < \frac{1}{2}$, ν_λ é singular, e a justificativa é simples. Pela Proposição 3.21, o suporte K_λ da medida ν_λ é o único conjunto compacto não-vazio que satisfaz $K_\lambda = \frac{1}{2}S_1(K_\lambda) + \frac{1}{2}S_2(K_\lambda)$. Como um conjunto do tipo Cantor com medida de Lebesgue zero verifica essa condição, segue que ν_λ é singular. Ainda em 1935, Wintner mostrou que para $\lambda = \frac{1}{2}$, a medida ν_λ tem uma distribuição uniforme em seu suporte, o intervalo $[-2, 2]$, e é absolutamente contínua para $\lambda = \frac{1}{2^k}$, com $k \in \mathbb{N}$. Para o caso $\lambda > \frac{1}{2}$, novamente utilizando a Proposição 3.21, notamos que o intervalo $[-(1-\lambda)^{-1}, (1+\lambda)^{-1}]$ é o suporte da medida ν_λ. Isso nos intui a pensar que ν_λ talvez seja absolutamente contínua para todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$. Porém, já em 1939, Erdös mostrou que ν_λ é singular quando λ é o recíproco de um número PV (Pisot-Vijayaraghavan), por exemplo $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ver [14] para mais detalhes). Em 1962, Garsia obteve exemplos de outros números algébricos entre $\frac{1}{2}$ e 1, que não os da forma $\frac{1}{2^k}$, para os quais ν_λ é absolutamente contínua. No mesmo artigo em que obteve tais números, Garsia conjecturou que ν_λ seria absolutamente contínua para quase todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ (para mais detalhes ver [14]). Essa conjectura foi confirmada apenas em 1995 por Solomyak [19]. O principal resultado deste capítulo é exatamente esse fato, enunciado no teorema a seguir.

Teorema 4.1. *A convolução infinita de Bernoulli é absolutamente contínua para quase todo parâmetro* $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Apesar desse resultado ser bem forte, ainda não há uma caracterização mais específica para os parâmetros λ entre $\frac{1}{2}$ e 1 que fazem de ν_λ uma medida absolutamente contínua.

Conforme mencionado acima, a prova do Teorema 4.1 é creditada a Solomyak. Aqui, porém, seguiremos uma demonstração mais simplificada feita por Peres-Solomyak [14], onde métodos de transformada de Fourier utilizados em [19] são substituídos por métodos de diferenciação de medidas, já introduzidos na Seção 2.1.

4.2 Convoluções

Vamos nesta seção falar brevemente sobre convoluções de medidas. Nosso principal objetivo é provar a Proposição 4.3, donde seguirá o Corolário 4.4, fundamental na demonstração do Teorema 4.1. Em muitos momentos citaremos resultados que estão provados em [8]. Estaremos sempre considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}$.

Dadas μ_1, μ_2 medidas em $\mathcal{M}^1$, definimos a *convolução* de μ_1 e μ_2 como a medida $\mu_1 * \mu_2$

dada por

$$\mu_1 * \mu_2(E) := \int \mu_1(E - x)\, d\mu_2(x) \quad \text{para todo}\, E \in \mathcal{B},$$

onde $E - x := \{y - x \colon y \in E\}$. A existência da integral na definição de $\mu_1 * \mu_2$ pode ser verificada em [8, 2] e o fato que $\mu_1 * \mu_2$ é uma medida de Borel segue do Teorema 1.2. Como por definição $\mu_1 * \mu_2$ é uma probabilidade, segue que $\mu_1 * \mu_2 \in \mathcal{M}^1$.

Agora, para cada medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ definimos a sua transformada de Fourier como a função

$$\Gamma_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad : \quad y \mapsto \Gamma_\mu(y) := \int e^{ixy} d\mu(x).$$

Essa correspondência entre o espaço $\mathcal{M}^1$ e o espaço das transformadas de Fourier das medidas em $\mathcal{M}^1$ é injetiva, isto é, $\Gamma_\mu = \Gamma_\nu$ implica $\mu = \nu$. Além disso, se (μ_n) é uma sequência em $\mathcal{M}^1$ e $\mu \in \mathcal{M}^1$ são tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_n = \int \varphi\, d\mu \quad \text{para toda}\, \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

então (Γ_{μ_n}) converge uniformemente para Γ_μ em cada intervalo fechado da forma $[-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$, e reciprocamente, se uma sequência de funções Γ_{μ_n} converge uniformemente em cada intervalo $[-a, a]$, então a função limite é a transformada de Fourier de alguma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$, e (4.1) se verifica para toda $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (para mais detalhes, ver [8, 3]). Com respeito à ação da transformada Fourier sobre a convolução de duas medidas, vale a regra multiplicativa, isto é, $\Gamma_{\mu*\nu} = \Gamma_\mu \Gamma_\nu$. Dessas considerações, seguem a comutatividade e a associatividade da convolução, isto é, $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ e $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$ para todas $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{M}^1$.

Lema 4.2. *Suponha que μ_1 e μ_2 são medidas em $\mathcal{M}^1$ e que μ_1 é absolutamente contínua. Então $\mu_1 * \mu_2$ é absolutamente contínua.*

Demonstração. Como a medida μ_1 é finita e absolutamente contínua, podemos usar o Teorema 1.4, que garante a existência de uma função f Lebesgue integrável tal que para todo $E \in \mathcal{B}$, vale que $\mu_1(E) = \int_E f\, dm$. Assim, para todo $E \in \mathcal{B}$ tal que $m(E) = 0$, temos

$$\mu_1 * \mu_2(E) = \int \left(\int_{E-x} f\, dm \right) d\mu_2(x).$$

Como a medida de Lebesgue é invariante por translações, temos que $m(E - x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que implica $\int_{E-x} f\, dm = 0$ e portanto $\mu_1 * \mu_2(E) = 0$. $\square$

Vamos agora provar um resultado que junto com o Corolário 4.4 simplificará bastante a demonstração do Teorema 4.1.

Proposição 4.3. *A medida ν_λ pode ser escrita como a convolução $\nu_\lambda = \nu_{\lambda^2} * \mu$, para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$.*

Antes de provar a Proposição 4.3, vamos enunciar o seguinte fato, que é consequência imediata do Lema 4.2 e da Proposição 4.3.

Corolário 4.4. *Se ν_{λ^2} é absolutamente contínua então ν_λ também o é.*

Demonstração da Proposição 4.3. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, seja

$$\mu_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1] \quad : \quad E \mapsto \frac{1}{2}\delta_{-\lambda^n} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda^n},$$

onde δ_x denota a medida de Dirac no ponto x. Como μ_0 e μ_1 são medidas em $\mathcal{M}^1$, podemos considerar a convolução $\widehat{\mu}_1 := \mu_0 * \mu_1 \in \mathcal{M}^1$, e como $\mu_n \in \mathcal{M}^1$ para todo $n \geq 2$, podemos considerar, para cada $n \geq 2$, a convolução $\widehat{\mu}_n := \widehat{\mu}_{n-1} * \mu_n = \mu_0 * ... * \mu_n \in \mathcal{M}^1$. Definamos $\widehat{\mu}_0 := \mu_0$.

Afirmação 1. *Para todo $E \subset \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{\mu}_n(E) = \dfrac{h}{2^{n+1}}$, se E contém h dos 2^{n+1} pontos $\pm\lambda^0 \pm ... \pm \lambda^n$.*

Demonstração. Para $n = 0$ a afirmação segue diretamente da definição de μ_0. Suponha que ela seja válida para $n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Dado $E \subset \mathbb{R}$, temos que

$$\widehat{\mu}_n(E) = \sup\left\{\int S(x)\, d\mu_n(x) \colon S \text{ simples e } 0 \leq S(x) \leq \widehat{\mu}_{n-1}(E-x)\right\},$$

donde segue que

$$\widehat{\mu}_n(E) = \sup\left\{\frac{1}{2}S(\lambda^n) + \frac{1}{2}S(-\lambda^n) \colon S \text{ simples e } 0 \leq S(x) \leq \widehat{\mu}_{n-1}(E-x)\right\},$$

e portanto

$$\widehat{\mu}_n(E) = \frac{1}{2}\widehat{\mu}_{n-1}(E-\lambda^n) + \frac{1}{2}\widehat{\mu}_{n-1}(E+\lambda^n). \tag{4.2}$$

Supondo que E contém h pontos da forma $\pm 1 \pm ... \pm \lambda^{n-1} \pm \lambda^n$, temos que E contém h_1 pontos da forma $\pm 1 \pm .... \pm \lambda^{n-1} + \lambda^n$ e h_2 pontos da forma $\pm 1 \pm .... \pm \lambda^{n-1} - \lambda^n$, com $h_1 + h_2 = h$. Agora, E contém h_1 dos 2^n pontos $\pm 1 \pm ... \pm \lambda^{n-1} + \lambda^n$ se, e somente se, $E - \lambda^n$ contém h_1 dos 2^n pontos $\pm 1 \pm .... \pm \lambda^{n-1}$, e uma relação análoga vale para $E + \lambda^n$. Assim, segue de (4.2) e da hipótese de indução que

$$\widehat{\mu}_n(E) = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h_2}{2^n}\right) = \frac{h}{2^{n+1}}.$$

□

Como $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^2)^n < \infty$, segue, de [8, Theorem 11], que existe uma medida $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}^1$ para a qual (4.1) se verifica com $\widehat{\mu}_n$ no lugar de μ_n e $\widehat{\mu}$ no lugar de μ, e além disso a convergência é absoluta, isto é, a convergência se mantém qualquer que seja o reordenamento dos índices n. Pela Afirmação 1, para todo $E \subset \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

$$\widehat{\mu}_n(E) = \text{Prob}\left\{\sum_{k=0}^{n} \pm\lambda^k \in E\right\}, \tag{4.3}$$

onde cada sinal tem probabilidade $\frac{1}{2}$, donde segue que $\widehat{\mu} = \nu_\lambda$, pela unicidade do limite no sentido de (4.1) (ver [8, 2]). Pela comutatividade da convolução e pela convergência absoluta de $\widehat{\mu}_n$, podemos escrever

$$\nu_\lambda = \lim_{n\to\infty}(\mu_0 * \mu_2 * \mu_4 * \ldots * \mu_k * \mu_1 * \mu_3 * \ldots * \mu_m), \tag{4.4}$$

onde $k = k(n)$ é o maior inteiro par que não supera n, e $m = m(n)$ o maior inteiro ímpar que não supera n. Como $\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^{2j})^2 < \infty$, segue, do mesmo argumento anterior, que $(\mu_0 * \mu_2 * \ldots * \mu_{2k})$ converge no sentido de (4.1) e a convergência é absoluta. Agora, pela definição de μ_{2j}, podemos concluir, como em (4.3), que

$$\mu_0 * \mu_2 * \ldots * \mu_{2k}(E) = \text{Prob}\left\{\sum_{j=0}^{k}(\pm\lambda^2)^j \in E\right\},$$

donde segue que ν_{λ^2} é o limite de $(\mu_0 * \mu_2 * \ldots * \mu_{2k})$ no sentido de (4.1), novamente pela unicidade do mesmo. De modo análogo, $(\mu_1 * \mu_3 * \ldots * \mu_{2j+1})$ converge para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ no sentido de (4.1). Pelas considerações feitas no início dessa seção e por (4.4), temos que $\Gamma_{\mu_0*\mu_2*\ldots*\mu_k*\mu_1*\mu_3*\ldots*\mu_m}$ converge uniformemente para Γ_{ν_λ} em cada intervalo fechado $[-a, a]$. Por outro lado, a ação multiplicativa da transformada de Fourier sobre uma convolução nos dá que $\Gamma_{\mu_0*\mu_2*\ldots*\mu_k*\mu_1*\mu_3*\ldots*\mu_m}$ converge para $\Gamma_{\nu_{\lambda^2}*\mu}$. Pela unicidade do limite de funções e pela correspondência injetiva entre $\mathcal{M}^1$ e o espaço das transformadas de Fourier das medidas em $\mathcal{M}^1$, segue que $\nu_\lambda = \nu_{\lambda^2} * \mu$. □

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

Vamos agora provar o Teorema 4.1. Devido à extensão da demonstração, vamos dividi-la em vários lemas.

Demonstração do Teorema 4.1. Pelo Teorema 2.1, para provar a continuidade absoluta de ν_λ, basta mostrar que $\underline{D}(\nu_\lambda, x) < \infty$, para ν_λ-quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Lema 4.5. *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $\int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) d\lambda < \infty$, então para Lebesgue quase todo parâmetro $\lambda \in I$, vale que $\underline{D}(\nu_\lambda, x) < \infty$ para ν_λ-quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $S := \int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\ d\nu_\lambda(x) d\lambda$ e suponha, por absurdo, que existe um conjunto $B \subset I$ tal que $m(B) > 0$ e tal que para cada $\lambda \in B$ existe $A_\lambda \subset \mathbb{R}$, com $\nu_\lambda(A_\lambda) > 0$ e $\underline{D}(\nu_\lambda, x) = \infty$ para todo $x \in A_\lambda$. Como $\underline{D}(\nu_\lambda, x) \geq 0$ para todo $\lambda \in I$ e para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$S \geq \int_B \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\ d\nu_\lambda(x) d\lambda. \tag{4.5}$$

Agora, para cada $\lambda \in B$,

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) \geq \int_{A_\lambda} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) \geq n\, \nu_\lambda(A_\lambda) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e como $\nu_\lambda(A_\lambda) > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) = \infty.$$

Daí, segue que

$$\int_B \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) d\lambda \geq n \cdot m(B) \quad \text{para todo}\, n \in \mathbb{N},$$

e como $m(B) > 0$,

$$\int_B \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\, d\nu_\lambda(x) d\lambda = \infty,$$

o que implica $S = \infty$ por (4.5) (contradição). □

Daqui em diante sempre indicaremos por S a integral dupla $\int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, x)\ d\nu_\lambda(x) d\lambda$. Pelo Lema de Fatou e pela definição da derivada inferior, temos que

$$S \leq \int_I \left(\liminf_{r \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu_\lambda(B(x,r))}{2r}\, d\nu_\lambda(x) \right) d\lambda \leq \liminf_{r \to 0^+} \int_I \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu_\lambda(B(x,r))}{2r}\, d\nu_\lambda(x) d\lambda,$$

e como não estamos integrando em relação a r,

$$S \leq \liminf_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) d\lambda. \tag{4.6}$$

Essa última desigualdade junto com o Lema 4.5, nos diz que para provar o Teorema 4.1, basta mostrar que $\liminf_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{(\frac{1}{2},1)} \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) d\lambda$ é finito.

Consideremos então o espaço das sequências em dois elementos com índices inteiros não negativos. Por abuso de notação, indicaremos tal espaço também por Σ_2^+ (na Seção 3.3 havíamos indicado com essa notação o espaço das sequências em dois elementos com índices inteiros positivos). Por conveniência, vamos considerar sequências nos dígitos -1 e 1, isto é, $\Sigma_2^+ = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$. Munimos então Σ_2^+ com a topologia produto, já discutida na Seção 3.3, e consideramos τ a medida produto em Σ_2^+, induzida pela medida que dá probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada dígito no espaço $\{-1, 1\}$ (como na Seção 3.3). Para cada $\lambda \in I$, definimos o mapa

$$\pi_\lambda : \Sigma_2^+ \to \mathbb{R} \quad : \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, ...) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \lambda^n.$$

A aplicação π_λ coincide com a aplicação π definida em (3.25). Pelo Lema 3.20, π_λ é uma aplicação contínua.

Para $\eta, \xi \in \Sigma_2^+$, escrevamos $\phi_{\eta,\xi}(\lambda) := \pi_\lambda(\eta) - \pi_\lambda(\xi)$. Com essa notação temos o seguinte lema.

Lema 4.6. *Para cada intervalo $I \subset \mathbb{R}$,*

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r)) d\nu_\lambda(x) d\lambda = \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} m\{\lambda \in I \colon\ |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\} d(\tau \times \tau)(\eta, \xi).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.21, $\pi_{\lambda *}\tau = \nu_\lambda$, donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2^+} \mathbb{I}_{\{\xi \in \Sigma_2^+ \colon |\pi_\lambda(\xi) - x| \leq r\}}\, d\tau(\xi) d\nu_\lambda(x).$$

Usando Teorema 1.5, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) = \int_{\Sigma_2^+} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R} \colon |\pi_\lambda(\xi) - x| \leq r\}}\, d\nu_\lambda(x) d\tau(\xi),$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) = \int_{\Sigma_2^+} \nu_\lambda(B(\pi_\lambda(\xi), r))\ d\tau(\xi). \tag{4.7}$$

Mais uma vez usando que $\nu_\lambda = \pi_{\lambda *}\tau$, temos que

$$\nu_\lambda(B(\pi_\lambda(\xi), r)) = \int_{\Sigma_2^+} \mathbb{I}_{\{\eta \in \Sigma_2^+ \colon |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}} d\tau(\eta),$$

o que junto com (4.7) e com o Teorema 1.5 nos dá

$$\begin{aligned}
&\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B(x,r))\, d\nu_\lambda(x) d\lambda \\
&\qquad = \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\Sigma_2^+} \int_{\Sigma_2^+} \mathbb{I}_{\{\eta \in \Sigma_2^+ \colon |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}}\, d\tau(\eta) d\tau(\xi) d\lambda \\
&\qquad = \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_I \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} \mathbb{I}_{\{(\eta,\xi) \in \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ \colon |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}}\, d(\tau \times \tau)(\eta, \xi)\, d\lambda \\
&\qquad = \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} m\, \{\lambda \in I \colon\ |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}\ d(\tau \times \tau)(\eta, \xi).
\end{aligned}$$

□

Fixados $\eta, \xi \in \Sigma_2^+$, temos que $\phi_{\eta,\xi}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_n - \xi_n)\lambda^n$, pela convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$. Dado $r > 0$, vamos estimar

$$m(\{\lambda \in I : |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}). \tag{4.8}$$

Se $\eta \neq \xi$, considere

$$q := q(\eta, \xi) = \min \{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} . \tag{4.9}$$

O número q pode ser associado à distância entre as sequências η e ξ. Isso porque podemos definir uma métrica em Σ_2^+ colocando

$$d(\eta, \xi) := \begin{cases} 0, & \text{se}\, \eta = \xi; \\ \frac{1}{2^q}, & \text{se}\, \eta \neq \xi \text{ e } q = \min \{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} . \end{cases}$$

Denotemos por σ o operador deslocamento

$$\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+ \quad : \quad (\xi_0, \xi_1, ...) \mapsto (\xi_1, \xi_2, ...).$$

Então, se $\eta \neq \xi$ e q é como em (4.9), definimos

$$b := b(\eta, \xi) = (b_0, b_1, ...) = \frac{1}{2}\big(\sigma^q(\eta) - \sigma^q(\xi)\big) := \Big(\frac{1}{2}\big(\eta_q - \xi_q\big), \frac{1}{2}\big(\eta_{q+1} - \xi_{q+1}\big), ...\Big)$$

e

$$g_b : I \to \mathbb{R} \quad : \quad g_b(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n.$$

Observe que a série que define g_b converge se $|\lambda| < 1$, que é o caso que estamos considerando. Para $\eta \neq \xi$, temos que

$$\phi_{\eta,\xi}(\lambda) = 2\lambda^q g_b(\lambda). \tag{4.10}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $b = (1, b_1, b_2, ...)$ em (4.10). Por definição, a sequência b é dessa forma apenas quando $\eta_q - \xi_q = 2$, mas como nossa intenção é estimar um conjunto definido a partir de $|\phi_{\eta,\xi}|$ (ver (4.8)), quando $\eta_q - \xi_q = -2$, podemos escrever $\phi_{\eta,\xi}(\lambda) = -2\lambda^q g_{\widetilde{b}}(\lambda)$, de forma que $|\phi_{\eta,\xi}|$ não se alterará e $\widetilde{b} = (1, -b_1, -b_2, ...)$ será como acima. Denotaremos por $\mathcal{F}_1$ a família de todas as funções g_b da forma

$$g_b : I \to \mathbb{R} \quad : \quad g_b(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad \text{com } b = (1, b_1, b_2, ...) \text{ e } b_n \in \{-1, 0, 1\} . \tag{4.11}$$

A fim de estimar o integrando $m(\{\lambda \in I : |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)|\} \leq r)$, introduziremos a seguinte definição.

Definição 4.7. *Sejam f uma função definida em um intervalo J e δ uma constante positiva. Dizemos que f é δ-transversal ou que f satisfaz a condição de δ-transversalidade em J se $f'(x) < -\delta$ sempre que $x \in J$ e $f(x) < \delta$. Dizemos que uma família de funções definidas em J é δ-transversal ou satisfaz a condição de δ-transversalidade em J se toda função da família é δ-transversal.*

Vamos agora fixar um intervalo $I := [\lambda_0, \lambda_1] \subset (\frac{1}{2}, 1)$ e assumir que a família $\mathcal{F}_1$ satisfaz a condição de δ-transversalidade em I para algum $\delta > 0$. Os extremos do intervalo I e a constante δ serão especificados depois.

Lema 4.8. *Assuma que $\mathcal{F}_1$ satisfaz a condição de δ-transversalidade em I. Então para toda $g_b \in \mathcal{F}_1$ e para todo número real $\gamma > 0$ vale que $m(\{\lambda \in I : |g_b(\lambda)| \leq \gamma\}) \leq \frac{2\gamma}{\delta}$.*

Demonstração. Fixe $\gamma > 0$ e $g_b \in \mathcal{F}_1$. Como $I \subset (\frac{1}{2}, 1)$, o lema é imediato para o caso $\gamma \geq \frac{\delta}{2}$. Suponha então $\gamma < \frac{\delta}{2}$ e considere $A = A(\gamma, g_b) := \{\lambda \in I\colon\ |g_b(\lambda)| \leq \gamma\}$. Se $A = \varnothing$, o lema também é imediato. Se $A \neq \varnothing$ então A é um intervalo fechado. De fato, nesse caso, como I é um intervalo fechado e g_b é contínua, temos que $y_0 := \min A$ e $y_1 := \max A$ estão em A, e pela condição de δ-transversalidade, temos que g_b é decrescente em A, donde segue que $g_b(y_0) > g_b(\lambda) > g_b(y_1)$ para todo $\lambda \in [y_0, y_1]$, e portanto A é um intervalo fechado. Assim, também pela condição de δ-transversalidade, temos que

$$g_b(y_1) - g_b(y_0) = \int_{y_0}^{y_1} g_b'(\lambda)\, d\lambda \leq -\delta(y_1 - y_0),$$

e como $g_b(y_0) - g_b(y_1) \leq 2\gamma$, vale que

$$y_1 - y_0 \leq \frac{2\gamma}{\delta},$$

concluindo a demonstração do lema. □

Vamos agora concluir a prova do Teorema 2.1. Para todo $r > 0$ e para todo $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, a equação (4.10) nos dá que se $|\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r$ então $|g_b(\lambda)| \leq \frac{r}{2\lambda_0^q}$, donde segue que

$$\{\lambda \in I\colon\ |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\} \subset \left\{\lambda \in I\colon\ |g_b(\lambda)| \leq \frac{r}{2\lambda_0^q}\right\}.$$

Usando a monotonicidade da medida de Lebesgue e o Lema 4.8, temos que

$$m(\{\lambda \in I\colon\ |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}) \leq \frac{r}{\lambda_0^q \delta}.$$

Isso, junto com a definição de q em (4.9), nos dá que

$$\begin{aligned}
\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} & m\left(\{\lambda \in I : |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}\right) d(\tau \times \tau)(\eta, \xi) \\
&\leq \liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} \frac{r}{\lambda_0^{q(\eta,\xi)}\delta} d(\tau \times \tau)(\eta, \xi) \\
&= \frac{1}{2\delta} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} \frac{1}{\lambda_0^{q(\eta,\xi)}} d(\tau \times \tau)(\eta, \xi) \\
&= \frac{1}{2\delta} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^q} \frac{1}{2^{q+1}}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Como $\lambda_0 > \frac{1}{2}$, temos que $\frac{1}{2\lambda_0} < 1$, donde segue que

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{\Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+} m\left(\{\lambda \in I : |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \leq r\}\right) d(\tau \times \tau)(\eta, \xi) < \infty.$$

Juntando essa última conclusão com o Lema 4.5, a desigualdade em (4.6) e o Lema 4.6, temos, pelo Teorema 2.1, que a medida ν_λ é absolutamente contínua em I. □

4.4 Garantindo a δ-transversalidade

Vamos agora discutir sobre a condição de δ-transversalidade definida na Seção 4.3 (ver Definição 4.7) e assumida para a família $\mathcal{F}_1$ em um determinado intervalo I. Vamos obter tal intervalo e a constante $\delta = \delta(I)$ onde $\mathcal{F}_1$ é δ-transversal. Antes disso, faremos alguns comentários sobre o significado dessa condição.

Geometricamente, o fato da família $\mathcal{F}_1$ ser δ-transversal em I para algum $\delta > 0$ faz com que, nesse intervalo, o gráfico de cada função $g_b \in \mathcal{F}_1$ cruze transversalmente, com inclinação no máximo $-\delta$, toda linha horizontal abaixo da linha horizontal de altura δ que ele encontra. Assim, além de ser decrescente no intervalo formado pelos pontos $\lambda \in I$ tais que $|g_b(\lambda)| < \delta$, caso ele seja não-vazio, o gráfico de g_b nesse mesmo intervalo fica abaixo de uma determinada reta de inclinação $-\delta$ que o tangencia no ponto correspondente ao ínfimo do intervalo. Isso nos permitiu majorar o comprimento de todos os conjuntos da forma $A(\gamma, g_b)$ definidos no Lema 4.8, para γ constante positiva. A cota superior para a medida de tais conjuntos foi fundamental na prova que $\liminf_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\int_{\Sigma_2^+\times\Sigma_2^+} m\left\{\lambda \in I : |\phi_{\eta,\xi}(\lambda)| \le r\right\} d(\tau\times\tau)(\eta,\xi) < \infty$, e assim, na prova do Teorema 4.1.

Fixemos agora um intervalo I e uma constante positiva δ. Observe que se uma função $g_b \in \mathcal{F}_1$ tem uma raiz dupla em algum ponto $\tilde{x} \in I$, então ela não é δ-transversal em I, e assim $\mathcal{F}_1$ não satisfaz a condição de δ-transversalidade nesse intervalo. De fato, como $\tilde{x}$ é raiz dupla de g_b, podemos escrever $g_b(x) = (x-\tilde{x})^2\phi(x)$, com $\phi \in C^\infty((-1,1))$. Assim, $g_b'(\tilde{x}) = 0$, o que prova nosso comentário.

Em suas notas de aula, Pollicott [15] repete a demonstração do Teorema 4.1 feita por Peres-Solomyak [14] e faz comentários sobre a condição de δ-transversalidade, que é definida por ele de maneira semelhante. Considerando

$$y := \inf\left\{x > 0 \colon \exists g_b \in \mathcal{F}_1 \,\mathrm{com}\, g_b(x) = g_b'(x) = 0\right\},$$

ele afirma que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que a família $\mathcal{F}_1$ é δ-transversal em $[0, y-\epsilon)$. Ele também afirma que $y > (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$, o que nos dá, em particular, que a δ-transversalidade pode ser garantida em $[(0, (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}]$ (para mais detalhes, ver [15, 7]). Aqui, vamos mostrar diretamente que a condição de δ-transversalidade é satisfeita por $\mathcal{F}_1$ em $[0, (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}]$.

O resultado a seguir, consequência imediata do Corolário 4.4, nos diz que basta garantir a δ-transversalidade da família $\mathcal{F}_1$ em $[0, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}]$.

Lema 4.9. *Se ν_λ é absolutamente contínua para quase todo ponto $\lambda \in (\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}})$, então ν_λ é absolutamente contínua para quase todo ponto $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$.*

Entretanto, a família $\mathcal{F}_1$ não poderá ser δ-transversal em I se este tiver um número menor que $0,67$ como seu extremo esquerdo e $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ como seu extremo direito, uma vez que existe uma função em $\mathcal{F}_1$ com uma raiz dupla próxima de $0,68$ (para mais detalhes, ver [14]). Precisaremos então fazer uma adaptação do nosso método, considerando uma família análoga à família $\mathcal{F}_1$. Inicialmente, vamos mostrar que para algum $\delta > 0$, a família $\mathcal{F}_1$ é δ-transversal em $[0, (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}]$.

Definição 4.10. *Uma série de potências $h(x)$ é chamada uma $(*)$-função se*

$$h(x) = 1 - \sum_{1=1}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x^i, \text{ onde } k \geq 1 \text{ e } a_k \in [-1, 1]. \tag{4.13}$$

Temos o seguinte resultado.

Lema 4.11. *Suponha que uma $(*)$-função h satisfaz $h(x_0) > \delta$ e $h'(x_0) < -\delta$ para algum $x_0 \in (0, 1)$ e para algum $\delta \in (0, 1)$. Então a família $\mathcal{F}_1$ é δ-transversal em $[0, x_0]$.*

Demonstração. Vamos primeiro provar a seguinte afirmação.

Afirmação 1. *$h(x) > \delta$ e $h'(x) < -\delta$ para todo $x \in [0, x_0]$.*

Demonstração. Vamos derivar a série que define h. Para todo $x \in [0, 1)$, temos que

$$h'(x) = \begin{cases} a_1 + \sum\limits_{i=2}^{\infty} i x^{i-1}, & \text{se } k = 1; \\ -1 + 2a_2 x + \sum\limits_{i=3}^{\infty} i x^{i-1}, & \text{se } k = 2; \\ -1 - \sum\limits_{i=2}^{k-1} i x^{i-1} + k a_k x^{k-1} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} i x^{i-1}, & \text{se } k > 2, \end{cases}$$

e

$$h''(x) = \begin{cases} 2 + \sum\limits_{i=3}^{\infty} i(i-1) x^{i-2}, & \text{se } k = 1; \\ 2a_2 + \sum\limits_{i=3}^{\infty} i(i-1) x^{i-2}, & \text{se } k = 2; \\ -2 + 6a_3 x^2 + \sum\limits_{i=4}^{\infty} i(i-1) x^{i-2}, & \text{se } k = 3; \\ -2 - \sum\limits_{i=3}^{k-1} i(i-1) x^{i-2} + k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} i(i-1) x^{i-2}, & \text{se } k > 3. \end{cases}$$

Pela expressão da derivada segunda de h, vemos que h'' tem no máximo uma raiz no intervalo $(0, 1)$. Além disso, temos que

$$h'(0) < -\delta. \tag{4.14}$$

Com efeito, se $k > 1$ isso é imediato. Agora se $k = 1$, temos $h'(0) = a_1$ e como $h'(x_0) < -\delta$ por hipótese, a expressão de h' garante que $a_1 < -\delta$. Observe ainda que $\lim_{x \to 1^-} h'(x) = \infty$, fato que junto com (4.14) e com a hipótese $h'(x_0) < -\delta$, nos garante que

$$h'(x) < -\delta \quad \text{para todo } x \in (0, x_0), \tag{4.15}$$

pois do contrário h'' teria pelo menos duas raízes em $(0,1)$. Por fim, (4.15) garante que h é decrescente em $(0,x_0)$, donde segue que $h(x) > h(x_0) > \delta$ para todo $x \in (0,x_0)$. □

Sejam agora $g_b \in \mathcal{F}_1(I)$ e $f_b := g_b - h$. Pelas definições de g_b e h em (4.11) e (4.13), respectivamente, temos que

$$f_b(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i x^i - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i,$$

onde $c_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $l = k-1$ ou $l = k$. Além disso, se $f_b(x) < 0$ então $f_b'(x) < 0$. De fato, se $f_b(x) < 0$ então $\sum_{i=1}^{l} c_i x^i < \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i$, e assim $\sum_{i=1}^{l} c_i i x^{i-1} < \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i i x^{i-1}$. Juntando esse último comentário com a definição de f_b e a Afirmação 1, temos, para todo $x \in [0,x_0]$, que

$$g_b(x) < \delta \Rightarrow f_b(x) < 0 \Rightarrow f_b'(x) < 0 \Rightarrow g_b'(x) < -\delta.$$

□

Agora, consideremos a $(*)$-função

$$h(x) = 1 - x - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \sum_{i=5}^{\infty} x^i.$$

Utilizando o software MATLAB, verificamos que $h((\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}) > 0,07$ e $h'((\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}) < -0,07$. Assim, o Lema 4.11 garante que a condição de δ-transversalidade é satisfeita por $\mathcal{F}_1$ em $[0,(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}]$ para $\delta = 0,07$.

Conforme comentado anteriormente, esse mesmo método não poderia ser aplicado diretamente para o intervalo $[0,(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}]$, o que concluiria a prova do Teorema 4.1 segundo o Lema 4.9. Para contornar esse problema, vamos agora definir uma família análoga à família $\mathcal{F}_1$ e obter resultados semelhantes ao Lema 4.11 que se apliquem ao intervalo $[0,(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}]$.

Para cada parâmetro $\lambda \in (0,1)$, consideremos

$$Z_\lambda := \sum_{n \neq 2+3j} \pm \lambda^n,$$

a série com os "terceiros termos" removidos, onde novamente a soma se faz sobre todos os inteiros não-negativos e os sinais $+$ e $-$ são escolhidos de forma independente, cada um com probabilidade $\frac{1}{2}$. Seja z_λ a distribuição de Z_λ, isto é, para cada $E \subset \mathbb{R}$,

$$z_\lambda(E) := \text{Prob}\{Z_\lambda \in E\}.$$

Lema 4.12. *Se z_λ é absolutamente contínua então ν_λ também o é.*

Demonstração. De acordo com o Lema 4.2, basta mostrar que ν_λ pode ser escrita como a convolução $\nu_\lambda = z_\lambda * \mu$ para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$. Seguindo a demonstração da Proposição 4.3, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, medidas μ_n e $\widehat{\mu}_n$ como na tal proposição. Dessa maneira, temos que $z_\lambda = \lim_{n\to\infty, n\neq 2+3j} \mu_0 * \mu_1 * \mu_3 * \mu_4 * \mu_6 * ... * \mu_n$ e assim, $\nu_\lambda = z_\lambda * \mu$, onde $\mu = \lim_{n\to\infty, n=2+3j} \mu_2 * \mu_5 * ... * \mu_n$. Isso prova o lema. $\square$

A demonstração do Teorema 4.1 feita na Seção 4.3 pode ser refeita para a medida z_λ, apenas com algumas adaptações. Não vamos refazer todas as contas, mas sim indicar os pontos onde algumas mudanças devem ser feitas. Nas prévias do Lema 4.6, consideramos o espaço Σ_2^+ das sequências em dois elementos e a medida produto τ em Σ_2^+. Ao substituir Y_λ por Z_λ devemos também trocar Σ_2^+ pelo espaço $\Sigma_{3\sharp}^+ \subset \Sigma_3^+$ das sequências em três dígitos com índices inteiros não negativos, cujos "terceiros termos" são sempre 0, e os demais 1 ou -1. Melhor explicado, $\xi \in \Sigma_{3\sharp}^+$ se $\xi = (\xi_0, \xi_1, 0, \xi_3, \xi_4, 0, \xi_5, ...)$, com $\xi_n = -1$ ou $\xi_n = 1$. Também devemos trocar a medida produto τ em Σ_2^+ pela medida $\widetilde{\tau}$ em $\Sigma_{3\sharp}^+$, que nada mais é do que a medida produto induzida pela medida que dá probabilidade $\frac{1}{2}$ à ocorrência dos dígitos 1 e -1 em cada fator $\{-1, 1\}$ para $n \neq 2 + 3j$, $j \in \mathbb{N}_0$, e pela única probabilidade possível de ser definida em cada fator $\{0\}$ para $n = 2 + 3j$, $j \in \mathbb{N}_0$. Para esse novo espaço, o número $q = q(\eta, \xi)$ definido em (4.9), menor índice n tal que $\xi_n \neq \eta_n$, não pode ser da forma $2 + 3j$, $j \in \mathbb{N}_0$, pois para um tal n, temos obrigatoriamente $\xi_n = \eta_n$. Assim, a função g_b que aparecerá em (4.10) será da forma

$$g_b(\lambda) = 1 + \sum_{n=1, n\neq 3j+2}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad \text{se}\, q = 3j, \tag{4.16}$$

ou será da forma

$$g_b(\lambda) = 1 + \sum_{n=1, n\neq 3j+1}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad \text{se}\, q = 3j+1, \tag{4.17}$$

com $b_n \in \{-1, 0, 1\}$ em ambos os casos. Desse modo, a δ-transversalidade aqui é exigida para uma família que contém menos funções.

Outra diferença entre a demonstração da continuidade absoluta da medida ν_λ e a demonstração da continuidade absoluta da medida z_λ ocorre em (4.12). Se o número q da definição em (4.9) for da forma $q = 3j$, teremos

$$(\widetilde{\tau} \times \widetilde{\tau}) \left(\{(\eta, \xi) \colon \min\{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} = q\}\right) = \frac{1}{2^{2j+1}} = \frac{1}{2^{\frac{2q}{3}+1}},$$

pois $\min\{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} = q$ se, e somente se, $\eta_n = \xi_n$ para as $2j$ primeiras coordenadas de η e ξ com $n \neq 2 + 3i$, $i \in \mathbb{N}_0$, e além disso $\eta_{3j} \neq \xi_{3j}$. Já se q for da forma $q = 3j + 1$, teremos

$$(\widetilde{\tau} \times \widetilde{\tau}) \left(\{(\eta, \xi) \colon \min\{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} = q\}\right) = \frac{1}{2^{\frac{2q}{3}+\frac{4}{3}}},$$

por motivo análogo. De qualquer maneira,

$$\lim_{q\to\infty} (\widetilde{\tau} \times \widetilde{\tau}) \left(\{(\eta, \xi) \colon \min\{n \colon \eta_n \neq \xi_n\} = q\}\right) = \frac{1}{2^{\frac{2q}{3}}}.$$

Assim, em (4.12) precisaremos da convergência do somatório $\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^q} \frac{1}{2^{\frac{2q}{3}}}$, o que ocorre se λ_0 é tal que $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < \lambda_0 < 1$.

Por fim, na nova demonstração, substituímos o Lema 4.11 por dois lemas análogos. Primeiro, precisamos de definições análogas à Definição 4.10.

Definição 4.13. *Uma série de potências $h(x)$ é chamada uma $(**)$-função se para algum $k \geq 1, k \neq 3j+2, j \in \mathbb{N}_0$, e para algum $a_k \in [-1,1]$, temos*

$$h(x) = 1 - \sum_{i=1, i \neq 3j+2}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1, i \neq 3j+2}^{\infty} x^i. \tag{4.18}$$

De maneira análoga, uma série de potências $h(x)$ é chamada uma $(***)$-função se para algum $k \geq 1, k \neq 3j+1, j \in \mathbb{N}_0$ e para algum $a_k \in [-1,1]$, temos

$$h(x) = 1 - \sum_{i=1, i \neq 3j+1}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1, i \neq 3j+1}^{\infty} x^i. \tag{4.19}$$

Temos então os seguintes lemas.

Lema 4.14. *Suponha que uma $(**)$-função h satisfaz $h(x_0) > \delta$ e $h'(x_0) < -\delta$ para algum $x_0 \in (0,1)$ e para algum $\delta \in (0,1)$. Então a condição de δ-transversalidade vale em $[0, x_0]$, para toda função g_b como em* (4.16).

Lema 4.15. *Suponha que uma $(***)$-função h satisfaz $h(x_0) > \delta$ e $h'(x_0) < -\delta$ para algum $x_0 \in (0,1)$ e para algum $\delta \in (0,1)$. Então a condição de δ-transversalidade vale em $[0, x_0]$, para toda função g_b como em* (4.17).

Finalmente, para concluir a demonstração do Teorema 4.1, escolhemos

$$h_1(x) = 1 - x - x^3 - x^4 + \sum_{j=2}^{\infty} x^{3j} + x^{3j+1}$$

e

$$h_2(x) = 1 - x^2 - x^3 - x^5 - x^5 + \sum_{j=3}^{\infty} x^{3j-1} + x^{3j}$$

como $(**)$ e $(***)$-funções respectivamente. Novamente através do software MATLAB verificamos que

$$h_1\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \approx 0,0194 \quad \text{e} \quad h_1'\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \approx -0,1539$$

e além disso,

$$h_2\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \approx 0,00974 \quad \text{e} \quad h_2'\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \approx -2,8779.$$

Assim, h_1 e h_2 estão nas condições dos Lemas 4.14 e 4.15 respectivamente, de forma que a demonstração da continuidade absoluta de z_λ pode ser concluída de maneira análoga à que fizemos para a medida ν_λ. Com isso, também concluímos a demonstração do Teorema 4.1.

Capítulo 5

Transformações do tipo produto torto

Este capítulo tem como objetivos apresentar alguns exemplos de transformações onde a continuidade absoluta de medidas invariantes será discutida, além de apresentar, em um contexto não tão geral, transformações do tipo produto torto e medidas SRB. Também aqui veremos outros exemplos nos quais se pode aplicar o método de transversalidade discutido no Capítulo 4. Dados esses objetivos, salientamos desde já que alguns resultados serão apresentados sem muitos detalhes.

Vamos estudar uma classe de transformações atuando em $S^1 \times \mathbb{R}$, onde $S^1 = \mathbb{R} \mod 1$ munido da métrica induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}$. Tais transformações serão chamadas de *produto torto*, nome que vem do fato delas consistirem em um "produto" de uma expansão em S^1 com contrações em $\mathbb{R}$ que dependem de S^1. Mais precisamente, trataremos de mapas da forma

$$T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad T(x, y) := (f(x), S(x, y)) \tag{5.1}$$

onde f é uma expansão em x e $\{S(x, \cdot)\}_{x \in S^1}$ uma família de contrações em y. Estudaremos medidas invariantes por esse tipo de transformação e a continuidade absoluta de tais medidas. Para tal, discutiremos sobre a medida SRB e sobre o produto de medidas invariantes. A medida SRB é construída a partir de uma aplicação contínua atuando em um espaço métrico e é automaticamente invariante por essa aplicação. Já a discussão sobre o produto de medidas invariantes é natural, uma vez que sob determinadas condições, sempre existe a medida SRB para a expansão f (explicaremos melhor depois). Descreveremos uma situação em que o produto de uma medida invariante por f com uma medida invariante pelo sistema $\{S(x, \cdot)\}_{x \in S^1}$ é invariante por T.

Discutiremos, em especial, a continuidade absoluta de medidas invariantes para três casos de transformações do tipo produto torto. O primeiro trata da chamada *transformação do padeiro generalizada linear* ou simplesmente *transformação do padeiro generalizada*, um caso em que a expansão f e as contrações do sistema $\{S(x, \cdot)\}_{x \in S^1}$ são lineares em x e em y

respectivamente, e além disso, a família $\{S(x,\cdot)\}_{x\in S^1}$ é composta por um número finito de aplicações. Esse caso foi estudado por Alexander e Yorke [3]. Em seguida abordaremos um caso que foi tratado por Tsujii [20], onde f é ainda linear, mas cada contração S é a soma de uma aplicação linear em y com uma aplicação de classe C^2 em x. Por fim, trataremos de um caso que generaliza os dois anteriores, quando f é uma aplicação expansora de classe C^2 e $\{S(x,\cdot)\}_{x\in S^1}$ um sistema composto por aplicações contratoras satisfazendo algumas condições especiais. Esse último foi estudado por Rams [17]. Antes de tratar cada caso específico, vamos fazer uma abordagem geral sobre medidas invariantes por um produto torto.

5.1 Medidas invariantes para transformações do tipo produto torto

Vamos nesta seção discutir sobre dois métodos de obter uma medida invariante por uma transformação T definida como em (5.1). No primeiro, vamos tratar da chamada medida SRB, e no segundo, trataremos do produto de medidas invariantes pela aplicação f e pelo sistema $\{S(x,\cdot)\}_{x\in S^1}$. Nesta e nas demais seções deste capítulo, consideraremos $X = \mathbb{R}$ munido da métrica euclidiana, $X = S^1$ com a métrica induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}$, ou ainda $X = S^1\times\mathbb{R}$ com a métrica induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$. A σ-álgebra dos boreleanos de X será indicada apenas por $\mathcal{B}$, o espaço das probabilidades de Borel em X será indicado por $\mathcal{M}^1(X)$ ou apenas por $\mathcal{M}^1$, e o espaço das funções contínuas e limitadas de X em $\mathbb{R}$ será indicado por $\mathcal{C}_b(X)$.

Definição 5.1. *Seja $H : X \to X$ uma transformação contínua. Suponha que existem um subconjunto $X_0 \subset X$ com medida de Lebesgue*[1] *positiva e uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ tais que para todo ponto $z \in X_0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\varphi(H^i(z)) = \int \varphi\,d\mu \quad \textit{para toda}\,\varphi\in\mathcal{C}_b(X). \tag{5.2}$$

Então μ é chamada medida de Sinai-Ruelle-Bowen *para a aplicação H, ou simplesmente,* medida SRB *para H. Um ponto z que satisfaz* (5.2) *é chamado um* ponto genérico para μ.

Definição 5.2. *Seja $h : X \to X$ uma aplicação de Borel. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ é dita* h-invariante *se $\mu(h^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo $E \subset X$ conjunto de Borel.*

Temos então o seguinte resultado.

[1] A medida de Lebesgue em S^1 é definida da maneira natural, a partir da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, e a medida de Lebesgue em $S^1\times\mathbb{R}$ como o produto da medida de Lebesgue em S^1 com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Proposição 5.3. *A medida SRB para uma transformação contínua $H : X \to X$ é H-invariante.*

Demonstração. Sejam μ a medida SRB para H e $F \subset X$ fechado. Pela Proposição 1.1, basta mostrar que $\mu(F) = \mu(H^{-1}(F))$. Seja (φ_n) uma sequência de funções em $\mathcal{C}_b(X)$ que converge pontualmente para $\mathbb{I}_F$ e tal que $|\varphi_n(z)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in X$, por exemplo,

$$\varphi_n : X \to \mathbb{R} \quad : \quad \varphi_n(z) := \begin{cases} 1, & \text{se}\, z \in F; \\ 1 - nd(z, F), & \text{se}\, 0 < d(z, F) < \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{se}\, d(z, F) \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Então, pelo Teorema 1.3 e pela definição de μ,

$$\mu(F) = \int \mathbb{I}_F \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \varphi_n(H^i(z)) \tag{5.3}$$

para todo ponto $z \in X_0$, onde $X_0 \subset X$ é um conjunto de medida de Lebesgue positiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos $\psi_n = \varphi_n \circ H$. Então ψ_n converge pontualmente para $\mathbb{I}_{H^{-1}(F)}$ e $|\psi_n(z)| \leq 1$ para todo $z \in X$. Desse modo, assim como em (5.3),

$$\mu(H^{-1}(F)) = \int \mathbb{I}_{H^{-1}(F)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \psi_n(H^i(z)) \tag{5.4}$$

para todo $z \in X_0$. Agora a definição de ψ_n implica que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \varphi_n(H^i(z)) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \psi_n(H^i(z))$$

para todo $z \in X$ tal que os limites acima existam, em particular para todo $z \in X_0$. Isso junto com (5.3) e com (5.4) nos dá que μ é invariante por H. □

Vale notar que uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ que satisfaz as condições da Definição 5.1 também é chamada de *medida física* para a aplicação contínua $H : X \to X$. Vale ressaltar ainda que também se encontra a definição de uma medida SRB para um difeomorfismo $H : X \to X$ de classe C^2 como uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ invariante por H cujas medidas condicionais nas variedades instáveis são absolutamente contínuas. Ledrappier-Young [11] mostraram que com essa definição, se H é um difeomorfismo de classe C^2 em uma variedade compacta, então uma medida é SRB se, e somente se, ela satisfaz a chamada fórmula de Pesin. Também é verdade que se H é um difeomorfismo de classe C^2 em uma variedade compacta que satisfaz o Axioma A, então uma medida é SRB se, e somente se, ela é física (para mais detalhes, veja também o resumo de Young [22]). Em nosso caso não trataremos de difeomorfismos, mas sim de endomorfismos. Resultados correspondentes aos anteriores para endomorfismos foram mostrados por Qian e Zhu [16].

Vamos agora obter outro método para encontrar medidas invariantes por uma transformação do tipo produto torto. Para tal, vamos formalizar a seguinte definição.

Definição 5.4. *Uma aplicação diferenciável $h : S^1 \to S^1$ é dita uma expansão se existe uma constante $c > 1$ tal que $|h'(x)| \geq c$ para todo $x \in S^1$.*

Suponha que a transformação T definida em (5.1) é tal que a expansão f é da forma $f(x) = Nx$ para algum inteiro $N \geq 2$. Suponha ainda que o sistema $\{S(x, \cdot)\}_{x \in S^1}$ é finito e constante em cada intervalo $\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right), k = 1, ..., N$, de S^1. Então a transformação T definida em (5.1) pode ser escrita como

$$T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad T(x, y) = (Nx, S_k(y)), \quad \text{se}\, x \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right), \tag{5.5}$$

onde cada aplicação $S_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma contração. O mapa considerado em [3] é um exemplo de transformação satisfazendo tais condições. Observe que nesse caso a medida de Lebesgue (que aqui também será indicada por m) é invariante por f (consequência imediata de [6, 1.21 Theorem]). Vamos determinar uma condição necessária e suficiente para que uma medida $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ seja tal que $m \times \nu$ é invariante por T. Consideremos os conjuntos $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ e $\rho = \{\rho_1, ..., \rho_N\}$, onde $\rho_k = \frac{1}{N}$ para todo $k = 1, ..., N$, e o operador $(\mathcal{S}, \rho)$ definido como em (3.2), porém agora sobre o espaço $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. Temos então o seguinte resultado.

Proposição 5.5. *Sejam T uma transformação definida como em* (5.5) *e $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. Então a medida produto $m \times \nu$ é T-invariante se, e somente se, ν é um ponto fixo para o operador $(\mathcal{S}, \rho)$.*

Demonstração. Note inicialmente que se $m \in \mathcal{M}^1(S^1)$ e $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ então $\mu \times \nu \in \mathcal{M}^1(S^1 \times \mathbb{R})$. Suponha que a medida $m \times \nu$ seja T-invariante e seja B um boreleano em $\mathbb{R}$. Então

$$(m \times \nu)(T^{-1}(S^1 \times B)) = (m \times \nu)(S^1 \times B). \tag{5.6}$$

A imagem inversa de $S^1 \times B$ por T é composta por N subconjuntos disjuntos de $S^1 \times \mathbb{R}$, a saber, $\left\{(x, y) \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right) \times \mathbb{R} \colon S_k(y) \in B\right\}_{k=1,...,N}$, donde segue, da definição de medida produto, que

$$(m \times \nu)(T^{-1}(S^1 \times B)) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \Big(\nu(S_k^{-1}(B))\Big). \tag{5.7}$$

Por outro lado, também da definição da medida produto, $(m \times \nu)(S^1 \times B) = \nu(B)$, o que junto com (5.6) e com (5.7) nos dá

$$\nu(B) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \nu(S_k^{-1}(B)).$$

Portanto ν é ponto fixo do operador $(\mathcal{S}, \rho)$.

Suponha agora que ν é um ponto fixo para o operador $(\mathcal{S}, \rho)$ e seja

$$\mathcal{E} := \left\{E \in S^1 \times \mathbb{R} \colon (m \times \nu)(T^{-1}(E)) = (m \times \nu)(E)\right\}.$$

Como as imagens inversas de conjuntos disjuntos em $S^1 \times \mathbb{R}$ por T não se intersectam, temos que $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra em $S^1 \times \mathbb{R}$. Assim, basta mostrar que se A é um boreleano em S^1 e B um boreleano em $\mathbb{R}$, então $(A \times B) \in \mathcal{E}$. A imagem inversa de $A \times B$ por T também é composta por N conjuntos disjuntos, a saber, $\Big(f^{-1}(A) \cap \big[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\big)\Big) \times S_k^{-1}(B), k = 1, ..., N$, sendo que cada um dos conjuntos $f^{-1}(A) \cap \big[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\big)$ tem medida de Lebesgue igual a $\frac{1}{N}$ da medida de Lebesgue do conjunto A. Juntando esse fato com a definição da medida produto, temos que

$$(m \times \nu)(T^{-1}(A \times B)) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} m(A) \Big(\nu(S_k^{-1}(B)\Big),$$

e como ν é ponto fixo de $(\mathcal{S}, \rho)$, segue que

$$(m \times \nu)(T^{-1}(A \times B)) = (m \times \nu)(A \times B),$$

mais uma vez pela definição da medida produto. □

Observe que a Proposição 5.5 nos garante a existência de pelo menos uma medida invariante por uma aplicação T definida como em (5.5), uma vez que o Teorema 3.2 garante a existência de um ponto fixo $\nu \in \mathcal{M}_1^1$ para o operador $(\mathcal{S}, \rho)$.

Vamos agora considerar um caso mais geral para a transformação T definida em (5.1). Para tal, precisamos das seguintes definições.

Definição 5.6. *Seja $H : X \to X$ uma aplicação de Borel. Uma medida invariante $\mu \in \mathcal{M}^1$ é dita* ergódica para H *se para todo $E \in \mathcal{B}$ tal que $H^{-1}(E) = E$ vale que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.*

Definição 5.7. *Uma aplicação $f : S^1 \to S^1$ é dita C^2* por partes *se existe uma partição $\{0 = a_0 < a_1 < ... < a_N = 1\}$ de S^1 tal que para cada $k = 1, ..., N$ a restrição $f|_{(a_{k-1}, a_k)}$ é de classe C^2 e pode ser estendida de forma C^2 ao intervalo $[a_{k-1}, a_k]$.*

Definição 5.8. *Uma aplicação $f : S^1 \to S^1$ será dita N* para 1*, para algum $N \in \mathbb{N}$, se existir uma partição $\{0 = a_0 < a_1 < ... < a_N = 1\}$ de S^1 tal que para cada $k = 1, ..., N$ a restrição $f_k := f|_{[a_{k-1}, a_k)}$ satisfaz $f_k([a_{k-1}, a_k)) = S^1$.*

Definição 5.9. *Uma aplicação $f : S^1 \to S^1$ será dita C^2* por partes N para 1 *se ela for C^2 por partes, N para 1, e as partições na definição de cada uma dessas condições coincidirem.*

Suponha agora que que $f : S^1 \to S^1$ é uma expansão C^2 por partes N para 1 para algum inteiro $N \geq 2$. Então o Teorema Folclore (ver [1]) garante a existência de uma medida em $\mathcal{M}^1$ invariante e ergódica para f, equivalente à medida de Lebesgue[2]. Um resultado clássico da Teoria Ergódica (ver por exemplo [4, (5.9) Proposition]) garante que uma tal medida é a medida SRB para f.

[2]Duas medidas são ditas *equivalentes* quando cada uma delas é absolutamente contínua em relação à outra.

Fixemos então μ uma medida invariante por f. Vamos determinar uma condição necessária para que uma medida $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ seja tal que $\mu \times \nu$ é invariante por T. Em [13], Mendivil trata de um caso mais geral que o tratado por Hutchinson em [7], e considera o operador

$$\Lambda_\mu : \mathcal{M}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}^1(\mathbb{R}) \quad : \quad \Lambda_\mu(\nu)(B) := \int_{S^1} \nu(S(x,\cdot)^{-1}(B))\, d\mu(x)$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma medida $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ é um *ponto fixo* para o operador Λ_μ se $\Lambda_\mu(\nu) = \nu$.

Proposição 5.10. *Seja T uma transformação definida como em* (5.1)*. Suponha que f é uma expansão N para 1 para algum inteiro $N \geq 2$, que admite uma medida invariante $\mu \in \mathcal{M}^1(S^1)$. Se uma medida $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ é tal que a medida produto $\mu \times \nu$ é invariante por T então ν é um ponto fixo para o operador Λ_μ.*

Demonstração. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um boreleano. Pela invariância de $\mu \times \nu$ por T e pela definição de medida produto, temos

$$(\mu \times \nu)(T^{-1}(S^1 \times B)) = \mu(S^1)\nu(B) = \nu(B). \tag{5.8}$$

Observe agora que a imagem inversa $T^{-1}(S^1 \times B)$ é composta por N conjuntos disjuntos, digamos $T_k^{-1}(S^1 \times B), k = 1, ..., N$, tais que a projeção de $T_k^{-1}(S^1 \times B)$ sobre S^1 é o intervalo $f_k^{-1}(S^1)$ (f_k como na Definição 5.8). Assim, obtemos

$$(\mu \times \nu)(T^{-1}(S^1 \times B)) = \sum_{k=1}^{N} (\mu \times \nu)T_k^{-1}(S^1 \times B)) = \sum_{k=1}^{N} \int_{f_k^{-1}(S^1)} \nu(S(x,\cdot)^{-1}(B))\, d\mu(x),$$

e portanto

$$(\mu \times \nu)(T^{-1}(S^1 \times B)) = \int_{S^1} \nu(S(x,\cdot)^{-1}(B))\, d\mu(x).$$

Juntando essa igualdade com (5.8) temos que ν é ponto fixo para o operador Λ_μ, o que prova a proposição. $\square$

Vale notar que a recíproca da Proposição 5.10 nem sempre é verdadeira. De fato, basta considerar a aplicação $T(x, y) = (2x, x \mod 1)$. Nesse caso, a medida de Lebesgue m é invariante pela expansão $x \mapsto 2x$ em S^1. Agora, fixados $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, temos, para cada $x \in S^1$, que $\nu(S(x,\cdot)^{-1}(B)) = \mathbb{I}_{B\cap[0,1]}(x)$. Assim,

$$\int_{S^1} \nu(S(x,\cdot)^{-1}(B))\, dm(x) = m(B \cap [0, 1]).$$

Portanto, a medida ν_0 dada por $\nu_0(B) = m(B \cap [0, 1])$ para cada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, é ponto fixo para o operador Λ_m, porém o produto $m \times \nu_0$ não é invariante por T, já que $(m \times \nu_0)([0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})) = \frac{1}{8}$, e $(m \times \nu_0)(T^{-1}([0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}))) = 0$.

O seguinte resultado também é válido e será admitido sem demonstração.

Proposição 5.11. *Seja T uma transformação definida como em* (5.1)*. Suponha que f é uma expansão C^2 por partes N para 1 para algum inteiro $N \geq 2$ com medida de SRB μ. Então existe uma medida SRB ν para T. Além disso, se ν' é uma medida ergódica para T cuja projeção em S^1 coincide com μ, então $\nu' = \nu$.*

Para finalizar esta seção, vamos fazer um breve comentário sobre a continuidade absoluta de uma medida invariante por um produto torto. O seguinte resultado é um exercício de um curso de Teoria da Medida.

Proposição 5.12. *Se $\mu \in \mathcal{M}^1(S^1)$ e $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ são absolutamente contínuas, então $\mu \times \nu$ é absolutamente contínua. Se uma das duas medidas é singular, então $\mu \times \nu$ é singular.*

Assim, a Proposição 5.12 nos dá uma condição para garantir a continuidade absoluta de uma medida invariante por uma transformação do tipo produto torto quando esta pode ser escrita como um produto de duas medidas. Garantir a continuidade absoluta no caso geral é mais complicado, conforme veremos nos exemplos de Tsujii [20] e Rams [18].

A partir da próxima seção, vamos tratar com mais detalhes cada um dos exemplos de produto torto apresentados no início deste capítulo.

5.2 Transformações gordas do padeiro

Vamos nesta seção discutir sobre a chamada *transformação do padeiro generalizada linear* ou apenas *transformação do padeiro generalizada*. Vamos calcular uma medida invariante para esse tipo de transformação e discutir sua continuidade absoluta.

Para $0 < \lambda < 1$, consideremos as contrações reais $S_1(y) = \lambda y + (1-\lambda)$ e $S_2(y) = \lambda y - (1-\lambda)$, e a expansão $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(x) = 2x$. Definimos então a *transformação do padeiro generalizada* por

$$T_\lambda : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad T_\lambda(x,y) := \begin{cases} (f(x), S_1(y)), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \mod 1 < 1; \\ (f(x), S_2(y)), & \text{se } 0 \leq x \mod 1 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ dizemos que T_λ é uma *transformação magra do padeiro*, se $\lambda = \frac{1}{2}$ dizemos apenas que T_λ é a *transformação do padeiro*, e se $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ dizemos que T_λ é uma *transformação gorda do padeiro.* A aplicação T_λ é um produto torto que satisfaz as condições da aplicação definida em (5.5). Alexander e Yorke [3] estudaram esse tipo de transformação para o caso $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Para um tal caso, eles mostraram que o produto $m \times \nu_\lambda$ da medida de Lebesgue em S^1 com a convolução infinita de Bernoulli, discutida no Capítulo 4, é a (única) medida SRB para a transformação T_λ, e além disso, que $m \times \nu_\lambda$ é absolutamente contínua se, e somente se, ν_λ o é. A invariância da medida $m \times \nu_\lambda$ bem como o último comentário sobre sua continuidade absoluta são consequências imediatas dos resultados do Capítulo 4 e da Seção 5.1. O primeiro fato, que será enunciado no teorema a seguir, é uma consequência da Proposição 5.5, uma vez que a medida de Lebesgue é claramente invariante pela aplicação f e a convolução infinita de Bernoulli é invariante pelo sistema $(\mathcal{S}, \rho)$, onde $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ e $\rho = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ (ver Capítulo 4).

Teorema 5.13. *A medida $m \times \nu_\lambda$ é T_λ-invariante.*

Pela Proposição 5.12, a continuidade absoluta da medida invariante $m \times \nu_\lambda$ está diretamente relacionada à continuidade absoluta da medida ν_λ. Temos que $m \times \nu_\lambda$ é absolutamente contínua para os parâmetros λ tais que ν_λ o é, e $m \times \nu_\lambda$ é singular para os parâmetros λ tais que ν_λ é singular. Assim, o seguinte corolário é consequência imediata do Teorema 4.1.

Corolário 5.14. *Para quase todo parâmetro $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$, a medida $m \times \nu_\lambda$ é absolutamente contínua.*

5.3 Uma transformação tratada por Tsujii

Vamos nesta seção discutir sobre um caso particular do que chamaremos *transformação generalizada do padeiro não-linear*, seguindo aqui a notação de [17]. Estudaremos a medida SRB para esse tipo de transformação e discutiremos sua continuidade absoluta. Para tal, seguiremos as ideias de Tsujii [20]. Alguns fatos serão apresentados sem demonstração, visto que o objetivo aqui é apenas apresentar resultados relativos a um exemplo de transformação do tipo produto torto.

Fixemos de uma vez por todas $N \geq 2$ um inteiro. Para cada $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ aplicação de classe C^2 e $0 < \lambda < 1$, consideremos a aplicação

$$T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad T(x, y) := (Nx, \lambda y + \varphi(x)). \tag{5.9}$$

Assim como no caso da transformação do padeiro generalizada, a aplicação T é o produto torto de uma expansão linear na primeira coordenada com uma contração uniforme na segunda, que depende da primeira. Porém agora, essa dependência pode não ser constante em intervalos. Tsujji [20] mostra a existência de uma medida SRB para esse tipo de transformação, a qual indicaremos por μ_T. Esse fato também segue da Proposição 5.11. Uma tal medida é única, já que ele prova que Lebesgue quase todo ponto é genérico para μ_T. Descreveremos a medida μ_T e estudaremos sua continuidade absoluta. Para tal, vamos fixar também a aplicação φ. No caso em que o parâmetro λ da definição de T é tal que $\lambda N < 1$, a medida SRB é singular, uma vez que T contrai áreas. Nos concentraremos no caso em que $\lambda N > 1$, que é o correspondente ao caso $\lambda > \frac{1}{2}$ na transformação do padeiro generalizada linear. Para esse caso, Tsujii apresenta exemplos de transformações T em que μ_T é absolutamente contínua e em que μ_T é singular. Porém, o principal resultado de [20] e também principal resultado desta seção garante a continuidade absoluta de μ_T para “quase toda transformação” T no seguinte sentido.

Considere $C^2(S^1, \mathbb{R})$ o espaço das aplicações de classe C^2 de S^1 em $\mathbb{R}$ munido da norma C^2, que é definida da seguinte maneira. Para cada $\psi \in C^2(S^1, \mathbb{R})$,

$$\|\psi\|_{C^2} := \sup_{x\in S^1} \max\left\{|\psi(x)|, \left|\frac{d}{dx}\psi(x)\right|, \left|\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\right|\right\}.$$

Considere ainda em $(0,1) \times C^2(S^1, \mathbb{R})$ a topologia produto induzida pela topologia canônica em $(0,1)$ e a topologia induzida pela norma C^2 em $C^2(S^1, \mathbb{R})$. Sejam $D \subset (0,1) \times C^2(S^1, \mathbb{R})$ o conjunto dos pares (λ, φ) para os quais T possui medida SRB μ_T absolutamente contínua, e $\operatorname{int} D$ o interior de D. Então vale o seguinte resultado.

Teorema 5.15. *Suponha $\frac{1}{N} < \lambda < 1$. Então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma coleção finita de funções de classe C^∞ $\phi_i : S^1 \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, tais que para toda função $\psi \in C^2(S^1, \mathbb{R})$,*

$$m\left(\left\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \colon \left(\lambda, \psi(x) + \sum_{i=1}^{n} t_i\phi_i(x)\right) \notin \operatorname{int} D\right\}\right) = 0.$$

Como corolário do Teorema 5.15, temos ainda o seguinte fato.

Corolário 5.16. *O subconjunto $\operatorname{int} D$ é aberto e denso em $(\frac{1}{N}, 1) \times C^2(S^1 \times \mathbb{R})$.*

Demonstração. O Teorema 5.15 nos garante que para cada par $(\lambda, \varphi) \in (\frac{1}{N}, 1) \times C^2(S^1, \mathbb{R})$ é possível escolher uma sequência $(t_m) = (t_{m_1}, ..., t_{m_n})$ de pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{m\to\infty} t_m = 0$ e $y_m = (\lambda, \varphi + \sum_{i=1}^{n} t_{m_i}\phi_i) \in \operatorname{int} D$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como a sequência (y_m) converge para (λ, φ), o corolário fica provado. $\square$

O Teorema 5.15 foi provado por Tsujii [20] utilizando a ideia da transversalidade já usada anteriormente na prova do Teorema 4.1. Aqui, vamos apenas dar uma ideia de sua demonstração, mas antes vamos descrever a medida SRB para a aplicação T.

Mantendo fixo o inteiro $N \geq 2$, sejam $\frac{1}{N} < \lambda < 1$ e $\varphi \in C^2(S^1, \mathbb{R})$. Considere o mapa

$$f : S^1 \to S^1 \quad : \quad x \mapsto Nx.$$

Considere ainda $A = \{1, ..., N\}$. Fixado $p \in \mathbb{N}$, seja A^p o conjunto das $p-$uplas ou letras de comprimento p formadas com elementos de A. Para cada letra $a = (a_1, ..., a_p) \in A^p$ e para cada $1 \leq q \leq p$, nós indicaremos por $[a]_q$ a letra formada pelas q primeiras coordenadas de a, isto é, $[a]_q = (a_i)_{i=1}^q$. Seja $\mathcal{P}$ a partição de S^1 nos intervalos

$$\mathcal{P}(k) := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right), \quad k \in A$$

e $\mathcal{P}^p$ a partição de S^1 nos intervalos

$$\mathcal{P}(a) := \bigcap_{i=0}^{p-1} f^{-i}(\mathcal{P}(a_{p-i})), \quad a = (a_i)_{i=1}^p \in A^p.$$

Note que para cada $x \in S^1$, existem N^p pontos $y \in S^1$ tais que $f^p(y) = x$, mas pela definição de $\mathcal{P}^p$, para cada $a \in A^p$, existe um único ponto $y \in \mathcal{P}(a)$ tal que $f^p(y) = x$. Nós denotaremos tal ponto por $a(x)$ (o índice p ficará implícito). Se $p \geq 2$, temos que $f^{p-1}(f(a(x))) = x$ e $f(a(x)) \in \mathcal{P}([a]_{p-1})$ pela definição de $\mathcal{P}^p$, o que implica

$$f(a(x)) = [a]_{p-1}(x) \quad \text{para } a \in A^p. \tag{5.10}$$

Observe agora que para uma letra $a \in A^p$ e para um ponto $(x, 0) \in (\mathcal{P}(a) \times \{0\})$, vale que

$$T^p(x, 0) = \Big(f^p(x), \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \varphi(f^{p-i}(x))\Big).$$

Como o ponto x também pode ser escrito como $x = a(f^p(x))$, segue que a imagem do segmento $\mathcal{P}(a) \times \{0\}$ por T^p é o gráfico da função

$$S(\cdot, a) : S^1 \to \mathbb{R} \quad : \quad S(x, a) := \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \varphi(f^{p-i}(a(x))) = \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} \varphi([a]_i(x)), \tag{5.11}$$

sendo a última igualdade válida pela equação (5.10). Agora, para uma letra $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma_N^+$, nós definimos

$$S(x, a) := \lim_{i \to \infty} S(x, [a]_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \varphi([a]_i(x)). \tag{5.12}$$

Note que o limite acima de fato existe e além disso $x \mapsto S(x, a)$ é uma função de classe C^2 em $S^1 \setminus \{0\}$, pois para $r = 0, 1, 2$, a regra da cadeia nos dá

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \lambda^{i-1} \frac{d^r}{dx^r} \left(\varphi([a]_i(x))\right) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} N^{-ir} \|\varphi\|_{C^2} < \infty. \tag{5.13}$$

Agora, para cada ponto $x \in S^1$, seja $\pi(x) \in A$ tal que $\mathcal{P}(\pi(x))$ contém x. Para uma letra $a = (a_1, ..., a_p) \in A^p$, defina $\pi(x)a := (\pi(x), a_1, a_2, ..., a_p)$, e para $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma_N^+$, seja $\pi(x)a := (\pi(x), a_1, a_2, ...)$. A definição de S nos dá

$$S(f(x), \pi(x)a) = \varphi(x) + \lambda S(x, a). \tag{5.14}$$

tanto para $a \in A^p$ quanto para $a \in \Sigma_N^+$. Sejam agora os mapas

$$\Psi : S^1 \times \Sigma_N^+ \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad \Psi(x, a) := (x, S(x, a)) \tag{5.15}$$

e

$$\Theta : S^1 \times \Sigma_N^+ \to S^1 \times \Sigma_N^+ \quad : \quad \Theta(x, a) := (f(x), \pi(x)a).$$

A equação (5.14) nos dá a relação comutativa

$$T \circ \Psi = \Psi \circ \Theta : S^1 \times \Sigma_N^+ \to S^1 \times \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Indiquemos por τ a medida de Bernoulli em Σ_N^+ induzida pela medida que dá probabilidade $\frac{1}{N}$ à ocorrência de cada dígito no espaço $\{1, ..., N\}$ (ver Seção 3.3). O seguinte lema nos será útil.

Lema 5.17. *A medida produto $m \times \tau$ é invariante e ergódica com respeito ao mapa Θ.*

Demonstração. Vamos justificar apenas a invariância, uma vez que a ergodicidade foge aos objetivos desta seção. Pelo mesmo argumento usado na demonstração da Proposição 5.5, basta mostrar que $m \times \tau$ é invariante nos conjuntos da forma $E \times C_{i_1 \dots i_p}$, onde E é um boreleano em S^1 e $C_{i_1 \dots i_p}$ é um cilindro em Σ_N^+ (ver definição (3.24)). Se $p = 1$, temos, pela definição de Θ, que

$$\Theta^{-1}(E \times C_{i_1}) = \left\{(x, a) \in S^1 \times \Sigma_N^+ \colon f(x) \in E, \pi(x) = i_1 \, \text{e} \, a \in \Sigma_N^+\right\},$$

A invariância de m com respeito a f e a definição de $\pi(x)$ nos dão

$$m(\left\{x \in S^1 \colon f(x) \in E \, \text{e} \, \pi(x) = i_1\right\}) = \frac{1}{N} m(E), \tag{5.17}$$

e assim,

$$(m \times \tau)(\Theta^{-1}(E \times C_{i_1})) = \frac{1}{N} m(E) = (m \times \tau)(E \times C_{i_1}).$$

De forma análoga, se $p > 1$, temos, também pela definição de Θ, que

$$\Theta^{-1}(E \times C_{i_1 \dots i_p}) = \left\{(x, a) \in S^1 \times \Sigma_N^+ \colon f(x) \in E, \pi(x) = i_1 \, \text{e} \, a \in C_{i_2 \dots i_p}\right\},$$

o que junto com (5.17) nos dá

$$(m \times \tau)(\Theta^{-1}(E \times C_{i_1 \dots i_p})) = \frac{1}{N} m(E) \cdot \tau(C_{i_2 \dots i_p}) = (m \times \tau)(E \times C_{i_1 \dots i_p}).$$

□

Agora, indiquemos por μ_T a medida em $S^1 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_T(E) = (m \times \tau)(\Psi^{-1}(E)) \quad \text{para todo} \, E \in \mathcal{B}.$$

Observe que μ_T depende de fato da aplicação T, uma vez que Ψ definida em (5.15) depende de S definida em (5.12), que por sua vez depende de N, λ e φ, e portanto depende de T. A relação comutativa dada em (5.16), o Lema 5.17 e a Proposição 5.11 nos dão o seguinte resultado.

Proposição 5.18. *A medida μ_T é invariante e ergódica com respeito ao mapa T. Mais ainda, μ_T é a medida SRB para T.*

Agora que já descrevemos a medida SRB para a aplicação T definida em (5.8), vamos dar uma ideia da demonstração do Teorema 5.15. A demonstração detalhada pode ser encontrada em [20]. Para provar o Teorema 5.15, Tsujii utilizou a ideia da transversalidade, também usada por Peres e Solomyak [14], e na qual nos baseamos para provar o Teorema 4.1. Basicamente, Tsujii mostra que a medida SRB para a aplicação T é absolutamente contínua se "muitos" pares de gráficos das aplicações $S(\cdot, a), a \in \Sigma_N^+$, definidas em (5.12), são transversais entre si. Formalizaremos esses conceitos a seguir.

Para cada $x \in S^1$, consideremos a medida μ_{T_x} em $S^1 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_{T_x}(E) := (\delta_x \times \tau)(\Psi^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{B},$$

onde δ_x é a medida de Dirac no ponto x. Para cada $r > 0$, consideremos ainda

$$I(r) := r^{-2} \int_{S^1} \|\mu_{T_x}\|_r^2 \, dm(x),$$

onde $\|\cdot\|_r$ é a norma definida em (2.7). Como Corolário do Teorema 2.5, Tsujii prova a seguinte condição para que a medida μ_T seja absolutamente contínua.

Corolário 5.19. *Se* $\liminf_{r \to 0} I(r) < \infty$*, a medida SRB* μ_T *é absolutamente contínua.*

Sejam agora $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, e letras $c \in A^p$ e $a \in A^q$. A função $S(\cdot, a)$ pode ser descontínua no fecho de $\mathcal{P}(c)$ se $\mathcal{P}(c)$ tiver o ponto 0 como seu extremo direito, porém a restrição de $S(\cdot, a)$ a $\mathcal{P}(c)$ pode ser estendida a uma função de classe C^2 no fecho de $\mathcal{P}(c)$. Indicaremos tal extensão por $S_c(\cdot, a)$.

Definição 5.20. *Sejam* ϵ *e* δ *constantes positivas,* $p \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq q \leq \infty$*. Dadas letras* $c \in A^p$ *e* $a, b \in A^q$*, as funções* $S(\cdot, a)$ *e* $S(\cdot, b)$ *são ditas* (ϵ, δ)*-transversais em* $\mathcal{P}(c)$ *se*

$$|S_c(x, a) - S_c(x, b)| > \epsilon \quad \text{ou} \quad \left| \frac{d}{dx} S_c(x, a) - \frac{d}{dx} S_c(x, b) \right| > \delta$$

se mantém para todo $x \in \operatorname{cl}(\mathcal{P}(c))$*. Caso contrário, as funções são ditas* (ϵ, δ)*-tangentes em* $\mathcal{P}(c)$*.*

Com essa definição, Tsujii mostra que dados $p, q \in \mathbb{N}$ e letras $c \in A^p$ e $a, b \in A^q$, com $p, q \in \mathbb{N}$, tais que as funções $S(\cdot, au)$ e $S(\cdot, bv)$ são (ϵ, δ)-transversais em $\mathcal{P}(c)$ para cada $u, v \in \Sigma_N^+$, então existem uma constante (em relação a r) d_0 e um número r_0 tais que

$$\int_{\mathcal{P}(c)} r^{-2} (T^q(\mu_{T_{a(x)}}), T^q(\mu_{T_{b(x)}}))_r \, dm(x) < d_0 \quad \text{para } 0 < r \leq r_0, \tag{5.18}$$

onde $(\cdot, \cdot)_r$ é o produto interno definido em (2.6). Como ele também prova que a invariância de μ_T com respeito a T nos dá

$$r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \|\mu_{T_x}\|_r^2 \, dm = N^{-2q} \sum_{(a,b) \in A^q \times A^q} r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} (T^q(\mu_{T_{a(x)}}), T^q(\mu_{T_{b(x)}}))_r \, dm(x),$$

o fato das integrais em (5.18) serem uniformemente limitadas junto com o Corolário 5.19 nos garante que para mostrar a invariância da medida SRB μ_T, basta, por exemplo, obter $p \in \mathbb{N}$ tal que para cada letra $c \in A^p$ exista $q \in \mathbb{N}$ satisfazendo que para quaisquer letras $a, b \in A^q$, os pares $S(\cdot, au)$ e $S(\cdot, bv)$ são (ϵ, δ)-transversais em $\mathcal{P}(c)$ para todas $u, v \in \Sigma_N^+$, sendo que ϵ e δ podem depender de a e b. Assim, nos interessa garantir que "muitos" pares de funções definidas como em (5.12) sejam (ϵ, δ)-transversais para algum par de constantes positivas ϵ e δ, ou ainda, cotar superiormente a cardinalidade do conjunto dos pares de funções que são (ϵ, δ)-tangentes para algum par de constantes positivas ϵ e δ.

Com esse intuito, Tsujii define para $p, q \in \mathbb{N}$, $c \in A^p$, ϵ e δ constantes positivas, o conjunto $E(q, c; \epsilon, \delta)$ que consiste em todos os pares $(a, b) \in A^q \times A^q$ para os quais existem $u, v \in \Sigma_N^+$ tais que as funções $S(\cdot, au)$ e $S(\cdot, bv)$ são (ϵ, δ)-tangentes em $\mathcal{P}(c)$. Além disso, ele define

$$e(q, p; \epsilon, \delta) := \max_{c \in A^p} \max_{a \in A^q} \# \{b \in A^q \colon (a, b) \in E(q, c; \epsilon, \delta)\}.$$

Como $e(q, p; \epsilon, \delta)$ é decrescente com respeito a p e crescente com respeito a ϵ e δ, podemos definir

$$e(q) := \min \{e(q, p; \epsilon, \delta) \colon \epsilon > 0, \delta > 0, p \in \mathbb{N}\} = \lim_{p \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} e(q, p; \epsilon, \delta). \tag{5.19}$$

Então Tsujii prova que

$$I(r) \leq (\lambda N)^{-q} e(q, p; \epsilon, \delta) I(\lambda^{-q} r) + R \tag{5.20}$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}, \epsilon > 0, \delta > 0$ e r suficientemente pequeno, sendo R constante em relação a r. Assim, combinando a equação (5.20), com a definição de $e(q)$ em (5.19) e com o Corolário 5.19, segue que se $e(q) < (\lambda N)^q$ para algum inteiro positivo q, então μ_T é absolutamente contínua. Tsujii então usa o fato que $S(\cdot, a)$ depende continuamente de $a \in \Sigma_N^+$, $\lambda \in (0, 1)$ e $\varphi \in C^2(S^1, \mathbb{R})$, para concluir que a (ϵ, δ)-transversalidade de um par dessas funções é uma condição aberta em a, λ e φ, e assim chegar a um resultado mais forte.

Proposição 5.21. *Se $e(q) < (\lambda N)^q$ para algum inteiro positivo q, então $(\lambda, \varphi) \in \operatorname{int} D$.*

Observe que apesar da função parâmetro φ não aparecer explícita na desigualdade da hipótese da Proposição 5.21, o número $e(q)$ depende de φ, uma vez que ele depende de $S(\cdot, a)$. A Proposição 5.21 nos dá então como condição suficiente para que um par (λ, φ) esteja contido no interior de D, que o crescimento de $e(q)$ seja menor que o crescimento exponencial de λN.

É possível ainda obter uma outra condição suficiente para que um par (λ, φ) esteja no interior de D. Para ϵ e δ constantes positivas, $p, q \in \mathbb{N}$ e $c \in A^p$, nós definimos $d(q, c; \epsilon, \delta)$ como a cardinalidade máxima de um subconjunto $\{a_1, ..., a_d\} \subset A^q$ satisfazendo as seguintes condições:
$a)$ as primeiras letras $[a_i]_1 \in A, 1 \leq i \leq d$, são distintas duas a duas;

b) $S(\cdot, a_i)$ e $S(\cdot, a_j)$ são $(4\lambda^q(1-\lambda)^{-1}\|\varphi\|_{C^2}+\epsilon, 4\lambda^q N^{-q}(1-\lambda)^{-1}\|\varphi\|_{C^2}+\delta)$-tangentes em $\mathcal{P}(c)$.

Definimos ainda

$$d(q,p;\epsilon,\delta) := \max_{c\in A^p} d(q,c;\epsilon,\delta), \tag{5.21}$$

e como $d(q,p;\epsilon,\delta)$ é decrescente em relação a p e crescente em relação a ϵ e δ, podemos definir

$$d(q) := \min\left\{d(q,p;\epsilon,\delta)\colon \epsilon>0, \delta>0, p\in\mathbb{N}\right\}. \tag{5.22}$$

Com essas definições, Tsujii prova que

$$e(q) \le \prod_{i=1}^{q} d(i),$$

o que junto com a Proposição 5.21 nos dá o seguinte resultado.

Proposição 5.22. *Se* $\limsup_{q\to\infty} d(q) < \lambda N$ *então* $(\lambda,\varphi)\in \operatorname{int} D$.

Obtemos assim mais uma condição suficiente para que a medida SRB μ_T de uma aplicação T definida como em (5.9) seja absolutamente contínua. Vamos a partir de agora considerar não apenas uma aplicação T definida como em (5.9), mas uma família de aplicações definidas a partir de um novo parâmetro, um ponto $t\in\mathbb{R}^n$. Para tal, além de $N\ge 2$ inteiro já fixado, fixemos também $N^{-1}<\lambda<1$ e $\psi\in C^2(S^1,\mathbb{R})$, e sejam $\phi_i : S^1\to\mathbb{R}, 1\le i\le n$ funções de classe C^∞. Consideremos a família de funções

$$\varphi_t : S^1\to\mathbb{R} \quad : \quad \varphi_t(x) := \psi(x) + \sum_{i=1}^{n} t_i\phi_i(x),$$

tendo como parâmetro $t=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$, e a correspondente família de mapas

$$T_t : S^1\times\mathbb{R}\to S^1\times\mathbb{R} \quad : \quad T_t(x,y) := (Nx, \lambda y+\varphi_t(x)). \tag{5.23}$$

Para uma aplicação T_t como em (5.23), os números $d(q,p;\epsilon,\delta)$ e $d(q)$ definidos em (5.21) e em (5.22), respectivamente, serão indicados por $d(q,p;\epsilon,\delta;t)$ e $d(q;t)$. Dessa forma, de acordo com a Proposição 5.22, precisamos cotar superiormente $\limsup_{q\to\infty} d(q;t)$ para quase todo parâmetro t. Para tal, vamos dar algumas definições.

Vamos definir o Jacobiano de um mapa entre dois espaços euclidianos. Seja $L : E\to F$ um mapa linear entre dois espaços euclidianos. Se L é sobrejetivo, nós definimos o *Jacobiano* de L por

$$\operatorname{Jac}(L) := \frac{m_F(B_F(0,1))}{m_{\ker(L)^\perp}(L^{-1}(B_F(0,1))\cap\ker(L)^\perp)},$$

onde $\ker(L)^\perp$ indica o complemento ortogonal do núcleo de L e os índices em B e m indicam onde estão sendo consideradas a bola e a medida de Lebesgue, respectivamente. Se L não é sobrejetivo, nós colocamos $\mathrm{Jac}(L) = 0$. Para um mapa afim $A : E \to F$ nós definimos o Jacobiano de A como o Jacobiano de sua parte linear.

Vamos agora definir o que chamaremos de condição de (γ, δ)-genericidade. Indicaremos por $S(\cdot, a; t)$ a função definida como em (5.11) e em (5.12) com φ_t no lugar de φ, e por $S_c(\cdot, a; t)$ a única função de classe C^2 definida em $\mathrm{cl}\,(\mathcal{P}(c))$ que coincide com $S(\cdot, a; t)$ em $\mathcal{P}(c)$. Para um ponto $x \in S^1$ e uma sequência finita $\alpha = (a_0, a_1, ..., a_k)$ de elementos em Σ_N^+, nós definimos o mapa

$$G_{x,\alpha} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : \quad G_{x,\alpha}(t) := \left(\frac{d}{dx}S(x, a_1; t) - \frac{d}{dx}S(x, a_0; t), ..., \frac{d}{dx}S(x, a_k; t) - \frac{d}{dx}S(x, a_0; t)\right)$$

Agora estamos em condições de dar a seguinte definição.

Definição 5.23. *Sejam* $0 < \gamma \leq 1$, $\delta > 0$ *e* $x \in S^1$. *Uma família definida como em* (5.23) *é dita* (γ, δ)-genérica em x *se dado qualquer conjunto finito* $\beta = \{a_1, ..., a_d\}$ *de sequências em* Σ_N^+ *tais que as primeiras letras* $[a_i]_1$ *são duas a duas disjuntas, e dado um inteiro positivo* $k < \gamma d$, *nós podemos escolher uma sequência* $\alpha = (b_0, b_1, ..., b_k)$ *formada com elementos do conjunto* β *tais que* $\mathrm{Jac}\, G_{x,\alpha} > \delta$. *Uma família definida como em* (5.23) *é dita* (γ, δ)-genérica em S^1 *se ela é* (γ, δ)*-genérica em cada ponto de* S^1.

Convém aqui observar que como a parte linear do mapa $G_{x,\alpha}$ não depende da função ψ, e o Jacobiano de $G_{x,\alpha}$ é o Jacobiano de sua parte linear, ψ não afeta a (γ, δ)-genericidade de uma família definida como em (5.23).

Temos o seguinte resultado.

Proposição 5.24. *Assuma que uma família definida como em* (5.23) *é* (γ, δ)*-genérica em* S^1 *para algum* $0 < \gamma \leq 1$ *e para algum* $\delta > 0$. *Então*

$$\limsup_{q \to \infty} d(q; t) \leq \gamma^{-1} \left(-\frac{2 \log N}{\log \lambda} + 3\right)$$

para Lebesgue quase todo ponto $t \in \mathbb{R}^n$.

Observe que mesmo que a (γ, δ)-genericidade em S^1 seja garantida para uma família definida como em (5.23), a cota superior para $\limsup_{q\to\infty} d(q; t)$ obtida na Proposição 5.24 pode não ser menor que λN, conforme pede a Proposição 5.22. Para contornar esse problema e finalizar a prova do Teorema 5.15, vamos usar o seguinte truque. Seja T_t uma família de mapas definida como em (5.23). Para cada $t \in \mathbb{R}^n$, o m-ésimo iterado da aplicação T_t pode ser escrito na forma

$$T_t^m(x, y) = (N^m x, \lambda^m y + \varphi_t^{(m)}(x)), \tag{5.24}$$

onde

$$\varphi_t^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-j-1}\psi(f^j(x)) + \sum_{i=1}^{n} t_i \left(\sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-j-1}\phi_i(f^j(x))\right).$$

Fazendo

$$\psi^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-j-1}\psi(f^j(x)) \quad \text{e} \quad \phi_i^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-j-1}\phi_i(f^j(x)),$$

a função $\varphi_t^{(m)}$ pode ser escrita na forma

$$\varphi_t^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^{n} t_i \phi_i^{(m)}(x),$$

com $\psi^{(m)} \in C^2(S^1, \mathbb{R})$ e $\phi_i^{(m)} \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ para todo $i = 1, ..., n$. Assim, todas as considerações feitas até aqui para a família de mapas T_t se aplicam à correspondente família de mapas T_t^m. Agora, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.25. *Dado $m \in \mathbb{N}$, é possível escolher $n = n(m)$ e uma coleção $\phi_i : S^1 \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ de funções de classe C^∞ tal que a família T_t^m, definida como em (5.24), é $\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{2}\right)$-genérica em S^1, independente da função de classe C^2 $\psi : S^1 \to \mathbb{R}$.*

Como $\lambda N > 1$, nós podemos escolher m_0 inteiro positivo tal que

$$(m_0 + 1)\left(-\frac{2\log N^{m_0}}{\log \lambda^{m_0}} + 3\right) = (m_0 + 1)\left(-\frac{2\log N}{\log \lambda} + 3\right) < (\lambda N)^{m_0}.$$

Por fim, o fato da medida SRB para $T_t^{m_0}$ ser a mesma que para T_t junto com uma combinação das Proposições 5.22, 5.24 e 5.25 conclui a prova do Teorema 5.15.

5.4 Uma transformação tratada por Rams

Vamos nesta seção tratar de um caso mais abrangente de transformação do tipo produto torto atuando em $S^1 \times \mathbb{R}$, no qual a expansão em S^1 pode não ser linear, e as contrações em $\mathbb{R}$ assumem uma forma mais geral. Vamos discutir sobre a medida SRB para esse tipo de transformação e sobre a continuidade absoluta de tal medida. Seguiremos as ideias de Rams [17]. Assim como na Seção 5.3, o objetivo aqui é apenas fazer comentários sobre um determinado exemplo de aplicação do tipo produto torto.

Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação de classe C^2 e N para 1. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(0) = 0$, uma vez que sempre é possível parametrizar S^1 de forma que isso ocorra. Denotemos os N ramos inversos da aplicação f por f_k^{-1}, $k = 1, ..., N$ (seguindo a Definição 5.8), e as imagens de S^1 pelos ramos inversos por $R_k := f_k^{-1}(S^1)$. Consideremos então a aplicação

$$T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R} \quad : \quad T(x, y) := (f(x), S_k(x, y)) \quad \text{se}\, x \in R_k, \tag{5.25}$$

onde $S_k : R_k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^2 em $\text{int}\,(R_k \times \mathbb{R})$ para todo $k = 1, ..., N$, e satisfaz a condição de contração $0 < c \leq \left|\frac{\partial S_k}{\partial y}\right| \leq C < 1$ para algum par de constantes c e C. Nós assumiremos que T é de classe C^2 por partes.

Para cada aplicação T definida como em (5.25), a Proposição 5.11 garante a existência de uma medida SRB, a qual indicaremos por μ_T, assim como na Seção 5.3. Rams [17] prova que a medida SRB μ_T é absolutamente contínua sempre que o mapa T satisfaz as condições que ele denomina gordura e transversalidade. Vamos então explicar o que significa para Rams uma aplicação definida como em (5.25) ser gorda e transversal.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, com $\xi_i \in \{1, ..., N\}$ para todo $i = 1, ..., n$, nós definimos

$$R_{\xi_1 \ldots \xi_n} := (f_{\xi_1}^{-1} \circ ... \circ f_{\xi_n}^{-1})(S^1).$$

Suponha I um intervalo em $\mathbb{R}$ satisfazendo que $T(S^1 \times I) \subset (S^1 \times I)$, e seja J outro intervalo em $\mathbb{R}$ contendo estritamente o intervalo I. Considere $F := S^1 \times I$ e $D := S^1 \times J$. Para cada $\xi_1 \in \{1, ..., N\}$, defina

$$F_{\xi_1} := T(F \cap (R_{\xi_1} \times \mathbb{R})),$$

e para cada $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, com $\xi_i \in \{1, ..., N\}$, seja

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n} := T(F_{\xi_2 \ldots \xi_n} \cap (R_{\xi_1} \times \mathbb{R})).$$

Isso define de forma indutiva uma família de conjuntos encaixados. Uma outra família pode ser definida de maneira análoga usando como conjunto inicial o conjunto D. Definamos agora para $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \Sigma_N^+$,

$$\Lambda_\xi := \cap_{n=1}^{\infty} F_{\xi_1 \ldots \xi_n}. \tag{5.26}$$

Os conjuntos Λ_ξ correspondem às "variedades instáveis" para a transformação T. Rams mostra que cada um deles é o gráfico de uma função de S^1 em $\mathbb{R}$ com um certa regularidade. Seja por fim

$$d(\xi_1, ..., \xi_n) := \max_{x \in S^1} \text{diam}\,(D_{\xi_1 \ldots \xi_n} \cap (\{x\} \times \mathbb{R}))\,.$$

Estamos agora em condições de dar as seguintes definições.

Definição 5.26. *Uma aplicação T definida como em* (5.25) *é dita transversal se todas as intersecções entre conjuntos da forma Λ_ξ, $\xi \in \Sigma_N^+$, definidos em* (5.26)*, o são.*

Definição 5.27. *Uma aplicação T definida como em* (5.25) *é dita gorda se existem constantes K e $\epsilon > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $(\xi_1, ..., \xi_n)$, com $\xi_i \in \{1, ..., N\}$, vale que*

$$\text{diam}\, R_{\xi_1 \ldots \xi_n} \leq K(d(\xi_1, ..., \xi_n))^{1+\epsilon}.$$

O principal resultado de [17] é o seguinte.

Teorema 5.28. *Se uma aplicação T definida como em* (5.25) *é gorda e transversal, a medida SRB μ_T para a aplicação T é absolutamente contínua.*

Referências

[1] ADLER, R., FLATTO, L., 1991, *Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **25**:2, 229-334.

[2] ÅKERLUND-BISTRÖM, C., 1997, *A generalization of the Hutchinson distance and applications*, Random & Computational Dynamics **5**, 159-176.

[3] ALEXANDER, J. C., YORKE, J. A., 1984, *Fat baker's transformations*, Ergodic Theory Dynam. Systems. **4**, 1-23.

[4] DENKER, M., GRILLENBERGER, C., SIGMUND, K., 1976, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Math. **527**, Springer.

[5] DUDLEY, R. M., 1976, *Probabilities and Metrics*, Lect. Notes Ser. (Aarhus) **45**.

[6] FOLLAND, G. B., 1999, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Wiley- Interscience.

[7] HUTCHINSON, J. E., 1981, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30**, 713-747.

[8] JESSEN, B., WINTNER, A., 1935, *Distribuition functions and the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1), 48-88.

[9] KRAVCHENKO, A. S., 2006, *Completeness of the space of separable measures in the Kantorovich-Rubinshteĭn metric*, Zibirsk Math. Zh. **47**:1, 85-96.

[10] LASOTA, A., YORKE, J. A., 1973, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **186**, 481-488.

[11] LEDRAPPIER, F., YOUNG, L. S., 1985, *The metric entropy of diffeomorphisms, Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's formula*, Ann. of Math. **122**, 509-539.

[12] MATTILA, P., 1995, *Geometry of Sets and Measures in Euclidian Spaces: Fractals and rectifiability*, Press Syndicate of the University of Cambridge.

[13] MENDIVIL, F., 1998, *A generaliation of IFS with probabilities to infinitely many maps*, Rocky Mountain J. Math. **28** (3), 1043-1051.

[14] PERES, Y., SOLOMYAK, B., 1996, *Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof*, Math. Res. Lett. **3**, 231-239.

[15] POLLICOTT, M., *Lectures on Fractals and Dimensional Theory*, http://www.warwick.ac.uk/~masdbl/dimension-total.pdf.

[16] QIAN, M., ZHU, S., 2001, *SRB measures and Pesin's entropy formula for endomorphism*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (4), 1453-1471.

[17] RAMS, M., 2003, *Absolute continuity of the SRB measure for non-linear fat baker maps*, Nonlinearity **16**, 1649-1655.

[18] RUDIN, W., 1976, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Publishing Co..

[19] SOLOMYAK, B., 1995, *On the random series* $\sum \pm\lambda^i$ *(an Erdös problem)*, Ann. of Math. **142**, 611-625.

[20] TSUJII, M., 2001, *Fat solenoidal attractors*, Nonlinearity **14**, 1011-1027.

[21] WALTERS, P., 1982, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer.

[22] YOUNG, L. S., 2002, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them*, J. Statist. Phys. **108**, 733-754.