# Estabilização de um sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV

por

Roberto Mamud Guedes da Silva

UFRJ

24 de fevereiro de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

# Estabilização de um sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV

por

**Roberto Mamud Guedes da Silva**

**Orientador: Ademir Fernando Pazoto**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

Ademir Fernando Pazoto

IM - UFRJ - Orientador.

---

Gustavo Alberto Perla Menzala

IM - UFRJ e LNCC/ MCT

---

Fágner Dias Araruna

UFPB

---

Adán José Corcho Fernández

IM - UFRJ - Suplente

# Agradecimentos

A Deus, Senhor de todas as coisas, por sempre ter me dado saúde, perseverança e coragem permitindo mais esta conquista.

Aos meus pais, por me darem amor, carinho e atenção, me apoiando e incentivando em todos os momentos de minha vida, não medindo esforços para que esta conquista tenha sido possível.

À minha família em geral, que, estando perto ou longe, sei que posso contar para sempre.

À Rozieli, por estar sempre comigo em todos os momentos, sejam eles bons ou ruins, sempre me confortando, consolando e apoiando. Sem ela, não conseguiria ultrapassar tantos obstáculos em nossas vidas. Além disso, não amadureceria tanto como pessoa em tão pouco tempo sem seu amor, carinho, atenção e compreensão.

Aos meus amigos que fiz desde a época da graduação, por sempre me proporcionarem grandes risadas e momentos de alegria e descontração. Além do apoio com palavras de incentivo e força que sempre demos um ao outro não importando a situação.

Ao Professor Ademir Fernando Pazoto, pelo apoio desde a época da graduação, sem o qual não teria amadurecido tanto academicamente em todos esses anos de orientação.

Aos Professores Fágner Dias Araruna, Gustavo Alberto Perla Menzala e Adán José Corcho Fernández, pela aceitação e colaboração à dissertação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Consideramos um sistema de Boussinesq do tipo KdV - KdV em um intervalo limitado. Introduzindo condições de contorno adequadas provamos a boa colocação e a estabilidade exponencial das soluções com dados iniciais pequenos.

Palavras Chaves: Sistema de Boussinesq, Estabilização, Korteweg - de Vries.

# Abstract

A Boussinesq system of KdV - KdV type posed on a bounded interval is considered. Introducing appropriate boundary conditions we prove the global well-posedness together with the exponential stability of the solutions issued from small initial data.

Key words: Boussinesq system, Stabilization, Korteweg - de Vries.

# Sumário

# Introdução

O sistema de Boussinesq clássico foi obtido pela primeira vez por Boussinesq para descrever a propagação de ondas (de pequena amplitude) na superfície de um canal de água. Atualmente, já se sabe que esse tipo de sistema, assim como suas generalizações, também são extremamente úteis quando se estuda a propagação de ondas em grandes lagos, oceanos, etc.

Recentemente, J. Bona, M. Chen and J.-C. Saut [5] obtiveram uma família de sistemas do tipo Boussinesq para descrever fenômenos da mesma natureza:

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + a\omega_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0 \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + c\eta_{xxx} - d\omega_{xxt} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, são escolhidos de acordo com cada situação física, porém devem satisfazer as seguintes relações

$$a + b = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) \quad , \quad c + d = \frac{1}{2}\left(1 - \theta^2\right) \geq 0, \quad \theta \in [0, 1].$$

No que se refere ao estudo matemático desses sistemas, apenas o problema de Cauchy tem sido sistematicamente estudado, o que inclui as propriedades de boa colocação [6]. Entretanto, o uso prático do sistema de Boussinesq não envolve somente o problema de valor inicial, problemas envolvendo condição de contorno aparecem com frequência nas aplicações.

Neste trabalho, onde vamos nos basear no artigo [22], estamos interessados no decaimento exponencial da energia total associada ao sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV (isto é, $a = c > 0$ e $b = d = 0$) em um intervalo finito $I = (0, L)$

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, \ \omega_x(0,t) = \alpha_0\eta_x(0,t), \ \omega_{xx}(0,t) = 0, \ t > 0 \\ \omega(L,t) = \alpha_2\eta(L,t), \ \omega_x(L,t) = -\alpha_1\eta_x(L,t), \ \omega_{xx}(L,t) = -\alpha_2\eta_{xx}(L,t), \ t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

e as condições iniciais

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x), \ 0 < x < L \\ \omega(x,0) = \omega_0(x), \ 0 < x < L. \end{cases} \tag{4}$$

Em (3), $\alpha_0, \alpha_1$ e $\alpha_2$ denotam constantes reais não negativas. Por simplicidade, assumimos que $a = c = 1$. Também é esperado que o sistema KdV-KdV admita soluções globais em $\mathbb{R}$ e que também possua boas propriedades de controle no toro [19].

Observemos que, multiplicando a primeira equação de (2) por $\eta$, a segunda equação por $\omega$, integrando em $(0, L)$ e somando os resultados, obtemos (formalmente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\alpha_2|\eta(L,t)|^2 - \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2 \\ &\quad -\frac{1}{3}|\omega(L,t)|^3 - \int_0^L (\eta\omega)_x\eta \, dx, \end{aligned}$$

onde $E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2)\, dx$ é a energia total associada ao sistema (2).

Portanto, é possível observar que as condições de contorno (3) atuam como um mecanismo dissipativo, pelo menos para o sistema linear, visto que os dois últimos termos não aparecem na derivada da energia do problema linear. Logo, surgem as seguintes perguntas naturais:

- $E(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$?
- Se este for o caso, podemos determinar uma taxa de decaimento?

O Teorema Central deste trabalho foi provado em [22] e nos dá uma resposta para estas perguntas e será enunciado a seguir.

**Teorema 0.0.1.** *Assuma que* $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ *e* $\alpha_2 = 1$. *Então, existem constantes* $\rho > 0$, $C > 0$ *e* $\mu > 0$, *tais que, para quaisquer* $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$ *com* $\|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2} \leq \rho$, *o sistema* (2) - (4) *admite uma única solução* $(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; [L^2(I)]^2) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; [H^1(I)]^2) \cap L^2(0,1; [H^1(I)]^2)$ *que satisfaz*

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[L^2(I)]^2} \leq Ce^{-\mu t}\|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2}, \ \forall t \geq 0, \tag{5}$$

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[H^1(I)]^2} \leq C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2}, \ \forall t > 0, \ \forall \alpha \in (0, \mu). \tag{6}$$

O principal interesse no Teorema acima está no fato de que, com as condições de contorno propostas em (3), a estabilização é válida para qualquer comprimento do domínio, ao passo que em [18] e [24], por exemplo, provou - se que, sob condições de contorno homogêneas, o decaimento das soluções do sistema linear não ocorre para alguns valores críticos do comprimento do intervalo $(0, L)$. Esse fato pode ser facilmente comprovado se considerarmos a mudança de variável $v = \eta + \omega$ e $u = \eta - \omega$. Nesse caso, o sistema (2) é transformado em um sistema acoplado de duas equações de Korteweg-de Vries não lineares:

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \frac{1}{4}[(v-u)(v+u)]_x + \frac{1}{4}(v-u)(v-u)_x = 0, \\ u_t - u_x - u_{xxx} + \frac{1}{4}[(v-u)(v+u)]_x - \frac{1}{4}(v-u)(v-u)_x = 0. \end{cases}$$

Logo, as condições de contorno $v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0$ e $u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0$, aparentemente mais naturais para esse tipo de sistema, garantem a existência de solução global, mas o decaimento exponencial da energia associada ao problema linear não ocorre para alguns valores de $L$.

A prova do Teorema 0.0.1 é obtida da seguinte maneira: Primeiro estudamos o sistema linear para deduzir algumas estimativas a priori e o decaimento exponencial das soluções na norma $L^2$. Estabelecemos o efeito regularizante de Kato usando o método dos multiplicadores, enquanto o decaimento exponencial é obtido com a ajuda de alguns argumentos de compacidade que reduz o trabalho a um problema espectral (Ver, por exemplo, [24]). Com essas estimativas, provamos a boa colocação global e a estabilidade exponencial das soluções do sistema não linear partindo de dados iniciais pequenos em $[L^2(I)]^2$. A idéia central consiste em combinar o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento das soluções em $[H^1(I)]^2$ para estabelecer uma estimativa pontual e, então, aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço

$$F := \{U = (\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; [H^1(I)]^2); \|e^{\mu t} U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; [H^1(I)]^2)} < \infty\},$$

onde $\mu > 0$, será determinado posteriormente.

Vale ressaltar que devido a falta de estimativas a priori na norma de $[L^2(I)]^2$, a questão da existência global de soluções é difícil de resolver. Entretanto, a existência global juntamente com a estabilidade exponencial podem ser estabelecidas para dados iniciais suficientemente pequenos. Para este propósito, o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento exponencial em $X_1$ são combinados em uma estimativa pontual no tempo.

A análise descrita acima foi organizada da seguinte maneira: No Capítulo 1, estão algumas definições e alguns resultados importantes que serão utilizados ao longo do trabalho. No Capítulo 2, estudamos o sistema linear para deduzirmos algumas estimativas a priori, o decaimento da solução deste sistema e o efeito regularizante de Kato. No Capítulo 3, voltamos ao problema inicial usando os resultados do Capítulo 2 para estabelecermos uma estimativa pontual que será a chave para provarmos a boa colocação do problema e a estabilidade exponencial das soluções com dados iniciais pequenos em $[L^2(I)]^2$. Provamos, então, o Teorema central deste trabalho.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados relevantes que serão úteis posteriormente.

## 1.1 Espaço das Distribuições

**Definição:** Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função contínua, onde $\Omega$ é um aberto. Definimos suporte de $\varphi$ como o fecho em $\Omega$ do conjunto dos pontos de $\Omega$ onde $\varphi$ não se anula. Vamos denotar o suporte de $\varphi$ por $supp(\varphi)$. Logo, temos

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

**Definição:** Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe $C^\infty$ em $\Omega$, que possuem suporte compacto em $\Omega$.

Dizemos que uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

***i)*** Existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tal que $supp(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in$

$\mathbb{N}$, e $supp(\varphi) \subset K$;

***ii)*** $\varphi_n^{(j)} \to \varphi^{(j)}$, uniformemente, para todo $j \in \mathbb{N}$, quando $n \to \infty$.

**Definição:** O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, será denotado por $D(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes. Denominamos distribuição sobre $\Omega$ a toda forma linear $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, contínua com respeito a topologia de $D(\Omega)$, isto é, se $(\varphi_n)$ é uma sequência em $D(\Omega)$ convergindo para $\varphi$ em $D(\Omega)$, então

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $\langle T, \varphi \rangle$ representa o valor da distribuição $T$ na função teste $\varphi$.

**Definição:** O conjunto das distribuições escalares sobre $\Omega$ é um espaço vetorial real, denotado por $D'(\Omega)$, denominado espaço das distribuições escalares sobre $\Omega$.

Dizemos que uma sequência de distribuições escalares $(T_n)$ converge para a distribuição $T$ em $D'(\Omega)$, quando

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \ \forall \varphi \in D(\Omega), \text{ quando } n \to \infty.$$

Com esta noção de convergência, $D'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico.

**Definição:** Dada uma distribuição $T \in D'(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denominamos derivada distribucional de ordem $|\alpha| \in \mathbb{N}$ de $T$, como sendo a distribuição $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

## 1.2 Espaços de Sobolev

**Definição:** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Denotamos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em $\Omega$, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em $\Omega$, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ quase sempre em } \Omega,$$

que, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|,$$

é um espaço de Banach. Em particular, se $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx.$$

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)$ em $L^p(\Omega)$ converge para $\varphi$ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, quando $n \to \infty$, para $1 \leq p \leq \infty$.

**Definição:** Se $p$ e $q$ são índices conjugados, isto é, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então temos que o dual topológico de $L^p(\Omega)$, denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$.

Além disso, se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável e se $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

**Lema 1.2.1.** ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Ver [7]. ■

**Definição:** Sejam $m \in \mathbb{N}^*$, e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem $m$, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$, para as quais suas derivadas de ordem $|\alpha|$, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ denota a derivada fraca ou distribucional. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

é um espaço de Banach e, quando $p = \infty$, definindo a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

temos que $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Temos ainda que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \leq p < \infty$, e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, se $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável e reflexivo, que é denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Com a estrutura topológica acima, temos $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

**Definição:** Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$ com $p$ e $q$ índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{D(\Omega)}$ pertence a $D'(\Omega)$. No caso $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

**Teorema 1.2.2.** ***(Teorema de Imersão)*** *Sejam $m \geq 1, 1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira regular.*

*Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*
*Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, onde $q \in [p, +\infty)$.*
*Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,*
*sendo as imersões acima contínuas.*

**Demonstração:** Ver [17]. ■

**Lema 1.2.3.** ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$, ou seja, existe uma direção $e_i$ tal que $|\pi_i(\Omega)| < C$, $C$ constante, onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a projeção sobre o eixo $e_i$. Então, existe uma constante $C_\Omega > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

*para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$.*

**Demonstração:** Ver [17]. ■

**Observação 1.2.1.** *Pela desigualdade de Poincaré, mostra-se que as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$.*

**Teorema 1.2.4.** ***(Rellich - Kondrachov)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira regular.*

*Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right[$;*

*Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$;*

*Se $n < 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c C^k(\overline{\Omega})$, onde $k$ é um inteiro não negativo tal que $k < m - (\frac{n}{2}) < k+1$,*

*onde as imersões acima são compactas.*

**Demonstração:** Ver [7]. ■

**Teorema 1.2.5.** ***(Teorema do Traço)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado de classe $C^{m+1}$ com fronteira $\Gamma$. Então existe uma aplicação traço $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$, de $H^m(\Omega)$ em $(L^2(\Omega))^m$, tal que*

***i)*** *Se $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(v) = v|_\Gamma, \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma, ..., \gamma_{m-1}(v) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}|_\Gamma$, onde $\nu$ é o vetor normal unitário exterior à fronteira $\Gamma$.*

***ii)*** *A imagem de $\gamma$ é o espaço $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

***iii)*** *O núcleo de $\gamma$ é $H_0^m(\Omega)$.*

**Demonstração:** Ver [12]. ■

## 1.3 Interpolação de Espaços de Hilbert

Sejam $X$ e $Y$ espaços de Hilbert separáveis, tais que $X \hookrightarrow Y$, com imersão contínua e densa. Sejam $(\cdot,\cdot)_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$ os produtos internos em $X$ e $Y$, respectivamente.

Indicaremos por $D(S)$, o conjunto das funções $u$, definidas em $X$, tais que a aplicação $v \mapsto (u,v)_X$, $v \in X$, é contínua na topologia induzida por $Y$. Então, $(Su,v)_Y = (u,v)_X$ define $S$, como sendo um operador ilimitado em $Y$, com domínio $D(S)$, denso em $Y$.

Assim, temos que $S$ é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir $S^\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular, usaremos $A := S^{\frac{1}{2}}$. O operador $A$ é auto-adjunto, positivo definido em $Y$, com domínio $X$ e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y, \ \ \forall \ u, v \in X.$$

**Definição:** Com as hipóteses acima, definimos o espaço intermediário

$$[X,Y]_\theta := D(A^{1-\theta}), \ \ \theta \in [0,1],$$

onde $D(A^{1-\theta})$ representa o domínio de $A^{1-\theta}$, munido da norma

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_Y + \|A^{1-\theta}u\|_Y\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Temos as seguintes propriedades:

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y$;

2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta$, $\ \forall \ u \in X$;

3. Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}$;

4. $[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Para a demonstração desses e outros fatos, ver [15].

## 1.4 Espaços $L^p(0,T;X)$

**Definição:** Sejam $X$ espaço de Banach e $T>0$. Denotamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0,T)$, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach. No caso $p=2$ e $X$ um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é, também, um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle u,v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt.$$

Se $p=\infty$, denotamos por $L^\infty(0,T;X)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertença a $L^\infty(0,T)$, que, munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Além disso, quando $X$ é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, temos que $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde $p$ e $q$ são índices conjugados e $X'$ é o dual de $X$.

**Teorema 1.4.1.** ***(Aubin-Lions)*** *Sejam $B_0, B$ e $B_1$, espaços de Banach tais que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

*onde $B_0$ e $B_1$ são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e $\hookrightarrow_c$, imersão compacta. Defina $W = \{u \in L^p(0,T;B_0); u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, onde $1<p,q<\infty$ e $T<\infty$,* *munido da norma*

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

*Então $W$ é um espaço de Banach e $W \hookrightarrow_c L^p(0,T;B)$.*

**Demonstração:** Ver [14]. ■

**Observação 1.4.1.** *Note que, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos o seguinte resultado:*

*Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W$, donde existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{n_k} \to u$, forte em $L^2(0,T;B)$, quando $k \to \infty$.*

**Definição:** Sejam $X$ espaço de Banach e $T > 0$. Então definimos o espaço das funções fracamente contínuas como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^\infty(0,T;X)$, tais que, $u : [0,T] \to X$ e a aplicação $t \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle$ é contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in X' = \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$. Este espaço será denotado por $C_\omega([0,T];X)$.

**Teorema 1.4.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach tais que, $X \hookrightarrow Y$ e $X$ reflexivo. Então temos*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_\omega([0,T];Y) = C_\omega([0,T];X).$$

**Demonstração:** Ver [27]. ■

## 1.5 Alguns Resultados Importantes

**Teorema 1.5.1.** ***(Ponto Fixo de Banach)*** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço fechado de $E$. Se $f : F \to F$ é uma contração, então existe* *um único $z \in F$, tal que $f(z) = z$.*

**Demonstração:** Ver [25]. ■

**Teorema 1.5.2.** *Seja $X$ um espaço normado e $\overline{B_1(0)} \subset X$, a bola fechada unitária. Então, $\overline{B_1(0)}$ é compacta se, e somente se, $X$ possui dimensão finita.*

**Demonstração:** Ver [7]. ■

**Teorema 1.5.3.** *Se $X$ é um espaço vetorial normado e $M$ é um subespaço de $X$ de dimensão finita, então $M$ é fechado.*

**Demonstração:** Ver [2]. ■

**Teorema 1.5.4.** ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam $(f_n)$ uma sequência de funções mensuráveis de $\Omega$ em $X$, $f : \Omega \to X$ e $g \in L^1(\Omega)$. Se*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{quase sempre em} \quad \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

*e*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \;\; \textit{quase sempre em} \quad \Omega,$$

*então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

**Demonstração:** Ver [10]. ■

**Lema 1.5.5.** ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Demonstração:** Ver [10]. ■

## 1.6 Teoria de Semigrupos

**Definição:** Seja $X$ um espaço de Banach. Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de $X$, se

***i)*** S(0) = I, onde I é a aplicação identidade do espaço X;

***ii)*** S(t+s) = S(t)S(s), $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que $S$ é de classe $C_0$, ou fortemente contínuo, se

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \ \ \forall x \in X.$$

Dizemos que $S$ é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

**Teorema 1.6.1.** *Se $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe $C_0$, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

**Demonstração:** Ver [23]. ∎

**Corolário 1.6.2.** *Seja $(S(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe $C_0$. Então, para cada $x \in X$, a aplicação*

$$t \mapsto S(t)x$$

*é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,*

$$\lim_{t \to s} S(t)x = S(s)x, \ \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

**Demonstração:** Ver [23]. ∎

**Definição:** Se $\|S(t)\| \leq 1, \ \forall t \geq 0$, dizemos que $S$ é um semigrupo de contrações.

**Definição:** O operador $A$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $S$.

**Observação 1.6.1.** *Note que $A$ é um operador linear e $D(A)$ é um subespaço de $X$.*

**Teorema 1.6.3.** *Seja $(S(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe $C_0$ e $A$ seu gerador infinitesimal. Então,*

***i)*** $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x, \ \forall x \in X;$

***ii)*** $\displaystyle \int_0^t S(s)x \, ds \in D(A), \ \forall x \in X, \text{ e } A\left(\int_0^t S(s)x \, ds\right) = S(t)x - x;$

***iii)*** *Para todo* $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ *e* $\displaystyle \frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax;$

***iv)*** *Para todo* $x \in D(A)$, $\displaystyle S(t)x - S(s)x = \int_0^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax \, d\tau.$

**Demonstração:** Ver [23]. ∎

**Corolário 1.6.4.** *Se $A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe $C_0$, então $A$ é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

**Demonstração:** Ver [23]. ∎

**Proposição 1.6.5.** *Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe $C_0$.*

**Demonstração:** Ver [11]. ■

**Definição:** Sejam $X$ espaço de Banach, $X^*$ o dual de $X$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre $X$ e $X^*$. Para cada $x \in X$, defina

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Note que, pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in X$.

**Definição:** Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X^*$, tal que $j(x) \in J(x), \ \forall x \in X$, ou seja, $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.

**Definição:** Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade $j$,

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, tal que $Im(\lambda I - A) = X$, então dizemos que $A$ é m-dissipativo.

**Observação:** Se $X$ é um espaço de Hilbert, então dizemos que $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se

$$Re\langle Ax, x \rangle \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

**Notação:** Dizemos que $A \in G(M, \omega)$, quando $A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe $C_0$, $S$, que satisfaz

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

**Teorema 1.6.6.** ***(Lumer - Phillips)***

*$A \in G(1, 0)$ se, e somente se, $A$ é m-dissipativo e possui domínio denso em $X$.*

**Demonstração:** Ver em [23]. ■

**Proposição 1.6.7.** *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear de* $X$*, espaço de Banach. Se* $\overline{D(A)} = X$*,* $A$ *e* $A^*$ *são dissipativos e* $A$ *é fechado (condição equivalente a* $A^{**} = A$*), então* $A \in G(1,0)$*.*

**Demonstração:** Ver [23]. ■

## 1.7 Problema de Cauchy Abstrato

Sejam $X$ espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe $C_0$, $(S(t))_{t\geq 0}$, e $f \in L^1(0,T;X)$.

Dado $u_0 \in D(A)$, o problema de Cauchy Abstrato consiste em determinar uma função $u(t)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \ \ t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

**Definição:** Dizemos que $u$ é solução clássica (ou forte) de (1.1) em $[0, +\infty)$, se $u$ satisfaz (1.1) e $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.

**Teorema 1.7.1.** *Se* $A \in G(M, \omega)$ *e* $u_0 \in D(A)$*, o problema* (1.1) *possui uma única solução clássica.*

**Demonstração:** Ver [11]. ■

Considere, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ \ t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{1.2}$$

**Definição:** Uma função $u : [0, +\infty) \to X$ é uma solução clássica de (1.2) em $[0, +\infty)$ se $u$ satisfaz (1.2) em $[0, +\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Uma função $u \in C([0, T]; X)$, dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))\,ds,$$

é chamada de mild solution ou solução generalizada de (1.2) em $[0, T]$.

Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0,\ u_0 \in X$, é a mild solution de (1.1).

**Teorema 1.7.2.** *Seja $f : [0, +\infty) \times X \to X$ uma função contínua em $t$. Suponha que, para cada $\tau > 0$, existe uma constante $L = L(\tau)$, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

*$\forall x, y \in X$ e $\forall t \in [0, \tau]$. Então, para cada $u_0 \in X$, (1.2) possui uma única mild solution $u \in C([0, \tau]; X)$. Além disso, a aplicação $u_0 \mapsto u$ é contínua de $X$ em $C([0, \tau]; X)$.*

**Demonstração:** Ver [11]. ■

# Capítulo 2

# O problema linear

Neste capítulo, estabelecemos uma série de estimativas a priori que serão usadas posteriormente. Para começar, vamos aplicar a Teoria Clássica de Semigrupos para provar a existência e unicidade de soluções do sistema linear

$$\eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$\omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0, \tag{2.2}$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0,\ \omega_x(0,t) = \alpha_0\eta_x(0,t),\ \omega_{xx}(0,t) = 0,\ t > 0 \\ \omega(L,t) = \alpha_2\eta(L,t),\ \omega_x(L,t) = -\alpha_1\eta_x(L,t),\ \omega_{xx}(L,t) = -\alpha_2\eta_{xx}(L,t),\ t > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x),\ 0 < x < L \\ \omega(x,0) = \omega_0(x),\ 0 < x < L. \end{cases} \tag{2.4}$$

Considere $X_0 = [L^2(I)]^2$, onde $I = (0,L)$ com seu produto interno usual e o operador

$$A : D(A) \subset X_0 \to X_0$$

com domínio

$$D(A) = \{(\eta,\omega) \in [H^3(I)]^2; \omega(0) = 0,\ \omega(L) = \alpha_2\eta(L),\ \omega_x(0) = \alpha_0\eta_x(0),$$
$$\omega_x(L) = -\alpha_1\eta_x(L),\ \omega_{xx}(0) = 0,\ \omega_{xx}(L) = -\alpha_2\eta_{xx}(L)\}$$

e definido por

$$A(\eta,\omega) = (-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}).$$

**Observação 2.0.1.** *Para descrever o domínio do operador $A$, temos que analisar o problema de determinar $(\eta,\omega)$ satisfazendo*

$$(\eta,\omega) \in X_0,\ A(\eta,\omega) = (f,g) \in X_0,$$

*com as condições de contorno acima. Uma análise semelhante a esta foi feita no Lema 2.0.8*

Assim, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.0.3.** *Se $\alpha_i \geq 0$, $i = 0,1,2$, então $A$ gera um semigrupo de contrações lineares de classe $C_0$, $(S(t))_{t\geq 0}$, em $X_0$.*

**Demonstração:** A idéia da demonstração é utilizar a Proposição 1.6.7.

Note que $\overline{D(A)} = X_0$, pois $\overline{C_c^\infty(I)} = L^2(I)$, $C_c^\infty(I) \times C_c^\infty(I) \subset D(A)$ e $\overline{C_c^\infty(I) \times C_c^\infty(I)} = L^2(I) \times L^2(I) = X_0$. Vamos provar agora que $A$ e $A^*$ são dissipativos.

Primeiro, vamos definir $D(A^*)$ e $A^*$. Note que, por definição, $A^*$ é tal que $\langle y, Ax\rangle = \langle A^*y, x\rangle, \forall x \in D(A)$ e $\forall y \in D(A^*)$. Logo, dados $(f,g) \in D(A)$ e $(u,v) \in X_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (u,v), A(f,g)\rangle_{X_0} &= \langle (u,v), (-g_x - g_{xxx}, -f_x - f_{xxx})\rangle_{X_0} \\
&= \langle u, -g_x - g_{xxx}\rangle_{L^2(I)} + \langle v, -f_x - f_{xxx}\rangle_{L^2(I)} \\
&= -\int_0^L u g_x dx - \int_0^L u g_{xxx} dx - \int_0^L v f_x dx - \int_0^L v f_{xxx} dx \\
&= -(gu|_0^L - \int_0^L g u_x dx) - (g_{xx} u|_0^L - \int_0^L g_{xx} u_x dx) \\
&\quad -(fv|_0^L - \int_0^L f v_x dx) - (f_{xx} v|_0^L - \int_0^L f_{xx} v_x dx) \\
&= -g(L)u(L) + \int_0^L g u_x dx - g_{xx}(L)u(L) + (g_x u_x|_0^L \\
&\quad - \int_0^L g_x u_{xx} dx) - f(L)v(L) + \int_0^L f v_x dx - f_{xx} v|_0^L \\
&\quad +(f_x v_x|_0^L - \int_0^L f_x v_{xx} dx) \\
&= -g(L)u(L) + \int_0^L g u_x dx - g_{xx}(L)u(L) + g_x u_x|_0^L \\
&\quad -(g u_{xx}|_0^L - \int_0^L g u_{xxx} dx) - f(L)v(L) + \int_0^L f v_x dx \\
&\quad -f_{xx} v|_0^L + f_x v_x|_0^L - (f v_{xx}|_0^L - \int_0^L f v_{xxx} dx) \\
&= \int_0^L g(u_x + u_{xxx}) dx + \int_0^L f(v_x + v_{xxx}) dx - g(L)u(L) \\
&\quad -g_{xx}(L)u(L) + g_x u_x|_0^L - g(L)u_{xx}(L) - f(L)v(L) \\
&\quad -f_{xx} v|_0^L + f_x v_x|_0^L - f(L)v_{xx}(L) + f(0)v_{xx}(0).
\end{aligned}$$

Como $(f,g) \in D(A)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (u,v), A(f,g)\rangle_{X_0} &= \int_0^L g(u_x + u_{xxx}) dx + \int_0^L f(v_x + v_{xxx}) dx - \alpha_2 f(L)u(L) \\
&\quad +\alpha_2 f_{xx}(L)u(L) - \alpha_1 f_x(L)u_x(L) - \alpha_0 f_x(0)u_x(0) - \alpha_2 f(L)u_{xx}(L) \\
&\quad -f(L)v(L) - f_{xx} v|_0^L + f_x(L)v_x(L) - f_x(0)v_x(0) - f(L)v_{xx}(L) \\
&\quad +f(0)v_{xx}(0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{(u,v) \in [H^3(I)]^2;\ v(0)=0, v(L)=\alpha_2 u(L),\ v_x(0) = -\alpha_0 u_x(0), \\ & \quad v_x(L) = \alpha_1 u_x(L),\ v_{xx}(0)=0,\ v_{xx}(L) = -\alpha_2 u_{xx}(L) - 2\alpha_2 u(L)\} \end{aligned}$$

e

$$A^* : D(A^*) \subset X_0 \to X_0$$

é dado por

$$A^*(u,v) = (v_x + v_{xxx}, u_x + u_{xxx}).$$

Por um processo análogo a esse, podemos mostrar que

$$A^{**} = A,$$

ou seja, $A$ é fechado.

Agora vamos mostrar que $A$ é dissipativo. Seja $(\eta, \omega) \in D(A)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle A(\eta,\omega), (\eta,\omega)\rangle_{X_0} &= \langle(-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}), (\eta,\omega)\rangle_{X_0} \\ &= \langle -\omega_x - \omega_{xxx}, \eta\rangle_{L^2(I)} + \langle -\eta_x - \eta_{xxx}, \omega\rangle_{L^2(I)} \\ &= -\int_0^L \omega_x \eta dx - \int_0^L \omega_{xxx}\eta dx - \int_0^L \eta_x \omega dx - \int_0^L \eta_{xxx}\omega dx \\ &= -(\omega\eta|_0^L - \int_0^L \omega\eta_x dx) - (\omega_{xx}\eta|_0^L - \int_0^L \omega_{xx}\eta_x dx) \\ & \quad -\int_0^L \eta_x \omega dx - (\eta_{xx}\omega|_0^L - \int_0^L \eta_{xx}\omega_x dx) \\ &= -\omega(L)\eta(L) - \omega_{xx}(L)\eta(L) + (\omega_x\eta_x|_0^L - \int_0^L \omega_x \eta_{xx} dx) \\ & \quad -\omega(L)\eta_{xx}(L) + \int_0^L \eta_{xx}\omega_x dx \\ &= -\omega(L)\eta(L) - \omega_{xx}(L)\eta(L) + \omega_x(L)\eta_x(L) - \omega_x(0)\eta_x(0) \\ & \quad -\omega(L)\eta_{xx}(L) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\alpha_2|\eta(L)|^2 + \alpha_2\eta_{xx}(L)\eta(L) - \alpha_1|\eta_x(L)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0)|^2 \\
&\quad -\alpha_2\eta(L)\eta_{xx}(L) \\
&= -\alpha_2|\eta(L)|^2 - \alpha_1|\eta_x(L)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0)|^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, temos que para quaisquer $(u, v) \in D(A^*)$,

$$\langle A^*(u, v), (u, v)\rangle = -\alpha_2|u(L)|^2 - \alpha_1|u_x(L)|^2 - \alpha_0|u_x(0)|^2 \leq 0.$$

Assim, $A$ e $A^*$ são dissipativos. Portanto, como $\overline{D(A)} = X_0$ e $A$ é fechado, temos que $A \in G(1, 0)$. ■

Como consequência do resultado acima, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 2.0.4.** *Se* $(\eta_0, \omega_0) \in D(A)$*, o sistema* (2.1) - (2.4) *possui uma única solução clássica. Se* $(\eta_0, \omega_0) \in X$*, o sistema* (2.1) - (2.4) *possui uma única mild solution.*

**Demonstração:** Observe que, com as notações anteriores, o sistema (2.1) - (2.4) pode ser reescrito como

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU}{dt}(t) = AU(t), \quad t > 0 \\
U(0) = U_0,
\end{cases}
$$

onde $U = (\eta, \omega)$ e $U_0 = (\eta_0, \omega_0)$. Logo, o resultado é obtido aplicando a Proposição 2.0.3, o Teorema 1.7.1 e o Teorema 1.7.2 ($f \equiv 0$). ■

A próxima Proposição nos fornece estimativas úteis para a solução de (2.1) - (2.4). As duas primeiras são estimativas de energia padrão, enquanto a última revela o efeito regularizante de Kato.

**Proposição 2.0.5.** *Sejam* $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$ *e* $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0)$. *Então, para todo* $T > 0$,

$$\int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2)dx - \int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |\omega(x,T)|^2)dx$$
$$= 2\int_0^T \{\alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\}dt\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{T}{2}\int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2)dxdt$$
$$+ \int_0^T (T-t)\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\}dx. \tag{2.6}$$

*Se, além disso,* $\alpha_2 = 1$, *então* $(\eta, \omega) \in L^2(0,T;[H^1(I)]^2)$ *e*

$$\|(\eta,\omega)\|_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} \leq C\|(\eta_0,\omega_0)\|_{X_0}, \tag{2.7}$$

*onde* $C = C(T)$ *é uma constante positiva.*

**Demonstração:** Seja $(\eta_0, \omega_0) \in D(A)$. Multiplicando a equação (2.1) por $\eta$, a equação (2.2) por $\omega$, somando os resultados e integrando em $(0,L)\times(0,T)$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L\int_0^T \eta_t\eta\, dtdx + \int_0^L\int_0^T \omega_x\eta\, dtdx + \int_0^L\int_0^T \omega_{xxx}\eta\, dtdx \\
&\quad + \int_0^L\int_0^T \omega_t\omega\, dtdx + \int_0^L\int_0^T \eta_x\omega\, dtdx + \int_0^L\int_0^T \eta_{xxx}\omega\, dtdx \\
&= \int_0^L\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\eta|^2\, dtdx + (\int_0^T \omega\eta|_0^L\, dt - \int_0^T\int_0^L \omega\eta_x\, dxdt) \\
&\quad +(\int_0^T \omega_{xx}\eta|_0^L\, dt - \int_0^T\int_0^L \omega_{xx}\eta_x\, dxdt) + \int_0^L\int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\omega|^2\, dtdx \\
&\quad + \int_0^L\int_0^T \eta_x\omega\, dtdx + (\int_0^T \eta_{xx}\omega|_0^L\, dt - \int_0^T\int_0^L \eta_{xx}\omega_x\, dxdt) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2|)|_0^T\, dx + \int_0^T \omega\eta|_0^L\, dt - (\int_0^T \omega_x\eta_x|_0^L\, dt \\
&\quad - \int_0^T\int_0^L \omega_x\eta_{xx}\, dxdt) - \int_0^T\int_0^L \eta_{xx}\omega_x\, dxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |\omega(x,T)|^2|)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2|)\,dx \\
&\quad + \int_0^T \omega(L,t)\eta(L,t)\,dt - \int_0^T \omega_x(L,t)\eta_x(L,t)\,dt + \int_0^T \omega_x(0,t)\eta_x(0,t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |\omega(x,T)|^2|)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2|)\,dx \\
&\quad + \int_0^T \alpha_2|\eta(L,t)|^2\,dt + \int_0^T \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2\,dt + \int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\,dt.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2|)\,dx - \int_0^L (|\eta(x,T)|^2 + |\omega(x,T)|^2|)\,dx) = \\
\int_0^T \alpha_2|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\,dt,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.5). Para provar (2.6), multiplicamos (2.1) por $(T-t)\eta$, (2.2) por $(T-t)\omega$, somamos as duas identidades e integramos em $(0,L)\times(0,T)$. Logo, se $(\eta_0,\omega_0)\in D(A)$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_t\eta\,dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\omega_x\eta\,dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\omega_{xxx}\eta\,dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L (T-t)\omega_t\omega\,dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_x\omega\,dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_{xxx}\omega dxdt = 0.
\end{aligned}
$$

E, então, como

$$
\int_0^T (T-t)\eta_t\eta\,dt = \int_0^T (T-t)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\eta|^2\,dt = \frac{1}{2}|\eta|^2(T-t)|_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T |\eta|^2\,dt,
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= (\frac{1}{2}\int_0^L |\eta|^2(T-t)|_0^T\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2\,dtdx) + (\int_0^T (T-t)\omega\eta|_0^L\,dt \\
&\quad - \int_0^L\int_0^T (T-t)\omega\eta_x\,dtdx) + (\int_0^T (T-t)\omega_{xx}\eta|_0^L\,dt - \int_0^L\int_0^T (T-t)\omega_{xx}\eta_x\,dtdx) \\
&\quad +(\frac{1}{2}\int_0^L |\omega|^2(T-t)|_0^T\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\omega|^2\,dtdx) + \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_x\omega\,dxdt \\
&\quad +(\int_0^T (T-t)\eta_{xx}\omega|_0^L\,dt - \int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_{xx}\omega_x\,dxdt)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{T}{2}\int_0^L |\eta_0|^2+|\omega_0|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2+|\omega|^2\,dtdx\\
&\quad+\int_0^T (T-t)\omega(L,t)\eta(L,t)\,dt+\int_0^T (T-t)\omega_{xx}(L,t)\eta(L,t)\,dt\\
&\quad-\left(\int_0^T (T-t)\omega_x\eta_x|_0^L\,dt-\int_0^T\int_0^L (T-t)\omega_x\eta_{xx}\,dxdt\right)\\
&\quad+\int_0^T (T-t)\eta_{xx}(L,t)\omega(L,t)\,dt-\int_0^T\int_0^L (T-t)\eta_{xx}\omega_x\,dxdt\\
&= -\frac{T}{2}\int_0^L |\eta_0|^2+|\omega_0|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T |\eta|^2+|\omega|^2\,dtdx\\
&\quad+\int_0^T (T-t)\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2-\alpha_2\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\\
&\quad+\alpha_2\eta(L,t)\eta_{xx}(L,t)\}\,dt.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{T}{2}\int_0^L (|\eta_0|^2+|\omega_0|^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T (|\eta|^2+|\omega|^2)\,dtdx\\
&+ \int_0^T (T-t)\{\alpha_2|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0)|^2\}\,dt,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.6).

Finalmente, vamos provar (2.7).

Multiplicando (2.1) por $x\omega$, (2.2) por $x\eta$, integrando em $(0,L)\times(0,T)$ e somando os resultados, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^T x\eta_t\omega\,dtdx+\int_0^L\int_0^T x\omega_x\omega\,dtdx+\int_0^L\int_0^T x\omega_{xxx}\omega\,dtdx\\
&+\int_0^L\int_0^T x\omega_t\eta\,dtdx+\int_0^L\int_0^T x\eta_x\eta\,dtdx+\int_0^L\int_0^T x\eta_{xxx}\eta\,dtdx=0.
\end{aligned}
$$

Como $\omega_x\omega=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|\omega|^2$, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^L\int_0^T x(\eta\omega)_t\,dtdx &+ \int_0^L\int_0^T \frac{x}{2}(|\omega|^2+|\eta|^2)_x\,dtdx\\
&+ \int_0^L\int_0^T x(\omega_{xxx}\omega+\eta_{xxx}\eta)\,dtdx=0. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, fazendo integrações por partes e usando a fórmula

$$\omega_{xxx}\omega = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_{xx}\omega - \frac{1}{2}|\omega_x|^2),$$

obtemos

$$\int_0^L \int_0^T x(\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta)\, dtdx = \int_0^T \int_0^L x\frac{\partial}{\partial x}(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2}(|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2))\, dtdx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T x[\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2}(|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2)]_0^L\, dt - \int_0^T \int_0^L (\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2}|\omega_x|^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}|\eta_x|^2)\, dxdt \\
&= \int_0^T L[\omega_{xx}(L,t)\omega(L,t) + \eta_{xx}(L,t)\eta(L,t) - \frac{1}{2}|\omega_x(L,t)|^2 - \frac{1}{2}|\eta_x(L,t)|^2]\, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L (\omega_{xx}\omega + |\omega_x|^2 + \eta_{xx}\eta + |\eta_x|^2 - \frac{3}{2}|\omega_x|^2 - \frac{3}{2}|\eta_x|^2)\, dtdx \\
&= \int_0^T (-L\alpha_2^2\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t) + L\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t) - \frac{L}{2}\alpha_1^2|\eta_x(L,t)|^2 \\
&\quad -\frac{L}{2}|\eta_x(L,t)|^2)\, dt - \int_0^T (\omega_x\omega)|_0^L\, dt - \int_0^T (\eta_x\eta)|_0^L\, dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L \frac{3}{2}(|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2)\, dtdx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2)\, dtdx + \int_0^T L(1-\alpha_2^2)\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)\, dt \\
&\quad - \int_0^T \frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)|\eta_x(L,t)|^2\, dt - \int_0^T \omega_x(L,t)\omega(L,t)\, dt - \int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)\, dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_x(0,t)\eta(0,t)\, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2)\, dtdx + L(1-\alpha_2^2)\int_0^T \eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)\, dt \\
&\quad -\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T |\eta_x(L,t)|^2\, dt + \int_0^T \alpha_1\eta_x(L,t)\alpha_2\eta(L,t)\, dt - \int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)\, dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_x(0,t)\eta(0,t)\, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2)\, dtdx + (\alpha_1\alpha_2 - 1)\int_0^T \eta_x(L,t)\eta(L,t)\, dt \\
&\quad + \int_0^T \eta_x(0,t)\eta(0,t)\, dt - \frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T |\eta_x(L,t)|^2\, dt \\
&\quad + L(1-\alpha_2^2)\int_0^T \eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)\, dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x(\omega_{xxx}\omega+\eta_{xxx}\eta)\,dtdx &= \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|\omega_x|^2+|\eta_x|^2)\,dtdx\\ +(\alpha_1\alpha_2-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)\,dt &+ \int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)\,dt\\ -\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2\,dt &+ L(1-\alpha_2^2)\int_0^T\eta_{xx}(L,t)\eta(L,t)\,dt. \quad (2.9)\end{aligned}$$

Note que, pela Desigualdade de Young e pelo Teorema 1.2.5, temos que, para todo $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt &= \int_0^T(\sqrt(\delta)\eta(0,t))\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\eta_x(0,t)\right)\,dt\\ &\le \int_0^T\left(\frac{\delta\eta(0,t)^2}{2}+\frac{\eta_x^2(0,t)}{2\delta}\right)\,dt\\ &\le C_I\delta\int_0^L\int_0^T(\eta^2+\eta_x^2)\,dtdx+\frac{1}{2\delta}\int_0^T\eta_x^2(0,t)\,dt,(2.10)\end{aligned}$$

onde $C_I$ é uma constante positiva. Logo, tomando $\delta>0$ de tal forma que $C_I\delta\le\frac{1}{2}$, temos

$$\int_0^T\eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt\le\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(\eta^2+\eta_x^2)\,dxdt+\frac{1}{2\delta}\int_0^T\eta_x^2(0,t)\,dt$$

e, assumindo que $\alpha_2=1$, de (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T x(\omega_{xxx}\omega+\eta_{xxx}\eta)\,dtdx &= \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|\omega_x|^2+|\eta_x|^2)\,dtdx\\ +(\alpha_1-1)\int_0^T\eta_x(L,t)\eta(L,t)\,dt &+ \int_0^T\eta_x(0,t)\eta(0,t)\,dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Logo, por (2.8), temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^L x(\eta\omega)_t\,dxdt+\int_0^T\int_0^L\frac{x}{2}(\omega^2+\eta^2)_x\,dxdt+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt\\ &+(\alpha_1-1)\int_0^T\eta(L,t)\eta_x(L,t)\,dt+\int_0^T\eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt-\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2\,dt=0,\end{aligned}$$

donde

$$\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt=-\int_0^T\int_0^L x(\eta\omega)_t\,dxdt-\int_0^T\int_0^L\frac{x}{2}(\omega^2+\eta^2)_x\,dxdt$$
$$-(\alpha_1-1)\int_0^T\eta(L,t)\eta_x(L,t)\,dt-\int_0^T\eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt+\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_x(L,t)|^2\,dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt &= -\int_0^L(x\eta\omega)|_0^T\,dx-\int_0^T\frac{x}{2}(\omega^2+\eta^2)|_0^L\,dt\\ +\int_0^T\int_0^L\frac{\omega^2+\eta^2}{2}\,dxdt &- (\alpha_1-1)\int_0^T\eta(L,t)\eta_x(L,t)\,dt-\int_0^T\eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt\\ +\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T\eta_x^2(L,t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora, vamos estimar os termos que aparecem no lado direito da identidade acima.

- $\displaystyle\int_0^T\int_0^L\left(\frac{\omega^2+\eta^2}{2}\right)dxdt\leq\int_0^T E(0)\,dt=TE(0),$

onde

$$E(t)=\int_0^L\left(\frac{\omega^2+\eta^2}{2}\right)dx$$

é a energia total associada ao sistema;

- $\displaystyle -\int_0^T\frac{x}{2}(\omega^2+\eta^2)|_0^L\,dt=\frac{-L}{2}\int_0^T(\omega^2(L,t)+\eta^2(L,t))\,dt=-L\int_0^T\eta^2(L,t)\,dt,$

pelas condições de fronteira;

- $$\begin{aligned}-\int_0^L(x\eta\omega)|_0^T\,dx &= -\int_0^L x\eta(x,T)\omega(x,T)\,dx+\int_0^L x\eta_0(x)\omega_0(x)\,dx\\ &\leq L\int_0^L|\eta(x,T)||\omega(x,T)|\,dx+L\int_0^L\left(\frac{\eta_0^2+\omega_0^2}{2}\right)dx\\ &\leq L\int_0^L\left(\frac{|\eta(x,T)|^2+|\omega(x,T)|^2}{2}\right)dx+L\int_0^L\left(\frac{\eta_0^2+\omega_0^2}{2}\right)dx\\ &\leq LE(T)+L\int_0^L\left(\frac{\eta_0^2+\omega_0^2}{2}\right)dx\leq 2LE(0),\end{aligned}$$

pois a energia é dissipativa;

$$\bullet -(\alpha_1 - 1)\int_0^T \eta(L,t)\eta_x(L,t)\,dt \;\leq\; |\alpha_1 - 1|\int_0^T |\eta(L,t)||\eta_x(L,t)|\,dt$$
$$\leq\; \frac{|\alpha_1 - 1|}{2}\int_0^T (|\eta(L,t)|^2 + |\eta_x(L,t)|^2)\,dt.$$

Procedendo como em (2.10), temos

$$\begin{aligned}
\bullet -\int_0^T \eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt &\leq \int_0^T |\eta(0,t)\eta_x(0,t)|\,dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta|^2 + |\eta_x|^2)\,dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta_x|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |\eta|^2\,dxdt \\
&\quad + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2\,dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2\,dxdt + \int_0^T E(0)\,dt + \frac{1}{2\delta}\int_0^T |\eta_x(0,t)|^2\,dt \\
&= TE(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta\alpha_0}\int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\,dt.
\end{aligned}$$

Assim, os termos de fronteira (em $x$) podem ser estimados como segue

$$\begin{aligned}
&\frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T \eta_x^2(L,t)\,dt - (\alpha_1 - 1)\int_0^T \eta(L,t)\eta_x(L,t)\,dt - \int_0^T \eta(0,t)\eta_x(0,t)\,dt \\
&-\int_0^T \frac{x}{2}(\omega^2 + \eta^2)|_0^L\,dt \\
\leq\; &\frac{L}{2}\frac{(\alpha_1^2+1)}{\alpha_1}\int_0^T \alpha_1\eta_x^2(L,t)\,dt + \frac{|\alpha_1 - 1|}{2}\int_0^T |\eta(L,t)|^2\,dt \\
&+\frac{|\alpha_1 - 1|}{2\alpha_1}\int_0^T \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2\,dt + TE(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2\,dxdt \\
&+\frac{1}{2\delta\alpha_0}\int_0^T \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\,dt \\
\leq\; &TE(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \eta_x^2\,dxdt + K\int_0^T (|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 \\
&+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2)\,dt,
\end{aligned}$$

onde $K := max\{\frac{L(\alpha_1^2+1)}{2\alpha_1}, \frac{|\alpha_1-1|}{2\alpha_1}, \frac{|\alpha_1-1|}{2}, \frac{1}{2\delta\alpha_0}\} > 0$. Combinando as estimativas acima com (2.11), obtém-se

$$\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt \leq 2LE(0)+TE(0)+TE(0)+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L\eta_x^2\,dxdt$$
$$+K\int_0^T(|\eta(L,t)|^2+\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\alpha_0|\eta_x(0,t)|^2)\,dt.$$

Logo, por (2.5), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt+ &\leq (2L+2T)E(0)+\frac{K}{2}\int_0^L(|\eta_0|^2+|\omega_0|^2)\,dx\\ &\quad -\frac{K}{2}\int_0^L(|\eta(x,T)|^2+|\omega(x,T)|^2)\,dx\\ &\leq (2L+2T+K)E(0).\end{aligned}$$

Tomando $C_1 := (2L+2T+K)$, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_0^T\int_0^L(\omega_x^2+\eta_x^2)\,dxdt \leq C_1E(0) = C_1\int_0^L\left(\frac{|\eta_0|^2+|\omega_0|^2}{2}\right)\,dx. \tag{2.12}$$

Portanto, temos, por (2.6) e (2.12), que

$$\begin{aligned}\|(\eta,\omega)\|^2_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} &= \int_0^T\|(\eta,\omega)\|^2_{[H^1(I)]^2}\,dt = \int_0^T\|\eta\|^2_{H^1(I)}\,dt+\int_0^T\|\omega\|^2_{H^1(I)}\,dt\\ &= \int_0^T\int_0^L(|\eta|^2+|\omega|^2)\,dxdt+\int_0^T\int_0^L(|\eta_x|^2+|\omega_x|^2)\,dxdt\\ &= T\int_0^L(|\eta_0|^2+|\omega_0|^2)\,dx-2\int_0^T(T-t)\{|\eta(L,t)|^2\\ &\quad +\alpha_1|\eta_x(L,t)|^2+\ \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2\}\,dt\\ &\quad +\int_0^T\int_0^L(|\eta_x|^2+|\omega_x|^2)\,dxdt\\ &\leq T\int_0^L|\eta_0|^2+|\omega_0|^2\,dx+C_1\int_0^L\left(\frac{|\eta_0|^2+|\omega_0|^2}{2}\right)\,dx\\ &= \left(T+\frac{C_1}{2}\right)\int_0^L\left(|\eta_0|^2+|\omega_0|^2\right)\,dx,\end{aligned}$$

ou seja, se $C := T+\frac{C_1}{2}$, então temos que

$$\|(\eta,\omega)\|_{L^2(0,T;[H^1(I)]^2)} \leq \sqrt{C}\|(\eta_0,\omega_0)\|_{X_0}.$$

Pela densidade de $D(A)$ em $X_0$, o resultado se estende para $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$ arbitrário. De fato, se $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, existe uma sequência $(\eta_0^n, \omega_0^n) \subset D(A)$, tal que $(\eta_0^n, \omega_0^n) \to (\eta_0, \omega_0)$ em $X_0$, quando $n \to +\infty$. Considerando $(\eta^n, \omega^n)$ a sequência das soluções associadas a $(\eta_0^n, \omega_0^n)$, a desigualdade acima nos diz que tal sequência é de Cauchy em $L^2(0, T; [H^1(I)]^2)$ e, pela identidade de energia, temos o mesmo resultado em $C([0, T]; X_0)$. Com isso, podemos passar o limite no sistema linear e obter uma função $(\tilde{\eta}, \tilde{\omega}) \in C([0, T]; X_0) \cap L^2(0, T; [H^1(I)]^2)$ que é solução fraca do modelo. Logo, por unicidade do limite, $(\tilde{\eta}, \tilde{\omega}) = (\eta, \omega)$ (Ver [3]). Assim, também podemos passar o limite em (2.5) - (2.7) e obter o resultado. O mesmo argumento, juntamente com os argumentos usados em [4], nos permitem justificar que os termos de fronteira estão bem definidos. ■

Agora estamos prontos para provar a estabilidade exponencial do sistema linear.

**Teorema 2.0.6.** *Assuma que $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 = 1$. Então, existem constantes $C_0$ e $\mu_0 > 0$, tais que para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, a solução de* (2.1) - (2.4) *satisfaz*

$$\|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_0} \leq C_0 e^{-\mu_0 t} \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}, \ \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.13}$$

**Demonstração:** Primeiramente, observe que basta provar que exite $C > 0$, tal que

$$\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}^2 \leq C \int_0^T (|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2)\, dt. \tag{2.14}$$

De fato, provado isso, temos que se denotarmos $A(t) := |\eta(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2 > 0, \ \ t \geq 0$, então

$$\begin{cases} E'(t) = -A(t), \ \ A(t) > 0 \\ E(0) \leq C \int_0^T A(t)\, dt, \end{cases}$$

onde $E(t)$ denota a energia associada ao sistema linear. Logo, integrando em $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned} E(T) - E(0) &= -\int_0^T A(t)\,dt \\ &\leq -\frac{E(0)}{C}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(T) \leq E(0) - \frac{E(0)}{C} \leq E(0) - \frac{E(T)}{C},$$

donde

$$\left(1 + \frac{1}{C}\right) E(T) \leq E(0),$$

i.e.,

$$E(T) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right) E(0).$$

Assim, o semigrupo decai exponencialmente. Para ver este fato vamos usar o seguinte resultado:

*Se existem $T > 0$ e $\gamma \in (0,1)$, tais que $E(T) < \gamma E(0)$, então*

$$E(t) \leq \frac{1}{\gamma} E(0) e^{(\frac{\ln\gamma}{T})t}, \ \ t \geq 0.$$

De fato, é fácil ver, por indução, que $E(kT) < \gamma^k E(0)$, $k \in \mathbb{N}$ e como $E(t) \leq E(kT)$, para $kT < t < (k+1)T$, temos que $E(t) \leq E(kT) \leq \gamma^k E(0)$. Assim, como $kT < t < (k+1)T$, temos $\frac{t}{T} < k+1$, isto é, $\frac{t}{T} - 1 < k$, donde $\gamma^k < \gamma^{(\frac{t}{T}-1)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(kT) \leq \gamma^k E(0) < \gamma^{(\frac{t}{T}-1)} E(0) = \frac{1}{\gamma} E(0) \gamma^{\frac{t}{T}} \\ &= \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln(\gamma^{\frac{t}{T}})} = \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln(\gamma^{\frac{1}{T}})t} = \frac{1}{\gamma} E(0) e^{(\frac{1}{T}\ln\gamma)t}, \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado.

Agora, como $\frac{C}{C+1} \in (0,1)$, então $ln(\frac{C}{C+1}) < 0$. Logo, $\exists\ \mu_0 > 0$, tal que $\frac{1}{T}\ln(\frac{C}{C+1}) = -\mu_0$ e, pelo resultado acima, temos que

$$\begin{aligned} E(t) &= \|(\eta(t),\omega(t))\|^2_{X_0} \leq \left(1+\frac{1}{C}\right)E(0)e^{-\mu_0 t} \\ &= \left(1+\frac{1}{C}\right)\|(\eta_0,\omega_0)\|^2_{X_0}e^{-\mu_0 t}, t \geq 0, \end{aligned}$$

o que prova o Teorema 2.0.6.

Vamos provar (2.14) em três passos:

**PASSO 1: (Argumento de Compacidade-Unicidade)**

Vamos argumentar por contradição, aplicando o Argumento de Compacidade - Unicidade (Ver [13]). Note que se (2.14) fosse falso, exitiria uma sequência de dados iniciais $(\eta_0^n, \omega_0^n)$ em $X_0$, tal que

$$\begin{aligned} \|(\eta_0^n,\omega_0^n)\|^2_{X_0} &= \int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |\omega_0^n|^2)\,dx \\ &> n\int_0^T \{|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\}\,dt, \quad (2.15) \end{aligned}$$

com

$$\|(\eta_0^n,\omega_0^n)\|_{X_0} = 1,\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Logo, por (2.7) e (2.15), temos que

$$\|(\eta^n,\omega^n)\|_{L^2((0,T);[H^1(I)]^2)} \leq C\|(\eta_0^n,\omega_0^n)\|_{X_0} = C,$$

ou seja,

$$(\eta^n,\omega^n) = S(\cdot)(\eta_0^n,\omega_0^n) \text{ é limitada em } L^2(0,T;[H^1(I)]^2).$$

Note que por (2.1) e (2.2),

$$\begin{aligned} \eta_t^n &= -\omega_x^n - \omega_{xxx}^n \\ \omega_t^n &= -\eta_x^n - \eta_{xxx}^n. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que dada uma função $u \in L^2(0,T;H_0^1(I))$, temos $u_x(\cdot,t) \in L^2(I)$, $u_{xx}(\cdot,t) \in H^{-1}(I)$ e $u_{xxx}(\cdot,t) \in H^{-2}(I)$. Logo, a sequência

$$(\eta_t^n, \omega_t^n) \text{ é limitada em } L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2).$$

Assim, como $[H^1(I)]^2 \hookrightarrow_c [L^2(I)]^2 \hookrightarrow [H^{-2}(I)]^2$ e $[H^1(I)]^2$ e $[H^{-2}(I)]^2$ são reflexivos, temos que se denotarmos

$$W = \{(\eta,\omega) \in L^2((0,T);[H^1(I)]^2);(\eta_t,\omega_t) \in L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2)\},$$

então $W \hookrightarrow_c L^2([0,T];X_0)$, pelo Teorema de Aubin-Lions. Logo, o conjunto $\{(\eta^n,\omega^n); n \in \mathbb{N}\} \subset W$ é relativamente compacto em $L^2(0,T;X_0)$ e, então, $(\eta^n,\omega^n)$ possui uma subsequência, que vamos continuar denotando por $(\eta^n,\omega^n)$, tal que

$$(\eta^n,\omega^n) \to (\eta,\omega) \text{ em } L^2(0,T;X_0), \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.16}$$

Note também que, por (2.6),

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2}\int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |\omega_0^n|^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (|\eta^n|^2+|\omega^n|^2)\,dxdt \\
&+ \int_0^T (T-t)\{|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\}\,dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |\omega_0^n|^2)\,dx &\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L (|\eta^n|^2+|\omega^n|^2)\,dxdt + 2\int_0^T \{|\eta^n(L,t)|^2 \\
&\quad + \alpha_1|\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0|\eta_x^n(0,t)|^2\}\,dt.
\end{aligned}$$

Assim, segue de (2.15) e (2.16) que $(\eta_0^n,\omega_0^n)$ é uma sequência de Cauchy em $X_0$, donde existe $(\eta_0,\omega_0) \in X_0$, tal que

$$(\eta_0^n,\omega_0^n) \to (\eta_0,\omega_0) \text{ em } X_0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado, como $(\eta^n, \omega^n)$ é limitada em $L^\infty(0,T;[L^2(I)]^2)$ e $(\eta_t^n, \omega_t^n)$ é limitada em $L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2)$, obtemos que existe subsequência $(\eta^n, \omega^n)$, tal que

$$(\eta^n, \omega^n) \to (\eta, \omega) \ \text{ em } \ C([0,T];[H^{-1}(I)]^2), \ \forall T > 0.$$

Em particular,

$$(\eta, \omega)(0) = \lim_{n \to +\infty} (\eta^n, \omega^n)(0) = \lim_{n \to +\infty} (\eta_0^n, \omega_0^n) = (\eta_0, \omega_0).$$

Assim, como $(\eta, \omega) \in L^\infty(0,T;[L^2(I)]^2) \cap C_\omega([0,T];[H^{-1}(I)]^2)$, temos, pelo Teorema 1.4.2, que

$$(\eta, \omega) \in C_\omega([0,T];[L^2(I)]^2).$$

Consequentemente, passando o limite fraco no sistema, obtemos, por unicidade, que

$$(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0) \ \text{ e } \ \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0} = 1.$$

Além disso, por (2.15), temos que

$$\int_0^T \{|\eta^n(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x^n(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x^n(0,t)|^2\} \, dt < \frac{1}{n} \int_0^L (|\eta_0^n|^2 + |\omega_0^n|^2) \, dx,$$

donde, fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$\int_0^T \{|\eta(L,t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L,t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0,t)|^2\} \, dt = 0,$$

ou seja,

$$\eta(L,\cdot) = \alpha_1 \eta_x(L,\cdot) = \alpha_0 \eta_x(0,\cdot) = 0, \ \text{ em } \ L^2(0,T). \tag{2.17}$$

Com isso, os próximos passos consistem em mostrar que o dado inicial acima é identicamente nulo.

**PASSO 2: (Redução a um Problema Espectral)**

Vamos utilizar um argumento semelhante ao usado em [24] (*Lema* 3.4) e em [18] (*Lema* 3.2).

**Lema 2.0.7.** *Dado $T > 0$, seja $N_T$ o espaço de todos os dados iniciais $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, tal que a solução correspondente $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0)$ de* (2.1) - (2.4) *satisfaça* (2.17). *Se $N_T \neq \emptyset$, para algum $T > 0$, então existem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\eta_0, \omega_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$, tais que*

$$\lambda\eta_0 + \omega_0' + \omega_0''' = 0 \tag{2.18}$$

$$\lambda\omega_0 + \eta_0' + \eta_0''' = 0 \tag{2.19}$$

$$\omega_0(0) = \omega_0'(0) = \omega_0''(0) = 0 \tag{2.20}$$

$$\omega_0(L) = \omega_0'(L) = 0 \tag{2.21}$$

$$\omega_0''(L) = -\eta_0''(L) \tag{2.22}$$

$$\alpha_0\eta_0'(0) = \alpha_1\eta_0'(L) = \eta_0(L) = 0. \tag{2.23}$$

**Observação:** Notemos que encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\eta_0, \omega_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$, $(\eta_0, \omega_0) \neq (0, 0)$, significa encontrar um autovalor e um autovetor para o operador $A(\eta, \omega) = (-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx})$ associado ao problema.

**Demonstração:** Vamos mostrar que:

$$1 \quad - \quad dim(N_T) < +\infty;$$

$$2 \quad - \quad N_T \subset D(A);$$

$$3 \quad - \quad A(N_T) \subset N_T.$$

De fato, observe que, mostrado isso, $A : \overline{N_T} \to \overline{N_T}$, onde $\overline{N_T}$ é a complexificação de $N_T$, será um operador linear definido em um espaço de dimensão finita, com

$N_T \neq \emptyset$. Logo, $A$ possuirá um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ e existirá $(\eta_0, \omega_0) \in [H^3(0, L; \mathbb{C})]^2$, com $(\eta_0, \omega_0) \neq (0, 0)$, satisfazendo $A(\eta_0, \omega_0) = \lambda(\eta_0, \omega_0)$, ou seja, satisfazendo (2.18) - (2.23).

1 - Mostraremos que $\overline{B_1(0)}$ é um subconjunto compacto de $N_T$. De fato, se $(\eta_0^n, \omega_0^n)$ é uma sequência na bola unitária $\{(\eta_0, \omega_0) \in N_T; \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0} \leq 1\}$, podemos utilizar o mesmo argumento usado no **Passo 1** para concluir que $(\eta_0^n, \omega_0^n)$ possui uma subsequência convergente em $X_0$, ou seja, a bola unitária é um subconjunto compacto de $N_T$, subespaço normado de $X_0$. Logo, pelo Teorema 1.5.2, $N_T$ possui dimensão finita.

2 - Primeiramente, observe que se $T_1 < T_2$, então $N_{T_2} \subset N_{T_1}$, donde $dim(N_{T_2}) \leq dim(N_{T_1})$. De fato, se $(\eta_0, \omega_0) \in N_{T_2}$, então a solução correspondente de (2.1) - (2.4) satisfaz (2.17), ou seja, a solução correspondente de (2.1) - (2.4) satisfaz

$$\eta(L, \cdot) = \alpha_1 \eta_x(L, \cdot) = \alpha_0 \eta_x(0, \cdot) = 0 \text{ em } L^2(0, T_2).$$

Em particular, como $T_1 < T_2$, a solução correspondente também satisfaz

$$\eta(L, \cdot) = \alpha_1 \eta_x(L, \cdot) = \alpha_0 \eta_x(0, \cdot) = 0 \text{ em } L^2(0, T_1),$$

donde $(\eta^0, \omega^0) \in N_{T_1}$.

Assim, a aplicação $T \mapsto dim(N_T)$, definida em $\mathbb{R}^+$ a valores em $\mathbb{N}$, é não-crescente e, então, existem $T$ e $\varepsilon > 0$, tais que $dim(N_t) = dim(N_T), \forall t \in [T, T + \varepsilon]$.

Vamos mostrar que $N_T \subset D(A)$.

Sejam $(\eta^0, \omega^0) \in N_T$, $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta^0, \omega^0)$, a solução correspondente, e $0 < t < \varepsilon$. Como $S(\tau)(S(t)(\eta^0, \omega^0)) = S(\tau + t)(\eta^0, \omega^0)$, para $0 \leq \tau \leq T$ e $(\eta^0, \omega^0) \in N_{T+\varepsilon} = N_T$, temos que $S(t)(\eta^0, \omega^0) \in N_T$, ou seja, a solução correspondente $(\widetilde{\eta}, \widetilde{\omega}) :=$

$S(\cdot)(S(t)(\eta^0,\omega^0))$ satisfaz

$$\widetilde{\eta}(L,\cdot)=\alpha_1\widetilde{\eta}_x(L,\cdot)=\alpha_0\widetilde{\eta}_x(0,\cdot)=0 \text{ em } L^2(0,T).$$

Então,

$$\frac{S(\tau)(\eta^0,\omega^0)-(\eta^0,\omega^0)}{\tau}\in N_T, \tag{2.24}$$

para $\tau$ suficientemente pequeno. De fato,

$$\frac{S(\tau)(\eta^0,\omega^0)-(\eta^0,\omega^0)}{\tau}\in X_0$$

e a função

$$\begin{aligned}(\overline{\eta},\overline{\omega}) &:= S(\cdot)\left(\frac{S(\tau)(\eta^0,\omega^0)-(\eta^0,\omega^0)}{\tau}\right)=\frac{S(\cdot)(S(\tau)(\eta_0,\omega_0))-S(\cdot)(\eta_0,\omega_0)}{\tau}\\ &= \frac{(\widetilde{\eta},\widetilde{\omega})-(\eta,\omega)}{\tau},\end{aligned}$$

é solução do problema e satisfaz

$$\overline{\eta}(L,\cdot)=\alpha_1\overline{\eta}_x(L,\cdot)=\alpha_0\overline{\eta}_x(0,\cdot)=0 \text{ em } L^2(0,T).$$

Note, também, que

$$(\eta_0,\omega_0)\in D(A)\Leftrightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)(\eta_0,\omega_0)-(\eta_0,\omega_0)}{t} \text{ existe em } [L^2(I)]^2.$$

Vamos mostrar que o limite acime existe.

Defina $M_T := \{(\tilde{\eta},\tilde{\omega}) = S(\tau)(\tilde{\eta_0},\tilde{\omega_0});\ 0\le\tau\le T,\ (\tilde{\eta_0},\tilde{\omega_0})\in N_T\}$. Observe que $M_T\subset C([0,T];[L^2(I)]^2)$ e que dado $(\eta,\omega)\in M_T$, $(\eta,\omega)\in H^1(0,T+\varepsilon;[H^{-2}(I)]^2)$.

Logo, existe o limite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{(\eta,\omega)(t+\cdot)-(\eta,\omega)}{t}=(\eta',\omega')(\cdot) \text{ em } L^2(0,T;[H^{-2}(I)]^2).$$

Por outro lado, por (2.24) temos

$$\frac{(\eta,\omega)(t+\cdot)-(\eta,\omega)}{t}\in M_T, \text{ para } 0<t<\varepsilon.$$

Além disso, note que $dim(M_T) < \infty$, por um argumento análogo ao usado para mostrar que $dim(N_T) < \infty$. Assim, temos que $M_T$ é um subespaço de $[L^2(0,T;H^{-2}(I))]^2$ que possui dimensão finita, donde $M_T$ é fechado em $[L^2(0,T;H^{-2}(I))]^2$. Logo, $(\eta', \omega') \in M_T \subset [C([0,T];L^2(I))]^2$, ou seja, $(\eta, \omega) \in [C^1([0,T];L^2(I))]^2$. Portanto, o limite

$$(\eta', \omega')(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(\eta,\omega)(t) - (\eta,\omega)(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)(\eta_0,\omega_0) - (\eta_0,\omega_0)}{t},$$

existe em $X_0 = [L^2(I)]^2$, ou seja, $(\eta_0, \omega_0) \in D(A)$.

3 - De fato, como $dim(N_T) < \infty$ e $N_T$ é um subespaço de $X_0$, segue que $N_T$ é fechado em $X_0$. Logo, dado $U_0 \in N_T$,

$$AU_0 = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)U_0 - U_0}{t} \in N_T.$$

Portanto, $A(N_T) \subset N_T$. ■

Para chegarmos à contradição, vamos mostrar que a única solução de (2.18) - (2.23) é a solução identicamente nula. Com isso, por um lado, temos que o dado inicial possui norma 1, e por outro lado, o dado inicial é identicamente nulo, o que geraria uma contradição.

**PASSO 3: (Existência de solução trivial para o Problema Espectral)**

**Lema 2.0.8.** *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\eta_0, \omega_0) \in [H^3(0,L;\mathbb{C})]^2$ satisfazendo* (2.18) - (2.23). *Então,* $\eta_0 = \omega_0 = 0$.

**Demonstração:** De fato, seja $v := \eta_0 + \omega_0$ em $[0,L]$. Logo, por (2.18) - (2.19) e (2.21) - (2.23), $v$ satisfaz a seguinte EDO

$$\begin{cases} \lambda v + v' + v''' = 0 \\ v(L) = v'(L) = v''(L) = 0. \end{cases}$$

Definindo $Z = \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix}$, temos que $Z' = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \end{pmatrix}$, donde $Z' = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ -\lambda v - v' \end{pmatrix}$,
ou seja, $Z$ satisfaz

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} Z, \quad Z(L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, se $F(x,Z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix} Z$, temos que $F$ é Lipschitz em $Z$ (já que $F$ é linear). Então, pelo Teorema de Picard, existe uma única função $Z : [0,L] \to \mathbb{R}^3$, solução do problema de valor inicial acima.

Mas, observe que $Z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall x \in [0,L]$, também é uma solução do mesmo problema. Logo, por unicidade, $v \equiv 0$ em $[0,L]$.

Assim, $\eta_0 \equiv -\omega_0$ em $[0,L]$ e, então, por (2.18) e (2.20),temos que

$$\begin{cases} -\lambda\omega_0 + \omega_0' + \omega_0''' = 0 \\ \omega_0(0) = \omega_0'(0) = \omega_0''(0) = 0, \end{cases}$$

que tem como única solução $\omega_0 \equiv 0$. Logo, $(\eta_0, \omega_0) = (0,0)$ em $[0,L]$. ■

Portanto, pelo **Passo 1**, temos que existe $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, com $\|(\eta_0, \omega_0)\| = 1$, tal que a solução correspondente de (2.1) - (2.4) satisfaz (2.17), ou seja, $(\eta_0, \omega_0) \in N_T$, donde, pelo Lema 2.0.7, existem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\tilde{\eta_0}, \tilde{\omega_0}) \in [H^3(0,L;\mathbb{C})]^2$, com $(\tilde{\eta_0}, \tilde{\omega_0}) \neq (0,0)$ satisfazendo (2.18) - (2.23). Por outro lado, pelo Lema 2.0.8, $(\tilde{\eta_0}, \tilde{\omega_0}) = (0,0)$, o que é uma contradição. ■

**Observação:** Note que se $\alpha_1 = 0$, o decaimento exponencial (2.13) nem sempre é válido. De fato, quando $L = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, temos que $(\lambda, \eta_0, \omega_0) := (0, \text{sen}(x - L), 0)$ satisfaz (2.18) - (2.23) e, além disso,

$$\frac{dE}{dt} = -|\eta(L,t)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0,t)| = 0,$$

onde $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L(\eta^2 + \omega^2)\,dx$ é a energia associada ao sistema (2.1) - (2.4). Logo, $E(t) = E(0) = \frac{L}{2}$, ou seja, a energia não é dissipativa. Um fenômeno similar foi provado em [24] para KdV.

**Definição:** Para $s \in [0,3]$, defina $X_s$ como sendo o espaço das funções $(\eta, \omega) \in [H^s(I)]^2$ que satisfazem as condições de s - compatibilidade

$$\begin{aligned}
\omega(0) &= 0 \text{ e } \omega(L) = \eta(L), \text{ quando } \frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2},\\
\omega(0) &= 0,\ \omega(L) = \eta(L),\ \omega'(0) = \alpha_0\eta'(0),\ \omega'(L) = -\alpha_1\eta'(L),\\
\omega''(0) &= 0, \text{ e } \omega''(L) = -\eta''(L), \text{ quando } \frac{5}{2} < s \leq 3,
\end{aligned}$$

munido da norma Hilbertiana

$$\|(\eta,\omega)\|_{X_s}^2 = \|\eta\|_{H^s(I)}^2 + \|\omega\|_{H^s(I)}^2.$$

Logo, pelo Teorema 2.0.6 acima e por alguns argumentos de interpolação de espaços, temos o seguinte corolário:

**Corolário 2.0.9.** *Sejam $\alpha_0$, $\alpha_1$ e $\alpha_2$ como no Teorema 2.0.6. Então, para $s \in [0,3]$, existem $C_s > 0$ e $\mu_0 > 0$, tais que para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in X_s$, a solução correspondente $(\eta, \omega)$ de (2.1) - (2.4) pertence a $C(\mathbb{R}^+; X_s)$ e satisfaz*

$$\|\eta(t), \omega(t)\|_{X_s} \leq C_s e^{-\mu_0 t}\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_s}. \tag{2.25}$$

**Demonstração:** Primeiramente observe que, pelo Teorema 2.0.6, (2.25) já foi demonstrado no caso $s = 0$. Vamos mostrar no caso $s = 3$. Seja $U_0 = (\eta_0, \omega_0) \in X_3 = D(A)$ e defina $U(t) = (\eta(t), \omega(t)) = S(t)U_0$, $t \geq 0$, onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $A$. Logo, se $V(t) := U_t(t)$, então $V$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} V_t(t) = AU_t(t) = AV(t) \\ V(0) = AU(0) = AU_0 =: V_0, \end{cases}$$

com $AU_0 \in X_0$.

Assim, pelo Teorema 2.0.6, existem constantes $C_0$ e $\mu_0 > 0$, tais que

$$\|V(t)\|_{X_0} \leq C_0 e^{-\mu_0 t}\|V_0\|_{X_0},\ \ t \geq 0.$$

Como $V(t) = AU(t)$ e $V_0 = AU_0$, temos que

$$\|AU(t)\|_{X_0} \leq C_0 e^{-\mu_0 t}\|AU_0\|_{X_0},\ \ t \geq 0.$$

Por outro lado, como $U_0 = (\eta_0, \omega_0) \in X_3 = D(A) \subset X_0$ e $U(t) = S(t)U_0$, temos que, pelo Teorema 2.0.6,

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq C_0 e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_0},\ \ t \geq 0.$$

Portanto, como as normas $\|U\|_{X_3}$ e $\|U\|_{X_0} + \|AU\|_{X_0}$ são equivalentes, concluímos que

$$\|U\|_{X_3} \leq C_0 e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_0} + C_0 e^{-\mu_0 t}\|AU_0\|_{X_0} = C_0 e^{-\mu_0 t}(\|U_0\|_{X_0} + \|AU_0\|_{X_0}),$$

donde,

$$\|U\|_{X_3} \leq C_0 e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_3},\ \ t \geq 0.$$

Assim, como $X_s = [X_0, X_3]_{\frac{s}{3}}$, $0 < s < 3$, e $S(t) : X_s \to X_s$, segue da Teoria de Interpolação (Ver [26], Capítulo 5), que existe $C_s > 0$, satisfazendo

$$\|U(t)\|_{X_s} \leq C_s e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_s},$$

o que prova o Corolário. $\blacksquare$

# Capítulo 3

# Boa colocação e estabilidade exponencial do problema não linear

Neste capítulo, voltaremos nossa atenção para a boa colocação e propriedades de estabilidade de (2) - (4):

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, \ \omega_x(0,t) = \alpha_0\eta_x(0,t), \ \omega_{xx}(0,t) = 0, \ t > 0 \\ \omega(L,t) = \alpha_2\eta(L,t), \ \omega_x(L,t) = -\alpha_1\eta_x(L,t), \ \omega_{xx}(L,t) = -\alpha_2\eta_{xx}(L,t), \ t > 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

e as condições iniciais

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x), \ 0 < x < L \\ \omega(x,0) = \omega_0(x), \ 0 < x < L. \end{cases} \tag{3.3}$$

Sejam $U = (\eta, \omega)$, $(S(t))_{t \geq 0}$, o semigrupo gerado pela parte linear do problema, $U_0 = (\eta_0, \omega_0)$ e $N(U) = -((\eta\omega)', \omega\omega')$, onde ' denota $\frac{\partial}{\partial x}$. Observemos, então, que podemos reescrever (3.1) - (3.3) como o problema de Cauchy Abstrato

$$\begin{cases} U_t = AU + N(U) \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

com as condições de fronteira (3.2).

Observemos que, pelos resultados obtidos no Capítulo 2, podemos reformular o problema acima da seguinte maneira: Encontrar uma função $U = U(t)$, tal que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))\, ds, \tag{3.4}$$

e que satisfaz as condições de fronteira (3.2).

Assim, usando o efeito regularizante de Kato, provado na Proposição 2.0.5, e um argumento de ponto fixo, vamos provar, primeiramente, que (3.4) é localmente bem posto no espaço $X_0 = [L^2(I)]^2$.

**Teorema 3.0.10.** *Dado $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, existe um tempo $T > 0$ e uma única mild solution $(\eta, \omega) \in C([0,T]; X_0) \cap L^2(0,T; X_1)$ de (3.1) - (3.2).*

**Demonstração:** Para cada $(f, g) \in L^1(0,T; X_0)$, considere o problema

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = f \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = g, \end{cases}$$

juntamente com as condições (3.2) e (3.3).

Como esse problema possui solução regular, podemos considerar dados regulares e concluir as estimativas seguintes por um argumento de densidade. Inicialmente, observe que

$$(\eta, \omega)(t) = S(t)(\eta_0, \omega_0) + \int_0^t S(t-s)(f(\cdot, s), g(\cdot, s))\, ds,$$

onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo de classe $C_0$ dado pela Proposição 2.0.3. Logo, das Afirmações 1 e 2 abaixo, temos que existe $C = C(T) > 0$, tal que

$$\|(\eta,\omega)\|_{C([0,T];X_0)} + \|(\eta,\omega)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leq C\{\|(\eta_0,\omega_0)\|_{X_0} + \int_0^T \|(f,g)\|_{X_0}\, ds\}. \quad (3.5)$$

De fato, observe inicialmente que a solução do problema acima pode ser escrita como

$$(\eta,\omega) = (\eta_1,\omega_1) + (\eta_2,\omega_2),$$

onde $(\eta_1,\omega_1)$ e $(\eta_2,\omega_2)$ são soluções, respectivamente, de

$$\begin{cases} \eta_{1,t} + \omega_{1,x} + \omega_{1,xxx} = 0 \\ \omega_{1,t} + \eta_{1,x} + \eta_{1,xxx} = 0, \end{cases}$$

satisfazendo as condições (3.2) - (3.3), e

$$\begin{cases} \eta_{2,t} + \omega_{2,x} + \omega_{2,xxx} = f \\ \omega_{2,t} + \eta_{2,x} + \eta_{2,xxx} = g, \end{cases}$$

com condição de contorno homogêneas

$$\begin{cases} \omega_2(0,t) = 0,\ \omega_{2,x}(0,t) = \alpha_0\eta_{2,x}(0,t) = 0,\ \omega_{2,xx}(0,t) = 0,\ t > 0 \\ \omega_2(L,t) = \alpha_2\eta_2(L,t) = 0,\ \omega_{2,x}(L,t) = -\alpha_1\eta_{2,x}(L,t) = 0,\ t > 0 \\ \omega_{2,xx}(L,t) = -\alpha_2\eta_{2,xx}(L,t) = 0,\ t > 0 \end{cases}$$

e condição inicial

$$\begin{cases} \eta_2(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ \omega_2(x,0) = 0,\ 0 < x < L. \end{cases}$$

Logo, segue da Proposição 2.0.5, que

$$\|(\eta_1,\omega_1)\|_{C(\mathbb{R}^+;X_0)} + \|(\eta_1,\omega_1)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leq C\|(\eta_0,\omega_0)\|_{X_0},$$

onde $C = C(T)$ é uma constante positiva.

Com relação a $(\eta_2, \omega_2)$, temos os seguintes resultados:

**Afirmação 1:** *Existe* $C > 0$*, tal que*

$$\|(\eta_2, \omega_2)\|_{C([0,T];X_0)} \leq C\|(f, g)\|_{L^1(0,T;X_0)}.$$

**Demonstração:** Observe que

$$(\eta_2, \omega_2)(t) = \int_0^t S(t-s)((f, g)(\cdot, s))\, ds,$$

onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo de classe $C_0$ dado pela Proposição 2.0.3. Note, também, que

$$\|1_{[0,t]}S(t-s)((f, g)(\cdot, s))\|_{X_0} \leq \|(f, g)(\cdot, s)\|_{X_0} \in L^1(0, T).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$(\eta_2, \omega_2) \in C([0, T]; X_0). \tag{3.6}$$

Além disso,

$$\|(\eta_2, \omega_2)\|_{X_0} \leq \int_0^t \|(f, g)(\cdot, s)\|_{X_0}\, ds \leq \|(f, g)\|_{L^1(0,T;X_0)}. \tag{3.7}$$

Portanto, por (3.6) e (3.7), concluímos a Afirmação 1.

**Afirmação 2:** *Existe* $C > 0$*, tal que*

$$\|(\eta_2, \omega_2)\|_{L^2(0,T;X_1)} \leq C\|(f, g)\|_{L^1(0,T;X_0)}.$$

**Demonstração:** De forma análoga à demonstração do efeito regularizante de Kato, temos que, multiplicando a primeira equação acima por $x\omega_2$, a segunda por

$x\eta_2$, integrando em $(0,T)\times(0,L)$ e somando as identidades, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L x(\eta_2\omega_2)_t\,dxdt &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L x(|\omega_2|^2+|\eta_2|^2)_x\,dxdt\\ &+ \int_0^T\int_0^L x(\omega_{2,xxx}\omega_2+\eta_{2,xxx}\eta_2)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_0^L x(f\omega_2+g\eta_2)\,dxdt. \end{aligned}\tag{3.8}$$

Mas, procedendo como em (2.9), temos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^L x(\omega_{2,xxx}\omega_2+\eta_{2,xxx}\eta_2)\,dxdt = \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|\omega_{2,x}|^2+|\eta_{2,x}|^2)\,dxdt\\ &+ (\alpha_1-1)\int_0^T\eta_2(L,t)\eta_{2,x}(L,t)\,dt+\int_0^T\eta_2(0,t)\eta_{2,x}(0,t)\,dt\\ &- \frac{L}{2}(\alpha_1^2+1)\int_0^T|\eta_{2,x}(L,t)|^2\,dt,\end{aligned}\tag{3.9}$$

visto que $\alpha_2=1$. Além disso, em (3.8),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L x(|\omega_2|^2+|\eta_2|^2)_x\,dxdt &= \frac{1}{2}[\int_0^T x(|\omega_2|^2+|\eta_2|^2)|_0^L\,dt\\ &\quad -\int_0^T\int_0^L(|\omega_2|^2+|\eta_2|^2)\,dxdt]\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|\eta_2|^2+|\omega_2|^2)\,dxdt.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Assim, substituindo (3.9) e (3.10) em (3.8), pelas condições de contorno, obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_0^L x\eta_2(x,T)\omega_2(x,T)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|\eta_2|^2+|\omega_2|^2)\,dxdt\\ &+ \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(|\eta_{2,x}|^2+|\omega_{2,x}|^2)\,dxdt=\int_0^T\int_0^L x(f\omega_2+g\eta_2)\,dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^L(|\eta_{2,x}|^2+|\omega_{2,x}|^2)\,dxdt=\frac{2}{3}[-\int_0^L x\eta_2(x,T)\omega_2(x,T)\,dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L(|\eta_2|^2+|\omega_2|^2)\,dxdt+\int_0^T\int_0^L x(f\omega_2+g\eta_2)\,dxdt]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{L}{3}\int_0^L (|\eta_2(x,T)|^2+|\omega_2(x,T)|^2)\,dx+\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L (|\eta_2|^2+|\omega_2|^2)\,dxdt\\
&\quad +\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L |xf\omega_2+xg\eta_2|\,dxdt\\
&= \frac{L}{3}\|(\eta_2,\omega_2)(T)\|_{X_0}^2+\frac{1}{3}\int_0^T \|(\eta_2,\omega_2)(\cdot,t)\|_{X_0}^2\,dt+\frac{2}{3}\int_0^T \langle (xf,xg),(\omega_2,\eta_2)\rangle_{X_0}\,dt.
\end{aligned}
$$

Logo, por (3.7), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L (|\eta_{2,x}|^2+|\omega_{2,x}|^2)\,dxdt &\leq \frac{L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2+\frac{T}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2\\
&\quad +\frac{2L}{3}\int_0^T \|(f,g)\|_{X_0}\|(\eta_2,\omega_2)\|_{X_0}\,dt\\
&\leq \frac{L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2+\frac{T}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2\\
&\quad +\frac{2L}{3}\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}\int_0^T \|(f,g)\|_{X_0}dt\\
&\leq \left(L+\frac{T}{3}\right)\|(f,g)\|_{L^1(0,T;X_0)}^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela Afirmação 1 e pela desigualdade acima, concluímos a Afirmação 2, com constante $C=\sqrt{L+\frac{T}{3}}$. Observe que $C=C(T,L)$ é não decrescente em $T$, pois se $T_1\leq T_2$, então $\sqrt{L+\frac{T_1}{3}}\leq\sqrt{L+\frac{T_2}{3}}$.

Agora, dado $U_0=(\eta_0,\omega_0)\in X_0$, vamos mostrar que (3.4) admite uma única solução. Para isso, considere a seguinte aplicação $\Gamma$, dada por

$$
(\Gamma U)(t)=S(t)U_0+\int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds,
$$

onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pela parte linear do problema e $N(U)=N(\eta,\omega)=-((\eta\omega)_x,\omega\omega_x)$.

A demonstração consiste em provar que $\Gamma$ possui um único ponto fixo em alguma bola fechada $\overline{B_R(0)}$ do espaço

$$
E:=L^2(0,T;X_1),
$$

dotado de sua norma natural. Vamos usar o seguinte resultado:

**Afirmação 3:** *Existe uma constante* $K > 0$, *tal que*

$$\|N(U_1) - N(U_2)\|_{X_0} \leq K(\|U_1\|_{X_1} + \|U_2\|_{X_1})\|U_1 - U_2\|_{X_1}, \ \ \forall U_1, U_2 \in X_1. \quad (3.11)$$

**Demonstração:** Observe que

$$\|\omega\eta'\|_{L^2(I)} \leq \|\omega\|_{L^\infty(I)}\|\eta'\|_{L^2(I)} \leq C\|\omega\|_{H^1(I)}\|\eta\|_{H^1(I)}, \quad (3.12)$$

$\forall(\eta, \omega) \in H^1(I) \times H^1(I)$, com $C > 0$, pois $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. Logo, se $U_1 = (\eta_1, \omega_2)$ e $U_2 = (\eta_2, \omega_2)$, então

$$\begin{aligned}
\|N(U_1) - N(U_2)\|^2_{X_0} &= \|((\eta_2\omega_2)' - (\eta_1\omega_1)', \omega_2\omega_2' - \omega_1\omega_1')\|^2_{X_0} \\
&= \|(\eta_2\omega_2)' - (\eta_1\omega_1)'\|^2_{L^2(I)} + \|\omega_2\omega_2' - \omega_1\omega_1'\|^2_{L^2(I)} \\
&= \|\eta_2'\omega_2 + \eta_2\omega_2' - \eta_1'\omega_1 - \eta_1\omega_1'\|^2_{L^2(I)} + \|\omega_2\omega_2' - \omega_1\omega_1'\|^2_{L^2(I)} \\
&= \|\eta_2'\omega_2 + \eta_1'\omega_2 - \eta_1'\omega_2 + \eta_2\omega_2' - \eta_1'\omega_1 + \eta_2\omega_1' - \eta_2\omega_1' \\
&\quad -\eta_1\omega_1'\|^2_{L^2(I)} + \|\omega_2\omega_2' + \omega_1\omega_2' - \omega_1\omega_2' - \omega_1\omega_1'\|_{L^2(I)} \\
&\leq \|\omega_2(\eta_2' - \eta_1')\|^2_{L^2(I)} + \|\eta_1'(\omega_2 - \omega_1)\|^2_{L^2(I)} \\
&\quad +\|\eta_2(\omega_2' - \omega_1')\|^2_{L^2(I)} + \|\omega_1'(\eta_1 - \eta_2)\|^2_{L^2(I)} \\
&\quad +\|\omega_2'(\omega_2 - \omega_1)\|^2_{L^2(I)} + \|\omega_1(\omega_2' - \omega_1')\|^2_{L^2(I)} \\
&\leq C^2\|\omega_2\|^2_{H^1(I)}\|\eta_2 - \eta_1\|^2_{H^1(I)} + C^2\|\eta_1\|^2_{H^1(I)}\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} \\
&\quad +C^2\|\eta_2\|^2_{H^1(I)}\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} + C^2\|\omega_1\|^2_{H^1(I)}\|\eta_1 - \eta_2\|^2_{H^1(I)} \\
&\quad +C^2\|\omega_2\|^2_{H^1(I)}\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} + C^2\|\omega_1\|^2_{H^1(I)}\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} \\
&= C^2(\|\eta_1\|^2_{H^1(I)} + \|\omega_1\|^2_{H^1(I)} + \|\eta_2\|^2_{H^1(I)} \\
&\quad +\|\omega_2\|^2_{H^1(I)})\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} + C^2(\|\omega_1\|^2_{H^1(I)} \\
&\quad +\|\omega_2\|^2_{H^1(I)})\|\eta_2 - \eta_1\|^2_{H^1(I)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C^2(\|\eta_1\|^2_{H^1(I)} + \|\omega_1\|^2_{H^1(I)} + \|\eta_2\|^2_{H^1(I)} + \|\omega_2\|^2_{H^1(I)})\|\omega_2 - \omega_1\|^2_{H^1(I)} \\
&\quad + C^2(\|\eta_1\|^2_{H^1(I)} + \|\omega_1\|^2_{H^1(I)} + \|\eta_2\|^2_{H^1(I)} + \|\omega_2\|^2_{H^1(I)})\|\eta_2 - \eta_1\|^2_{H^1(I)} \\
&= C^2(\|U_1\|^2_{X_1} + \|U_2\|^2_{X_1})\|U_1 - U_2\|^2_{X_1}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|N(U_1) - N(U_2)\|_{X_0} \leq C(\|U_1\|_{X_1} + \|U_2\|_{X_1})\|U_1 - U_2\|_{X_1},
$$

concluindo a demonstração da Afirmação 3.

Sejam $T > 0$ e $R > 0$ números reais cujos valores serão especificados posteriormente e considere $B_R(0) \subset E$. Pela Afirmação 3, $N(U) \in L^1(0, T; X_0)$, visto que

$$
\int_0^T \|N(U)\|_{X_0}\, dt \leq K \int_0^T \|U\|^2_{X_1}\, dt = C\|U\|^2_E \leq CR^2 < \infty.
$$

Logo, por (3.5), $\Gamma U \in E$. Observe, também, que

$$
\left\| \int_0^t S(t-s)N(U(s))\, ds \right\|_E \leq C \int_0^T \|N(U(s))\|_{X_0}\, ds,
$$

pela Afirmação 2. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma U\|_E &\leq \|S(\cdot)U_0\|_E + C\int_0^T \|N(U)\|_{X_0}\, ds \\
&\leq \|S(\cdot)U_0\|_E + KC\int_0^T \|U\|^2_{X_1}\, ds \\
&= \|S(\cdot)U_0\|_E + KC\|U\|^2_E.
\end{aligned}
$$

Tomando $R = 2\|S(\cdot)U_0\|_E$, temos, pela Proposição 2.0.5, que $R \leq \bar{C}(T)\|U_0\|_{X_0}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma U\|_E &\leq \frac{R}{2} + KCR^2 \\
&\leq \frac{R}{2} + KC\bar{C}(T)\|U_0\|_{X_0} R \\
&= \left(\frac{1}{2} + KC\bar{C}(T)\|U_0\|_{X_0}\right) R,
\end{aligned}
$$

onde $K, C > 0$. Portanto, como $\bar{C}(T) \leq K\sqrt{T}$, $K > 0$, segue que para $T > 0$ suficientemente pequeno, $\Gamma$ é uma aplicação da bola $B_R(0)$ nela mesma. Além disso, pela Afirmação 2, temos, por um argumento análogo ao usado acima, que dados $U_1$ e $U_2 \in B_R(0) \subset E$,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U_1 - \Gamma U_2\|_E &= \left\| \int_0^t S(t-s)(N(U_1) - N(U_2))\, ds \right\|_E \\
&\leq C\|N(U_1(s)) - N(U_2(s))\|_{L^1(0,T;X_0)} \\
&= C\int_0^T \|N(U_1) - N(U_2)\|_{X_0}\, ds \\
&\leq CK\int_0^T (\|U_1\|_{X_1} + \|U_2\|_{X_1})\|U_1 - U_2\|_{X_1}\, ds \\
&\leq 2RCK\int_0^T \|U_1 - U_2\|_{X_1}\, ds \\
&\leq 2RCK\left(\int_0^T 1^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|U_1 - U_2\|_{X_1}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2RCK\sqrt{T}\|U_1 - U_2\|_E,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Gamma U_1 - \Gamma U_2\|_E \leq 2RCK\sqrt{T}\|U_1 - U_2\|_E.$$

Logo, se $R > 0$ for suficientemente pequeno, temos que $\Gamma$ é uma contração da bola nela mesma. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única solução $U \in E$ do problema de ponto fixo (3.4). Observe, também, que $U \in C([0,T]; X_0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_0} &\leq \|S(t)U_0\|_{X_0} + \int_0^t \|S(t-s)N(U(s))\|_{X_0}\, ds \\
&\leq \|U_0\|_{X_0} + \int_0^t \|N(U(s))\|_{X_0}\, ds \\
&\leq \|U_0\|_{X_0} + K\int_0^t \|U(s)\|_{X_1}^2\, ds,
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{C([0,T];X_0)} &= \max_{0\le t\le T}\|U(t)\|_{X_0}\\
&\le \|U_0\|_{X_0} + K\max_{0\le t\le T}\int_0^t \|U(s)\|_{X_1}^2\,ds\\
&= \|U_0\|_{X_0} + K\int_0^T \|U(s)\|_{X_1}^2\,ds\\
&= \|U_0\|_{X_0} + K\|U\|_E^2 < \infty,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do Teorema. ■

Observe que o teorema acima garante a existência de solução local para (3.1) - (3.3). Devido a falta de estimativas a priori na norma de $X_0$, a questão da existência global de soluções é difícil de resolver. Entretanto, a existência global juntamente com a estabilidade exponencial podem ser estabelecidas para dados iniciais suficientemente pequenos. Para este propósito, o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento exponencial em $X_1$ são combinados em uma estimativa pontual no tempo.

**Lema 3.0.11.** *Para qualquer $\mu \in (0,\mu_0)$, existe uma constante $C = C(\mu) > 0$, tal que para qualquer $U_0 \in X_0$,*

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \le C\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0},\ \forall t > 0. \tag{3.13}$$

**Demonstração:** Sejam $\mu \in (0,\mu_0)$ e $U_0 \in X_0$ e defina $U(t) := S(t)U_0$, $t \ge 0$. Tomando $T = 1$, pela Proposição 2.0.5, temos que existe uma constante $\overline{C} > 0$, tal que

$$\|U(\cdot)\|_{L^2(0,1;X_1)} \le \overline{C}\|U_0\|_{X_0}. \tag{3.14}$$

Em particular, $U(t) \in X_1$, quase sempre em $(0,1)$. Assim, podemos encontrar uma sequência decrescente $(t_n)_{n\ge 0}$ em $(0,1]$, com $t_n \to 0^+$, tal que $U(t_n) \in$

$X_1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como $U(t_n) = S(t_n)U_0$, temos que, modificando (2.1) - (2.4) de tal forma que $S(t_n)U_0 \in X_1$ seja o dado inicial do problema, pelo Corolário 2.0.9,

$$U(\cdot) \in C([t_n, +\infty); X_1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, como $t_n \to 0^+$, temos que

$$U(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+; X_1),$$

isto é,

$$U(t) \in X_1,\ \ \forall t > 0.$$

Além disso, pelo mesmo argumento, temos que

$$\|U(T)\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu_0(T-t)}\|U(t)\|_{X_1},\ \ \forall T \geq t, \tag{3.15}$$

sempre que $U(t) \in X_1$.

Tome $T \in (0,1]$. Por (3.15), obtém-se

$$(C_1^{-1}\|U(T)\|_{X_1})^2 e^{2\mu_0(T-t)} \leq \|U(t)\|_{X_1}^2,$$

donde, integrando em relação a $t$ em $(0,T)$,

$$(C_1^{-1}\|U(T)\|_{X_1})^2 \int_0^T e^{2\mu_0(T-t)}\, dt \leq \int_0^T \|U(t)\|_{X_1}^2\, dt.$$

Logo, como

$$\int_0^T e^{2\mu_0(T-t)}\, dt = \frac{e^{2\mu_0 T} - 1}{2\mu_0},$$

segue que

$$\begin{aligned} \|U(T)\|_{X_1} &\leq \|U\|_{L^2(0,T;X_1)} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T} - 1}} \\ &\leq \overline{C} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T} - 1}} \|U_0\|_{X_0} \\ &\leq \overline{C} C_1 \frac{1}{\sqrt{T}} \|U_0\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Portanto, para $t \in (0,1]$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leq \frac{\overline{C}C_1}{\sqrt{t}} e^{\mu t} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0} \\
&\leq \bar{C} C_1 e^{\mu} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in (0,1].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Se $t > 1$, por (3.15) e (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leq C_1 e^{-\mu_0(t-1)} \|U(1)\|_{X_1} \\
&\leq C_1^2 \bar{C} e^{-\mu_0(t-1)} \|U_0\|_{X_0}.
\end{aligned}$$

Porém, como $\mu < \mu_0$ e $t > 1$, existe $C_2 > 0$, tal que

$$\sqrt{t} \leq C_2 e^{(\mu_0 - \mu)t},$$

ou seja,

$$e^{-\mu_0 t} \leq C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}.$$

Assim,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1^2 \bar{C} e^{-\mu_0 t} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0} \leq C_1^2 \bar{C} C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0}.$$

Portanto, se $C := C_1^2 \bar{C} C_2 e^{\mu_0} > 0$, então

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1,$$

o que demonstra o Lema. ■

Com o Lema acima, estamos prontos para provar a boa colocação e a estabilidade exponencial das soluções partindo de dados iniciais suficientemente pequenos em $X_1$.

**Definição:** Tome $\mu \in (0, \mu_0)$. Definimos o espaço

$$F := \{U = (\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; X_1);\ \|e^{\mu t} U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; X_1)} < \infty\},$$

munido da seguinte norma

$$\|U\|_F = \|e^{\mu t}U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;X_1)} = \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\|e^{\mu t}U(t)\|_{X_1}.$$

**Teorema 3.0.12.** *Existe $r_0 > 0$, tal que, para todo dado inicial $(\eta_0, \omega_0) \in X_1$ com $\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1} \leq r_0$, a equação integral* (3.4) *admite uma única solução $(\eta, \omega) \in F$.*

**Demonstração:** Sejam $U_0 = (\eta_0, \omega_0) \in X_1,$ tal que $\|U_0\|_{X_1} \leq r_0, B_R(0) \subset F$ e $U(\cdot) := (\eta, \omega)(\cdot) \in B_R(0)$, com $r_0$ e $R > 0$ a serem determinados posteriormente. Considere a aplicação

$$\Gamma : B_R(0) \subset F \to C(\mathbb{R}^+; X_1)$$

dada por

$$(\Gamma U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds, \ \ \forall t \geq 0.$$

Vamos mostrar que $\Gamma$ possui um único ponto fixo na bola $B_R(0) \subset F$, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Primeiramente, observe que, por (3.5),

$$\Gamma U \in C(\mathbb{R}^+; X_0) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; X_1),$$

com $(\Gamma U)(0) = U_0$.

Note também que $\Gamma U \in F$. De fato, por (2.25), existe $C_1 > 0$, tal que

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_1},$$

pois $\mu < \mu_0$. Logo,

$$\|e^{\mu t}S(t)U_0\|_{X_1} \leq e^{\mu t}\|S(t)U_0\|_{X_1} \leq e^{\mu t}(C_1 e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_1}) = C_1\|U_0\|_{X_1}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Além disso, para todo $t \geq 0$, temos, pelo Lema 3.0.11,

$$
\begin{aligned}
\left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds \right\|_{X_1} &\leq e^{\mu t} \int_0^t \|S(t-s)N(U(s))\|_{X_1}\,ds \\
&\leq e^{\mu t} C \int_0^t \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s))\|_{X_0}\,ds \\
&= C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s))\|_{X_0}\,ds,
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$. Logo, pela Afirmação 3, obtemos $K > 0$, tal que

$$
\begin{aligned}
\left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds \right\|_{X_1} &\leq C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} (K\|U(s)\|_{X_1}^2)\,ds \\
&= CK \int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}} (e^{\mu s}\|U(s)\|_{X_1})^2\,ds \\
&\leq CK\|U\|_F^2 \int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}}\,ds \\
&= CK\|U\|_F^2 \int_0^t \frac{e^{\mu(s-t)}}{\sqrt{s}}\,ds \\
&\leq CK\|U\|_F^2 \left( \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds + \int_1^{\max\{1,t\}} \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{s}}\,ds \right) \\
&\leq CK\|U\|_F^2 \left( 2s^{\frac{1}{2}}|_0^1 + \int_1^{\max\{1,t\}} e^{-\mu(t-s)}\,ds \right) \\
&\leq CK\|U\|_F^2 \left( 2 + \frac{1}{\mu} \right).
\end{aligned}
$$

Assim, tomando $R > 0$ de tal forma que $R < \dfrac{1}{2CK(2+\mu^{-1})}$ e $r_0 > 0$ de tal forma que $r_0 < \dfrac{R}{2C_1}$, temos que

$$
\|e^{\mu t}\Gamma U\|_{X_1} \leq C_1 r_0 + CK(2+\mu^{-1})R^2 < \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R < \infty.
$$

Portanto, $\Gamma U \in F$, com $\|\Gamma U\|_F \leq R < \infty$, ou seja, $\Gamma$ aplica a bola $B_R(0) \subset F$ nela mesma. Além disso, dados $U, V \in B_R(0) \subset F$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma U - \Gamma V\|_F &= \left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s)(N(U(s)) - N(V(s)))\,ds \right\|_{X_1} \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s)) - N(V(s))\|_{X_0}\,ds,
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$. Então, mostra-se, de forma similar, que $\Gamma$ é uma contração. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, $\Gamma$ possui um único ponto fixo na bola $B_R(0) \subset F$.

A unicidade é provada de maneira usual, considerando duas soluções $U$ e $V$ com dado inicial $U_0$ e aplicando o Lema de Gronwall. Como os argumentos usados para provar que $U = V$ são análogos aos que acabamos de usar, omitiremos a demonstração. ■

Agora, estamos prontos para provar o Teorema Central deste trabalho apresentado na Introdução. Vamos enunciá-lo novamente para facilitar a leitura.

**Teorema Principal:** *Assuma que* $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ *e* $\alpha_2 = 1$. *Então, existem constantes* $\rho > 0$, $C > 0$ *e* $\mu > 0$, *tais que, para quaisquer* $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, *com* $\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0} \leq \rho$, *o sistema* (3.1) - (3.3) *admite uma única solução*

$$(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; X_0) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; X_1) \cap L^2(0,1; X_1),$$

*que satisfaz*

$$\begin{aligned} \|(\eta, \omega)(t)\|_{X_0} &\leq Ce^{-\mu t}\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}, \ \ \forall t \geq 0, && (5)\\ \|(\eta, \omega)(t)\|_{X_1} &\leq C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}, \ \ \forall t > 0, \ \ \forall \alpha \in (0, \mu). && (6) \end{aligned}$$

**Demonstração:** Observe que fazendo $T = 1$ na demonstração do Teorema 3.0.10, obtemos, por (3.5) e pela Afirmação 3, que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} + CK\int_0^1 \|U\|_{X_1}^2\, dt.$$

Logo, tomando $R := 2\|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} > 0$ e $\rho_1 > 0$, tal que $\|U_0\|_{X_0} \leq \rho_1$, temos que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \frac{R}{2} + CKR^2,$$

pois estamos supondo que $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$. Note que, por (3.14), temos $R \leq \bar{C}\|U_0\|_{X_0}$, donde $R^2 \leq \bar{C}\|U_0\|_{X_0}R$. Assim,

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \frac{R}{2} + CK\bar{C}\|U_0\|_{X_0}R \leq \left(\frac{1}{2} + C\bar{C}K\rho_1\right)R,$$

e, então, tomando $\rho_1 > 0$ de tal maneira que $\rho_1 \leq \dfrac{1}{2C\bar{C}K}$, temos que $\Gamma$ é uma aplicação da bola $B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$ nela mesma. Vamos mostrar que $\Gamma$ é uma contração. De fato, sejam $U \,\mathrm{e}\, V \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$. De forma análoga à demonstração do Teorema 3.0.10, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} &\leq C\|N(U) - N(V)\|_{L^1(0,1;X_0)} \\
&\leq CK\int_0^1 (\|U\|_{X_1} + \|V\|_{X_1})\|U - V\|_{X_1}\, ds \\
&\leq 2RCK\int_0^1 \|U - V\|_{X_1}\, ds \\
&\leq 2RCK\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq 2RCK\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}.$$

Logo, como $R \leq \bar{C}\|U_0\|_{X_0}$, temos que

$$\|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq 2\bar{C}CK\|U_0\|_{X_0}\|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}.$$

Assim, tomando $\rho_2 > 0$ de tal forma que $\rho_2 \leq \dfrac{1}{2\bar{C}CK}$, obtemos que se $\|U_0\|_{X_0} \leq \rho$, com $\rho := \min\{\rho_1, \rho_2\}$, então $\Gamma$ é uma contração da bola $B_R(0)$ nela mesma e, então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, a equação integral (3.4) possui uma única solução $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, onde $R = 2\|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)}$. Em particular, existe $t_0 \in (0,1)$, tal que $\|U(t_0)\|_{X_1} \leq R$. Se, além disso, tivermos que $R \leq r_0$, então, pelo Teorema 3.0.12, $U(\cdot)$ pode ser estendida a $\mathbb{R}^+$ como solução de

(3.1) - (3.3). Além disso, obtemos que

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_1} &\leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\|U(t_0)\|_{X_1} \\ &\leq C_1 \bar{C} e^{\mu_0} e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}, \ \ \forall t \geq t_0 \ \text{ e } \forall \mu \in (0,\mu_0). \end{aligned}$$

Vamos provar (5). Observe que se $t > 1$, então, em particular, $t > t_0$ e como $[H^1(I)]^2 \hookrightarrow [L^2(I)]^2$, temos que existe $C_I > 0$, tal que

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq C_I \|U(t)\|_{X_1} \leq C_I C_1 \bar{C} e^{\mu_0} e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0},$$

ou seja, se $C := C_I C_1 \bar{C} e^{\mu_0}$, então

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq C e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}, \ \ \forall t > 1.$$

Agora, se $0 \leq t \leq 1$, por (3.5) e pela Afirmação 3, temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_0} &\leq \|U\|_{C([0,1];X_0)} \\ &\leq \|U\|_{C([0,1];X_0)} + \|(\eta,\omega)\|_{L^2(0,T;X_1)} \\ &\leq C\|U_0\|_{X_0} + C\int_0^1 \|N(U(t))\|_{X_0}\,dt \\ &\leq C\|U_0\|_{X_0} + CK\|U\|^2_{L^2(0,1;X_1)}. \end{aligned}$$

Como $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, com $R \leq \bar{C}\|U_0\|_{X_0}$, temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_0} &\leq C\|U_0\|_{X_0} + CK\bar{C}\|U_0\|_{X_0} R \\ &= (C + CK\bar{C}R)\|U_0\|_{X_0} \\ &= (C + CK\bar{C}R)e^{\mu_0 t} e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_0} \\ &\leq (C + CK\bar{C}R)e^{\mu_0} e^{-\mu_0 t}\|U_0\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Logo, se $\tilde{C} := (C + CK\bar{C}R)e^{\mu_0}$, então

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq \tilde{C} e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}, \ \ \forall\ t \in [0,1], \ \ \forall\ \mu \in (0,\mu_0).$$

Vamos mostrar (6).

Se $0 < t \leq 1$, então, como

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds,$$

temos, pelo Lema 3.0.11,

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + \left\| \int_0^t S(t-s)N(U(s))\,ds \right\|_{X_1} \\
&\leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + C\int_0^t \|N(U(s))\|_{X_0}\,ds \\
&\leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + CK\int_0^1 \|U\|_{X_1}^2\,ds \\
&= \|S(t)U_0\|_{X_1} + CK\|U\|_{L^2(0,1;X_1)}^2 \\
&\leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + CKR^2 \\
&\leq \bar{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + CK\tilde{C}\|U_0\|_{X_0}R \\
&= \bar{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + CK\tilde{C}e^{\mu t}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\|U_0\|_{X_0}R \\
&\leq \bar{C}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} + \bar{\bar{C}}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0} \\
&\leq K\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \ \ \forall\ t \in (0,1] \ \text{ e } \ \mu \in (0,\mu_0),
\end{aligned}$$

onde $\bar{\bar{C}} = CK\tilde{C}e^{\mu_0}R$ e $K := \max\{\bar{C}, \bar{\bar{C}}\}$.

Agora, se $t > 1$, em particular, $t > t_0$ e, então, pela desigualdade acima, temos

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1\bar{C}e^{-\mu t}\|U_0\|_{X_0}.$$

Logo, se $0 < \alpha < \mu$, então como $t > 1$, obtemos que existe $C_2 > 0$, tal que

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{(\mu-\alpha)t}} \leq C_2,$$

donde,

$$e^{-\mu t} \leq C_2\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}.$$

Portanto,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1\bar{C}C_2\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0},$$

donde, se $C := C_1\bar{C}C_2 > 0$, então,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{X_0}, \ \ \forall t > 1 \text{ e } \alpha \in (0, \mu),$$

o que prova o Teorema Principal deste trabalho. ■

# Referências Bibliográficas

[1] R. A. ADAMS AND J. J. F. FOURNIER, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Series; Elsevier, 140, (2002).

[2] G. BACHMAN AND L. NARICI, *Functional Analysis*, Academic Press Inc., (1972).

[3] J. M. BALL, *Strongly continuos semigroups, weak solutions and variations of the constants formula*, Proceedings of the American Mathematical Society, 63 (1977), 370 - 373.

[4] E. BISOGNIN, V. BISOGNIN AND G. P. MENZALA, *Exponential stabilization of a Korteweg-de Vries equations with localized damping*, Advances in Differential Equations, 8 (2003), 443 - 469.

[5] J. L. BONA, M. CHEN AND J.-C. SAUT, *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media I : Derivation and the linear theory*, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), 283-318.

[6] J. L. BONA, M. CHEN AND J. C. SAUT, *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II : The nonlinear theory*, Nonlinearity, 17 (2004), 925-952.

[7] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, MASSON, Paris, (1983).

[8] E. CERPA AND E. CRÉPEAU, *Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg-de Vries equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, 11 (2009), 655-668.

[9] E. CERPA AND E. CRÉPEAU, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire, 26 (2009), 457-475.

[10] G. B. FOLLAND, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley - Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, (1999).

[11] A. M. GOMES, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, 2° Edição, Rio de Janeiro, UFRJ - IM, (2005).

[12] S. KESAVAN, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Easterm Limited, (1989).

[13] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, pertubations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, in Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*, vol. 8, Masson, Paris, 1988, Contrôllabilité exacte [Exact controllability], com apêndices por E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau e J. Rauch.

[14] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[15] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Dunod, Paris, (1968).

[16] L. A. Medeiros e M. M. Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, 1° Edição, IM- UFRJ, (2011).

[17] L. A. Medeiros e M. M. Miranda, *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, IM - UFRJ, (2000).

[18] S. Micu, J. H. Ortega and A. F. Pazoto, *On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations*, Communications in Contemporary Mathematics, 5 (2009), 799-827.

[19] S. Micu, J. Ortega, L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Control and stabilization of a family of Boussinesq systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 24 (2009), 273-313.

[20] G. Perla Menzala, C. F. Vasconsellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quart. Appl. Math., 60 (2002), 111-129.

[21] A. F. Pazoto, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11 (2005), 473-486 (eletronic).

[22] A. F. Pazoto and L. Rosier, *Stabilization of a Boussinesq system of KdV-KdV type*, Systems and Control Letters, 57 (2008), 595-601.

[23] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).

[24] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2 (1997), 33-55.

[25] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, (1976).

[26] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, (1971).

[27] R. Temam, *Navier - Stokes equations. Theory and Numerical Analysis*, Third Edition, Studies in Mathematics and its Applications, 2, North- Holland Publishing Co., Amsterdam, (1984).